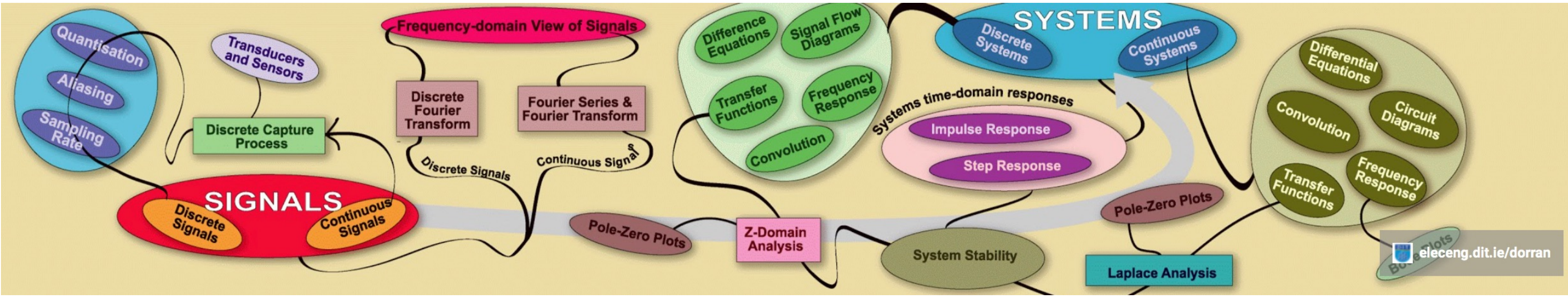


tiré de la chaîne youtube de David Dorran

Automatique

Modélisation des systèmes

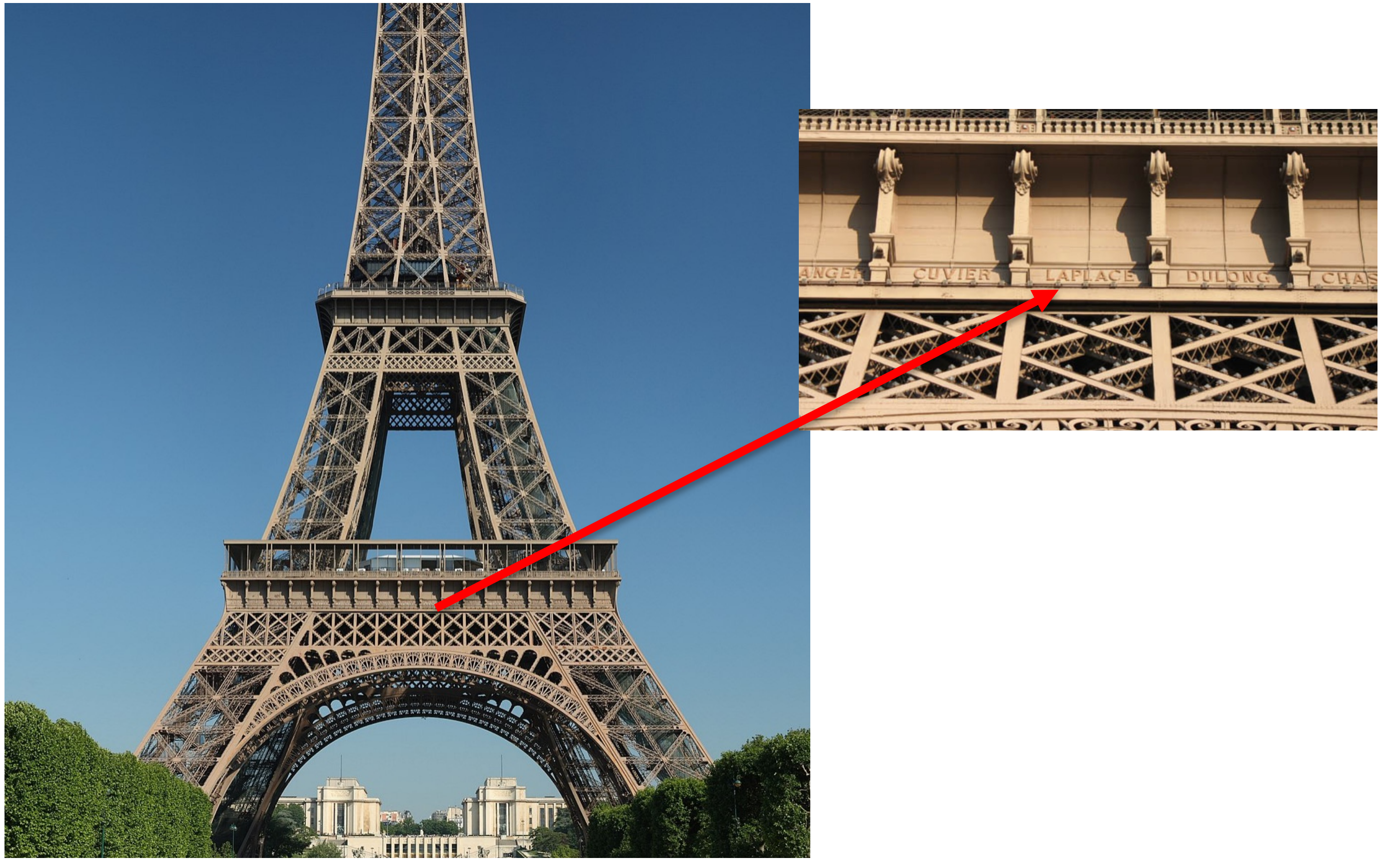
Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Version du 14 septembre 2023

Qui suis-je ?

Mon nom est gravé en lettres dorées sur la tour Eiffel ?



Laplace est l'un des 72 scientifiques, ingénieurs ou industriels français dont Gustave Eiffel a fait inscrire les noms sur la tour, parce qu'ils ont honoré la France de 1789 à 1889

fr.wikipedia.org/wiki/Liste_des_72_noms_de_savants_inscrits_sur_la_tour_Eiffel

Plan du cours

① *Introduction à l'Automatique* - Modélisation des systèmes

- Modèles de systèmes linéaires et invariants dans le temps
- Transformée de Laplace – Rappels brefs
- Réponses des systèmes linéaires
- Fonction de transfert
- Algèbre des schémas-blocs
- Linéarisation

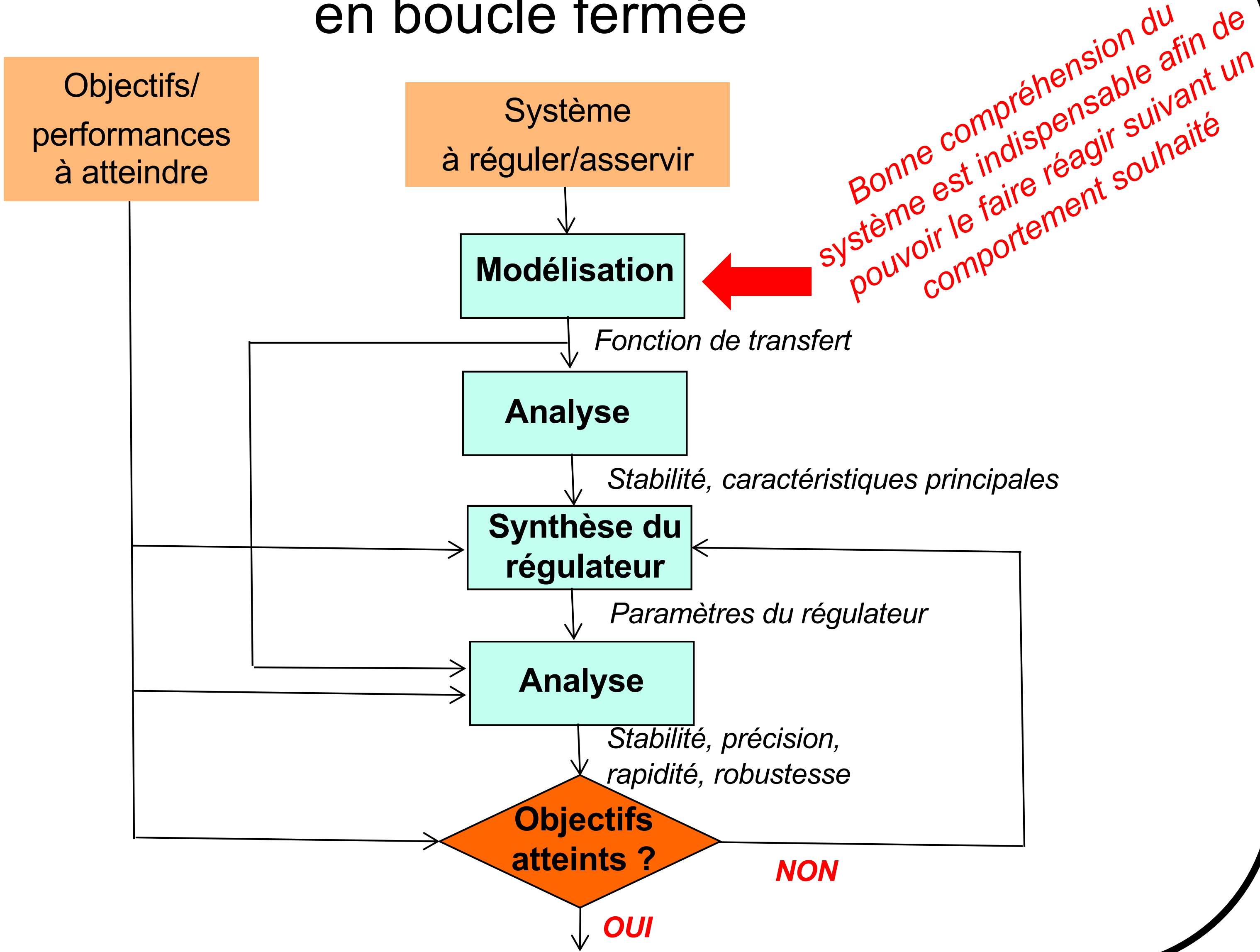
② Analyse temporelle des systèmes

③ Stabilité des systèmes

④ Systèmes bouclés : commande, stabilité et performances

⑤ Correcteurs standards et leurs réglages

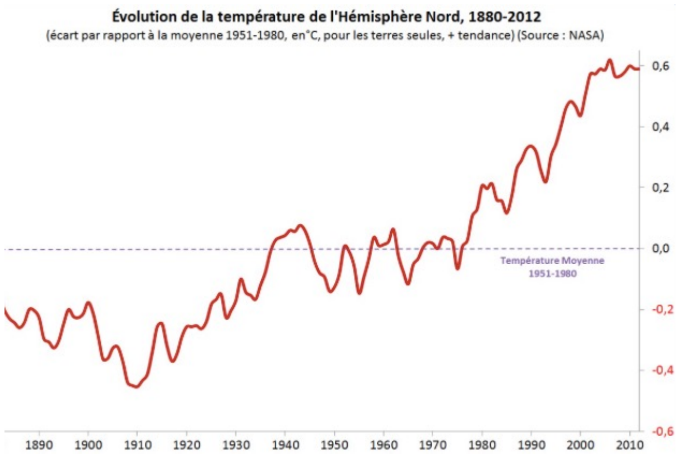
Etapes de conception d'une commande en boucle fermée



Définition - ***Signal***

- ***Un signal est la grandeur physique porteuse d'une information***

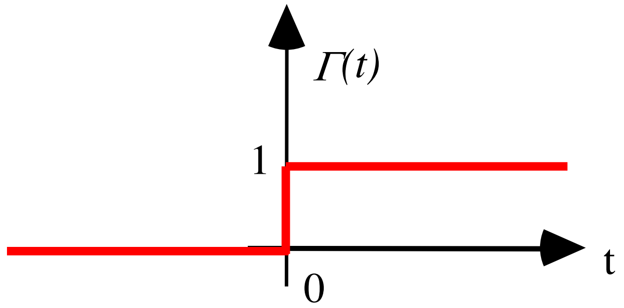
Exemples : position, vitesse, température, débit …



