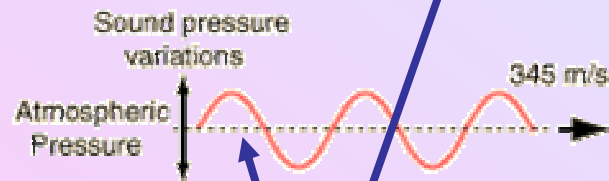
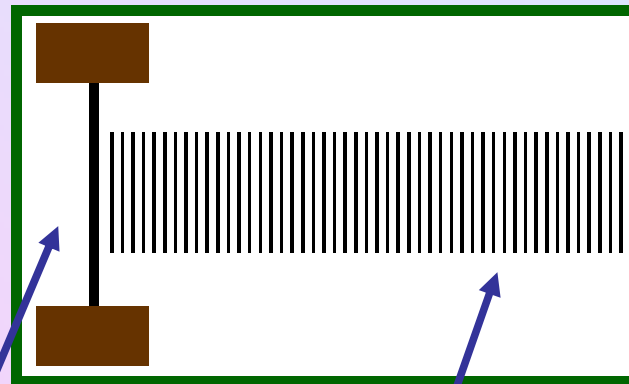


Physik der Musikinstrumente

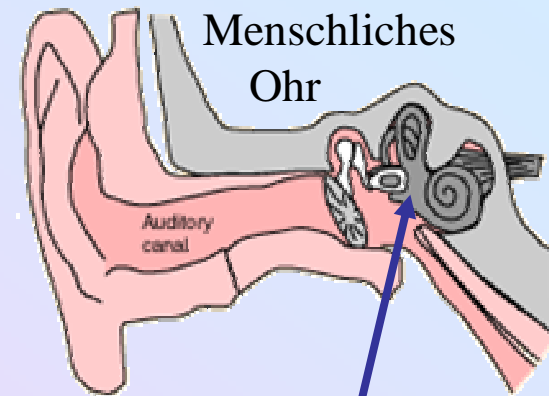
Vorbemerkung:



Musikinstrument,
schwingendes System



Schalldruckwellen,
Ausbreitung im
Auditorium



Wavelet Tafo,
Wandlung in
Nervensignale



Beispiele schwingender Systeme:

- Saiten Geige, Gitarre, Klavier, ...
- Blattfedern Rohr / Zunge in Blasinstrumenten,
...
- Membranen Pauke, Bongos, Trommelfell, ...
- Platten, Stäbe Xylophon, Gitarrendeckel, Triangel,
...
- Schalen Becken, Glocke, ...
- Luft Hohlraumresonatoren Geigenkörper, Orgelpfeife, ...



Physikalische Grundlagen:

- Luft Wellenleiter Flöte, Trompete, Horn, ...
- Schwingungen / Wellen in festen / gasförmigen elastischen Medien
- Hydrodynamik
- Lineare und nichtlineare Schwingungen

1. Schwingende Systeme

1.1. Eindimensionale harmonische Schwingung

Bewegungsgleichung: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

komplexe Lösung: $x(t) = A \cdot e^{i\omega_0 t} = |A| \cdot e^{i(\omega_0 t + \varphi)}$

ω_0 : Eigenfrequenz

$A = |A| \cdot e^{i\varphi}$: komplexe Amplitude

φ : Phase

reelle (physikalische) Lösung:

$$x(t) = |A| \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = a \cdot \cos(\omega_0 t) + b \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$a = |A| \cdot \cos\varphi \quad b = |A| \cdot \sin\varphi$$

Anfangsbedingungen $\Rightarrow |A|, \varphi$ bzw. a, b



Beispiele:

$x = z$
 $\omega_0^2 = D/m$
 $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D z^2$ $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$

$L \hat{=} m$
 $C \hat{=} 1/D$
 $x = Q$ $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$
 $\dot{x} = I$

Helmholtz Resonator:

$V \gg SL$
 Druck P
 $P_a = \text{Luftdruck}$
 $\rho = \text{Luftdichte}$

$x = P - P_a$ $\omega_0^2 = \frac{c^2 V L}{S}$

$c = \sqrt{\frac{\gamma P_a}{\rho}} = \text{Schallgeschwindigkeit}$
 $\gamma = \begin{cases} 1 & \text{isotherm (i.a. nicht relevant)} \\ \frac{C_P}{C_V} \approx 1,4 & \text{adiabatisch (i.a. für Akustik)} \end{cases}$

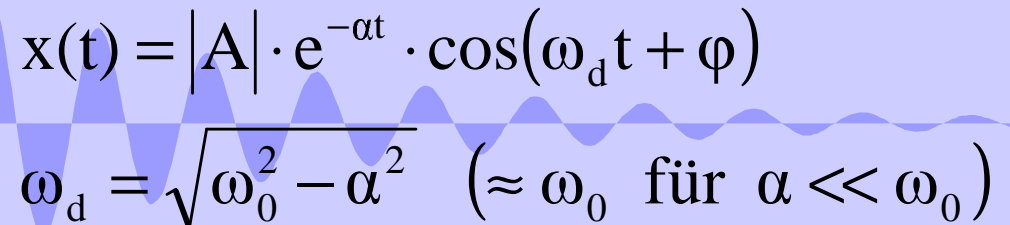
1.2. Dämpfung

Bewegungsgleichung:

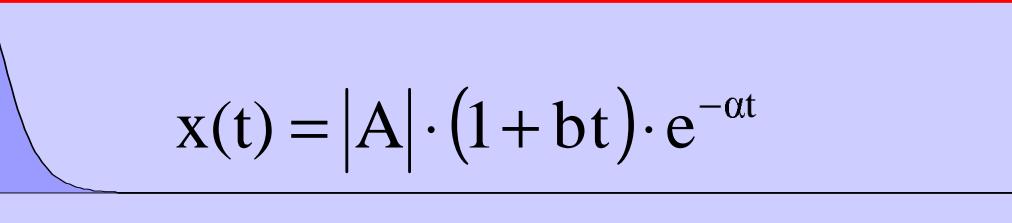
α : Dämpfungskonstante

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

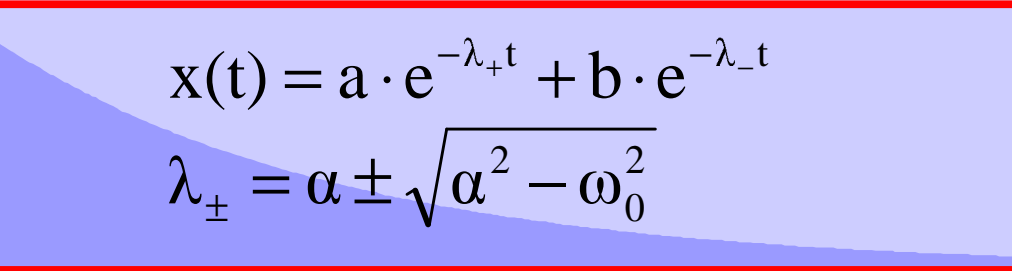
 $\alpha < \omega_0$: Schwingfall
(musikalischer Normalfall)


$$x(t) = |A| \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t + \varphi)$$
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (\approx \omega_0 \text{ für } \alpha \ll \omega_0)$$

 $\alpha = \omega_0$: aperiodischer
Grenzfall

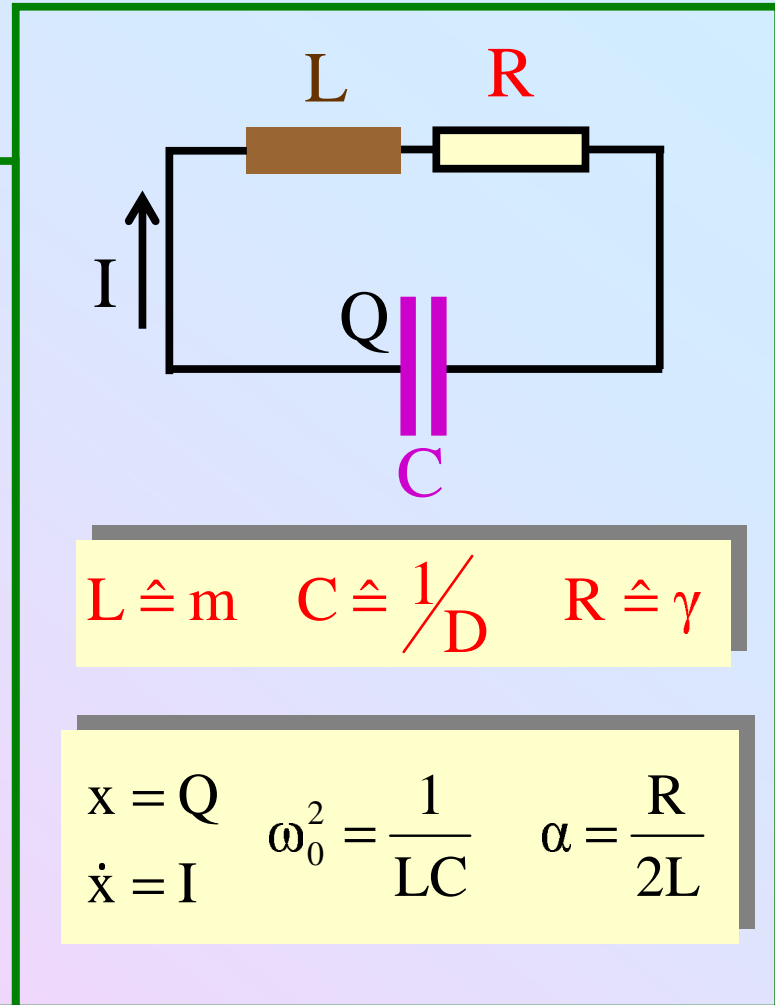
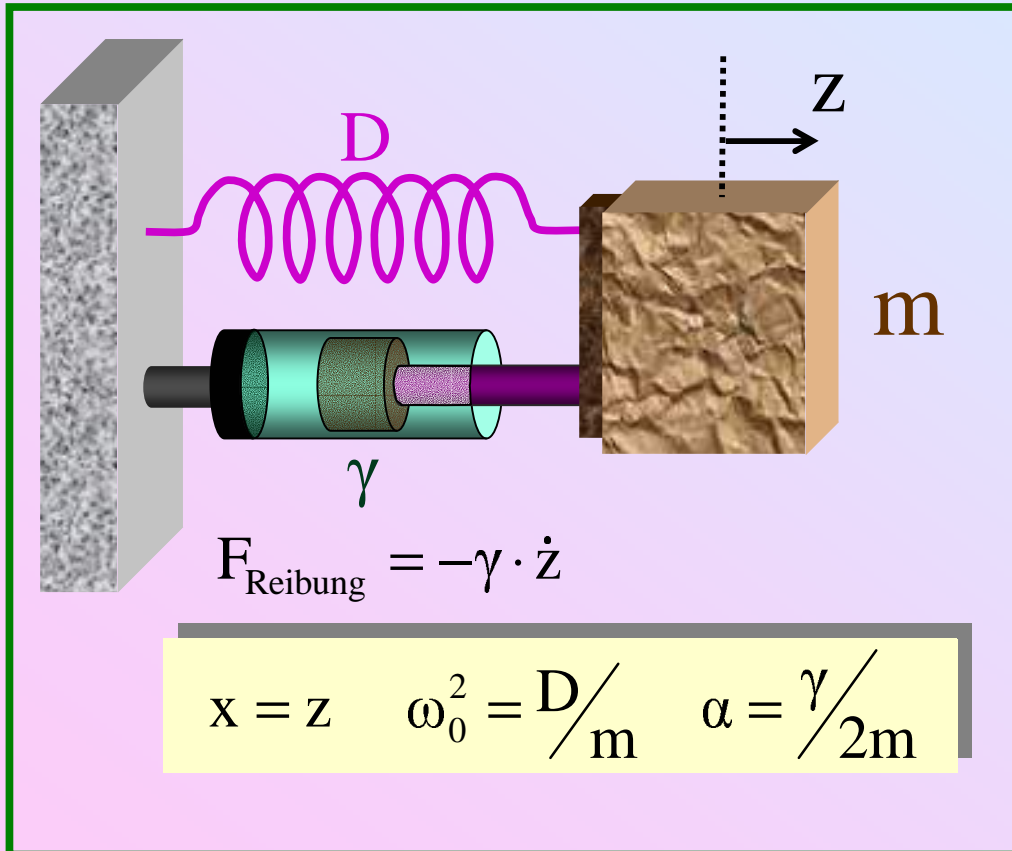

$$x(t) = |A| \cdot (1 + bt) \cdot e^{-\alpha t}$$

 $\alpha > \omega_0$: Kriechfall


$$x(t) = a \cdot e^{-\lambda_+ t} + b \cdot e^{-\lambda_- t}$$
$$\lambda_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$



