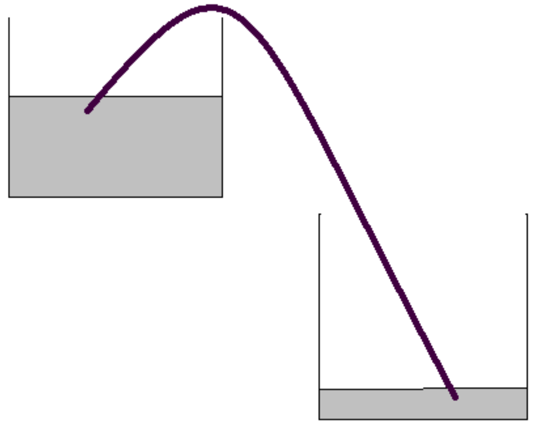
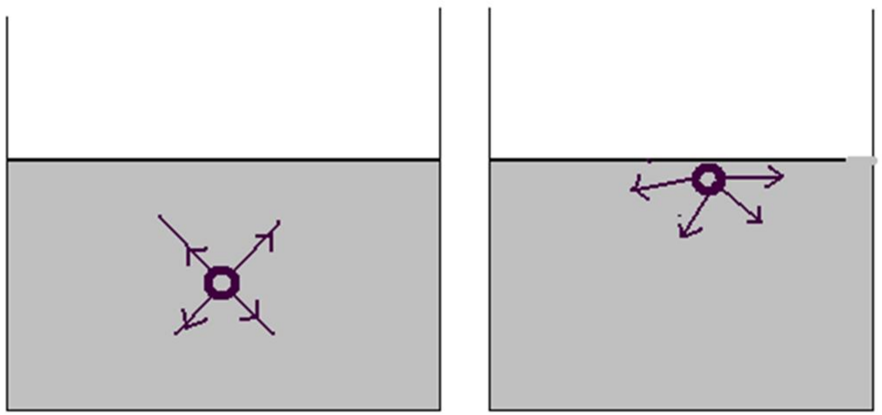
3.4. Oberflächenspannung und Kapillarität

Aus dem Experiment: Flüssigkeitsfaden, Moleküle der Flüssigkeit zeigen Zusammenhalt.



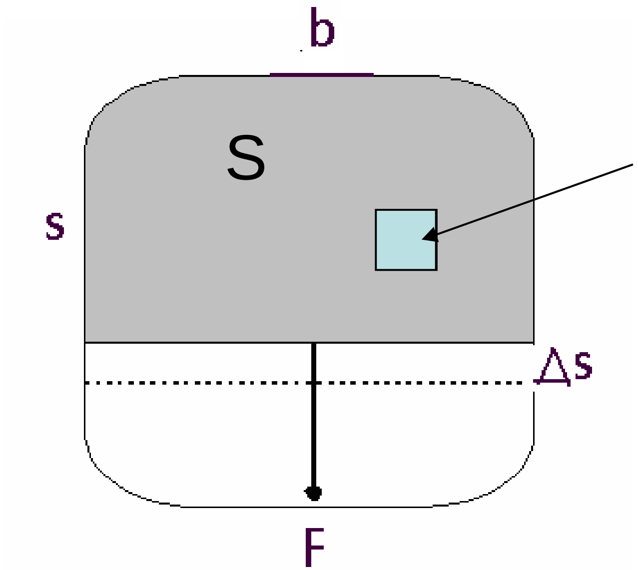
Eigenschaften kondensierter Materie:
Zwischen den Molekülen herrschen
starke Kräfte kurzer Reichweite, 10^{-7}cm
praktisch bis zum nächsten Nachbarn.

Im Innern der Flüssigkeit: Die Kräfte heben sich gegenseitig auf



An der Oberfläche: Es existiert eine resultierende Kraft nach Innen.

Bei einer Vergrößerung der Oberfläche: gegen die Kräfte ,
die nach innen ziehen, muss die Arbrit φW geleistet werden.