Quelques signaux importants

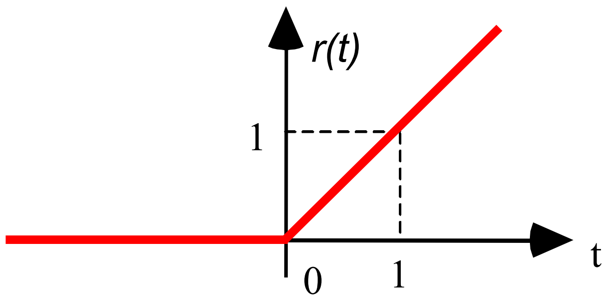
- **L'échelon unité**

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



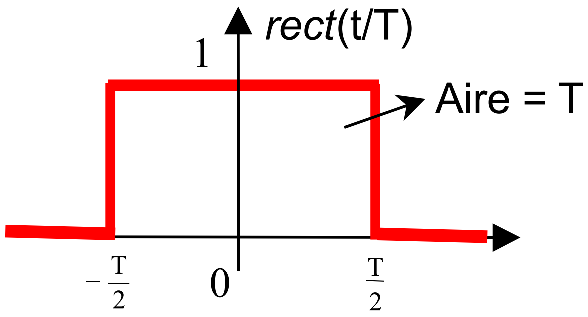
- **La rampe unitaire**

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



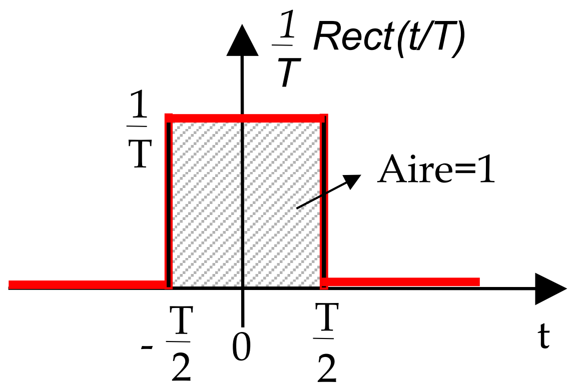
- **La fenêtre rectangulaire**

$$rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \forall & |t| \leq \dfrac{T}{2} \\ 0 & \forall & |t| > \dfrac{T}{2} \end{vmatrix}$$

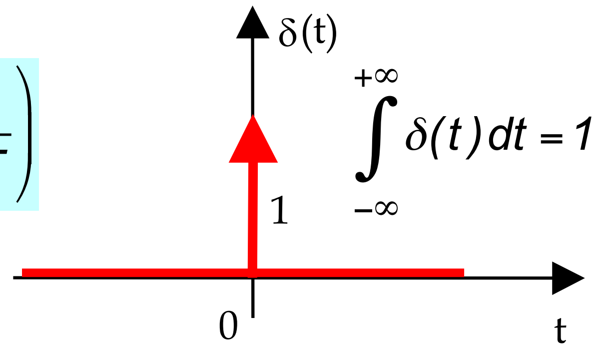


Quelques signaux importants

- **L'impulsion de Dirac[1]**



$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} Rect\left(\frac{t}{T}\right)$$



δ(t) n'est pas une fonction. C'est un "être" à valeur infinie en un point et à valeur nulle partout ailleurs

Par convention, la représentation graphique de *δ(t)* est une flèche verticale placée en *t=0* de hauteur proportionnelle à la constante de pondération ici égale à 1

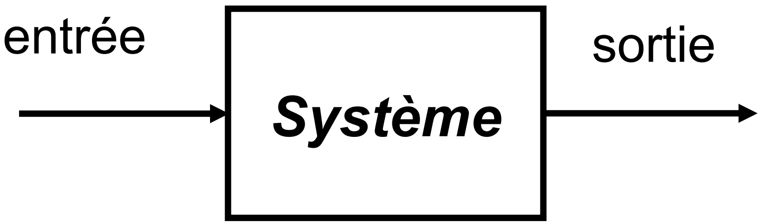
[1] *Paul Dirac (britannique, Prix Nobel de Physique en 1933)*

Définition - ***Système***

- ***C'est l'objet que l'on désire contrôler/stabiliser possédant un ou des signaux d'entrée et un ou des signaux de sortie***

  Exemples : bras de robot, drone, avion, …

- En automatique, on représente souvent un système par un schéma fonctionnel ou schéma-bloc



Définition - ***Système statique*** ***(ou instantanée)***

- ***C'est un système dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) à un instant donné ne dépend que de l'entrée à cet instant***

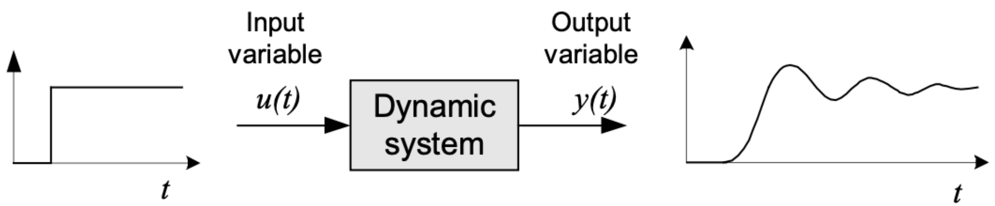
- Un système statique est dit ***sans mémoire*** car sa sortie *y(t) est* indépendante des valeurs antérieures de l'entrée $x(\tau)$ avec $\tau < t$, pour tout t

- L'étude d'un **système statique** nécessite la connaissance de :
  - sa loi d'évolution, qui prend la forme d'une ***équation algébrique*** du type ***y(t)=f [x(t)]***

- Exemples **:** $y(t)=R\,x(t)$ $\qquad y(t)=\dfrac{2x^2(t)}{5\cos\big(x(t)\big)+1}$

Définition - ***Système dynamique***

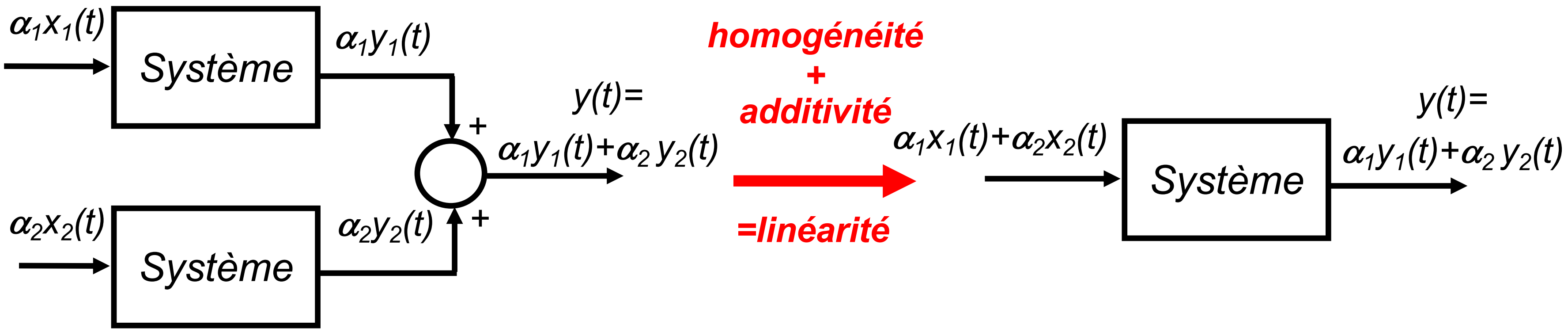
- ***C'est un système dont l'état évolue en fonction du temps***



  - Un système dynamique est dit ***à mémoire*** car sa sortie dépend de ses valeurs et de celles de l'entrée dans le passé
- L'étude d'un **système dynamique** nécessite la connaissance de :
  - sa loi d'évolution, qui prend la forme d'une ***équation différentielle***
  - son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant *t=0*
- Exemples
  - Bras de robot rigide $ml^2\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}+mgl\sin\theta(t)=u(t)\quad \theta(0)=15°;\dot{\theta}(0)=0$
  - circuit RC $RC\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)\qquad y(0)=0$

Propriété importante : *Linéarité*

- ***Un système est <u>linéaire</u>***
  - *S'il est **homogène et additif***
  - *Si pour n'importe quelle paire d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$, la somme des réponses à l'entrée $\alpha_1 x_1(t)$ et à l'entrée $\alpha_2 x_2(t)$ est égale à la réponse du système à $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$*

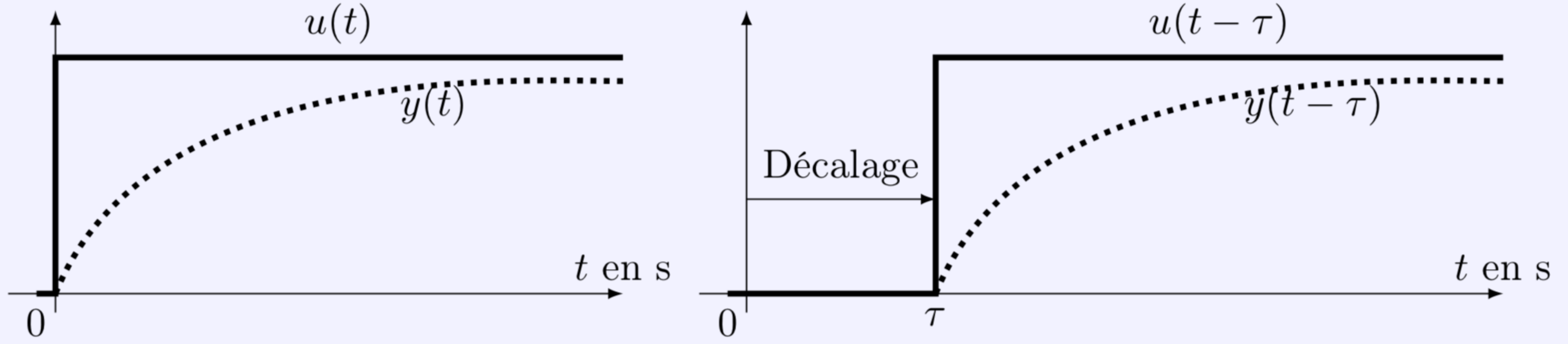


  - Si on sait calculer la réponse d'un système à des entrées simples, on pourra calculer la réponse à n'importe quelle combinaison linéaire de ces entrées simples

Propriété importante : *Invariance dans le temps*

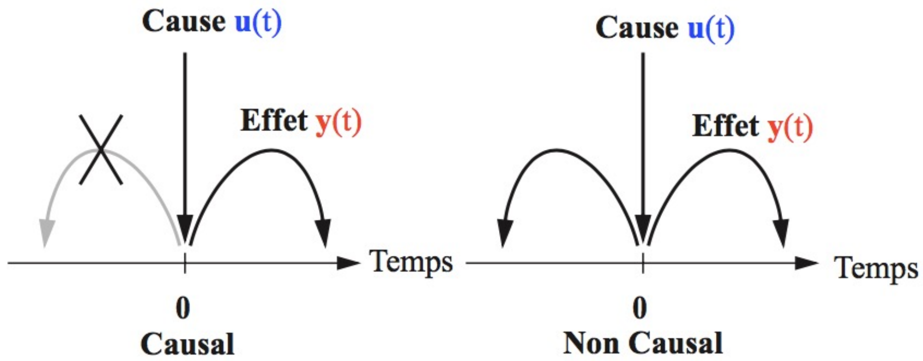
- Un système ***invariant dans le temps*** ***(ou stationnaire)*** a des caractéristiques qui ne varient pas dans le temps
  - *si on applique le signal u(t) à l'entrée du système et que l'on obtient y(t), alors pour tout décalage temporel τ, si on applique le signal u(t-τ) à l'entrée du système, on obtiendra y(t-τ)*