Beispiele:



Musikinstrumente: „Kleine Dämpfung“ $\alpha \ll \omega_0$

\Rightarrow quasi statische Schwingung / kein Energieverlust während $T = 2\pi / \omega$



Energieverlust bei kleiner Dämpfung: $x(t) \approx |A|e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\langle E \rangle_T(t) = \frac{1}{2} D \langle x^2 \rangle_T + \frac{1}{2} m \langle \dot{x}^2 \rangle_T$$

$$\langle x^2 \rangle_T \approx |A|^2 e^{-2\alpha t} \underbrace{\langle \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle_T}_{\approx \text{const.}} = \frac{1}{2} |A|^2 e^{-2\alpha t}$$

$$\langle \dot{x}^2 \rangle_T \approx \dots = \frac{1}{2} |A|^2 \omega_0^2 e^{-2\alpha t} = \frac{1}{2} |A|^2 \frac{D}{m} e^{-2\alpha t}$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle_T(t) \approx \frac{1}{2} |A|^2 D e^{-t/\tau_D}$$

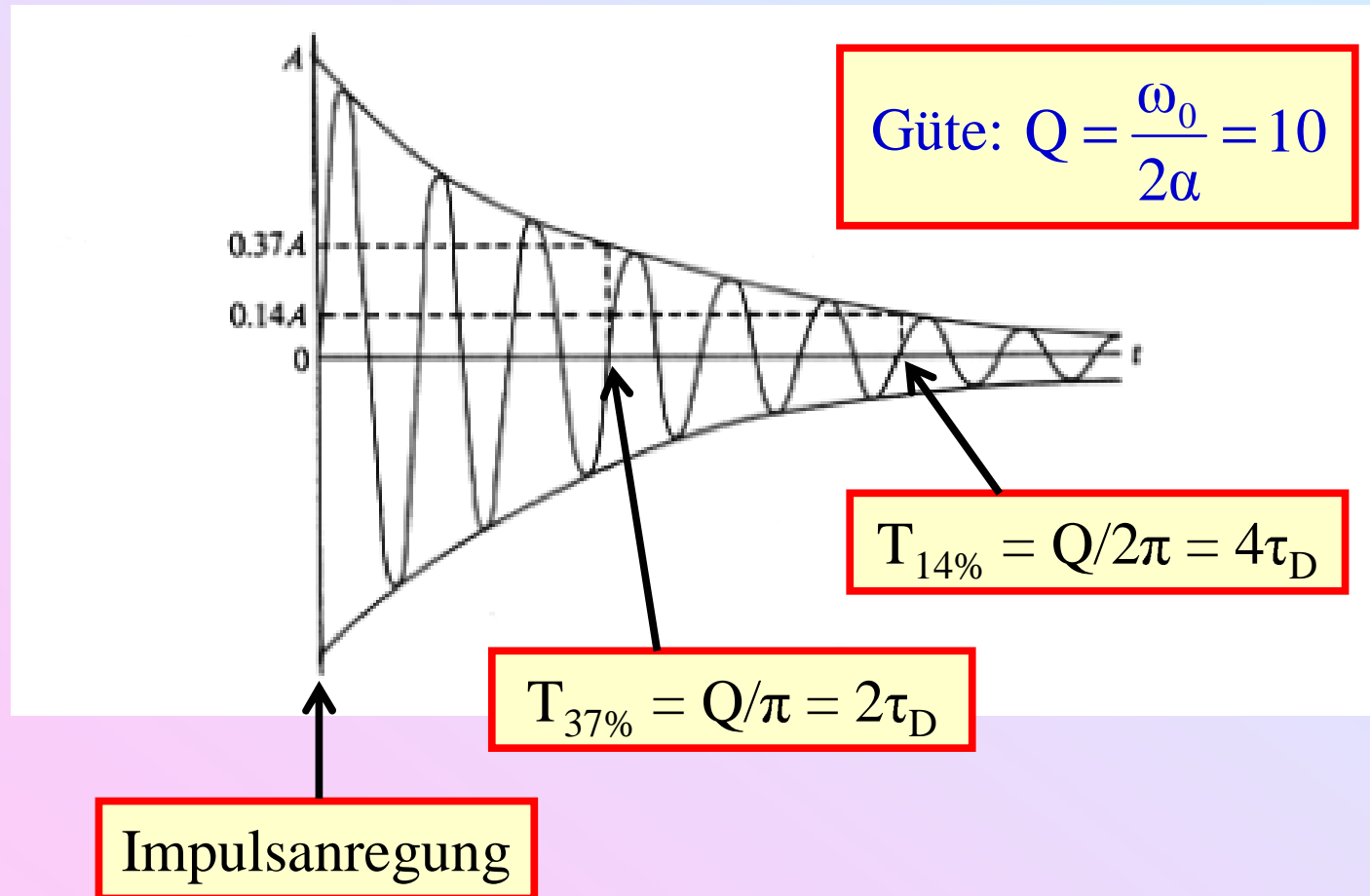
Dämpfungszeit:

$$\tau_D = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\text{\#Schwingungen in } \tau_D: N \approx \frac{\tau_D}{T} \approx \frac{\tau_D \omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{2\pi} \cdot Q$$

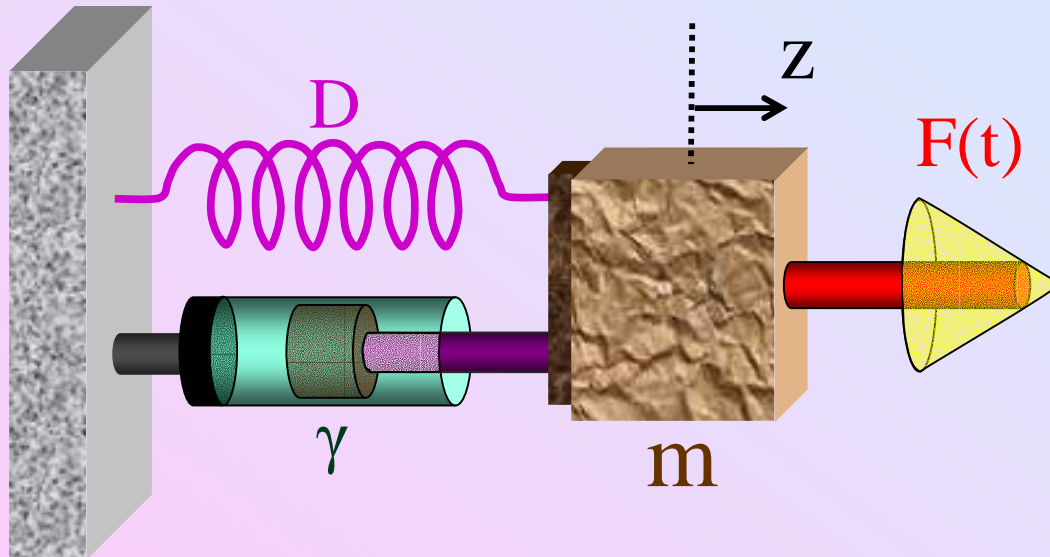
$$\text{Güte: } Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

Beispiel:



1.3. Erzwungene Schwingungen

1.3.1. Übersicht



$$x = z \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m}$$
$$\alpha = \frac{\gamma}{2m} \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Bewegungsgleichung:

$f(t)$: externe Anregung

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Musikinstrument: $f(t)$ periodisch
Fourierzerlegung: $f(t)$ harmonisch

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Lösung:

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t)$$



$x_h(t)$:

- Einschwingvorgang
- gedämpft $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0$
- Lösung der homogenen Gleichung ($f \equiv 0$)
- festgelegt durch Anfangsbedingungen



$x_s(t)$:

- Asymptotische, stabile Schwingung für $t \gg \tau_D$
- spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung
- unabhängig von Anfangsbedingungen
- festgelegt durch $\omega_0, \alpha, f_0, \omega$

1.3.2. Gleichgewichtsschwingung ($t \rightarrow \infty$)

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$$

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 + 2i\omega + \omega_0^2)x_0 = f_0$$

$$\frac{d}{dt} = i\omega \cdot$$

Komplexe...

🎵 Amplitude: $x_0 = |x_0| \cdot e^{i\varphi}$

🎵 Geschwindigkeit: $v_0 = i\omega \cdot x_0$

🎵 Beschleunigung: $a_0 = i\omega \cdot v_0 = -\omega^2 x_0$

$$x_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\alpha}$$
$$v_0 = \frac{\omega f_0}{2\omega\alpha + i(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

Definitionen:

$$v_0 = \frac{\omega f_0}{2\omega\alpha + i(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

🎵 (mechanische) Impedanz:

$$Z \equiv \frac{F_0}{v_0} = \gamma + i \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} m$$

$$F_0 = f_0 m$$
$$\gamma = 2\alpha m$$

🎵 Admittanz (bzw. Mobilität):

$$Y = \frac{1}{Z}$$

🎵 Widerstand (dissipativer Teil):

$$R = \operatorname{Re}(Z) = \gamma$$

🎵 Reaktanz (reaktiver Teil):

$$X = \operatorname{Im}(Z) = \omega m - \frac{D}{\omega}$$

Definitionen:

$$\mathbf{x}_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\alpha}$$

🎵 Resonanzamplitude:

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_0(\omega = \omega_0) = \frac{f_0}{2i\omega_0\alpha}$$
$$|\mathbf{x}_R| = \frac{f_0}{2\omega_0\alpha} \quad \varphi_R = -\frac{\pi}{2}$$

🎵 Gleichgewichtsamplitude:

$$\mathbf{x}_G = \mathbf{x}_0(\omega \rightarrow 0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}$$
$$|\mathbf{x}_G| = \frac{f_0}{\omega_0^2} \quad \varphi_G = 0$$

🎵 Resonanzverstärkung:

$$\frac{|\mathbf{x}_R|}{|\mathbf{x}_G|} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = Q = \text{Güte}$$

Definitionen: Dämpfung in Dezibel (dB)