Bezogen auf die Flächeneinheit
φS, wird eine
Oberflächenspannung definiert:

$$\sigma_S = \frac{\Delta W}{\Delta S} \; mit \; \sigma_S \; (N/m)$$

Beispiel: Seifenlamelle

Oberfläche: S=2*s*b
Durch Verschieben des Bügels:

$$S = 2 \cdot b \cdot \Delta s$$ mit der Energiezunahme:

$$\Delta W = \sigma_S \cdot \Delta s = \sigma_S = 2b \cdot \Delta_s$$ Geleistete Arbeit

$$\Delta W = F \cdot \Delta s$$ und damit $$\sigma_s = \frac{F}{2b}$$

$$\sigma_S = \frac{\Delta W}{\Delta S}\_\_mit\_\_[\sigma_S] = \frac{N}{m}$$

Beispiel: Seifenlamelle

$$Oberfläche : S = 2 \cdot s \cdot b$$

mit der Energiezunahme

$$\Delta W = \sigma_S \cdot 2b \cdot \Delta s$$

Geleistete Arbeit:

$$\Delta W = F \cdot \Delta s\_\_und\_\_damit\_\sigma_S = \frac{F}{2b}$$

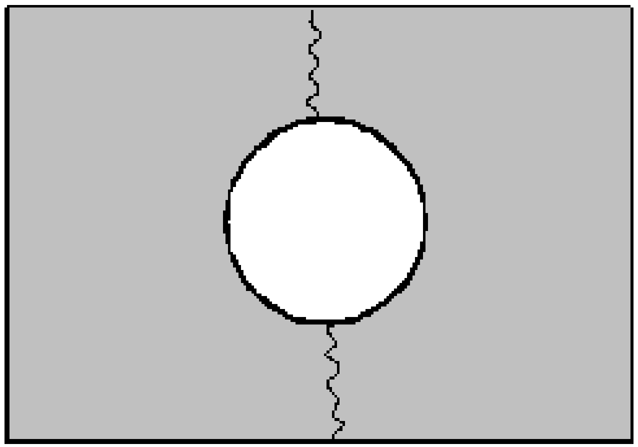
Für Wasser ist das:

$$\sigma_S = 0.073 N/m$$

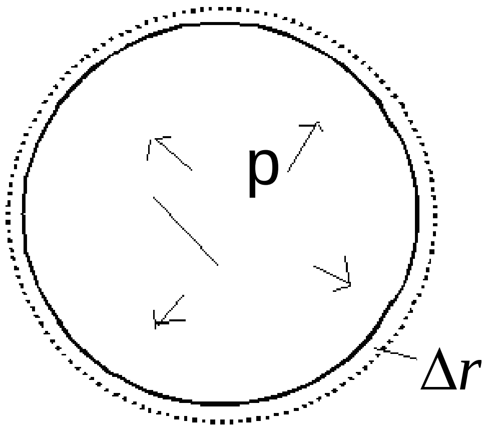
Flüssigkeitsoberflächen sind Minimalflächen,
d.h. bei vorgegebenem Volumen kleinste
Oberfläche

Für Quecksilber:

$$\sigma_S = 0.47 N/m$$



Druckverhältnisse in der Seifenblase



Oberflächenenergie:

$$W_S = 2 \cdot \sigma_S \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 8 \cdot \pi \cdot \sigma_S \cdot r^2$$

Kleinere Oberflächen bedeuten
Energiegewinn!

$$\Delta W_S = 16 \cdot \pi \cdot \sigma_S \cdot r \cdot \boxed{\Delta r} \quad \rightarrow Druckanstieg\_im\_Innern$$

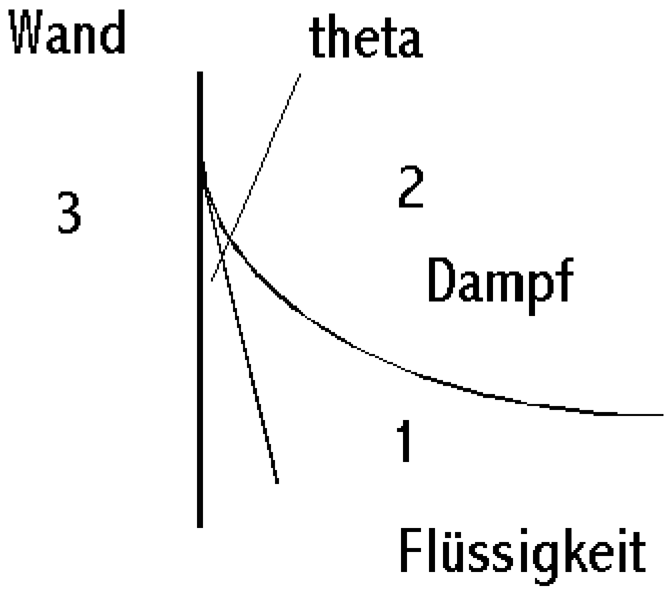
Geleistete Arbeit: $\Delta W_P = F \cdot \Delta r = \boxed{p} \cdot S \cdot \Delta r$