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t) \quad \Longrightarrow \quad u(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t-\tau)$$



Propriété importante : ***Causalité***

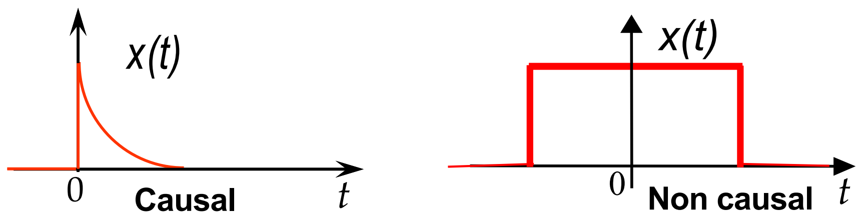
- **Un <u>système</u> est causal**
  - si l'effet (variation de la sortie) suit la cause (variation de l'entrée) dans le temps
  - La réaction du système ne peut précéder son excitation



  - Tous les systèmes physiques réels sont causaux

- **Un <u>signal</u> est causal**

$$si\ x(t) = 0\ \forall\ t < 0$$



Système dynamique linéaire invariant dans le temps *(LTI)* et causal

- Un système dynamique d'entrée *x(t)* et de sortie *y(t)* décrit par une *équation différentielle linéaire à coefficients constants*

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \qquad n \geq m$$

est ***linéaire, invariant dans le temps (LTI)*** et ***causal***

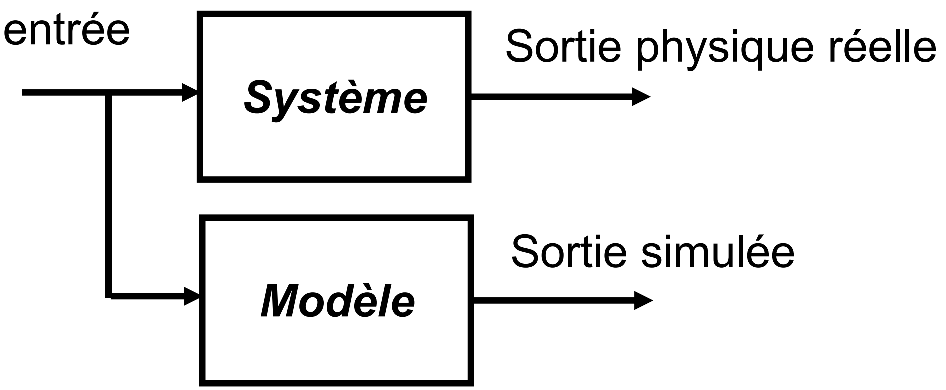
« Linear systems are important because we can solve them »,
Richard Feynman (américain, Prix Nobel de Physique en 1965)

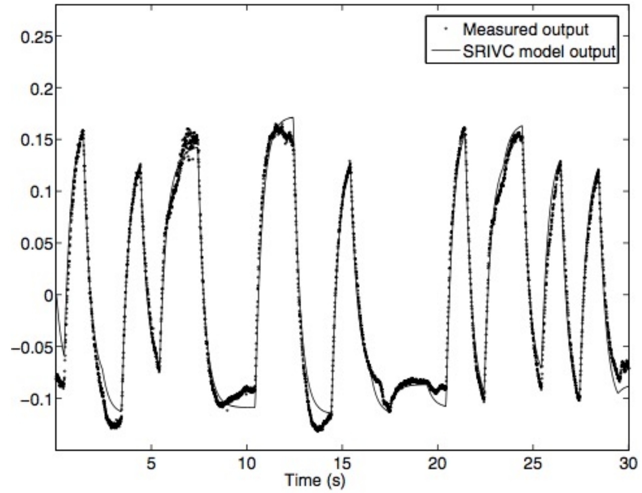
Dans la suite du cours, on supposera que les systèmes <u>dynamiques</u> sont <u>linéaires</u>, <u>invariants</u> et <u>causals</u>

Visionner la vidéo de Brian Douglas : Control Systems Lectures-LTI Systems

Définition - ***Modèle***

- ***C'est un ensemble de relations mathématiques entre le ou les signaux d'entrée et le ou les signaux de sortie d'un système***
  - Il doit approcher le comportement réel du système





  - Sa complexité/précision dépend de son utilisation

Visionner la vidéo de Brian Douglas :

Control Systems Lectures-Modeling Physical Systems, An Overview

Types de modèles & d'approches de modélisation

Système physique

Modélisation Physique

Apprentissage de modèles = *Identification des systèmes*

Modèle de connaissance

Modèle de comportement (***dominant***)

Déterminé analytiquement à partir des lois de la Physique

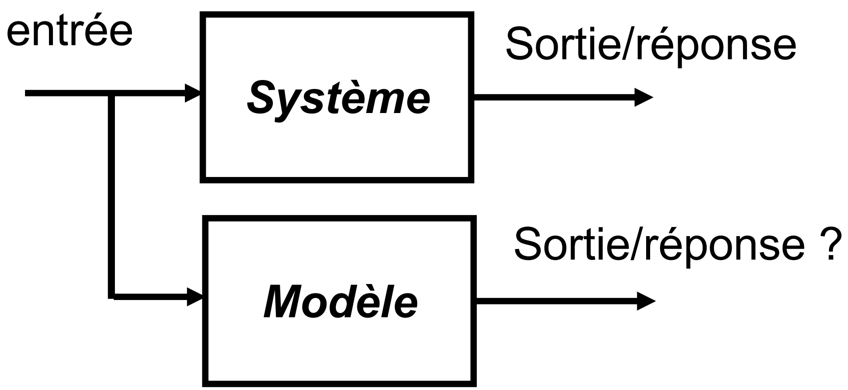
Suppose de nombreuses connaissances : en thermique, hydraulique, mécanique, électronique,…

Déterminé expérimentalement à partir des données d'entrée/sortie

Compétences de l'équipe de recherche du CRAN hébergée à Polytech Nancy

Peu de pré-requis en modélisation physique
Exploitation de données expérimentales

Réponse temporelle d'un système – Solution 1



– On a déterminé un modèle de connaissance qui prend la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \qquad n \geq m$$

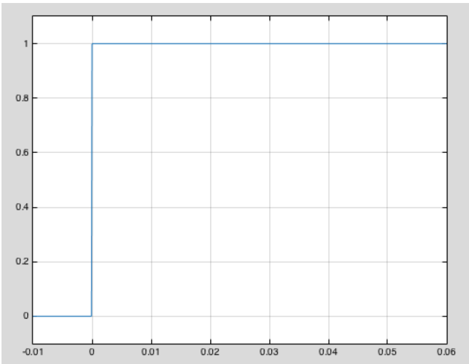
Comment exploiter cette équation différentielle pour déterminer la réponse à un signal d'entrée quelconque ?

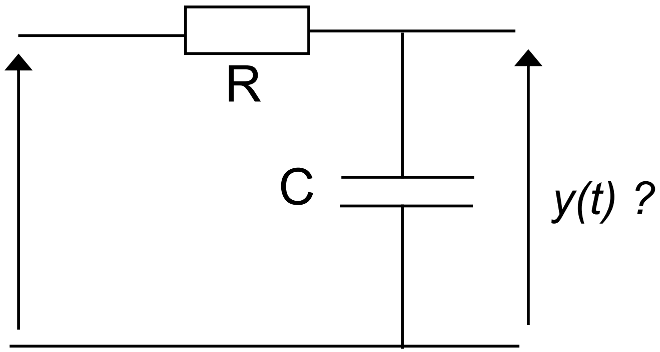
Exemple : réponse indicielle d’un filtre RC

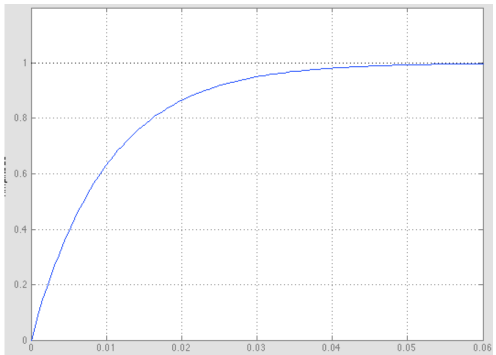
On peut facilement déterminer un modèle de connaissance qui prend la forme d’une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t) \qquad x(t)=\Gamma(t)\ et\ y(0)=0$$

Solution 1 - Il faut résoudre son équation différentielle par les méthodes mathématiques classiques !

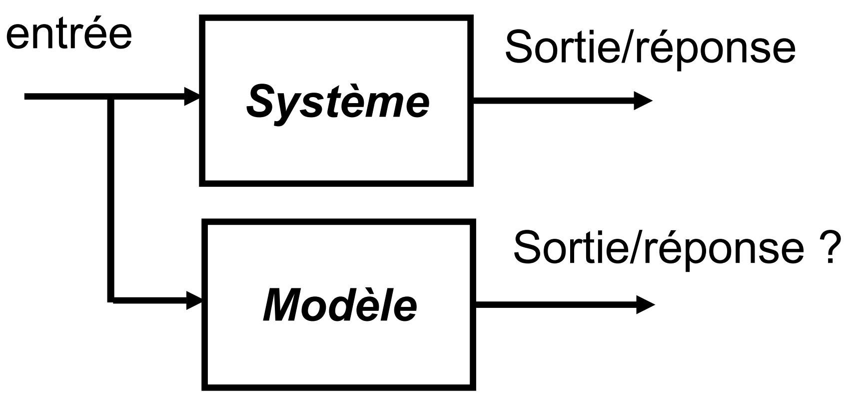




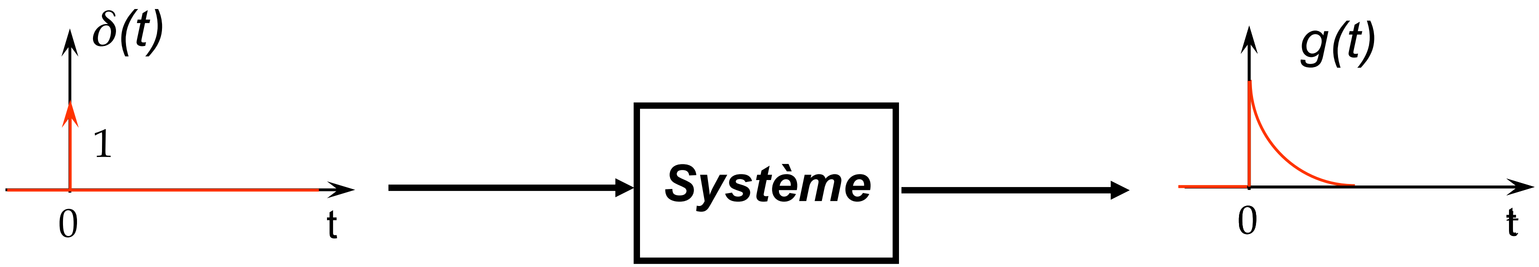


$$y(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)$$

Réponse temporelle d'un système – Solution 2



– Supposons qu'on ait déterminé ou mesuré la réponse du système à une impulsion de Dirac *(appelée réponse impulsionnelle g(t))*



Comment exploiter cette réponse impulsionnelle pour déterminer la réponse à un signal d'entrée quelconque ?