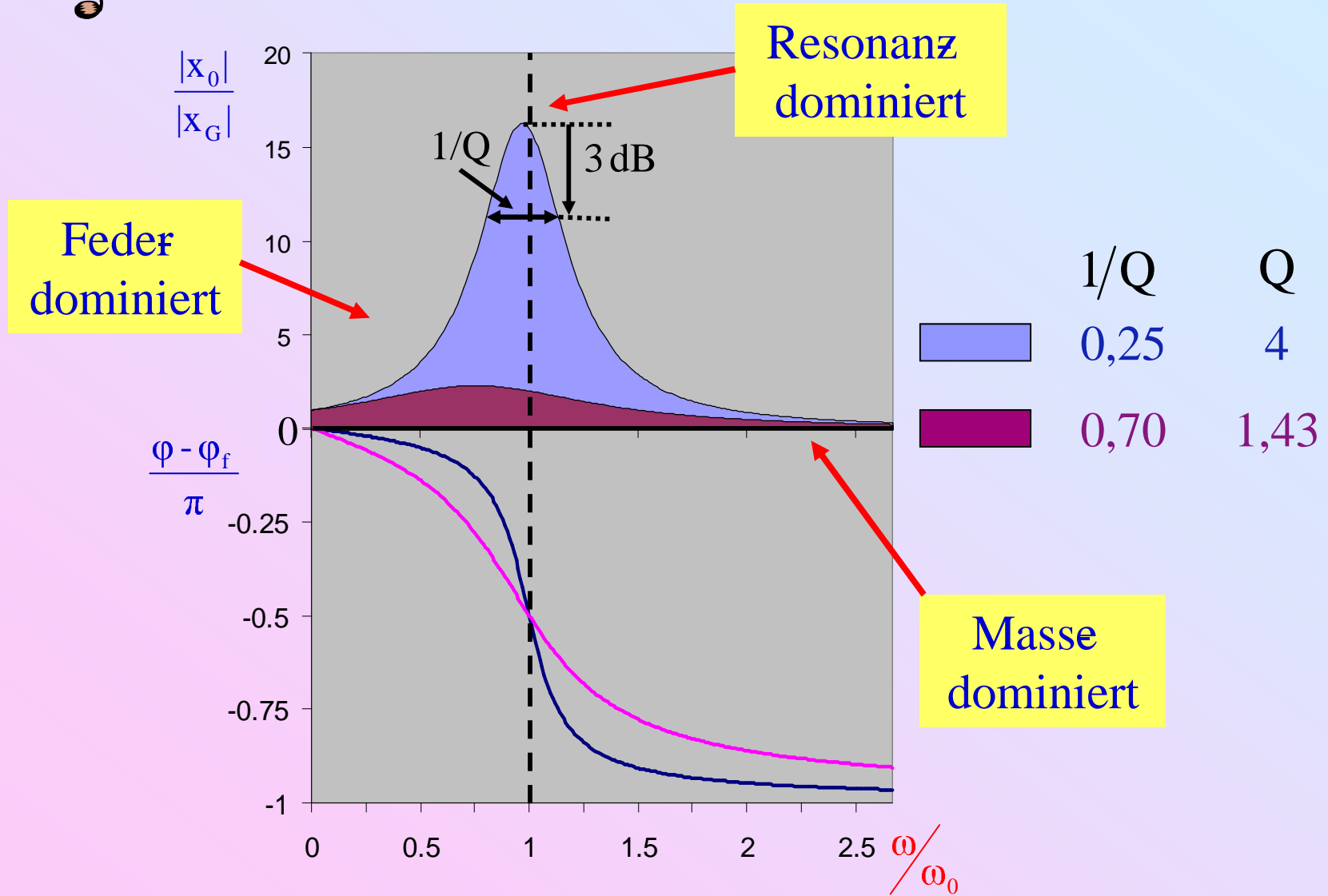
$$|x_R|^2 \rightarrow |x|^2: \quad \text{Dämpfung} = -10 \cdot \lg\left(\frac{|x|^2}{|x_R|^2}\right) \text{ dB}$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ dB} &\Leftrightarrow |x_R| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |x_R| \quad ; \quad |x_R|^2 \rightarrow \frac{1}{2} |x_R|^2 \\ 6 \text{ dB} &\Leftrightarrow |x_R| \rightarrow \frac{1}{2} |x_R| \quad ; \quad |x_R|^2 \rightarrow \frac{1}{4} |x_R|^2 \\ 9 \text{ dB} &\Leftrightarrow |x_R| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} |x_R| \quad ; \quad |x_R|^2 \rightarrow \frac{1}{8} |x_R|^2 \quad \dots \end{aligned}$$

Bemerkung: Analog für andere Größen (v, a, ...) und andere Bezugspunkte

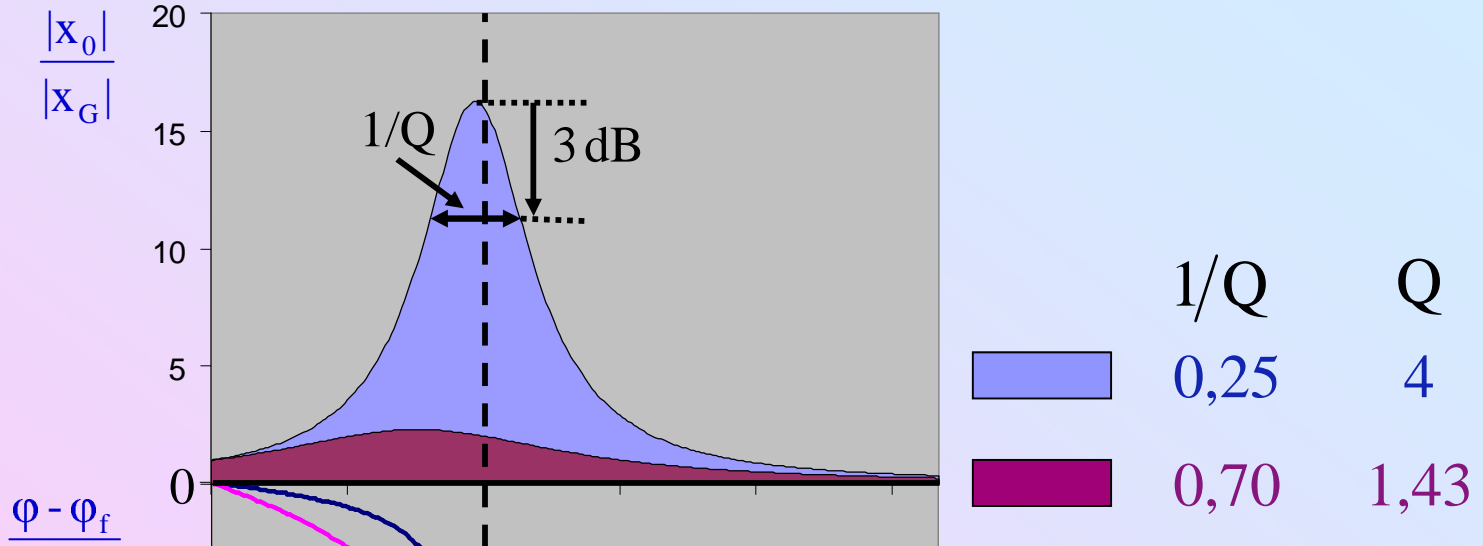


Resonanzkurve und Phasenschub:





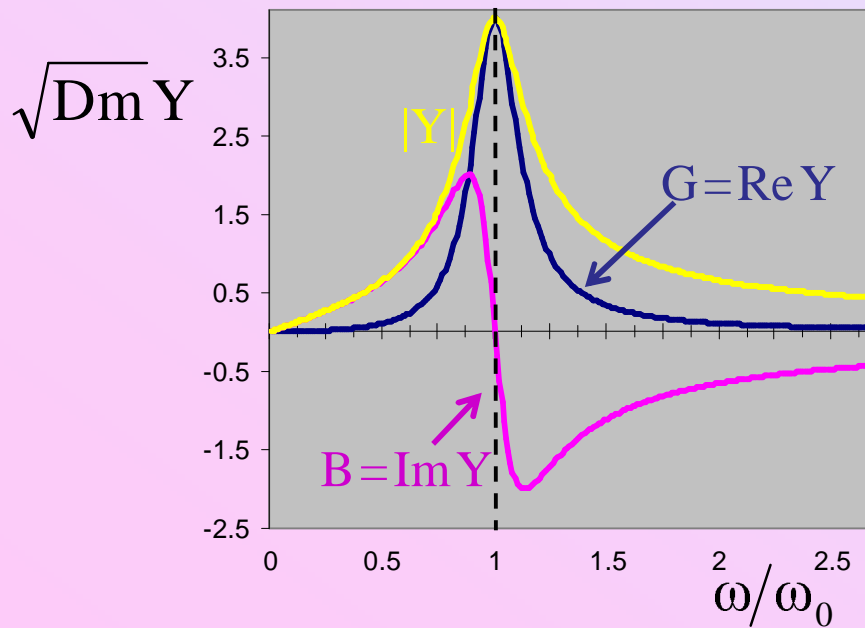
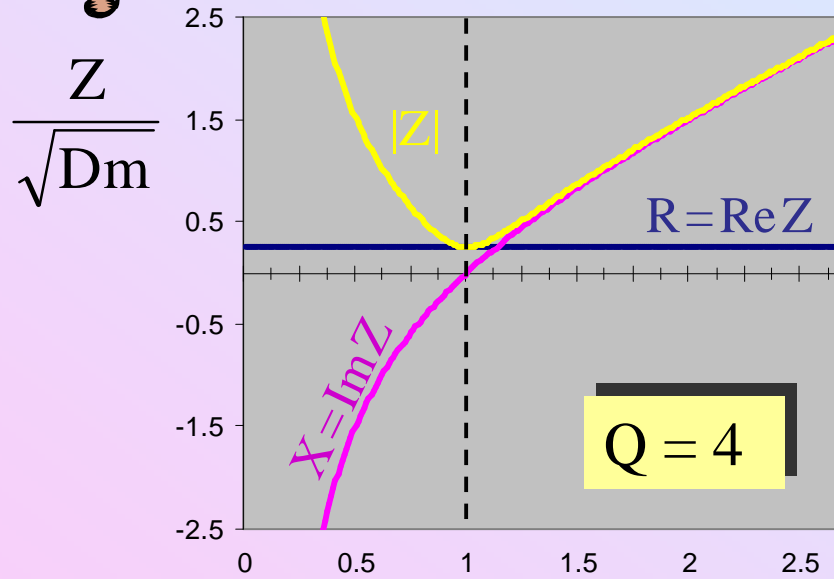
Resonanzkurve und Phasenschub:



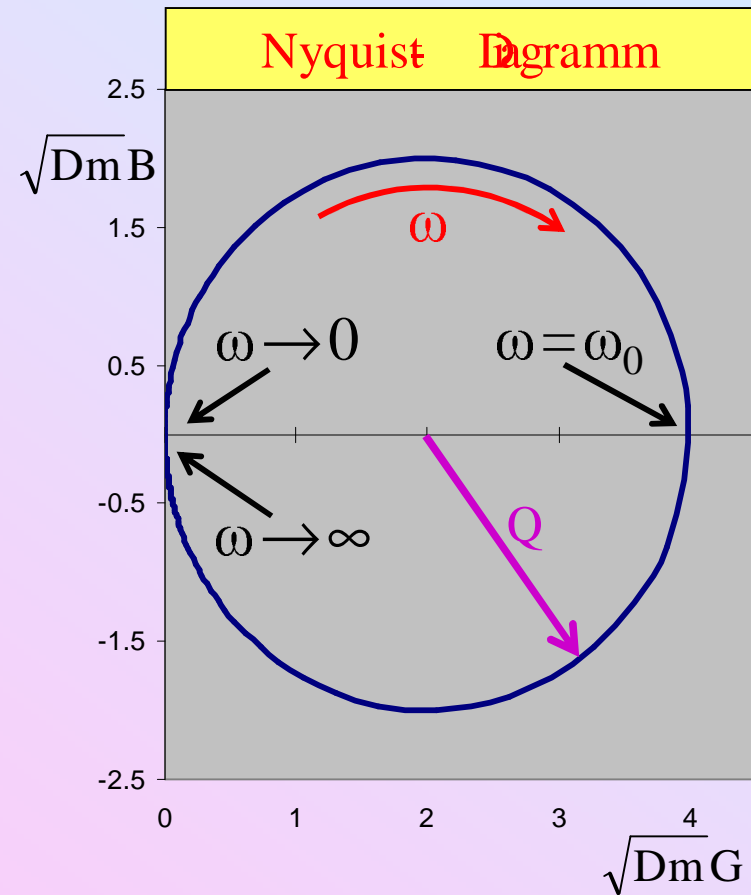
	$\omega \rightarrow 0$	Steigung	$\omega \rightarrow \infty$	Steigung
$ x_0 $	const.	0 dB/Oktave	$\propto 1/\omega^2$	- 12dB/Oktave
$ v_0 $	$\propto \omega$	6 dB/Oktave	$\propto 1/\omega$	- 6dB/Oktave
$ a_0 $	$\propto \omega^2$	12 dB/Oktave	const.	- 0dB/Oktave
1 Oktave \Leftrightarrow Faktor 2 in $\omega \Leftrightarrow [\omega, 2\omega]$				



Darstellungen von Impedanz und Admittanz



$$Z = \frac{1}{Y} = \gamma + i \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} m$$

