EJERCICIOS TEMAS I Y II CÁLCULO 20 SEMESTRE A-2015

1. Indique si se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = |x^3| - 1$ definida en el intervalo $[-1, 1]$. En caso afirmativo encuentre el c dado por el Teorema.
   Rpta. Si se puede, $c = 0$. f es continua en R y diferenciable en R, en particular en el intervalo $[-1, 1]$. Luego, por el Teorema de Rolle, existe un número $c \in [-1, 1]$ tal que $f'(c) = 0$. Por otro lado, $f'(x) = 3x^2$, por lo tanto $f'(c) = 0 \Rightarrow c = 0$.

2. Calcular
   $$\lim_{\theta \to \pi} \frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta}{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$$
   Rpta. El límite arroja una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, luego, aplicando la regla de L'Höpital, se sigue:
   $$\lim_{\theta \to \pi} \frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta}{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \lim_{\theta \to \pi} \frac{-2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{-2\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta}$$
   $$= \lim_{\theta \to \pi} \frac{-4\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta}{-2\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta} = \frac{0}{-1} = 0$$

3. Hacer el estudio completo y la gráfica de la función
   $$f(x) = \frac{-5x^2 + 1x - 5}{x}$$

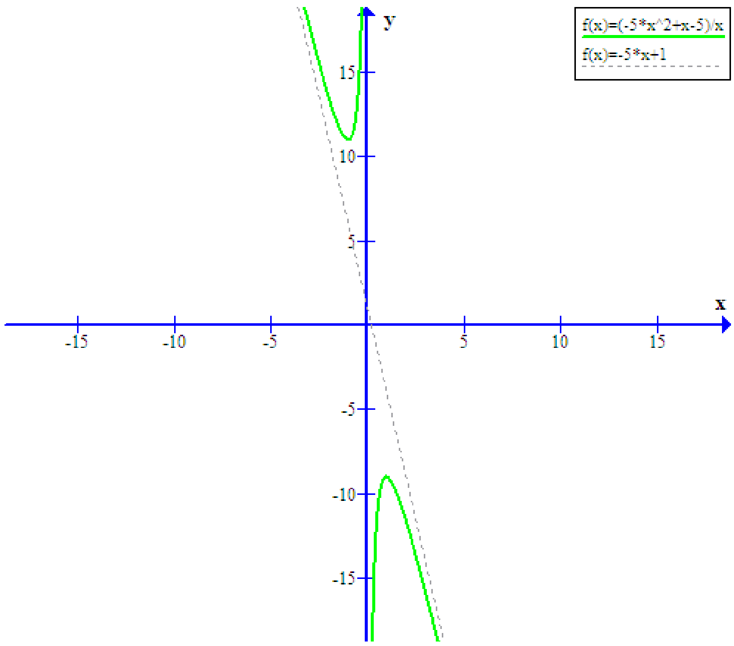

Figura 1. Gráfica del problema 3

Rpta. $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, No tiene corte con el eje y, como el discriminante del numerador $\Delta = 1^2 - 4(-5)(-5) < 0$ es negativo, no existen cortes con el eje x.
$$f'(x) = \frac{(-10x + 1)x - (-5x^2 + x - 5)1}{x^2} = \frac{-5x^2 + 5}{x^2} = 5\frac{(1 - x)(1 + x)}{x^2}.$$
Los puntos críticos son $x = 1$ que es un máximo y $x = -1$ que es un mínimo según el criterio de la primera derivada, pues f es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y es creciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

Universidad de Los Andes, Escuela Básica de Ingeniería. e-mail: rrra@ula.ve; http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/rrra/.

En $x=0$ hay una asíntota vertical, ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Estudiando el signo de la segunda derivada,

$$f''(x) = \frac{-10xx^2 - (-5x^2+5)2x}{x^4} = -\frac{10}{x^3}$$

se sigue que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, +\infty)$. La curva tiene asíntota oblicua $y = mx + b$, donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2+x-5}{x^2} = -5,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2+x-5}{x} + 5x = \lim_{x\to\infty} \frac{x-5}{x} = 1,$$

es decir, la A.O. es $y = -5x + 1$ La gráfica se puede observar en la figura 1.

4. Se quiere construir una lata de forma cilindrica circular recta con capacidad de $333cm^3$, usando aluminio con un costo de $Bs.\,0{,}02$ el cm^2. Calcular las dimensiones que minimizan el costo de su fabricación.