Réponse temporelle via le produit de convolution

- *La réponse d'un système LTI à toute entrée x(t) peut être calculée à l'aide du* ***produit de convolution (****noté *) entre la réponse impulsionnelle du système g(t)* et l'entrée *x(t), défini par :*

$$y(t) = g(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

  – Si le système est causal : *g(t)=0* pour tout *t < 0*

$$y(t) = g(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

  – *La relation entrée/sortie via le produit de convolution est cependant difficile à exploiter dans le domaine temporel car les calculs sont souvent complexes*

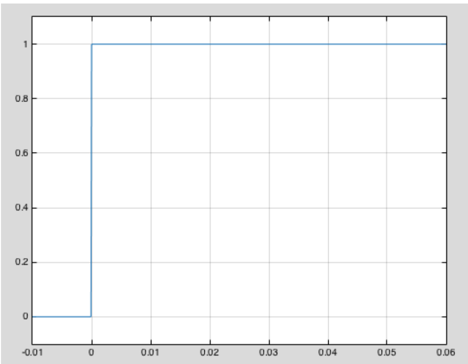
Exemple : réponse indicielle d'un filtre RC

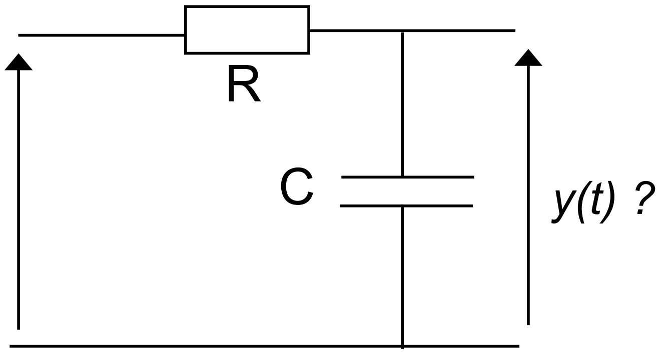
A partir de la réponse impulsionnelle du filtre $g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \Gamma(t)$

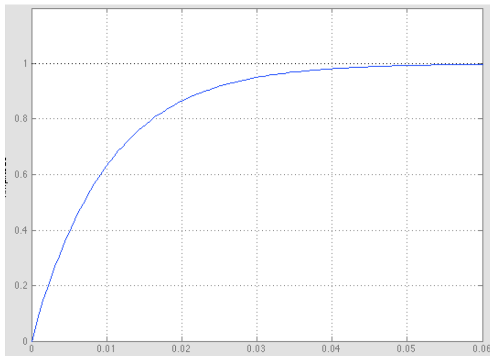
$e(t) = \Gamma(t)$
et $y(0) = 0$

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

Solution 2 - Il faut calculer un produit de convolution. *Calculs compliqués !*







$$y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \Gamma(t)$$

Résolution d'équations différentielles à l'aide de la transformée de Laplace

- Résoudre une équation différentielle d'ordre > à 2 à l'aide des méthodes mathématiques classiques est souvent compliquée

Solution 3 – Exploiter la transformée de Laplace (TL). *Calculs plus simples !*

Voir, si besoin, le rappel sur la transformée de Laplace et la décomposition en éléments simples sur le site web du cours

Pierre-Simon LAPLACE

- 23 mars 1749 - 5 mars 1827
- Grand scientifique français
- A profondément influencé les mathématiques, l'astronomie, la physique et la philosophie des sciences de son siècle
- ***La transformée qui porte son nom facilite grandement l'analyse des systèmes à temps continu***

Visionner la vidéo de Brian Douglas :

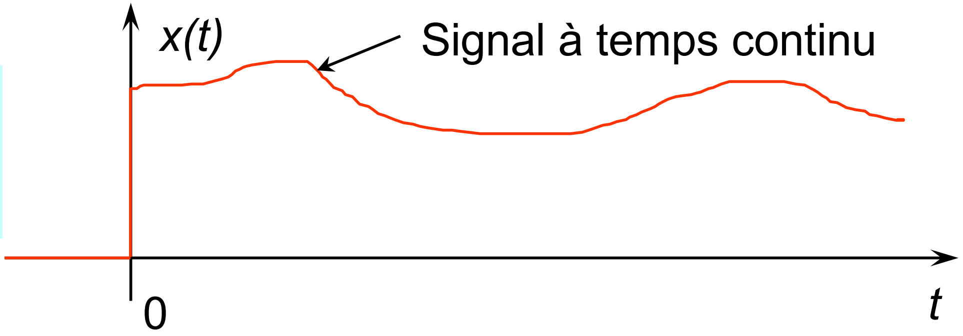
Control Systems Lectures-

The Laplace Transform and the Important Role it Plays

Définition

- Soit un signal à temps continu *x(t)* causal, la transformée de Laplace de *x(t)* est définie par :

$$\mathcal{L}\left(x(t)\right) = X\left(s\right) = \int_{0}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$



où

- s est la variable de Laplace (parfois notée p)
- s est complexe : $s = \alpha + j\omega$

- On dit que $X(s)$ est la transformée de Laplace du signal $x(t)$
- *Notation : la transformée de Laplace X(s) d'un signal x(t) s'écrit toujours en majuscule*

Remarque : les conditions de convergence de l'intégrale impropre ne seront pas précisées

POLYTECH NANCY

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Table de transformées de Laplace

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$\Gamma(t)$	$\frac{1}{s}$
$r(t)=t\ \Gamma(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\ \Gamma(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}\Gamma(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$t^n\ e^{-at}\Gamma(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

Table de transformées de Laplace

$x(t)$	$X(s)$
$\sin(\omega_o t)\,\Gamma(t)$	$\dfrac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$
$\cos(\omega_o t)\,\Gamma(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_o^2}$
$e^{-at}\sin(\omega_o t)\,\Gamma(t)$	$\dfrac{\omega_o}{(s+a)^2+\omega_o^2}$
$e^{-at}\cos(\omega_o t)\,\Gamma(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}$

Quelques propriétés importantes de la transformée de Laplace

- ***Linéarité***

$$\mathcal{L}\big(a\,x(t)\big) = a\,X(s)$$

$$\mathcal{L}\big(a\,x(t) + b\,y(t)\big) = a\,X(s) + b\,Y(s)$$

- ***Dérivation par rapport au temps***

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{(1)}(0) - \ldots - s x^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right) = s^2 X(s) - s x(0) - \dot{x}(0)$$

- ***Théorème du retard***

$$\mathcal{L}\big(x(t-t_0)\big) = e^{-st_0}\,X(s)$$

Quelques propriétés importantes de la transformée de Laplace

- ***Produit de convolution***

$$\mathrm{L}\big(x(t)*y(t)\big) = X(s)\times Y(s)$$

$$x(t)*y(t)=\int_0^{+\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$$

- ***Théorème de la valeur initiale***

$$x(0^+) = \lim_{s\to+\infty} sX(s)$$

- ***Théorème de la valeur finale***

$$\lim_{t\to+\infty}\big(x(t)\big) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Si la limite du signal existe

$$\text{Exemple :}\quad x(t)=e^{-2t}\,\Gamma(t) \qquad X(s)=\frac{1}{s+2}$$

$$\text{Contre}-\text{exemple :}\quad x(t)=\cos\big(\omega_o t\big)\,\Gamma(t) \qquad X(s)=\frac{s}{s^2+\omega_o^2}$$

Transformée de Laplace inverse

- Le problème consiste à retrouver le signal *x(t)* à partir de *X(s)*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) = x(t)$$

- *Utilisation de la définition à partir de l'intégrale*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) = x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

Formule compliquée ! On évite de l'utiliser

- *La transformée de Laplace inverse est un opérateur* ***linéaire***

On va exploiter cette propriété

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(a\,X(s) + b\,Y(s)\right) &= a\,\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) + b\,\mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right)\\ &= a\,x(t) + b\,y(t)\end{aligned}$$

Rappels : décomposition en éléments simples

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i} \qquad avec \quad n>m$$

- Cas où les n racines du dénominateur de $Y(s)$ sont **toutes distinctes**

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-s_n}$$

$$A_i=\lim_{s\to s_i}\left[\left(s-s_i\right)Y(s)\right] \qquad i=1,2,\cdots,n$$

Décomposition en éléments simples
Exemple

Décomposer en éléments simples *Y(s)*

$$Y(s) = \frac{2}{(s+3)(s+5)} \quad = \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+5}$$

$$A_1 = \lim_{s \to -3} (s+3)Y(s) = \lim_{s \to -3} \frac{2(s+3)}{(s+3)(s+5)} = \lim_{s \to -3} \frac{2}{(s+5)} = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \to -5} (s+5)Y(s) = \lim_{s \to -5} \frac{2(s+5)}{(s+3)(s+5)} = \lim_{s \to -5} \frac{2}{(s+3)} = -1$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{2}{(s+3)(s+5)} = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+5}}$$

Résolution d'équations différentielles à l'aide de la transformée de Laplace

La ***procédure de résolution*** est la suivante :

1. Appliquer la transformée de Laplace (TL) aux 2 membres de l'équation différentielle en *y(t) en tenant compte des conditions initiales des signaux*
2. Calculer *Y(s)* en utilisant les propriétés et la table de TL
3. Décomposer *Y(s)* en éléments simples
4. Utiliser la table de transformées pour obtenir *y(t)* par transformée de Laplace inverse (en exploitant la propriété de linéarité de L^{-1})

Résolution d'équations différentielles à l'aide de la transformée de Laplace

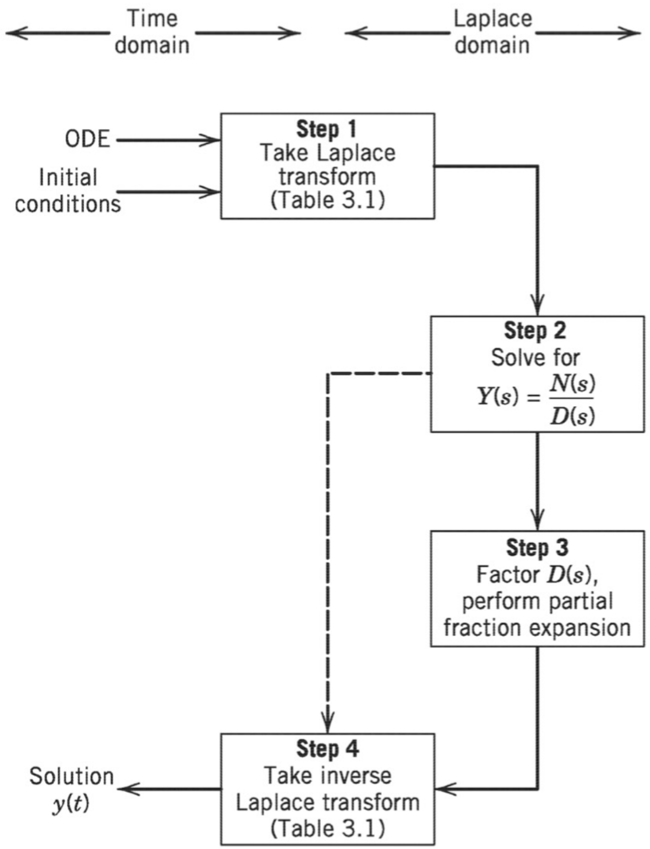
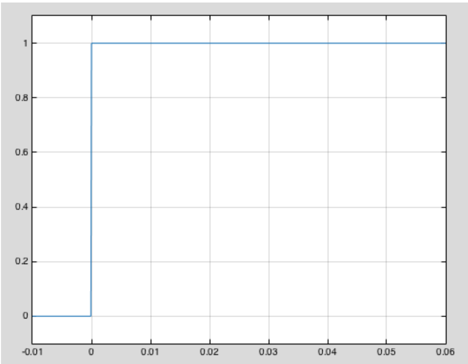
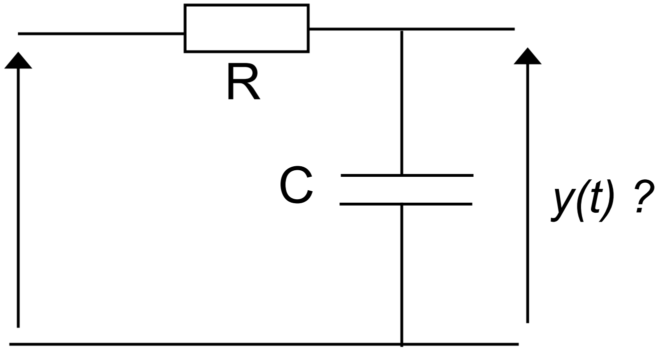


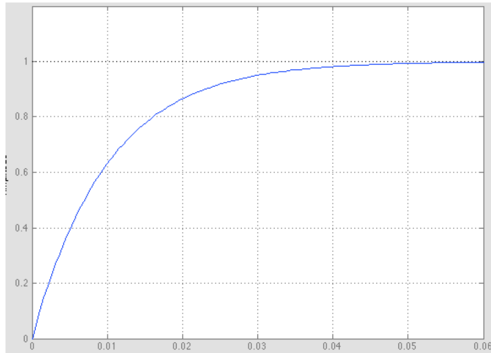
Figure 1.3: The general procedure for solving an ordinary differential equation using the Laplace transform (*Reference to Table 3.1 above is the table of Laplace transform*).