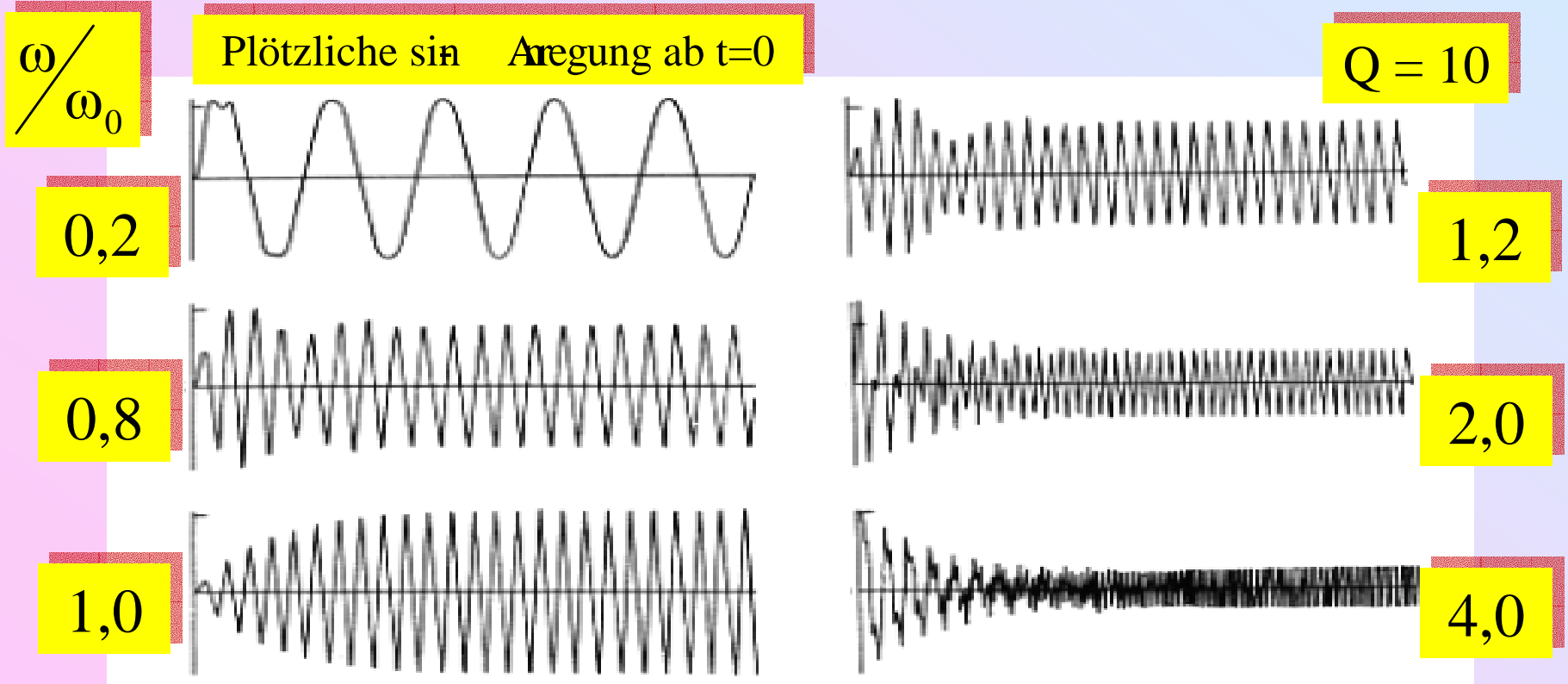


1.3.3. Der Einschwingvorgang

🎵 Form: Anfangsbedingungen (Anregung)

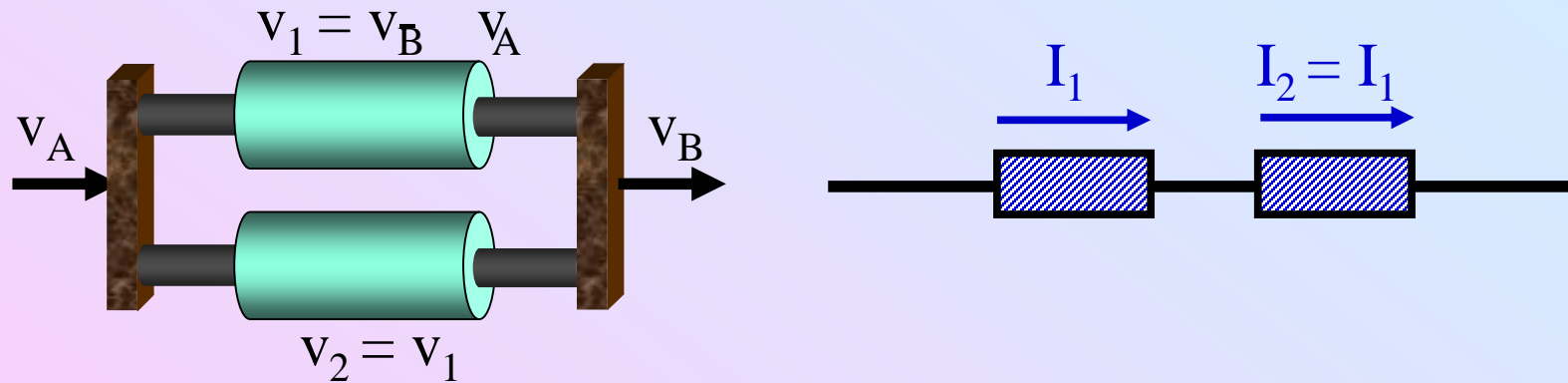
🎵 Einschwingdauer: einige τ_D

🎵 Komponenten: $e^{i\omega_0 t}$, $e^{i\omega t} \Rightarrow$ Schwebung $\left\{ \begin{array}{l} \text{von } \omega + \omega_0 \\ \text{mit } |\omega - \omega_0| \end{array} \right.$

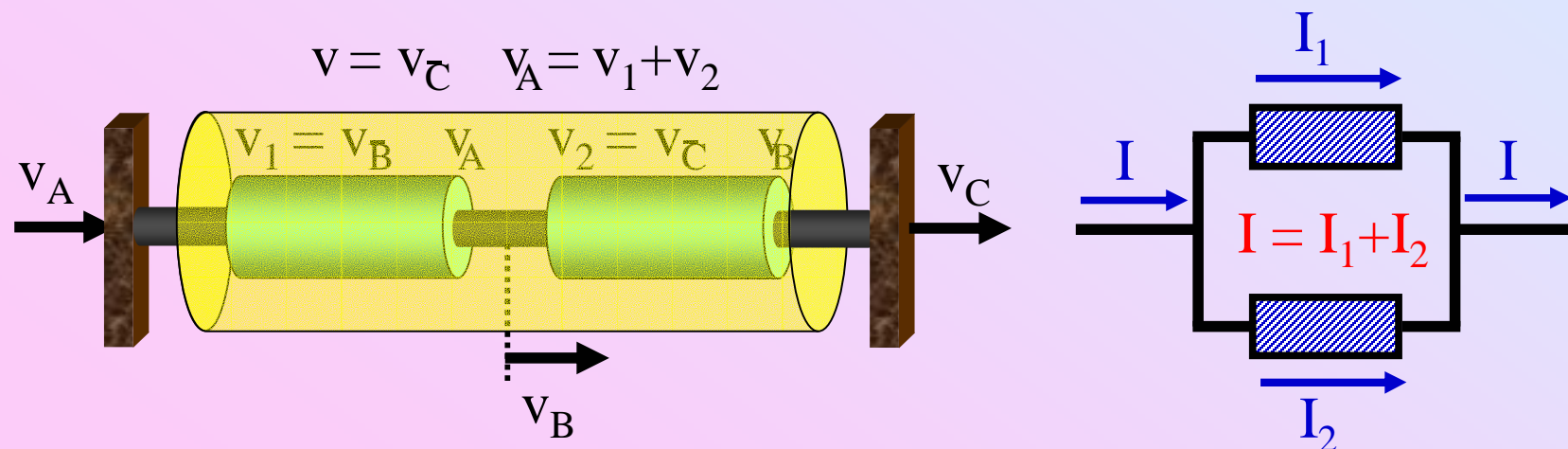


1.3.4. Elektrisches Äquivalent

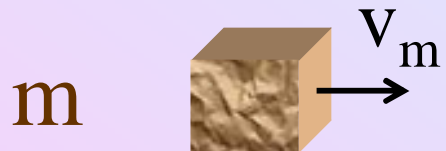
🎵 mechanische Parallelschaltung \Leftrightarrow elektrische Serienschaltung



🎵 mechanische Serienschaltung \Leftrightarrow elektrische Parallelschaltung

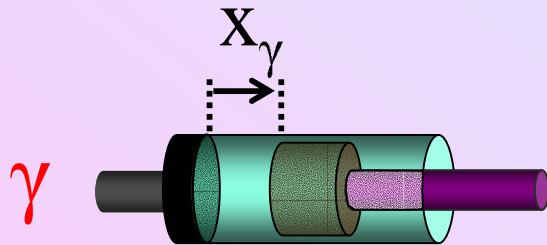
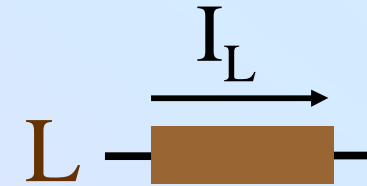


🎵 Kraft \Leftrightarrow elektrische Spannung



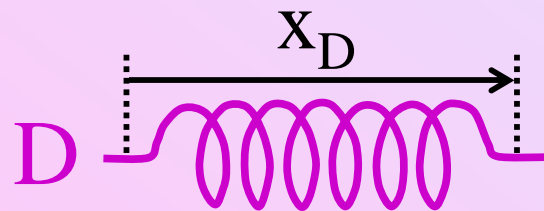
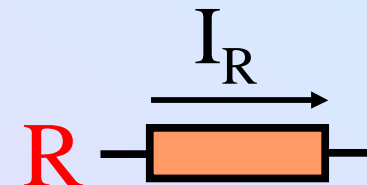
$$F_m = m \dot{v}_m$$

$$\hat{=} L \dot{I}_L = U_L$$



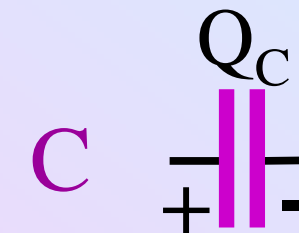
$$F_\gamma = m \dot{x}_\gamma$$

$$\hat{=} R I_R = U_R$$



$$F_D = D x_D$$

$$\hat{=} \frac{1}{C} Q_C = U_C$$

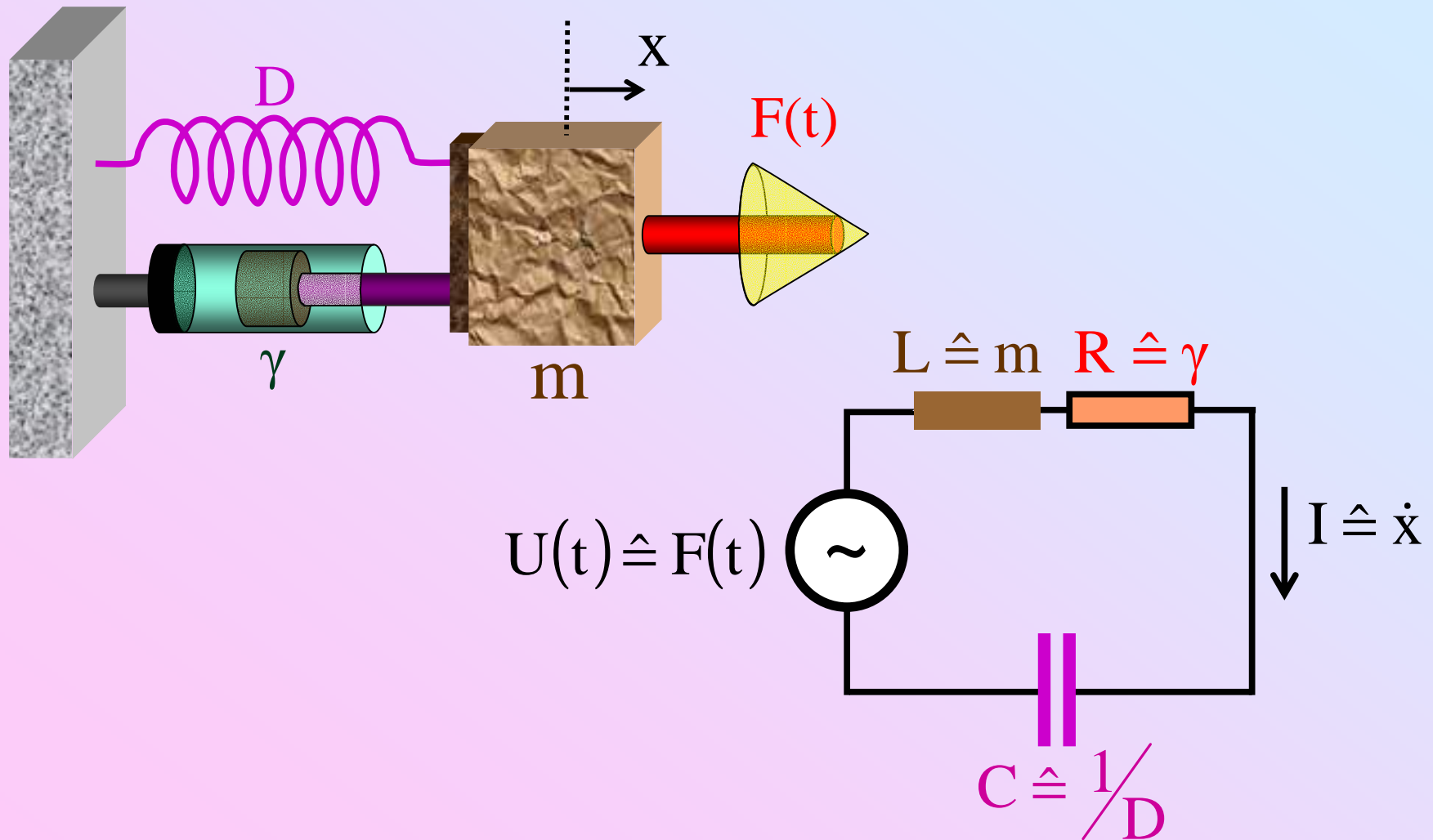


🎵 Analysiere im Einzelfall: {
 Geschwindigkeitsverläufe
 Kräftegleichgewichte

 Beispiel 1:

$$V_{\text{Feder}} = V_{\text{Dämpfer}} = V_{\text{Masse}}$$

$$F = F_{\text{Masse}} + F_{\text{Dämpfer}} + F_{\text{Feder}}$$

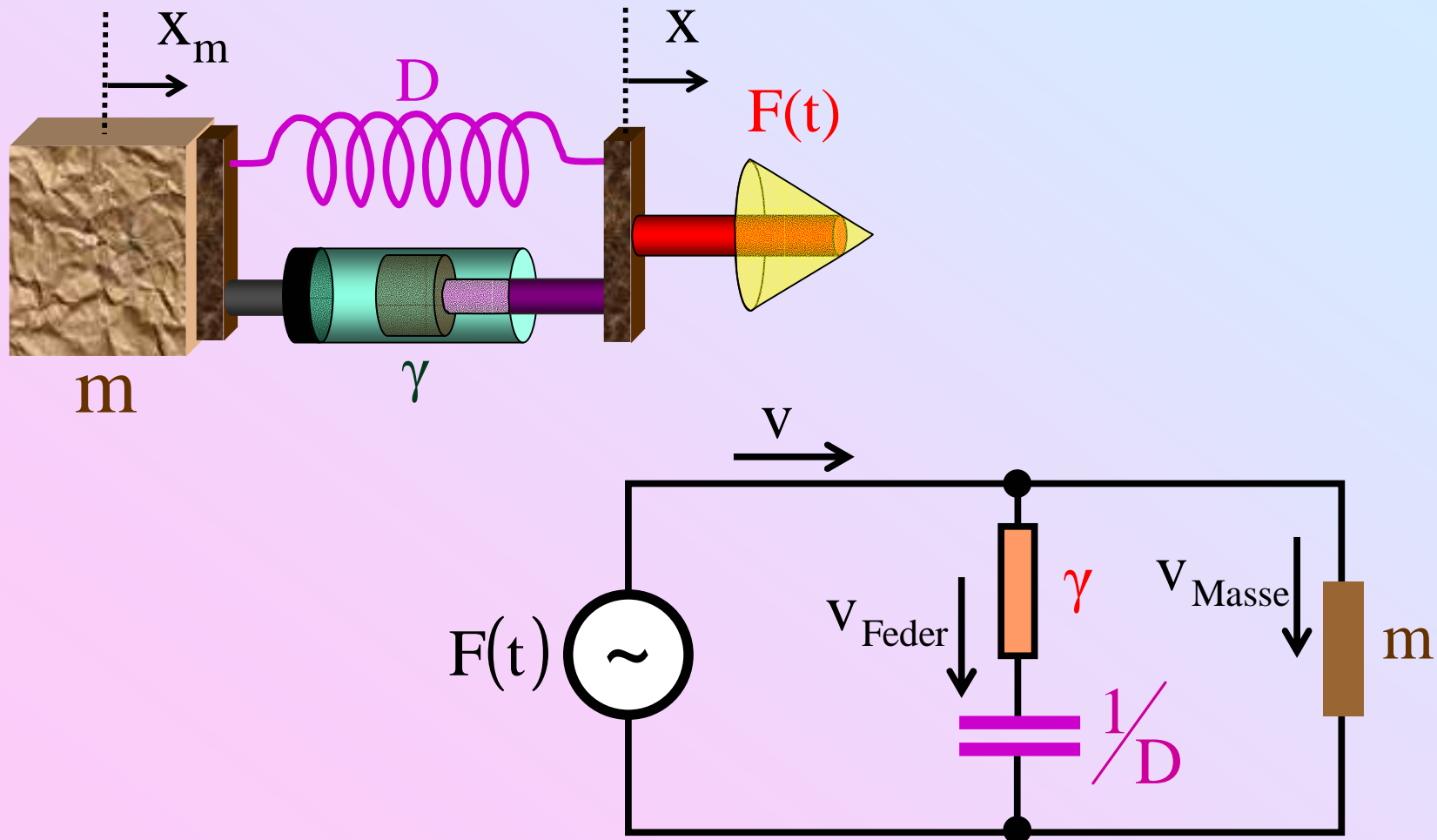




Beispiel 2:

$$V = V_{\text{Feder}} + V_{\text{Masse}}, \quad V_{\text{Feder}} = V_{\text{Dämpfer}}$$

$$F = F_{\text{Masse}} = F_{\text{Dämpfer}} + F_{\text{Feder}}$$

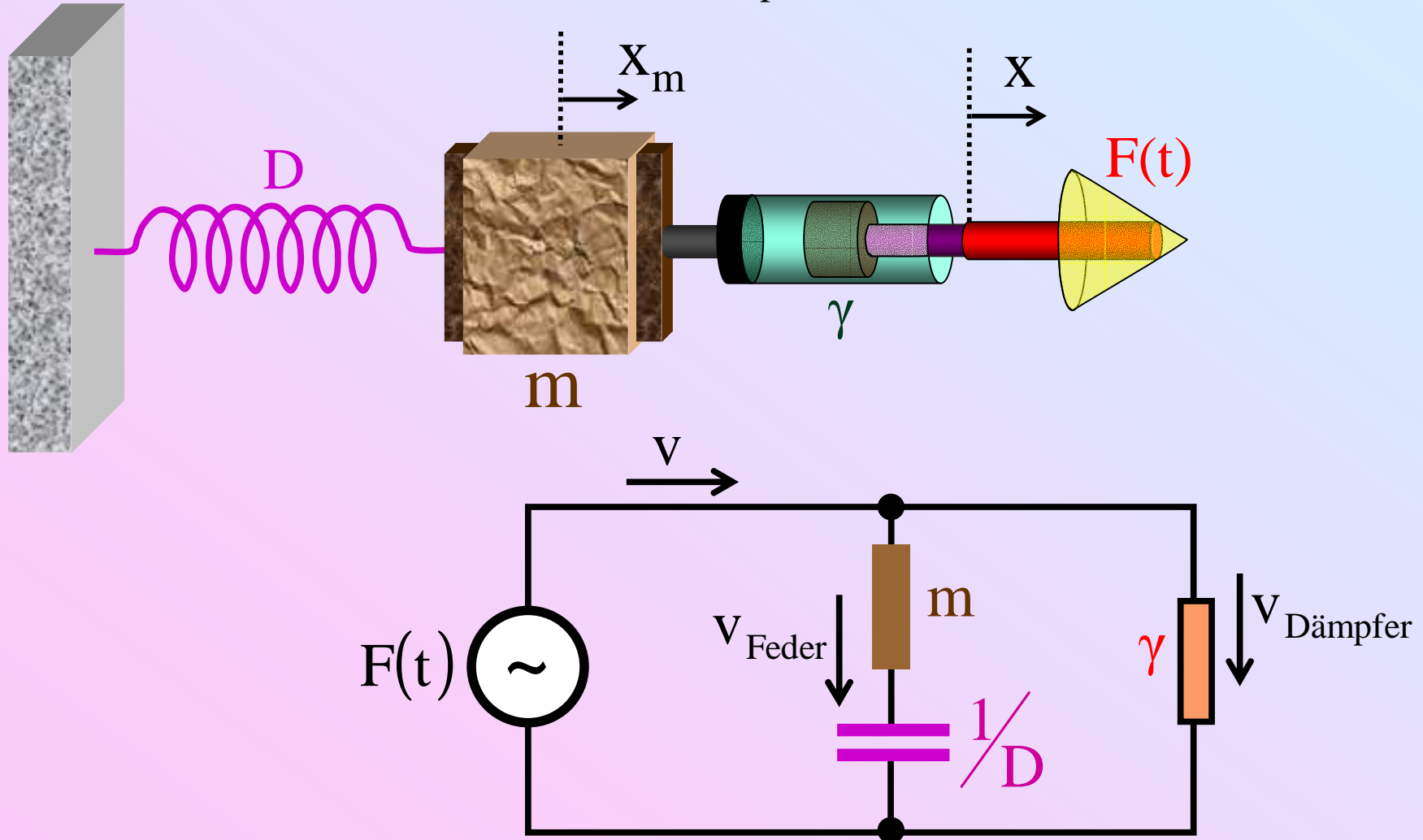




Beispiel 3:

$$v = v_{\text{Masse}} + v_{\text{Dämpfer}}, \quad v_{\text{Feder}} = v_{\text{Masse}}$$

$$F = F_{\text{Dämpfer}} = F_{\text{Masse}} + F_{\text{Feder}}$$

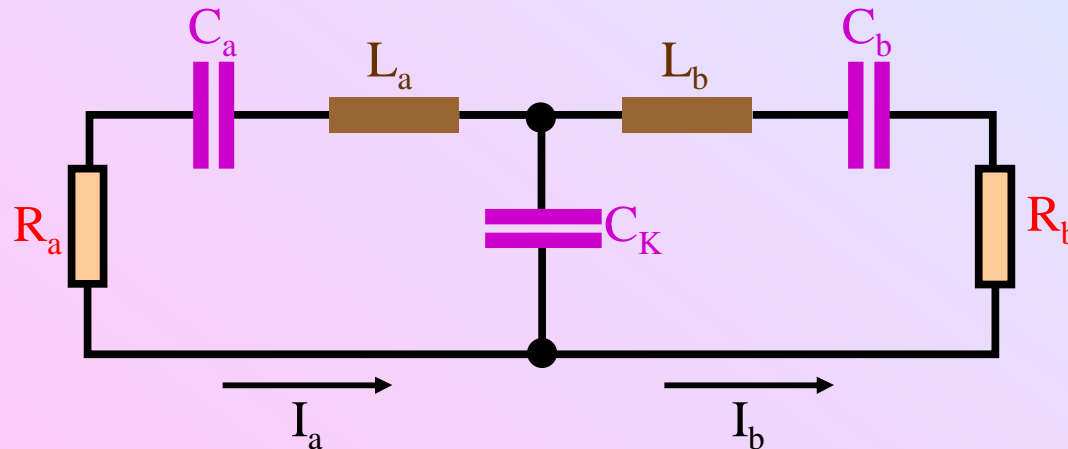
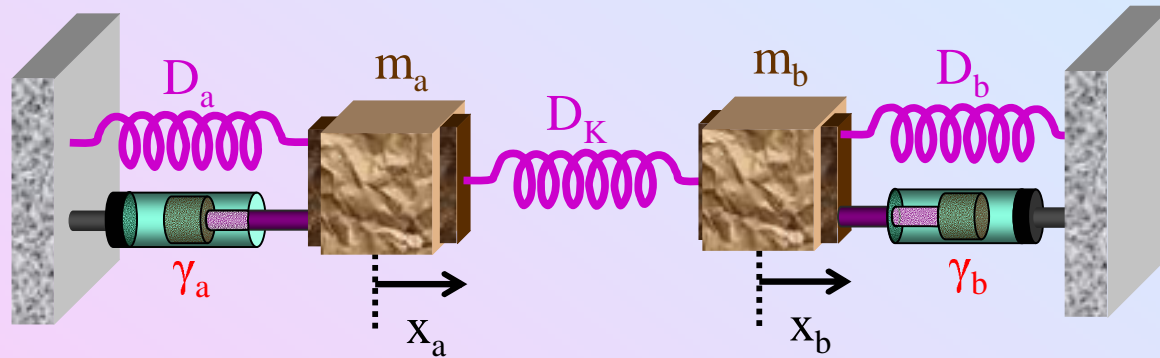


