1. (2,5 puntos) Sea X un conjunto no vacío. Decimos que una colección $\mathcal{F}$ de funciones en X con valores reales es una CP-*álgebra* si:

- las funciones constantes están en $\mathcal{F}$;
- $f+g$, fg y cf están en $\mathcal{F}$ si $f, g \in \mathcal{F}$, $c \in \mathbb{R}$;
- $f \in \mathcal{F}$ si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in X$ con $f_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Demostrar que si $\mathcal{F}$ es una CP-álgebra, entonces el conjunto $\mathcal{A} = \{A \subset X : \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}\}$ es una σ-álgebra en X.

Indicación: En lugar de demostrar que $\mathcal{A}$ es cerrada para uniones numerables quizá te convenga demostrar que es cerrada para intersecciones numerables.

b) ¿Es cierto que para cualquier σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X el conjunto de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas y $\mathcal{A}$-medibles es una CP-álgebra?

---

2. (2,5 puntos) Consideramos el espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada, medible y continua en 1. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(-n,n)} f\Big(1 + \frac{x}{n^2}\Big) g(x)\, \mathrm{d}m(x)$$

existe y determinar su valor.

---

3. (2,5 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}$. Partiendo del espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, formamos el espacio de medida producto $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}\otimes\mathcal{M}, m\otimes m)$.

a) ¿Es f integrable respecto de la medida $m\otimes m$ en una semibanda $[a,b]\times[0,\infty)$ (donde $0 \le a < b$)? Considerar por separado los casos $a = 0$ y $a > 0$.

b) Demostrar la igualdad $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ay} - \mathrm{e}^{-by}}{y}\, \mathrm{d}y = \log b - \log a, \quad 0 < a < b.$

(Recordamos que toda función continua en $[a,b]\times[0,\infty)$ es medible respecto de la medida producto $m \otimes m$.)

---

4. (2,5 puntos) Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de medidas finitas no triviales en $\mathcal{A}$. Demostrar que existe una medida finita λ en X, definida sobre la misma σ-álgebra $\mathcal{A}$, tal que cada una de las medidas μ_n es absolutamente continua respecto de λ, $\mu_n \ll \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Indicación: Tomar $\lambda(E) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n(E)$, eligiendo las constantes $c_n > 0$ de forma adecuada.