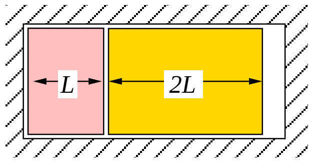
Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN FINAL (24 de junio de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

En una oquedad cilíndrica de longitud axial total $3L+\delta$ y radio R, perfectamente rígida, se hallan insertados dos cilindros macizos elásticos de radio R. El primero tiene longitud L, Módulo de Young E_0, de Poisson $\nu_0 = 0{,}25$ y coeficiente de dilatación α_0, y el segundo $2L$, $E_1 = 2E_0$, $\nu_1 = 0{,}35$ y $\alpha_1 = 1{,}2\alpha_0$. Se produce un aumento de temperatura de ambos cilindros $\Delta\theta$. Inicialmente entre los cilindros y la oquedad hay una holgura en dirección axial de valor $\delta = 3\Delta\theta\alpha_0 L$, estando perfectamente encajados en dirección radial. Calcular las deformaciones y tensiones que se producen en los cilindros como consecuencia del aumento de temperatura.



Nota. Se recuerda la relación de la termoelasticidad: $\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} + \alpha\Delta\theta\mathbf{1}$.

⋆

Consideramos las direcciones de las coordenadas cilíndricas, siendo la dirección 1 radial, la dirección 2 circunferencial y la dirección 3 axial. Las deformaciones según las direcciones radial y circunferencial serán nulas ($\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$), al no haber hueco ninguno en dirección transversal. Por consideraciones de simetría, en cada una de las piezas la tensión radial y la circunferencial serán iguales ($\sigma_{11} = \sigma_{22}$). Por tanto, las ecuaciones de la elasticidad pueden expresarse en cada pieza como:

$$0 = \varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{33}) + \frac{1}{E}\sigma_{11} + \alpha\Delta\theta \tag{1}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(2\sigma_{11}) + \frac{1}{E}\sigma_{33} + \alpha\Delta\theta\,. \tag{2}$$

Llamaremos $p_0 = -\sigma_{11}^{(0)} = -\sigma_{22}^{(0)}$ a la compresión transversal en la pieza primera (de longitud L) y $p_1 = -\sigma_{11}^{(1)} = -\sigma_{22}^{(1)}$ a la de la pieza segunda (de longitud $2L$). Los valores de las tensiones transversales en cada pieza serán en general distintos ($p_0 \neq p_1$) al estar dispuestas *en paralelo* y ser diferentes los módulos de elasticidad. Por el contrario, en la dirección axial ambas piezas al estar dispuestas *en serie* tendrán la misma tensión. Suponiendo que la dilatación sea suficiente para cerrar el hueco, esta tensión será de compresión, que llamaremos $\sigma = -\sigma_{33}^{(0)} = -\sigma_{33}^{(1)}$. Particularizando (1) para cada pieza obtenemos dos ecuaciones:

$$0 = \nu_0(p_0+\sigma) - p_0 + E_0\alpha_0\Delta\theta \tag{3}$$

$$0 = \nu_1(p_1+\sigma) - p_1 + E_1\alpha_1\Delta\theta\,. \tag{4}$$

En dirección axial el desplazamiento conjunto debe valer δ:

$$\delta = \varepsilon_{33}^{(0)}\cdot L + \varepsilon_{33}^{(1)}\cdot 2L\,. \tag{5}$$

La deformación axial de cada pieza se obtiene particularizando la ecuación (2):

$$\varepsilon_{33}^{(0)} = \frac{\nu_0}{E_0}(2p_0) - \frac{1}{E_0}\sigma + \alpha_0\Delta\theta\,, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{33}^{(1)} = \frac{\nu_1}{E_1}(2p_1) - \frac{1}{E_1}\sigma + \alpha_1\Delta\theta\,, \tag{7}$$

y sustituyendo en (5) resulta la ecuación

$$3\Delta\theta\alpha_0 L = \left(\frac{\nu_0}{E_0}2p_0 - \frac{\sigma}{E_0} + \alpha_0\Delta\theta\right) L + \left(\frac{\nu_1}{E_1}2p_1 - \frac{\sigma}{E_1} + \alpha_1\Delta\theta\right) 2L \tag{8}$$

Empleando las tres ecuaciones (3), (4), (8) y sustituyendo los datos del enunciado se obtiene la solución para las tensiones incógnita (p_0, p_1, σ):

$$\boxed{p_0 = 2{,}16901 E_0\alpha_0\Delta\theta\,;\ p_1 = 5{,}04225 E_0\alpha_0\Delta\theta\,;\ \sigma = 2{,}50704 E_0\alpha_0\Delta\theta\,.} \tag{9}$$

Sustituyendo estas tensiones en (6) y (7) se obtienen las deformaciones axiales de cada pieza:

$$\boxed{\varepsilon_{33}^{(0)} = -0{,}422535\alpha_0\Delta\theta\,; \quad \varepsilon_{33}^{(1)} = 1{,}71126\alpha_0\Delta\theta\,.} \tag{10}$$