1.4. Gekoppelte Schwingungen

Zerlegung:

- stabile Schwingungskonfigurationen: (Eigen-)Moden
- Eine Eigenfrequenz pro Mode
- eine Mode pro Freiheitsgrad

1.4.1. Beispiel: Zwei gekoppelte Schwinger



$$\alpha_{a,b} = \frac{\gamma_{a,b}}{2m_{a,b}}$$
$$\omega_{a,b}^2 = \frac{D_{a,b} + D_K}{m_{a,b}}$$

$$\omega_{aK}^2 = \frac{D_K}{m_a}$$

$$\omega_{bK}^2 = \frac{D_K}{m_b}$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}_a + 2\alpha_a \dot{x}_a + \omega_a^2 x_a - \omega_{aK}^2 x_b = 0$$

$$\ddot{x}_b + 2\alpha_b \dot{x}_b + \omega_b^2 x_b - \omega_{bK}^2 x_a = 0$$

🎵 Musikinstrumente: kleine Dämpfung
⇒ Vereinfachte Diskussion für $\alpha_a = \alpha_b = 0$

$$\begin{aligned}\ddot{X}_a + \omega_a^2 X_a - \omega_{aK}^2 X_b &= 0 \\ \ddot{X}_b + \omega_b^2 X_b - \omega_{bK}^2 X_a &= 0\end{aligned}$$

Ansatz: $x_a, x_b \propto e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{d}{dt} = i\omega \cdot$

$$\begin{aligned}-\omega^2 X_a + \omega_a^2 X_a - \omega_{aK}^2 X_b &= 0 \\ -\omega^2 X_b + \omega_b^2 X_b - \omega_{bK}^2 X_a &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega^2 - \omega_a^2) X_a &= \omega_{aK}^2 X_b \\ (\omega^2 - \omega_b^2) X_b &= \omega_{bK}^2 X_a\end{aligned}$$

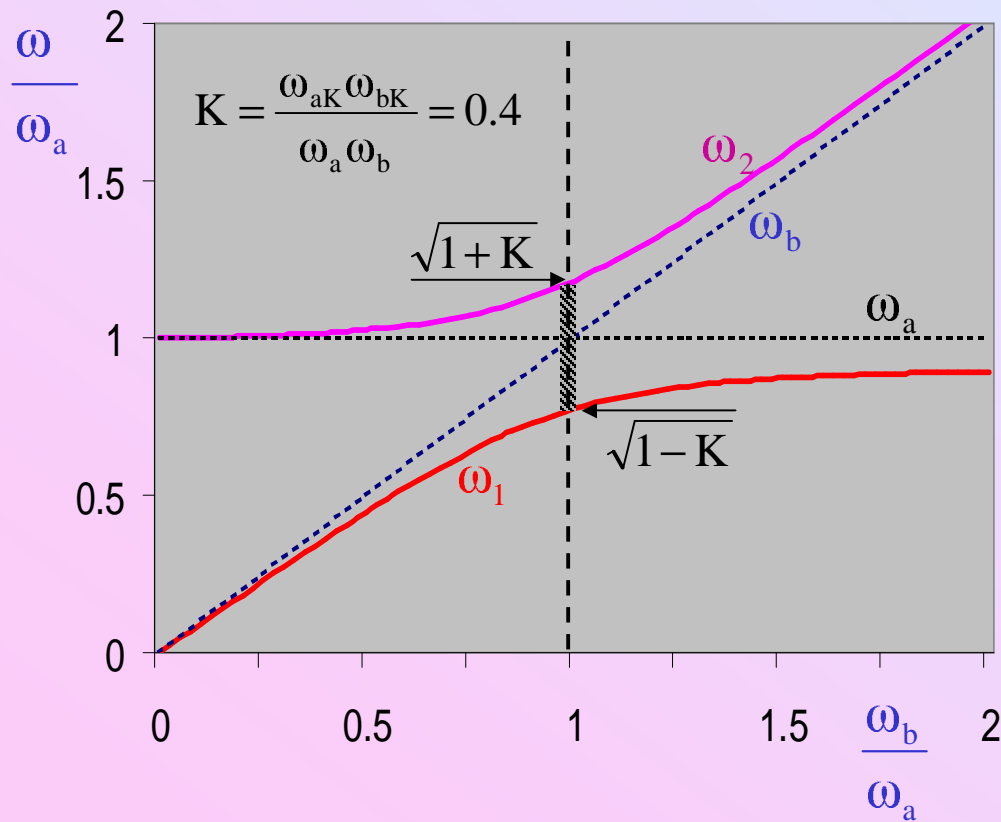
$$(\omega^2 - \omega_a^2) \cdot (\omega^2 - \omega_b^2) = \omega_{aK}^2 \omega_{bK}^2$$

Lösung: Zwei Eigenfrequenzen

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(\omega_a^2 - \omega_b^2)^2}{4} + \omega_{aK}^2 \omega_{bK}^2}$$

 Diskussion:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(\omega_a^2 - \omega_b^2)^2}{4} + \omega_{aK}^2 \omega_{bK}^2}$$



keine Kopplung $\Leftrightarrow \omega_{a,bK} = 0, \omega_{1,2} = \omega_{a,b}$

Kopplung $\neq 0 \Rightarrow$

$\omega_b/\omega_a \rightarrow 0: \omega_1 \rightarrow \omega_b, \omega_2 \rightarrow \omega_a$

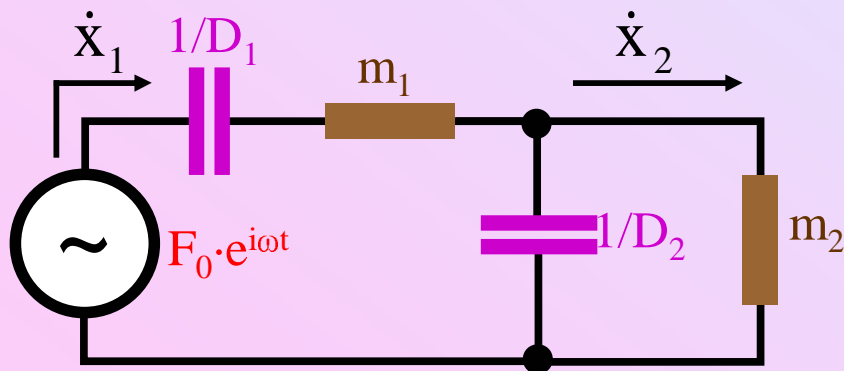
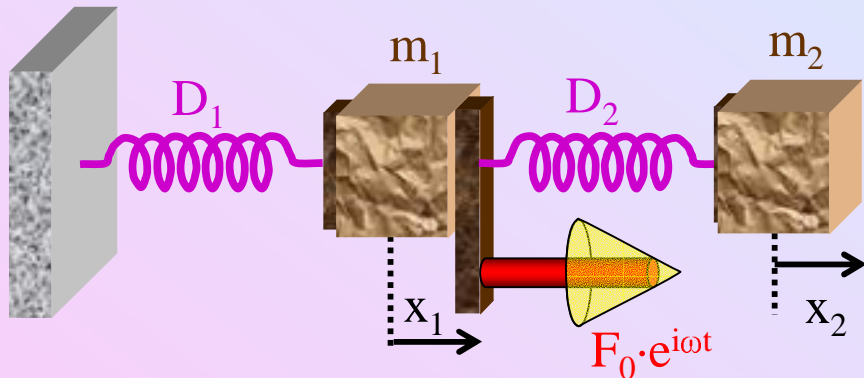
$\omega_b/\omega_a \rightarrow \infty: \omega_1 \rightarrow \omega_a, \omega_2 \rightarrow \omega_b$

Minimale Frequenzaufspaltung:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{1 \pm K} \cdot \omega_a \text{ bei } \omega_a = \omega_b$$

1.4.2. Erzwungene gekoppelte Schwingungen

Einfaches Beispiel (Dämpfung vernachlässigt):



Anwendungen:

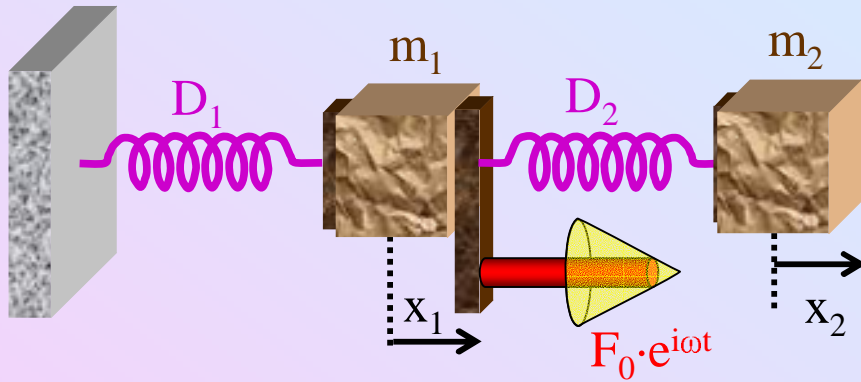
- 🎵 m_2 als Tilger
- 🎵 Bass Reflex Lautsprecher
- 🎵 Gitarre mit fixierten Rippen

Nach Einschwingen:

$$x_1(t) = x_{1_0} \cdot e^{i\omega t}$$

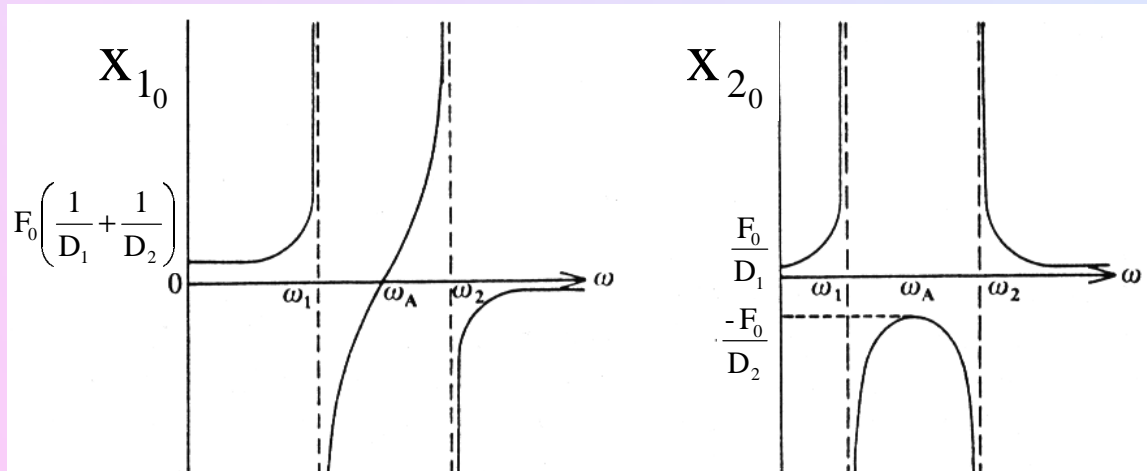
$$x_2(t) = x_{2_0} \cdot e^{i\omega t}$$

Dämpfung vernachlässigt $\Rightarrow x_{1_0}, x_{2_0}$ reell



$$x_1(t) = x_{1_0} \cdot e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = x_{2_0} \cdot e^{i\omega t}$$