Im Gleichgewicht: $\Delta W_S = \Delta W_P$

$$\boxed{p} = 4 \cdot \sigma_S / r$$

Je kleiner die Kugel, desto größer der Innendruck

Grenzflächen: Bisher Flüssigkeit - Gas
Es gibt aber auch die Grenzflächen Flüssigkeit-Flüssigkeit, Flüssigkeit -Festkörper



Energiegewinn beim Benetzen der Grenzflächen

Gleichgewicht:

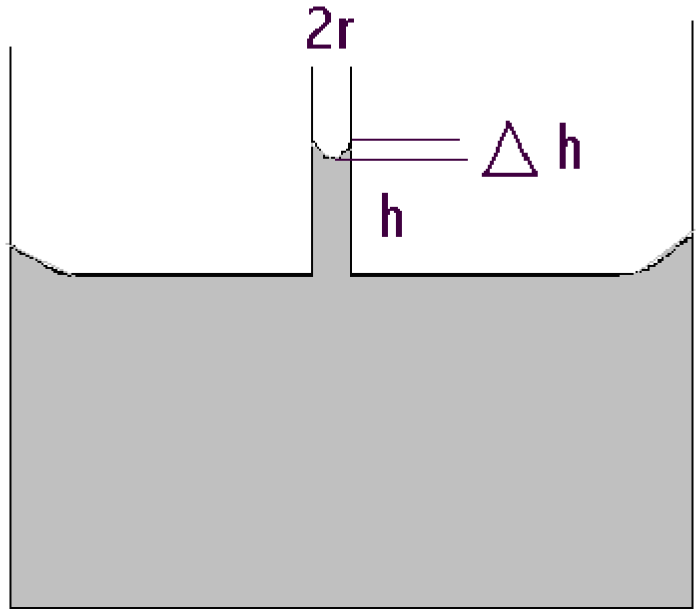
$$\underbrace{\sigma_{23} - \sigma_{13}}_{Haftspannung\_\sigma_H} = \sigma_{12} \cdot \cos\theta$$

Kein Gleichgewicht : $\sigma_H \succ \sigma_{12}$:
die Flüssigkeit kriecht die Wand hoch

$$0 \leq \sigma_H \leq \sigma_{12} \;:\; Benetzend, "hydrophil"$$

$$\sigma_H \prec 0 \;:\; Nichtbenetzend, "hydrophob"$$

Kapillarität:



Energiegewinn beim Benetzen der Zylinderoberfläche

$$\Delta W_H = \sigma_H \cdot 2\pi \cdot r \cdot \Delta h$$

Die Hubarbeit:

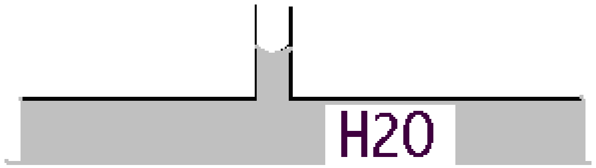
$$\Delta W_g = m \cdot g \cdot \Delta h$$

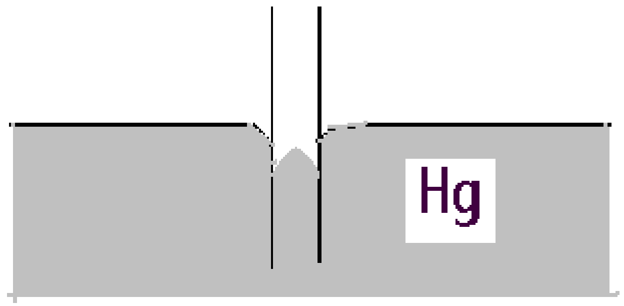
$$= \varrho \cdot V \cdot g \cdot \Delta h = \varrho \cdot g \cdot \Delta h \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$Gleichgewicht\ :\ \Delta W_H = \Delta W_g$$

