Corso di Algebra 1. A.A. 2008/2009.

Prova scritta del 25/01/10

Esercizio 1. Definiamo in $\mathbb{Z}$ la relazione $a \sim b \Leftrightarrow$ esiste $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $a - b = \alpha(1+i)$. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Per ogni $a \in \mathbb{Z}$ determinare la sua classe di equivalenza $[a]$. Dire quanti elementi possiede l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\sim$.

Esercizio 2. Siano X un insieme non vuoto ed $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si ponga $A = \mathbb{F}^X$ e si considerino su A le usuali operazioni di somma e prodotto puntuale. Per ogni sottoinsieme $S \subseteq X$ sia $f_S \in A$ la funzione che vale 1 solo sui punti di S. Dato $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ poniamo $I(\mathcal{F}) = \{f_S \mid S \in \mathcal{F}\}$. Dimostrare che $I(\mathcal{F})$ è un ideale di A se e solo se valgono le seguenti condizioni

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$;
2. se $S, T \in \mathcal{F}$ allora $S \Delta T \in \mathcal{F}$;
3. se $S \in \mathcal{F}$ e $Y \in \mathcal{P}(X)$ allora $S \cap Y \in \mathcal{F}$.

Esercizio 3. Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss si consideri il sottoinsieme $I = \{a + ib \mid 2a + b \equiv 0 \pmod 5 \text{ e } a - 2b \equiv 0 \pmod 5\}$.

1. Mostrare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$.
2. Trovare un generatore per I.
3. Provare che la funzione $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[i]/I$ definita da $\phi(a) = a + I$ è un morfismo di anelli.
4. Determinare $\ker(\phi)$ e la cardinalità dell'anello $\mathbb{Z}/\ker(\phi)$.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a - 2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

Dimostrare che A è un anello rispetto alle usuali operazioni tra matrici. Mostrare che la matrice $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ soddisfa la relazione $\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$ e provare che A è isomorfo a $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + 2x - 3)$. Dire infine quanti ideali possiede l'anello A.