Ex : calcul de la réponse indicielle d'un circuit RC

A partir de l'équation différentielle $RC\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$ $\quad x(t)=\Gamma(t)$ et $y(0)=0$







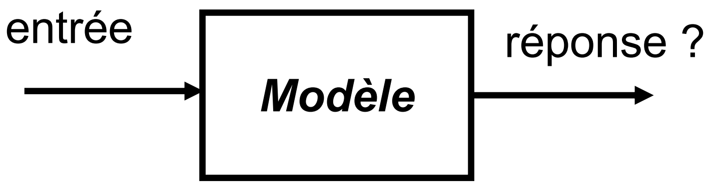
$$RC\,L\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)+L\big(y(t)\big)=L\big(x(t)\big)$$

$$RC\big(sY(s)-y(0)\big)+Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(RCs+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}$$

$$y(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)$$

Réponse temporelle d'un système – Bilan



– **Solution 1 –** A partir de son équation différentielle, il faut résoudre l'équation. *Calculs souvent compliqués !*

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t) \qquad \begin{array}{l} x(t)=\Gamma(t) \\ \text{et } y(0)=0 \end{array} \qquad y(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)$$

– **Solution 2 –** Connaissant sa réponse impulsionnelle, on peut calculer la réponse via le produit de convolution. *Calculs également compliqués !*

$$g(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\Gamma(t) \qquad \begin{array}{l} x(t)=\Gamma(t) \\ \text{et } y(0)=0 \end{array} \qquad y(t)=g(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \qquad y(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)$$

– **Solution 3 –** A partir de son équation différentielle, on peut exploiter la transformée de Laplace. *Calculs plus simples*

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t) \qquad \begin{array}{l} x(t)=\Gamma(t) \\ \text{et } y(0)=0 \end{array} \qquad Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \qquad y(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)$$

Fonction de transfert

- Définition : *c'est le rapport de la transformée de Laplace de la sortie Y(s) sur la transformée de Laplace de l'entrée X(s) lorsque les conditions initiales sont nulles*

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

lorsque les conditions initiales des signaux d'entrée/sortie sont nulles

- Remarque importante :

En Automatique continue, on représente souvent un système par sa fonction de transfert G(s)

Visionner la vidéo de Brian Douglas :
Control Systems Lectures-Transfer functions

Réponse impulsionnelle & fonction de transfert

- *Rappel 1* : la sortie *y(t)* d'un système s'écrit dans le domaine temporel comme le ***produit de convolution*** entre la réponse impulsionnelle *g(t)* et l'entrée *x(t)*

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

- En appliquant la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(g(t) * x(t)) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = G(s) \times X(s)$$

Rare en pratique car $g(t)$ inconnue

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \mathcal{L}(g(t)) \quad \text{lorsque les CI nulles}$$

La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle

(en supposant les CI nulles)

Equation différentielle & fonction de transfert

- *Rappel 2* : l'entrée et la sortie d'un système sont également reliées dans le domaine temporel par une équation différentielle

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

En appliquant la transformée de Laplace aux 2 membres et en utilisant :

$$\mathrm{L}\left(\frac{d^i x(t)}{dt^i}\right) = s^i X(s) \quad \text{en supposant les conditions initiales (CI) nulles}$$

$$\left(a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n\right) Y(s) = \left(b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m\right) X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n} \quad \text{lorsque les CI nulles}$$

Méthode habituelle

Connaissant l'équation différentielle d'un système, sa fonction de transfert est le rapport de la TL de la sortie et de la TL de l'entrée

(en supposant les CI nulles)

Fonction de transfert - Propriétés

- Ce concept de fonction de transfert ne s'applique qu'aux systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI)
- *G(s)* ne dépend que du système. Elle ne dépend ni de l'entrée, ni des conditions initiales des signaux d'E/S
- *La fonction de transfert d'un système s'écrit*
    - *souvent comme une **fonction rationnelle** : rapport de 2 polynômes*

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- *mais pas toujours !*
    - Ex : système intégrateur avec retard pur

$$\dot{y}(t) = x(t-\tau) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s}$$

Ordre d'un système

- Soit un système linéaire décrit par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- Définition
  - ***L'ordre n*** *d'un système est le degré le plus élevé du polynôme du dénominateur de G(s), le cas échéant après élimination des facteurs communs au numérateur et au dénominateur*
  - Exemples

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_o^2}; \quad n = 2 \qquad\qquad G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s} = \frac{1}{s+2}; \quad n = 1$$

Gain statique d'un système

- Soit un système linéaire décrit par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- Définition
  - ***Le gain statique*** *d'un système est la valeur de G(s) pour s=0*

$$K = \lim_{s \to 0} G(s)$$

  - Il est parfois utile de définir d'autres gains :
    - ***Gain en vitesse*** $K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$
    - ***Gain en accélération*** $K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$

Exemple

$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$K = 2$$

$$K_v = 0$$

$$K_a = 0$$

Pôles et zéros d'une fonction de transfert

- Soit une fonction de transfert *G(s)*

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+\dots+b_1 s+b_0}{s^n+\dots+a_1 s+a_0}=C\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

- Définitions
  - **_zéros z_j_** : racines du numérateur $N(s)=0$
  - **_pôles p_i_** : racines du dénominateur $D(s)=0$
  - On trace souvent le ***diagramme des pôles/zéros***
  - Ils peuvent être réels ou complexes
  - S'ils sont complexes, ils apparaissent en paires conjuguées
  - Exemple $G(s)=\frac{s}{s^2+\omega_o^2}=\frac{s}{(s+j\omega_o)(s-j\omega_o)}$

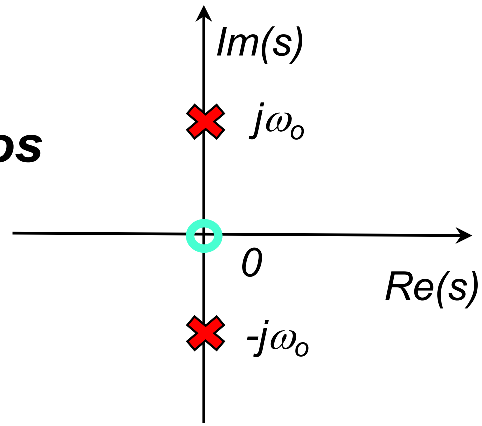
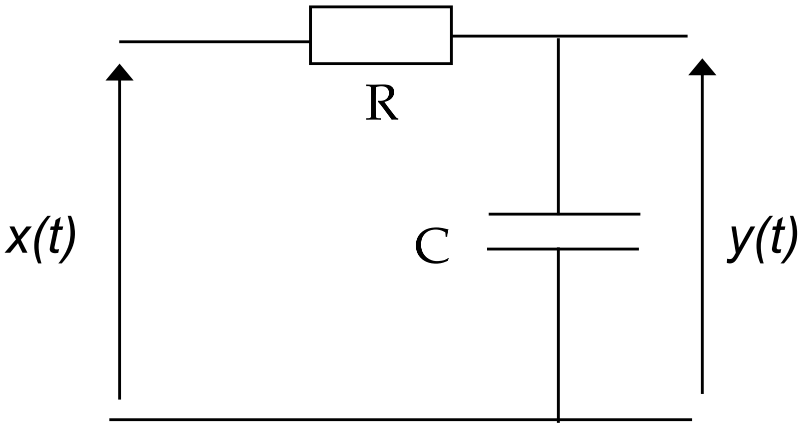


Diagramme des pôles/zéros

Fonction de transfert d'un circuit RC

Domaine temporel



$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

Domaine de Laplace

$$G(s)\ ?$$

$$RC\,L\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)+L\big(y(t)\big)=L\big(x(t)\big)$$

$$RC\big(sY(s)-y(0)\big)+Y(s)=X(s)$$

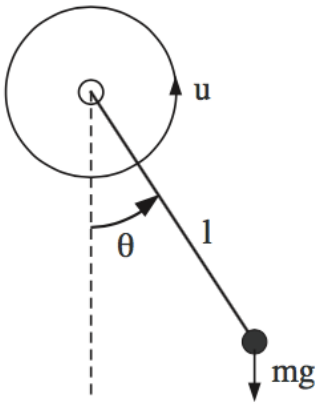
$$(RCs+1)Y(s)=X(s)\qquad y(0)=0$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{1+RC\,s}$$

$$n=1;\quad K=1;\quad p_1=-\frac{1}{RC}$$

Fonction de transfert d'un bras de robot rigide

Domaine temporel



$$ml^2\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+mgl\,\theta(t)=u(t)$$

Domaine de Laplace

G(s) ?

$$ml^2\,\mathcal{L}\left(\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\right)+mgl\mathcal{L}\left(\theta(t)\right)=\mathcal{L}\left(u(t)\right)$$

$$ml^2\left(s^2\Theta(s)\right)+mgl\Theta(s)=U(s)$$

$$\left(ml^2s^2+mgl\right)\Theta(s)=U(s)$$

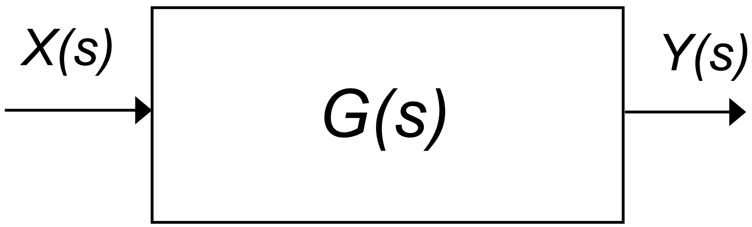
$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{ml^2s^2+mgl}$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{ml\left(ls^2+g\right)}}$$

$$n=2;\quad K=\frac{1}{mgl};\quad p_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Schéma-bloc ou schéma fonctionnel

*En **Automatique**, on représente un système par un schéma-bloc qui relie la transformée de Laplace de l'entrée X(s) à la transformée de Laplace de la sortie Y(s) via sa fonction de transfert G(s)*



Du schéma-bloc, on peut en déduire les relations

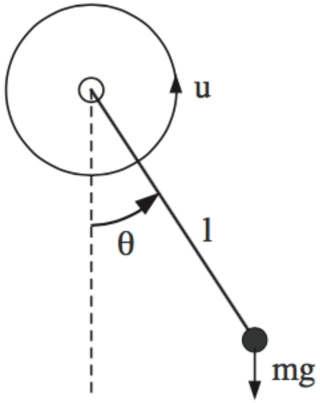
$$Y(s) = G(s)X(s)$$

ou

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

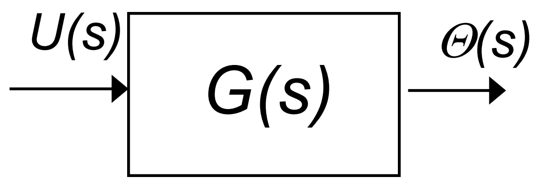
Représentation et modèle d'un bras de robot rigide en Automatique

Représentation et modèle en Physique



$$ml^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mgl\,\theta(t) = u(t)$$