Die Steighöhe in der Kapillare:

$$h = \boxed{2} \cdot \sigma_H / \varrho \cdot g \cdot r$$





3.5. Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen

Einheitliche Behandlung von Gasen und Flüssigkeiten:

Geschwindigkeit $\boxed{\ll}$ Schallgeschwindigkeit: Gemeinsamer Begriff: Fluid. Drei Arten von Strömungen

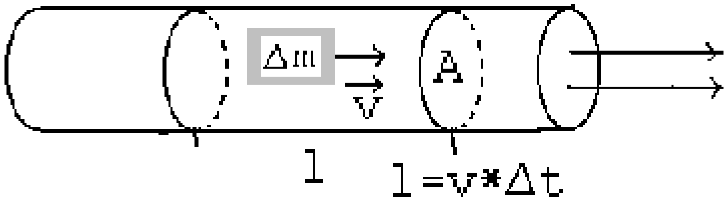
a) *Ideale Flüssigkeit: Keine Reibungskräfte*

b) *Zähe Flüssigkeit: Reibung dominiert*

c) *Turbulente Strömung realer Flüssigkeiten*

a)

Flüssigkeitstransport:



Fluß:

$$\Phi = \frac{\text{In } \Delta t \text{ durch A hindurchtretende Flüssigkeitsmasse}}{\text{Zeitintervall}}$$

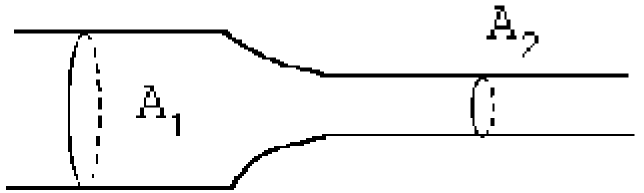
$$\Phi = \frac{m(A,\Delta t,v)}{\Delta t} = \frac{\rho\cdot V(A,\Delta t,v)}{\Delta t} = \frac{\rho\cdot A\cdot v\cdot\Delta t}{\Delta t} = \rho\cdot A\cdot v$$

v : nicht notwendigerweise konstant

$$\vec{j} = \rho\cdot\vec{v}$$

Stromdichte: Fluß/Fläche

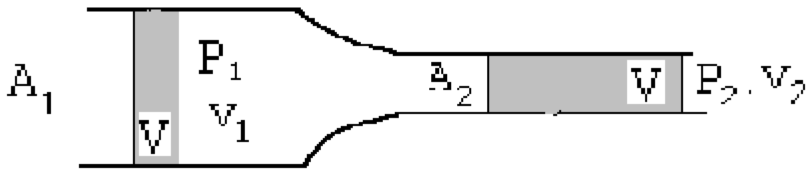
Kontinuitätsprinzip: Fluss bleibt erhalten:



$$\Phi = \text{konstant}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$



Flüssigkeitsvolumen gewinnt kinetische Energie:

$$\Delta W_{kin} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

Dafür muss Arbeit geleistet werden!

V wird gegen P in das Rohr gepresst

$$T \approx \frac{R}{\nu}$$

$$P_2 \cdot V$$

$$v_1 \prec v_2 \Rightarrow$$

$$\Delta W = P_1 \cdot V - P_2 \cdot V = (P_1 - P_2) \cdot V$$

Energiesatz:

$$\Delta W = \Delta W_{kin}$$

$$\Delta W = P_1 \cdot V - P_2 \cdot V = (P_1 - P_2) \cdot V$$

$$P_1 \cdot V + \frac{1}{2}\rho \cdot V \cdot v_1^2 = P_2 \cdot V + \frac{1}{2}\rho \cdot V \cdot v_2^2$$

gilt entlang eines beliebig geformten Rohres:

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2$$

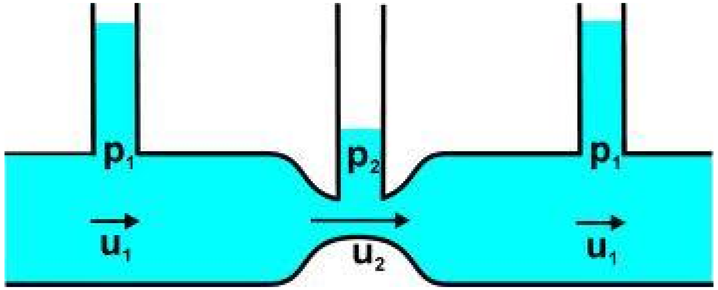
$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = \text{konstant} = P_0}$$

Gleichung von Bernoulli : Statischer Druck+Staudruck= Gesamtdruck

Enorme praktische Bedeutung $v \sim \frac{1}{A} \Rightarrow$

Staudruck groß, wo A klein, statischer Druck groß, wo A groß

Hydrodynamisches Paradoxon



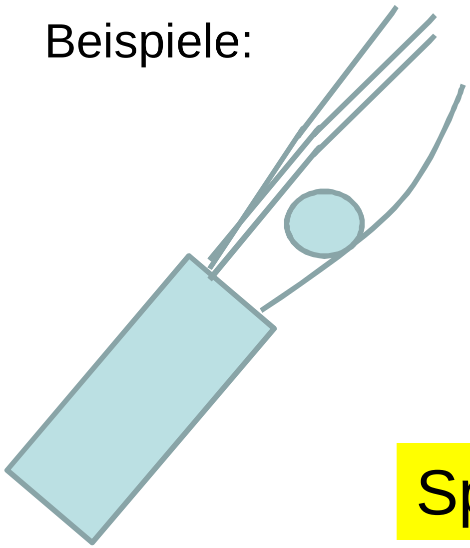
Gemäß:

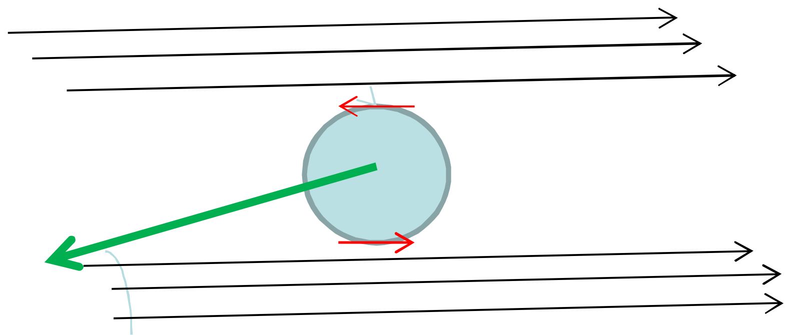
$$p + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = P_0$$

Ăkleinñ, wenn v groß

Magnuseffekt

Beispiele:





Sport: Ball Ăanschneidenñ

Tennis, Tischtennis, Fußball etc.