ω_1, ω_2 : Resonanzen

$$\left. \begin{aligned} \omega_A &= \omega_{0_2} \\ &= \sqrt{\frac{D_2}{m_2}} \end{aligned} \right\} \text{Antiresonanz} \\ (x_{1_0} = 0, x_{2_0} = \max)$$

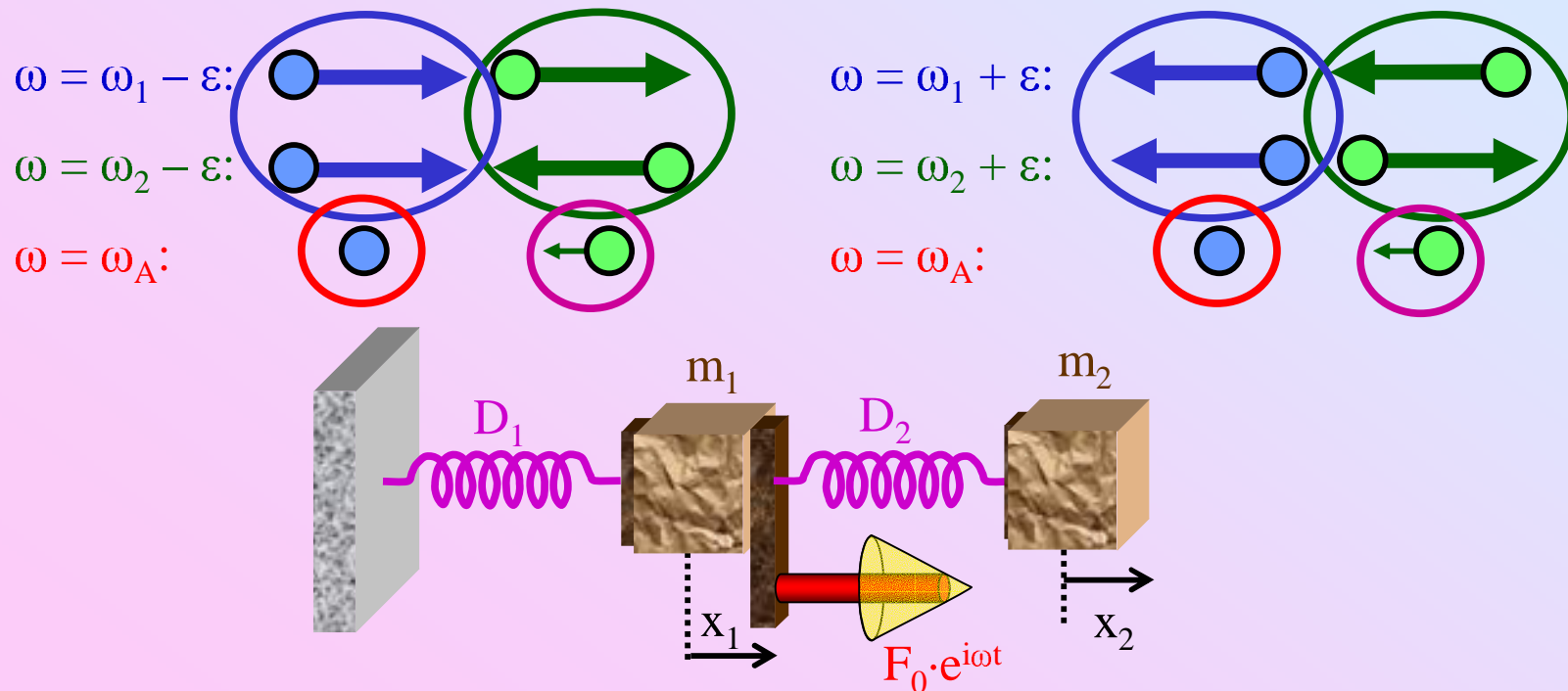
Konfigurationen (Moden): (Richtungen bezüglich F_0)



Theorem: In einem (beliebigen) gekoppelten System seien ω_1, ω_2 zwei aufeinanderfolgende Resonanzfrequenzen. Das System werde im Punkt P_1 angeregt und im Punkt P_2 gemessen.

Sind die Schwingungsamplituden in P_2 relativ zu P_1 in beiden Moden

- entgegengesetzt $\Rightarrow |x_{20}|$ durchläuft zwischen ω_1, ω_2 ein Minimum
- gleichgerichtet $\Rightarrow |x_{20}|$ durchläuft zwischen ω_1, ω_2 eine Antiresonanz



Theorem: In einem (beliebigen) gekoppelten System seien ω_1, ω_2 zwei aufeinanderfolgende Resonanzfrequenzen. Das System werde im Punkt P_1 angeregt und im Punkt P_2 gemessen.

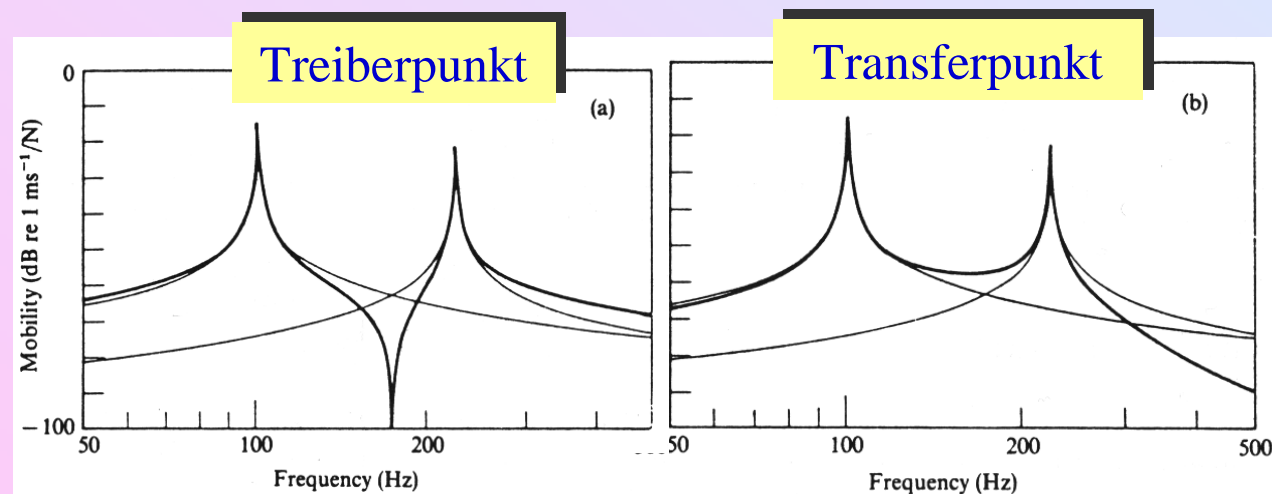
Sind die Schwingungsamplituden in P_2 relativ zu P_1 in beiden Moden

- entgegengesetzt $\Rightarrow |x_{20}|$ durchläuft zwischen ω_1, ω_2 ein Minimum
- gleichgerichtet $\Rightarrow |x_{20}|$ durchläuft zwischen ω_1, ω_2 eine Antiresonanz

Folgerung: $P_2 = P_1 \Rightarrow$ Der Treiberpunkt selbst durchläuft mit wachsender Frequenz eine Folge abwechselnder Resonanzen und Antiresonanzen.

Beispiel:

2 D System



1.4.3. Charakterisierung des Frequenzgangs

P_1 : Erreger $\vec{F}(t)$

P_2 : Sensor $\Rightarrow \begin{cases} \vec{x}(t) & \text{Auslenkung} \\ \vec{v}(t) & \text{Geschwindigkeit} \\ \vec{a}(t) & \text{Beschleunigung} \end{cases}$

Wichtiger Spezialfall: $P_1 = P_2$

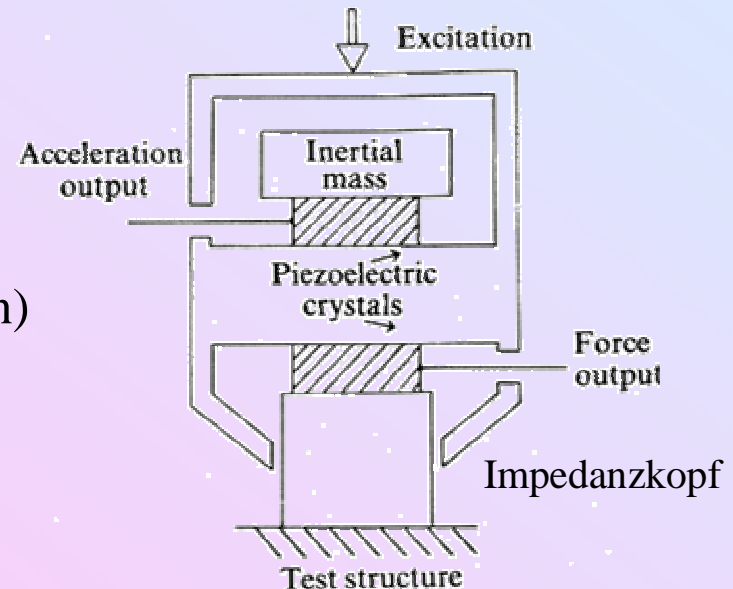


Messverfahren:

\vec{F}, \vec{a} : Impedanzkopf

\vec{v} : $\begin{cases} \int \vec{a}(t) dt \\ \text{Nahfeld Schallwellen (Mikrophon)} \\ \text{mechanische Schreiber} \end{cases}$

\vec{x} : $\begin{cases} \int \vec{v}(t) dt \\ \text{holographische Interferometrie} \end{cases}$



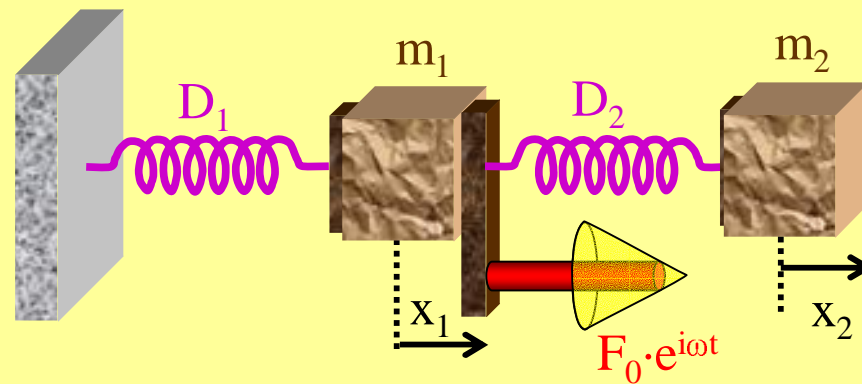
Charakteristische Frequenzgangs Messgrößen:

Nachgiebigkeit (Compliance)	$\frac{x}{F}$	$\hat{=}$	$\frac{Q}{U}$	Kapazität
Mobilität, Admittanz	$\frac{v}{F}$	$\hat{=}$	$\frac{I}{U}$	Leitwert
Acceleranz	$\frac{a}{F}$	$\hat{=}$	$\frac{\dot{I}}{U}$	1 / Induktivität
Steifigkeit	$\frac{F}{x}$	$\hat{=}$	$\frac{U}{Q}$	1 / Kapazität
Impedanz	$\frac{F}{v}$	$\hat{=}$	$\frac{U}{I}$	Impedanz
Dynamische Masse	$\frac{F}{a}$	$\hat{=}$	$\frac{U}{I}$	Induktivität

🎵 $P_1 = P_2$: Präfix „Treiber(punkt)“

🎵 $P_1 \neq P_2$: Präfix „Transfer“

Beispiel:



Treiber Mobilität: $Y_{11} = \frac{\dot{x}_1}{F}$

Transfer Mobilität: $Y_{21} = \frac{\dot{x}_2}{F}$

Asymptotisches Verhalten:

ω_{\min} : kleinste Resonanzfrequenz

ω_{\max} : größte Resonanzfrequenz

	Nachgiebigkeit	Mobilität	Acceleranz	Steifigkeit	Impedanz	Dynamische Masse
Asymptotischer Bereich	$\frac{x}{F}$	$\frac{v}{F}$	$\frac{a}{F}$	$\frac{F}{x}$	$\frac{F}{v}$	$\frac{F}{a}$
$\omega < \omega_{\min}$	0	6	12	0	- 6	- 12
$\omega > \omega_{\max}$	- 12	- 6	0	12	6	0