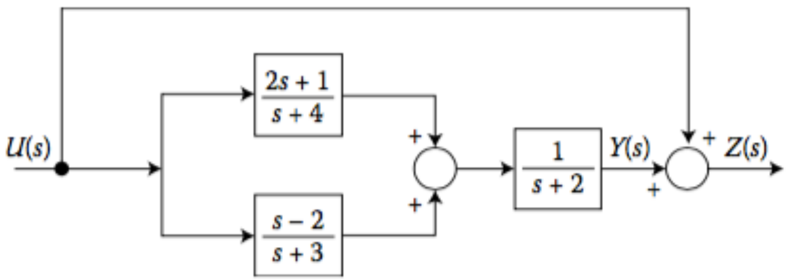
Représentation et modèle en Automatique

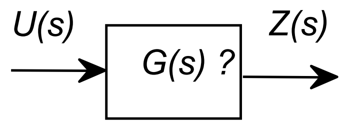


$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{ml\left(ls^2 + g\right)}$$

Algèbre des schéma-blocs

- Les systèmes automatiques sont souvent constitués de plusieurs fonctions de transfert interconnectées par des comparateurs ou sommateurs, des points de dérivation, des rétro-actions, …

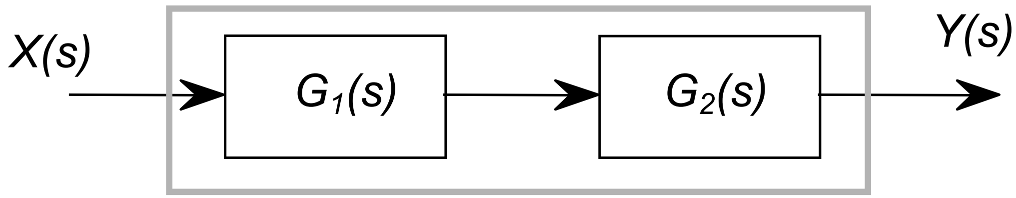


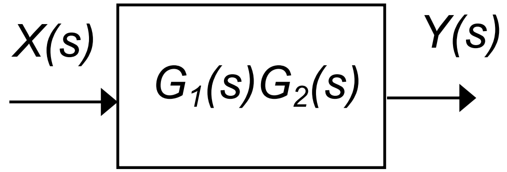


- Pour déterminer *G(s),* la fonction de transfert équivalente, on peut soit :
  - définir toutes les variables intermédiaires, écrire les équations liant ces variables, puis éliminer les variables intermédiaires pour calculer le rapport de la TL de la sortie et de la TL de l'entrée
  - ou simplifier pas à pas le schéma-bloc en utilisant les règles de l'algèbre des schémas-blocs

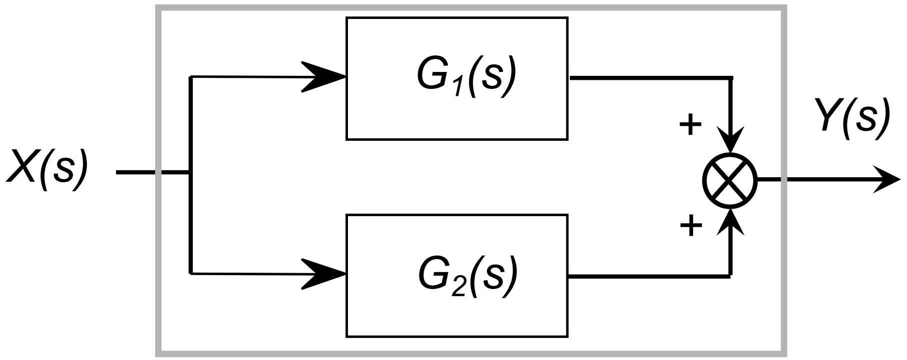
Algèbre des schéma-blocs

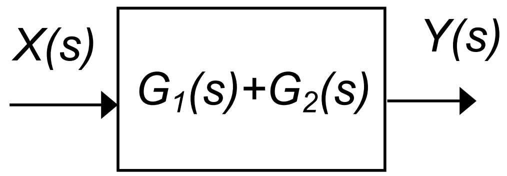
- Structure en série





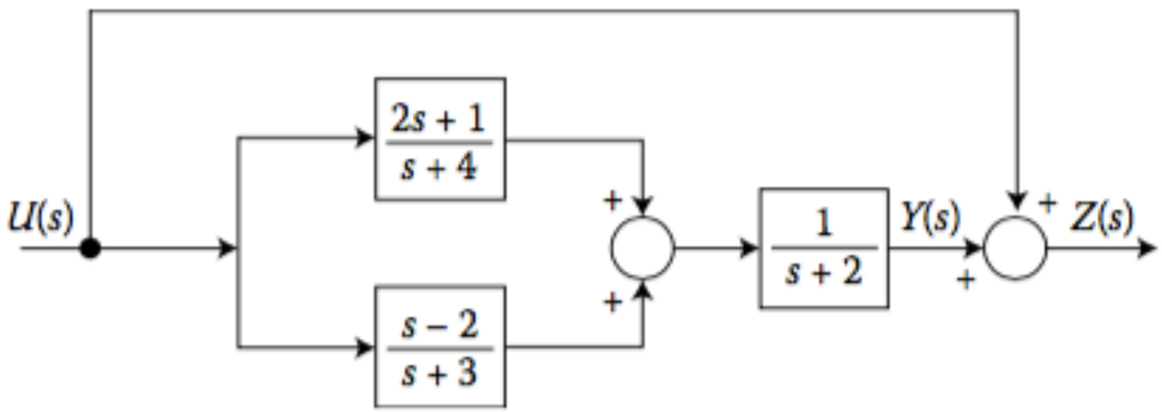
- Structure en parallèle

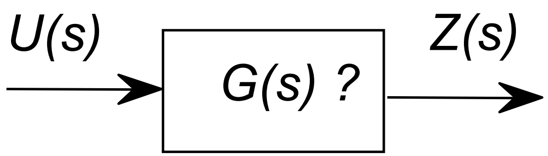




Simplification de schéma-blocs - Exemple

- Déterminer la fonction de transfert entre *U(s)* et *Z(s)*

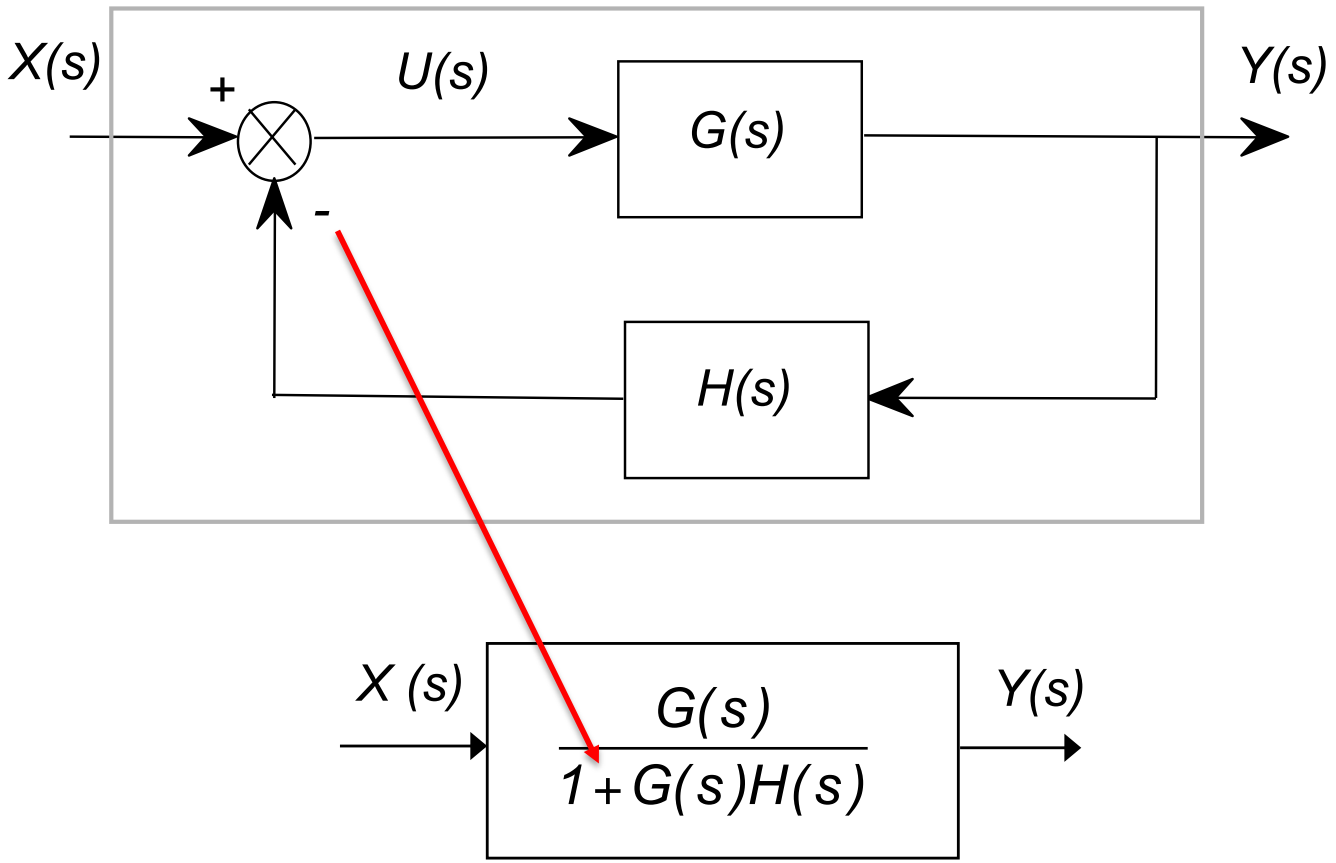




$$G(s) = \frac{s^3 + 12s^2 + 35s + 19}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

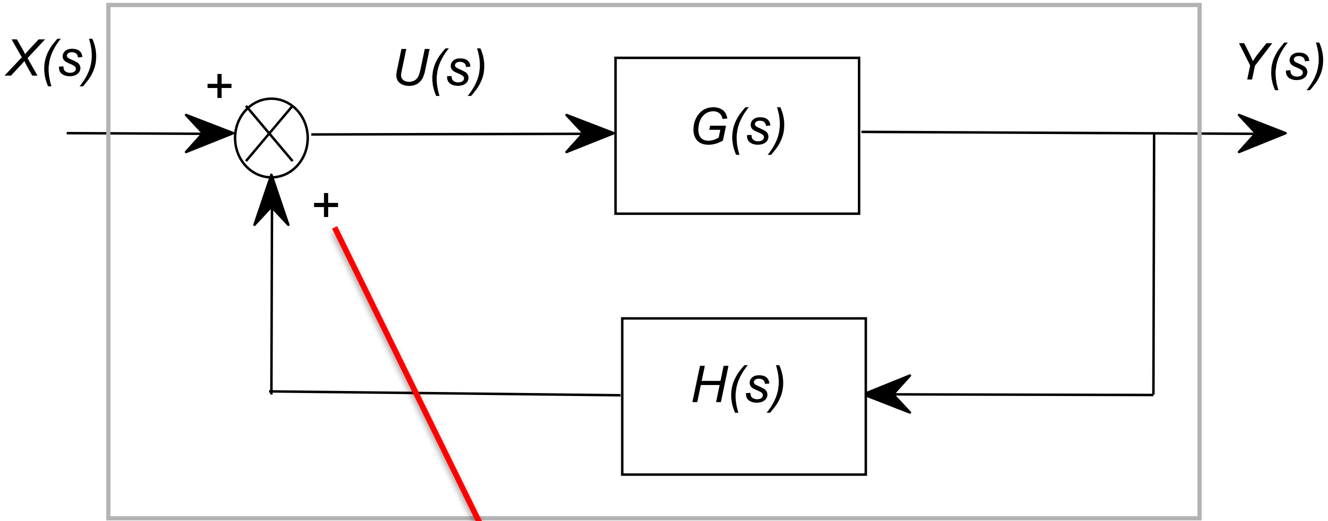
Algèbre des schéma-blocs (suite)