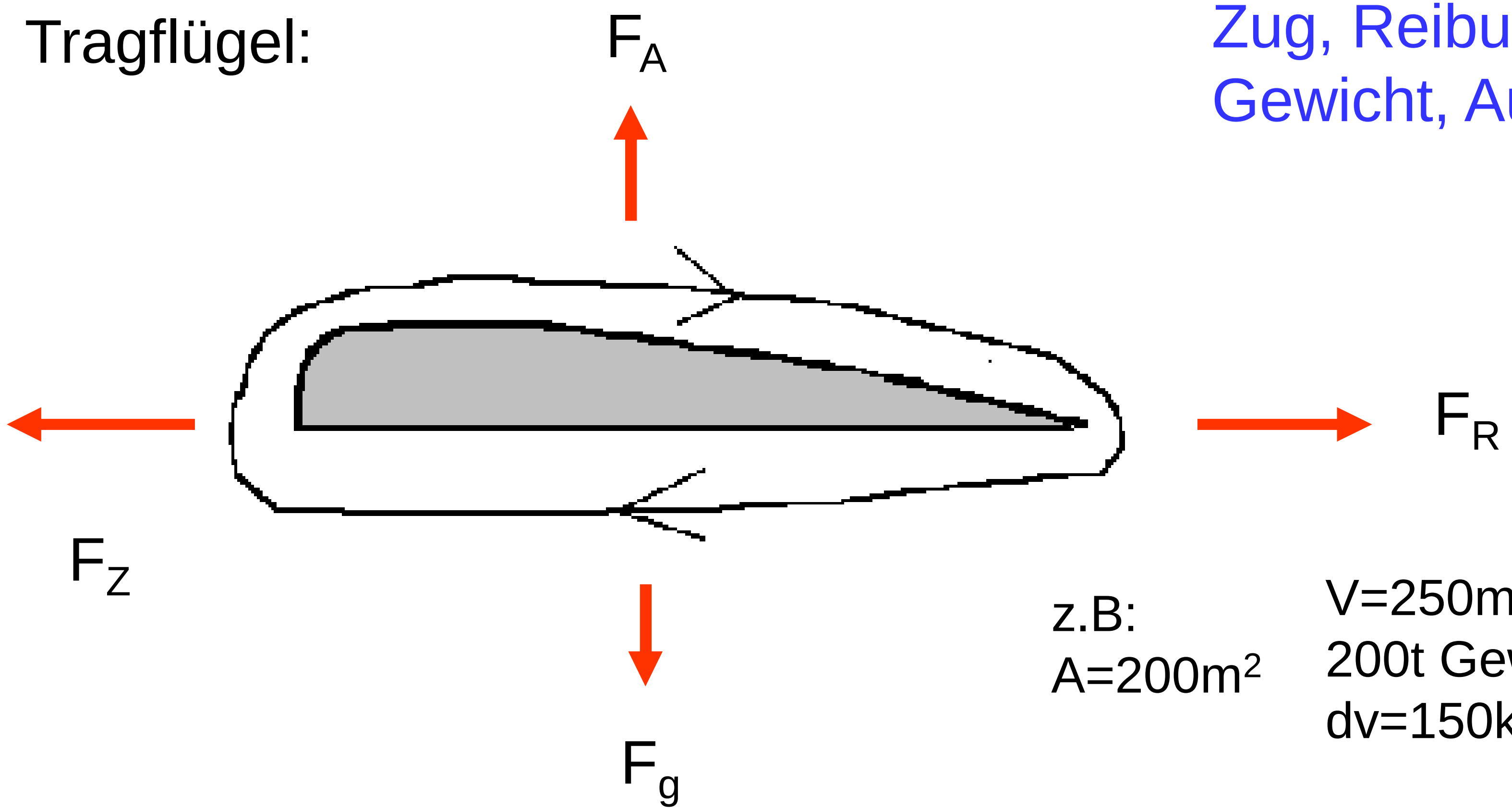
Folge: Ablenkung

Rotierende Oberfläche des Balls vermindert/vermehrt via Reibung die Luftgeschwindigkeit um die Oberfläche

Weiteres Beispiel

Tragflügel:

Käfte:
Zug, Reibung
Gewicht, Auftrieb



z.B:
$A=200m^2$

$V=250m/s$
200t Gew.
$dv=150km/h$

$$F_A = A \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot (v_{oben}^2 - v_{unten}^2)$$

oder

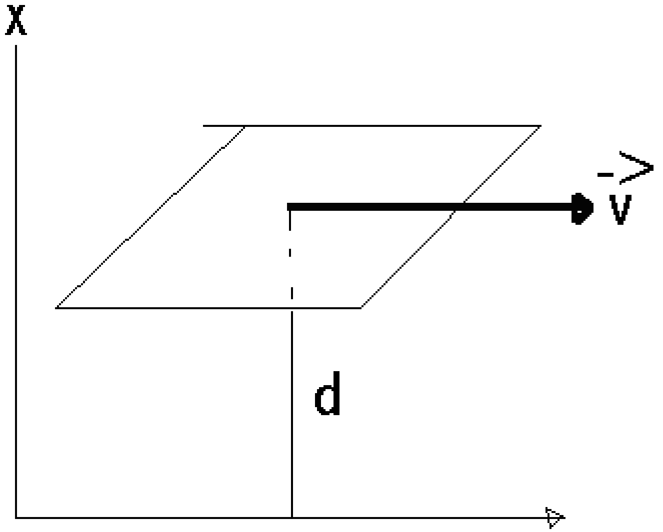
$$F_A = A \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot (v_{oben} + v_{unten}) \cdot (v_{oben} - v_{unten})$$

Tragende Kraft:

$$F_A \simeq A \cdot \rho \cdot v \cdot (v_{oben} - v_{unten})$$

b)Laminare oder schlichte Strömung einer zähen Flüssigkeit

Flüssigkeit kann keine Scherspannung aufnehmen.