   Rpta. Llamando r el radio de la lata cilíndrica y h la altura, el volumen V de dicha lata es

$$333cm^3 = \pi r^2 h = V \tag{1}$$

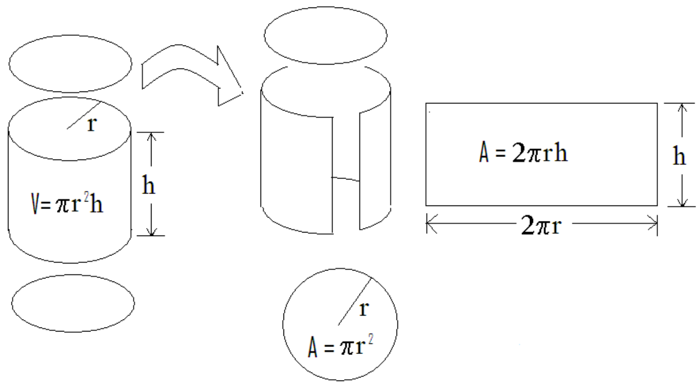

Figura 2. Dimensiones de una lata cilíndrica

La superficie lateral cubre un área de $2\pi r h\ cm^2$ y cada una de las dos tapas cubre un área de $\pi r^2\ cm^2$ como se puede observar en la figura 2. El costo del material que se utilizará en la construcción es

$$C = 0{,}02(2\pi r h) + 0{,}02(2(\pi r^2)). \tag{2}$$

Despejando h de la ecuación (1) y sustituyendola en la ecuación (2) se sigue

$$C(r) = 0{,}04\pi r \frac{333}{\pi r^2} + 0{,}04\pi r^2 = 0{,}04\left(\frac{333}{r} + \pi r^2\right) \text{ con } r > 0.$$

Luego,

$$C'(r) = 0{,}04\left(-\frac{333}{r^2} + 2\pi r\right) = 0 \text{ si } -333 + 2\pi r^3 = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}} \approx 3{,}75625.$$

Con el criterio de la segunda derivada, determinaremos la naturaleza del punto crítico encontrado:

$$C''(r) = 0{,}04\left(\frac{2*333}{r^3} + 2\pi\right) \Rightarrow C''\left(\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}\right) > 0.$$

Por lo tanto, el punto estudiado es un mínimo. Es decir, el costo de construir la lata con sus dos tapas es mínimo, si se hace con un radio $r = \sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}$ y una altura $h = \frac{333}{\pi(\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}})^2} \approx 7{,}5125$. El costo mínimo de fabricación de una lata es de Bs. 5,3191.

5. Dada la curva

$$C:\begin{cases} x = t\,e^{-t} \\ y = t\,e^{t} \end{cases}$$

a) Hacer el estudio del sentido de la curva.

Rpta. El sentido de la curva lo da el signo de la primera derivada.

$$x'(t) = e^{-t}(1-t),$$
$$y'(t) = e^{t}(1+t),$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = e^{2t}\frac{1+t}{1-t}.$$

De donde, el sentido es $\searrow$ para $t \in (-\infty, -1)$, $\nearrow$ para $t \in (-1, 1)$ y $\nwarrow$ para $t \in (1, +\infty)$,

b) Calcular y estudiar el signo de

$$\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Rpta.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x' - y'x''}{(x')^3} = \frac{(e^t(1+t+1))(e^{-t}(1-t)) - (e^t(1+t))(e^{-t}(-1+t-1))}{(e^{-t}(1-t))^3}$$

$$= \frac{(2+t)(1-t) - (1+t)(t-2)}{e^{-3t}(1-t)^3} = e^{3t}\frac{-2t^2+4}{(1-t)^3} = 2e^{3t}\frac{-t^2+2}{(1-t)^3} = 2e^{3t}\frac{(\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t)}{(1-t)^3},$$

de donde $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ para $t \in (-\sqrt{2}, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ para $t \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$

c) Identificar y hallar las asíntotas de la curva.

Rpta.

Asíntota horizontal: $x \to -\infty$ si $t \to -\infty$ y

$$\lim_{t\to-\infty} y = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} = (L'H) \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = 0.$$

Luego, $y = 0$ es asíntota. Asíntota vertical: $y \to +\infty$ si $t \to +\infty$ y

$$\lim_{t\to+\infty} x = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{t}} = (L'H) \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{t}} = 0.$$

Luego, $x = 0$ es asíntota.

d) Trazar la gráfica de la curva.

Rpta. La gráfica de la curva se puede observar en la figura 3.

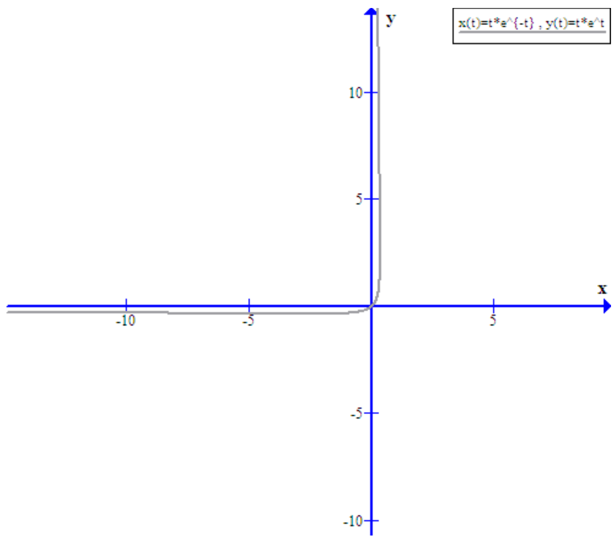

Figura 3. Curva en coordenadas paramétricas