- Structure bouclée simple à retour ***négatif***



Algèbre des schéma-blocs (suite)

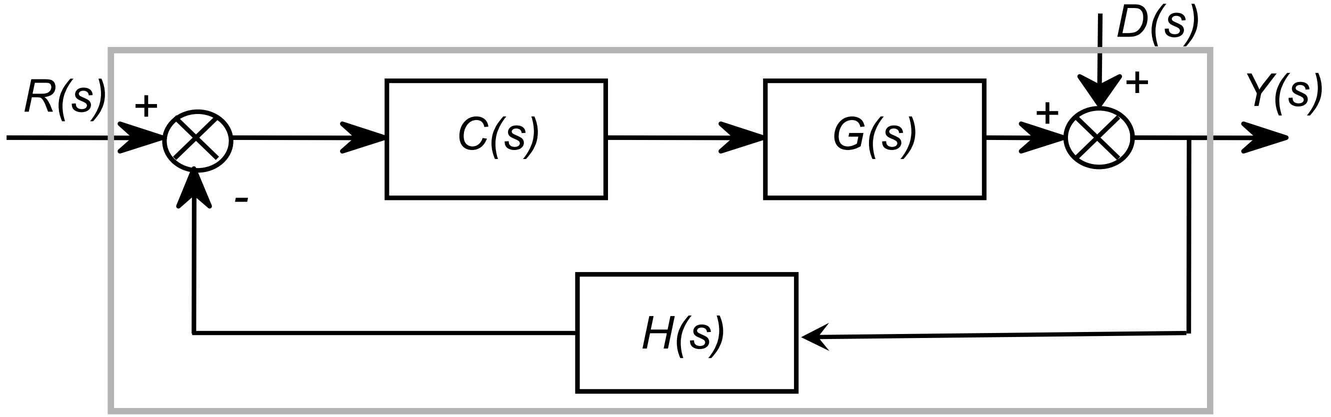
- Structure bouclée simple à retour ***positif***

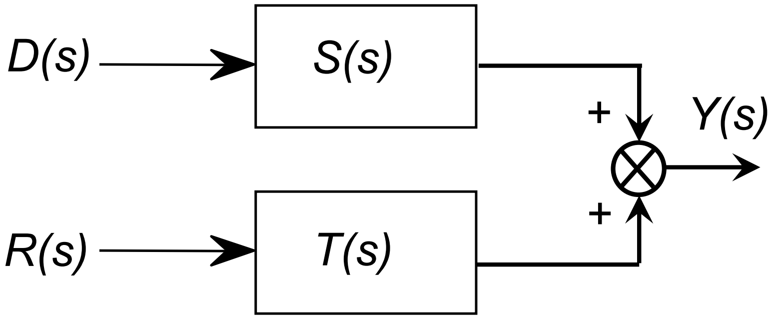


$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}} \longrightarrow Y(s)$$

Algèbre des schéma-blocs (suite)

- Structure bouclée ***à entrées multiples* :** *consigne R(s) et perturbation D(s)*
  - Pour calculer la relation entrées/sortie, on utilise la propriété d'additivité :
    - pour chaque entrée, on calcule la sortie *Y* en supposant les autres entrées nulles et on additionne les sorties pour obtenir la sortie totale





$$Y(s) = T(s)R(s) + S(s)D(s)$$

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)H(s)}$$

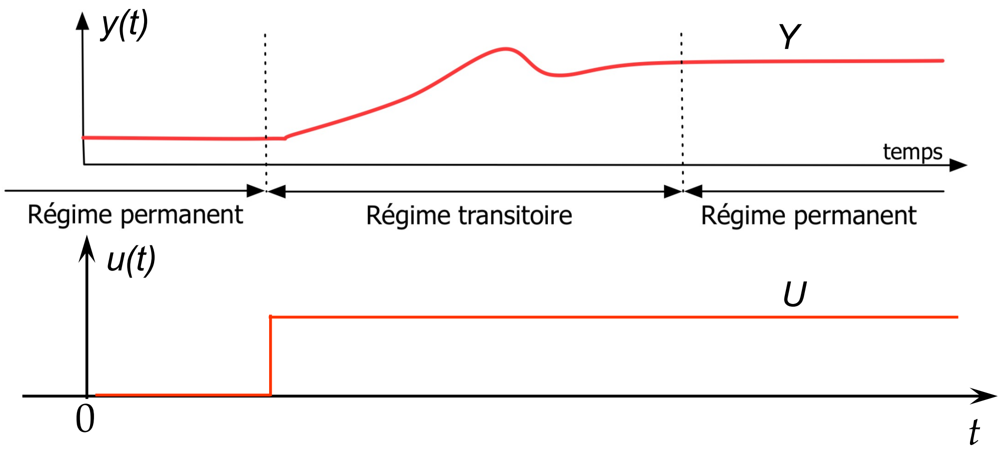
Caractéristiques de tous les systèmes physiques réels

- Les systèmes physiques réels ne sont :
  - ni linéaires
  - ni invariants dans le temps (vieillissement, …)

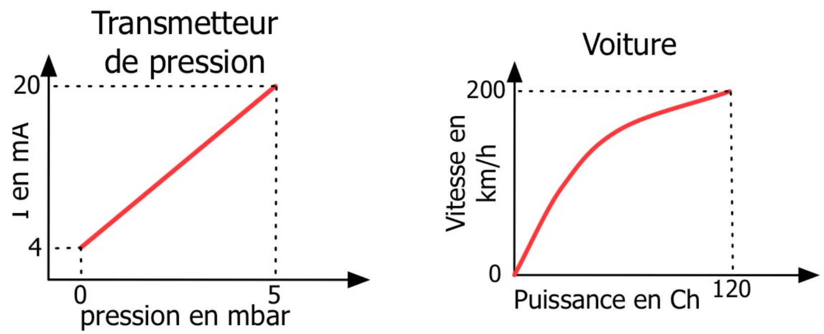
- Tous les systèmes physiques présentent en effet un caractère non linéaire et varient au cours du temps

Caractéristique statique d'un système dynamique

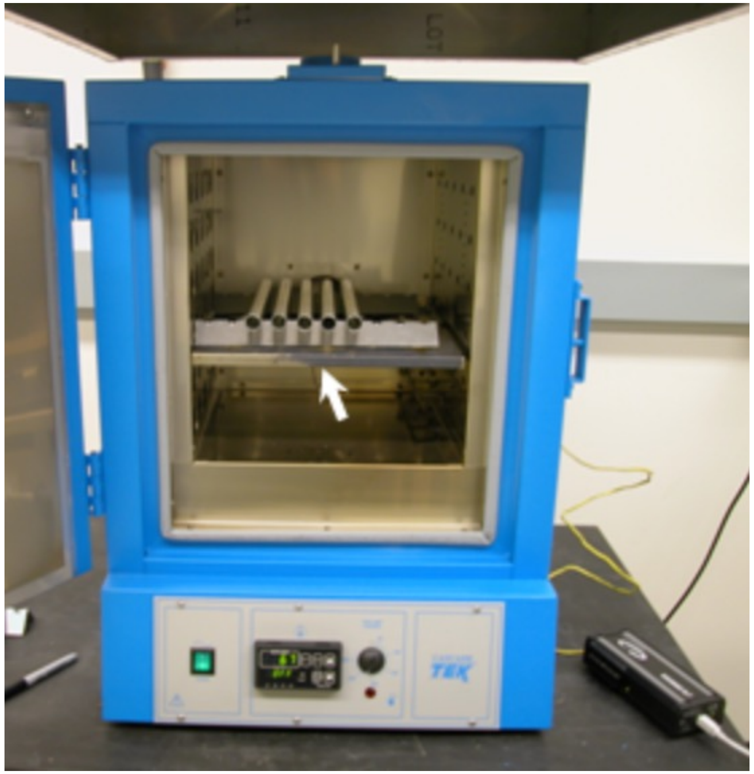
- Régime transitoire/permanent d'un système

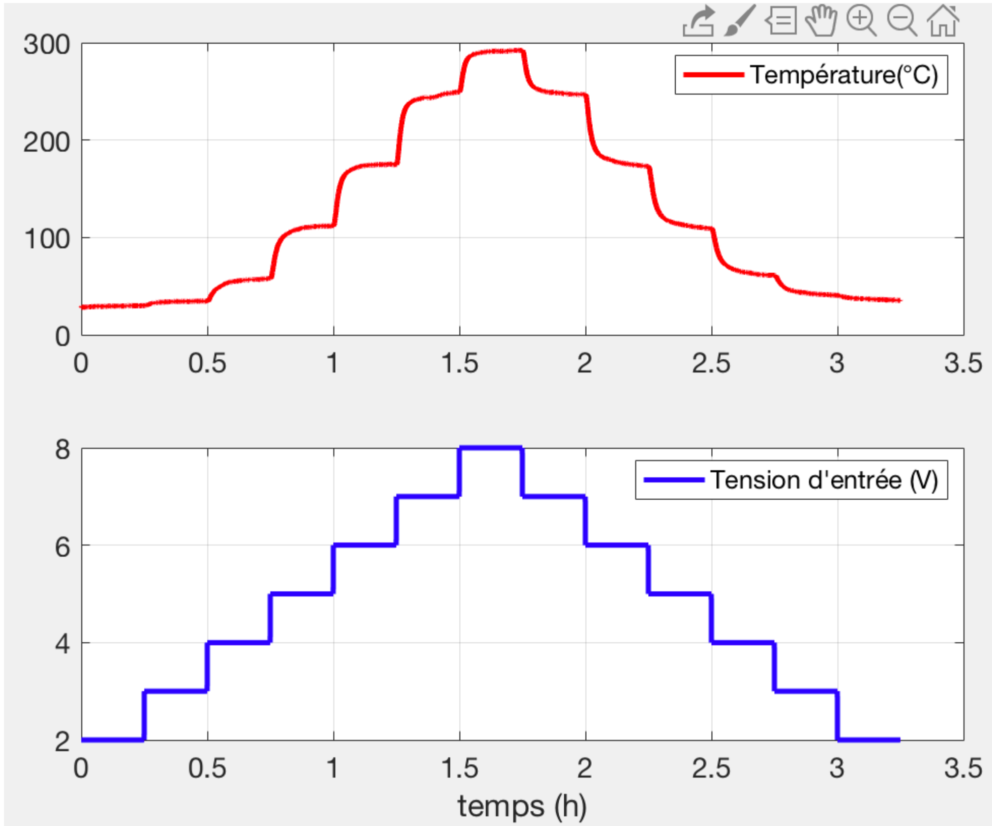


- Caractéristique statique
  - Soit un système dynamique ayant une entrée *u(t)* et une sortie *y(t)*. La caractéristique statique consiste à tracer les valeurs de la sortie *y(t)* notée Y en régime permanent (ou statique) en fonction de celles de l'entrée *u(t), notée U*