Bewegliche Platte mit Oberfläche S
Zur Bewegung der Platte über eine Flüssigkeitsschicht ist eine Kraft nötig:

$$F \sim S \cdot v/d$$

Interpretation: Auf die Flüssigkeit wirkt eine Art ĂScherspannung ñ

Viskosität

$$\tau : \tau = F/S\_\_d.h : \_\tau = \eta \cdot v/d \qquad [\tau] = N \cdot m/S$$

Eine haftende Flüssigkeitsschicht gleitet über die darunter liegende Schicht etc.

v/d stellt ein Geschwindigkeitsgefälle dar

$$\rightarrow dv/dx\_d.h : \_Gradient \quad \eta(T) : \_T = Temperatur, z.B.: H_2O$$

$$\eta(0) = 0.0018, \eta(100) = 0.00029$$

Beispiel : Laminare Strömung zwischen parallelen Platten, mit v= konstant

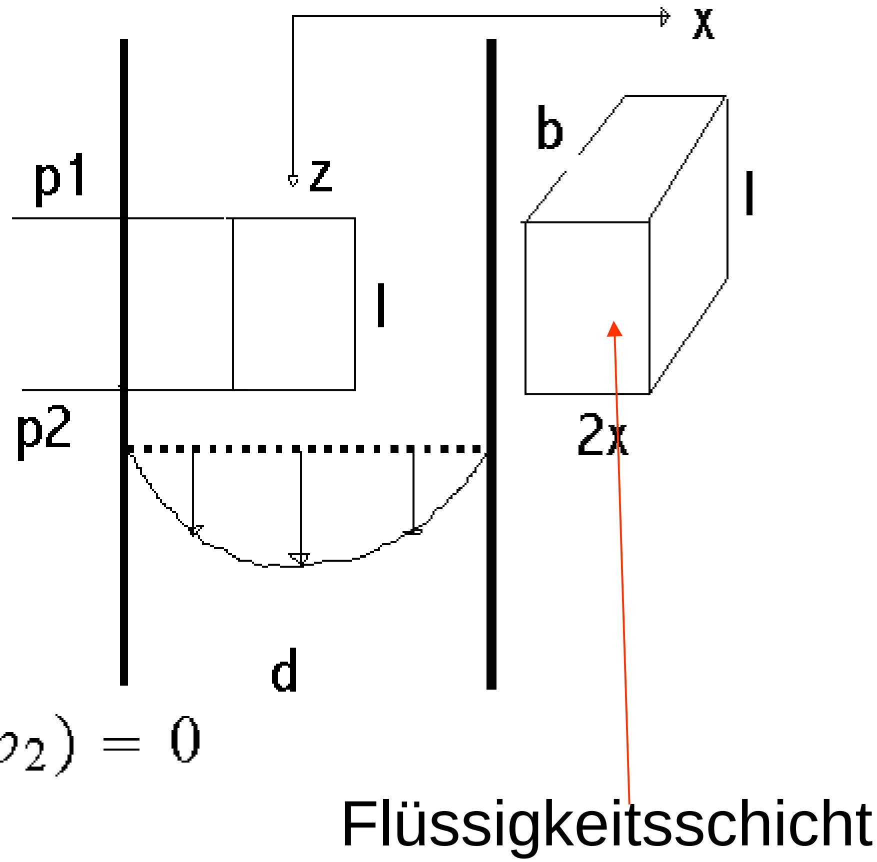
An den Stirnflächen: Kräfte

$$2 \cdot x \cdot b \cdot p_1 - 2 \cdot x \cdot b \cdot p_2$$

An den Flanken: Reibungskräfte:

$$\eta \cdot 2 \cdot b \cdot l \cdot dv/dx$$

Konstante Geschwindigkeit heißt:
Die Summe aller Kräfte ist null!