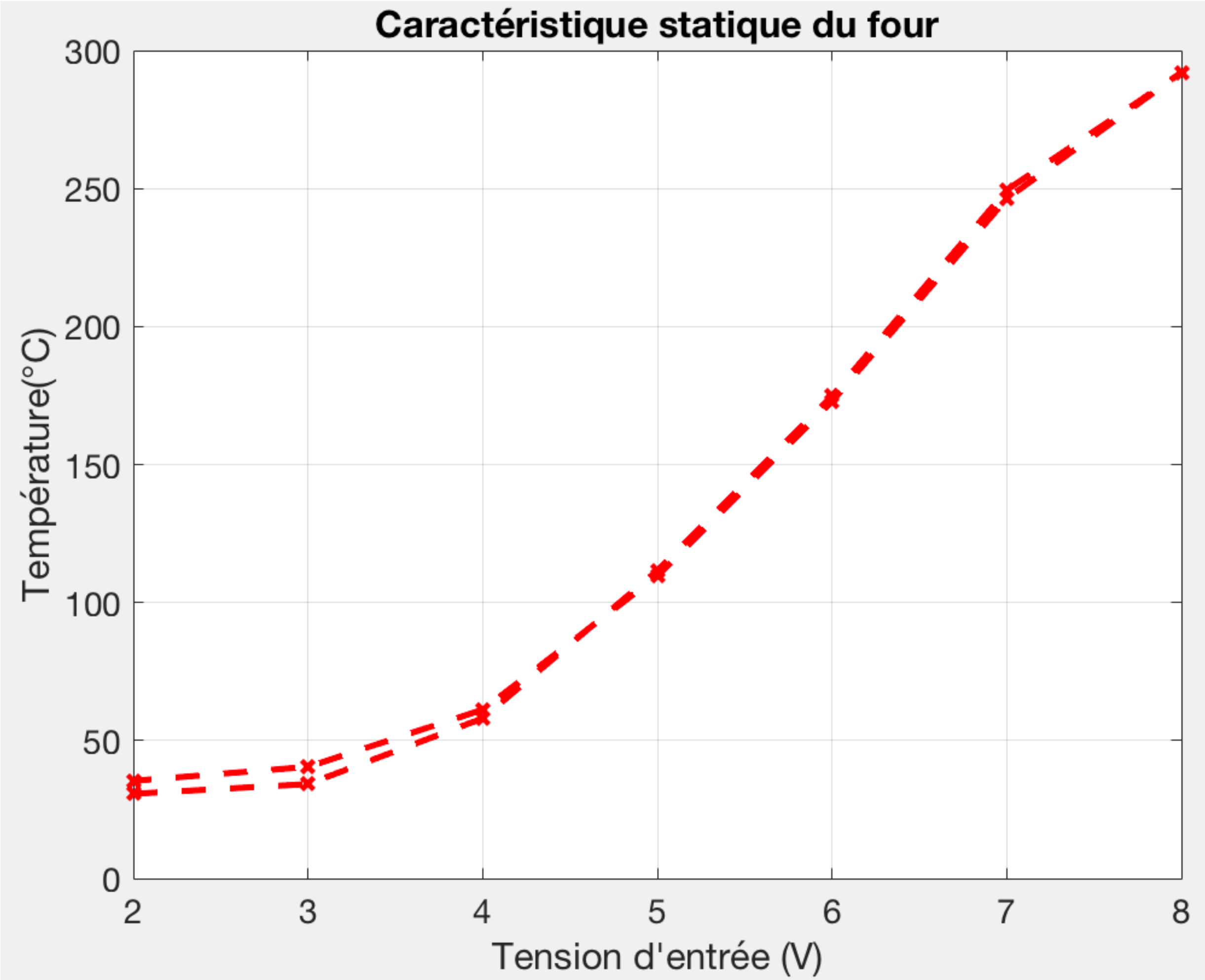
Détermination de la caractéristique statique à partir d'un test expérimental
Exemple d'un four de traitement thermique





- Enregistrement de la réponse en température à une succession d'échelon positif puis négatif sur la plage possible de l'entrée
  - Relevé des différents points de fonctionnement (Y;U) (en régime permanent) et déduction du tracé de la caractéristique statique

Caractéristique statique d'un four de traitement thermique

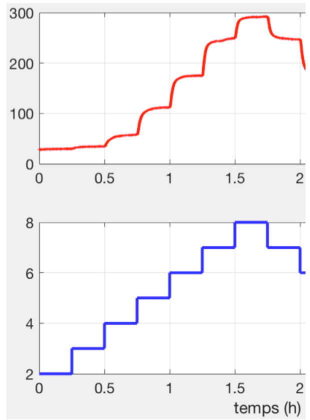


Caractéristique type courbure (avec hystérésis pour U<4V)

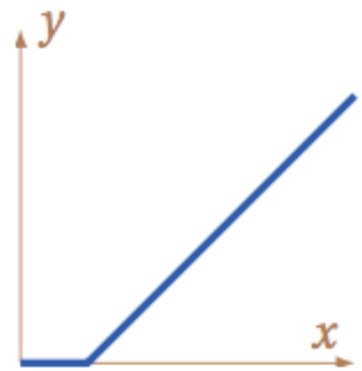
En régime permanent,
le modèle statique approché est une équation algébrique :
Y= K × U pour 4 < U < 7

En régime transitoire,
le modèle dynamique est une équation différentielle

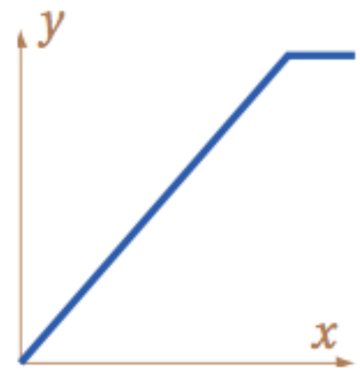
$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Ku(t)$$



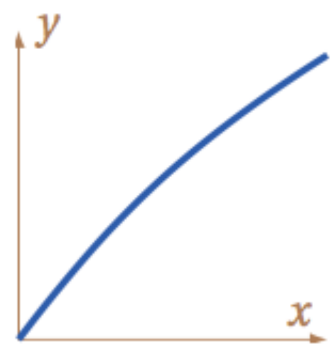
Principales formes de caractéristique statique non-linéaire



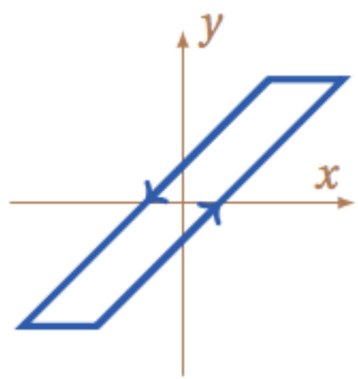
(a) seuil



(b) saturation



(c) courbure



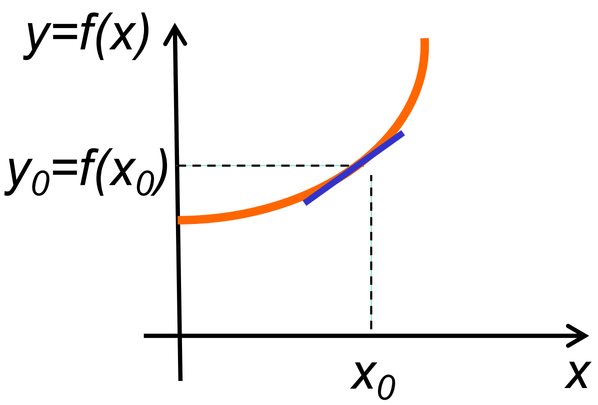
(d) hystérésis

Principales non-linéarités

- **Seuil**
  - Un système présente un seuil si la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse une valeur minimale (seuil). Les seuils ont souvent pour origine des frottements secs
- **Saturation**
  - Un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite. Ces saturations sont dues soit aux limites mécaniques du système (butées) soit aux limites des interfaces de puissance (saturation des amplificateurs opérationnels)
- **Hystérésis**
  - Un système présente une réponse avec une hystérésis lorsque le comportement est différent suivant le sens d'évolution de la variable d'entrée
- **Courbure**
  - La quasi totalité des systèmes présente des courbures plus ou moins prononcées. Dans la plupart des cas le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de linéariser autour d'un point de fonctionnement

Linéarisation des équations du modèle du système autour d'un point de fonctionnement

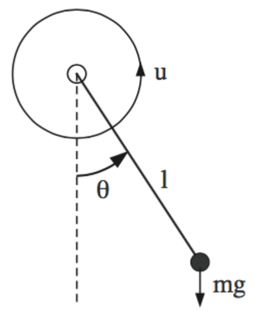
- A partir d'un modèle de connaissance établi à partir des lois de la Physique, on peut déterminer une version linéaire approchée par linéarisation des fonctions non-linéaires valable autour du **d'un point de fonctionnement** pour lequel les signaux d'entrée/sortie du système varient faiblement



Linéarisation des équations du modèle du système

- Exemple : bras de robot rigide commandé par un moteur au niveau de son articulation

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + mgl\,\sin\big(\theta(t)\big) = u(t)$$

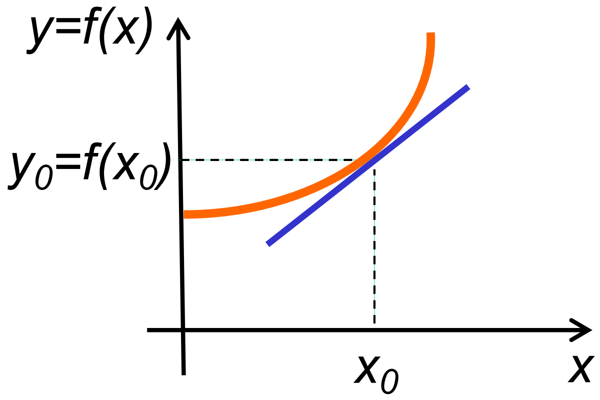


- On peut déterminer une version linéaire approchée du modèle par linéarisation valable autour du point *(x_0;y_0)* en utilisant le développement de Taylor de la fonction *(non linéaire)* au premier ordre apparaissant dans le modèle

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

Rappel - Approximation affine d'une fonction dérivable en un point

- Soit une fonction $f(x)$ dérivable en un point x_0



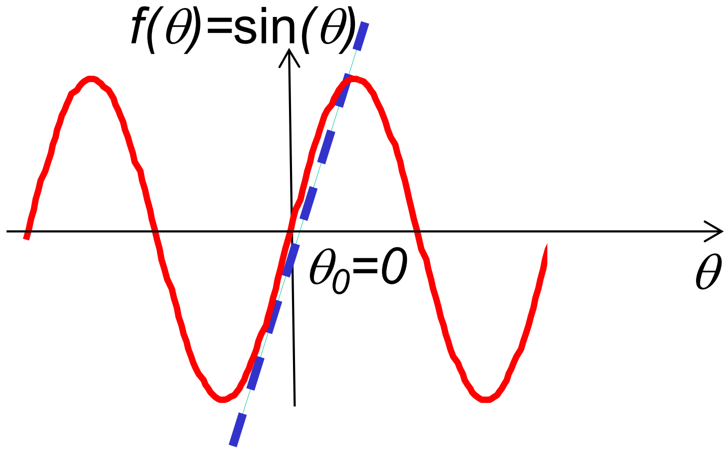
- Une approximation affine de $f(x)$ au voisinage de $x=x_0$ est donnée par :

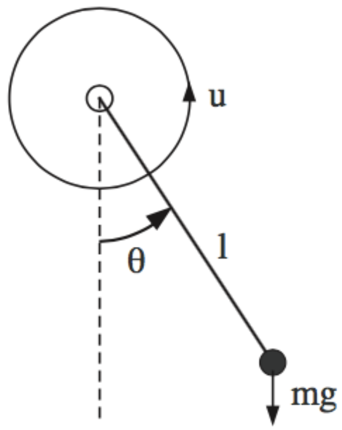
$$f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

  – Rq: cette approximation n'est valable qu'autour du point $(x_0;y_0)$

Linéarisation du modèle du bras de robot rigide

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + mgl\,\sin\big(\theta(t)\big) = u(t)$$





Une approximation affine *(linéaire ici)* de $f(\theta)$=$sin(\theta)$ au voisinage du point d'équilibre (θ_0 ; $f(\theta_0)$)=$(0;0)$ est donnée par :

$$f(\theta) = f(\theta_0) + f'(\theta_0)(\theta - \theta_0)$$
$$sin(\theta) = sin(0) + cos(0)(\theta - 0) = \theta \qquad Autour\ de\ \theta_0 = 0, \quad \sin\big(\theta(t)\big) \approx \theta(t)$$

Modèle linéarisé du bras de robot $\quad ml^2\ddot{\theta}(t) + mgl\ \theta(t) = u(t)$