$$\eta \cdot 2 \cdot b \cdot l \cdot dv/dx + 2 \cdot x \cdot b \cdot (p_1 - p_2) = 0$$

$$\rightarrow dv/dx = -x(p_1 - p_2)/(\eta \cdot l)$$

Integration: $v = -x^2 \cdot (p_1 - p_2)/(2 \cdot \eta \cdot l) + c$

$$v = -x^2 \bullet (p_1 - p_2)/(2 \bullet \eta \bullet l) + c$$

mit v=0 für x= d/2
ergibt sich die Integrationskonstante c zu:

$$c = (d/2)^2 \bullet (p_1 - p_2)/(2 \bullet \eta \bullet l)$$

und damit:

$$v = (p_1 - p_2)/(2 \bullet \eta \bullet l)((d/2)^2 - x^2)$$

$$(p_1 - p_2)/l = dp/dz$$

stellt ein Druckgefälle dar

$$\vec{v} \approx grad(p) \bullet ((d/2)^2 - x^2)$$

Die Spitzen der Geschwindigs-
keitsvektoren
liegen auf einer Parabel!

Laminare Strömung durch eine Röhre
(analog dem ebenen Problem)

r $\eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot l \cdot dv \cdot /dr + r^2 \cdot \pi \cdot (p_1 - p_2) = 0$

$dv/dr = -r \cdot (p_1 - p_2)/(\eta \cdot 2 \cdot l)$

mit Integration:

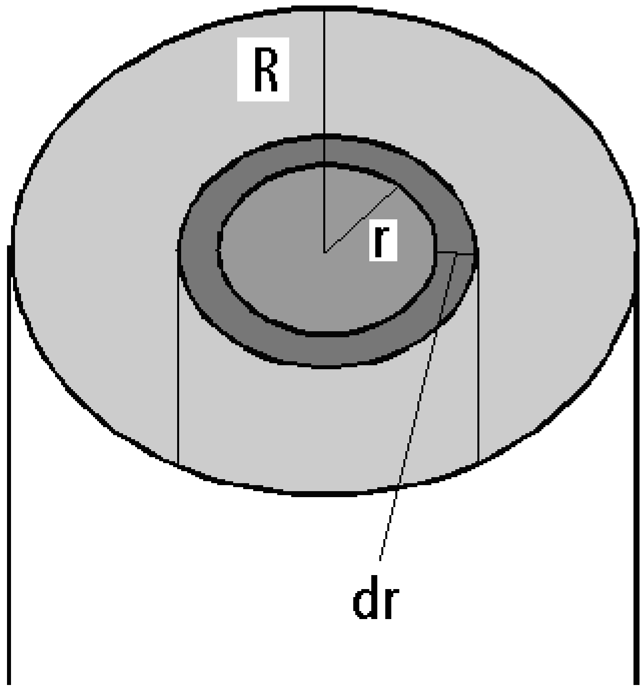
$-4 \cdot \eta \cdot l \cdot v/(p_1 - p_2) = r^2 + c$

$c = -R^2\_für\_v = 0\_an\_r = R$

$R^2 - r^2 = 4 \cdot \eta \cdot l \cdot v/(p_1 - p_2)$

oder $v = (p_1 - p_2) \cdot (R^2 - r^2)/4 \cdot \eta \cdot l$

Paraboloid



Strömende Flüssigkeitsmenge für die Zeit t:

$dV = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot v \cdot t =$

$2\, r\, \pi \cdot dr \cdot (p_1 - p_2) \cdot (R^2 - r^2) \cdot t/4 \cdot \eta \cdot l$

$V = \frac{\pi \cdot (p_1 - p_2) \cdot t}{2 \cdot \eta \cdot l} \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r \cdot dr$

$V = \pi \cdot R^4 \cdot (p_1 - p_2) \cdot t/8 \cdot \eta \cdot l \cdot$

Fluss:

$\Phi = m/t = \varrho \cdot V/t \rightarrow$

Gleichung von Hagen- Poseuille

$\boxed{\Phi = \pi \cdot \varrho \cdot R^4 \cdot (p_1 - p_2)/8 \cdot \eta \cdot l}$