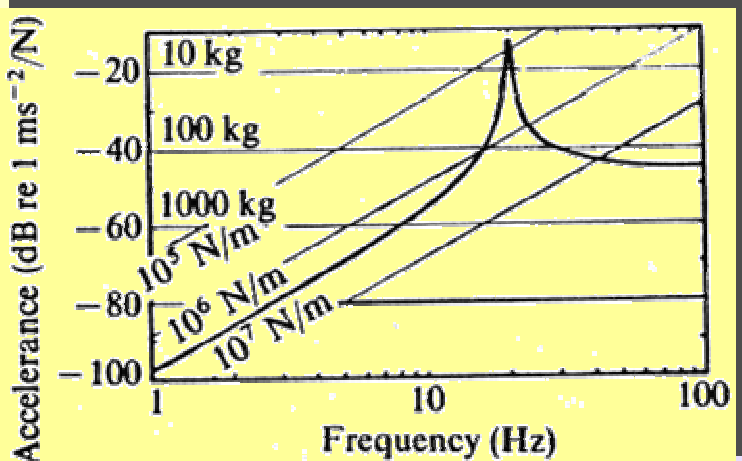
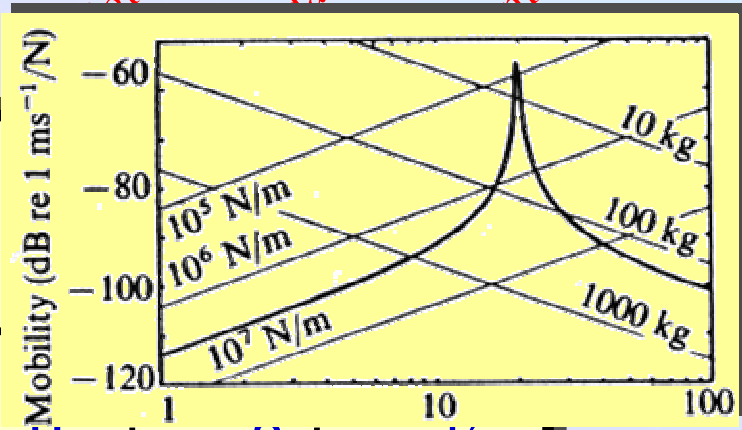
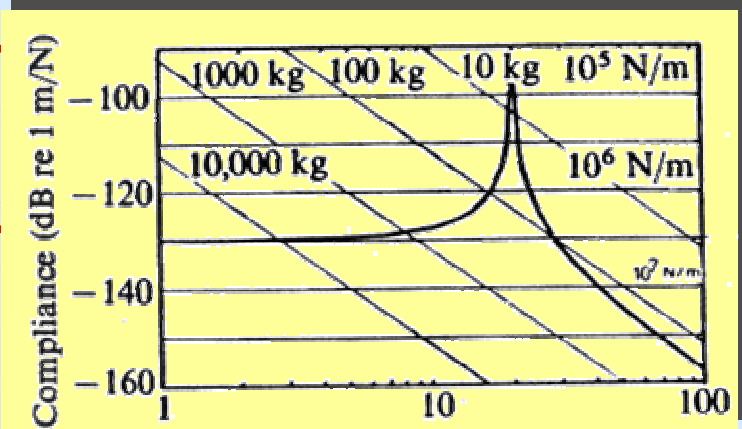
(Einheit: dB/Oktave)

Asymptotisches Verhalten:

ω
 ω

Nachgiebigkeit
Mobilität
Acceleranz

Asymptotischer Bereich	$\frac{x}{F}$	$\frac{v}{F}$	$\frac{a}{F}$
$\omega < \omega_{\min}$	0	6	12
$\omega > \omega_{\max}$	-12	-6	0



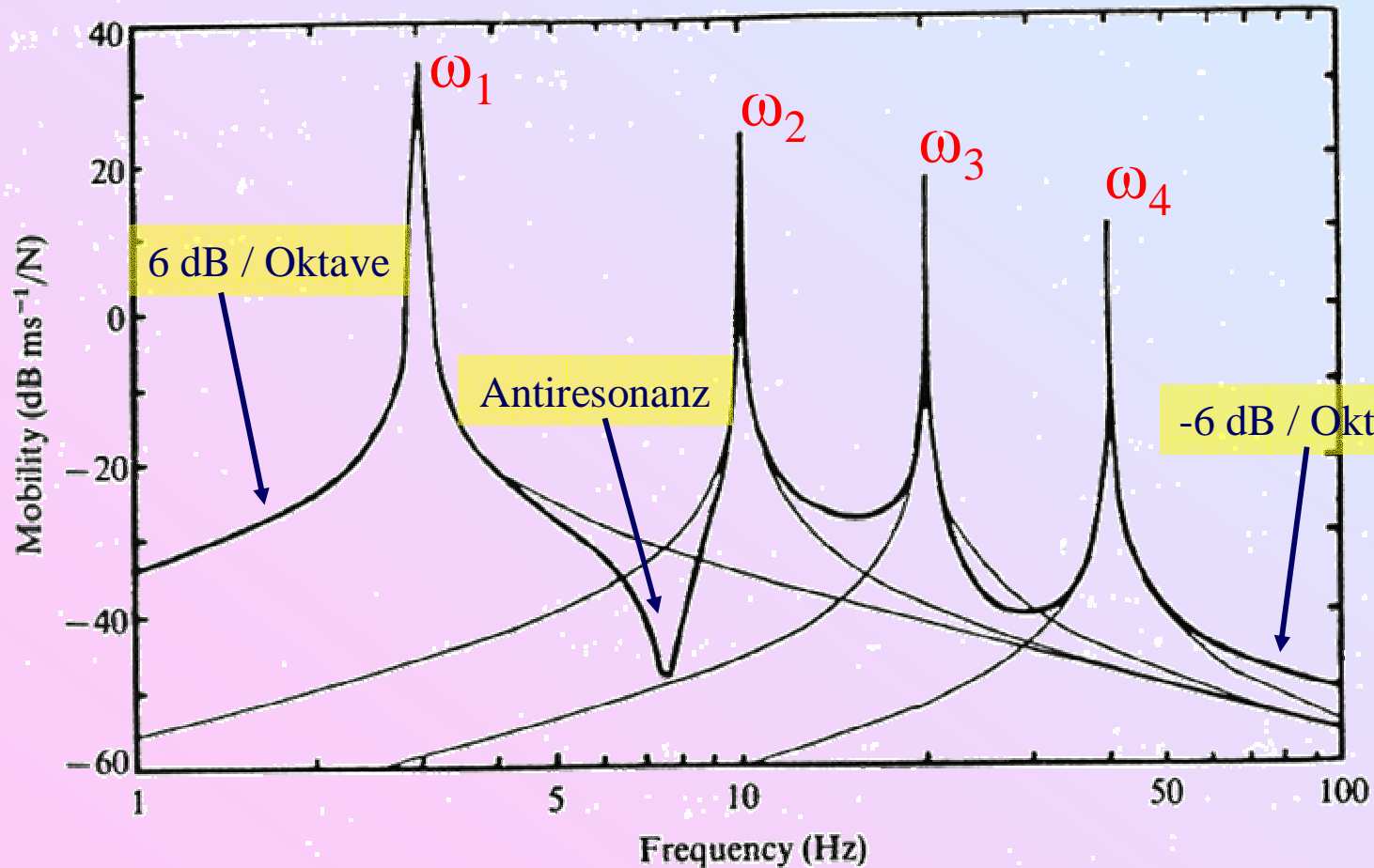
Beispiel: Transfer Mobilität einer leicht gedämpften Struktur mit 4 Schwingungsmoden

Schwingungsrichtung am Messpunkt

relativ zum Treiberpunkt ...

bleibt gleich

klappt um



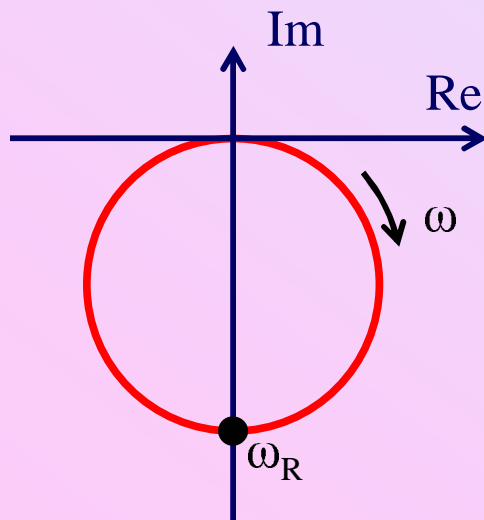
Darstellung der (i.a. komplexen) charakteristischen Parameter:

z. B. Impedanz: $Z = |Z| \cdot e^{i\varphi} = R + iX$

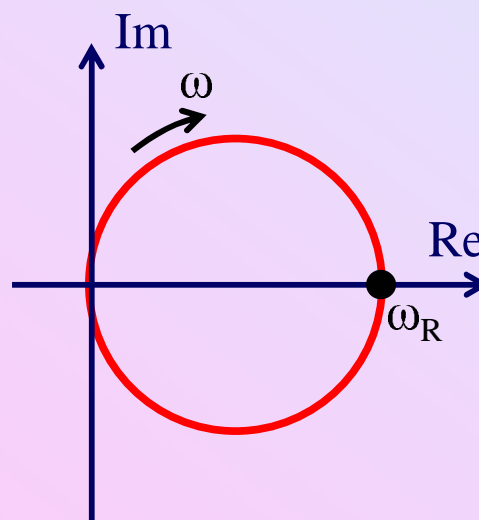
🎵 $|Z|(\omega)$ und $\varphi(\omega)$

🎵 $\text{Re } Z(\omega)$ und $\text{Im } Z(\omega)$

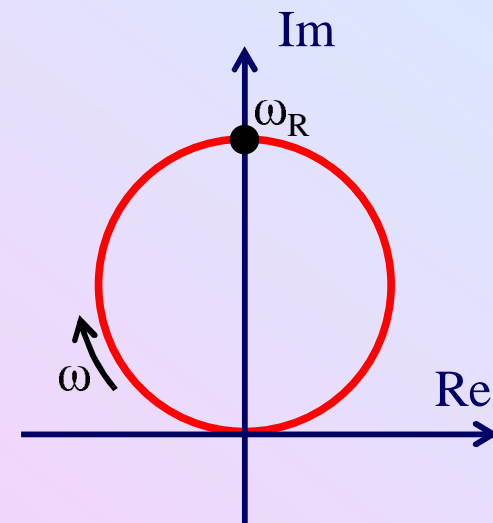
🎵 Nyquist Diagramme, z.B. für einzelne Resonanz:



Nachgiebigkeit x / F



Mobilität v / F

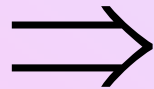


Acceleranz a / F

1.5. Nichtlineare Schwingungen

Lineare Systeme:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Dx = F(t) \quad \dots$$



- **Superpositionsprinzip**

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ Lösung zu } F \\ x' \text{ Lösung zu } F' \end{array} \right\} \Rightarrow x + x' \text{ Lösung zu } F + F'$$

- **Eigenfrequenzen unabhängig von Moden Amplituden**
- **komplexe Schreibweisen geeignet**

Realistische Systeme: Nichtlineare Beiträge

a) Grenzen des Hookeschen Gesetzes $\Rightarrow D = D(x)$

b) Turbulenz $\Rightarrow \gamma = \gamma(x, \dot{x})$

c) Bogenkraft auf Saite = f (Saitenposition, Relativgeschwindigkeit)

d) Strömung in Rohrventilen (Blasinstrumente) = f (Druckabfall)

$$\Rightarrow F = F(x, \dot{x}, t)$$

Konsequenzen:

a) $\omega_0 = \omega_0(x_0)$

b) Hysterese Verhalten in (x_0, ω_0) -Diagramm

c) Bifurkationen und chaotisches Verhalten (seltsame Attraktoren)

(d.h., System schwingt sich nicht immer auf periodische Bewegung ein!)

1.5.1. Analytische Methoden

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} + \gamma(x, \dot{x})\dot{x} + Dx = F(x, \dot{x}, t)$$


$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}, \quad g = \frac{F - \gamma\dot{x}}{m}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g(x, \dot{x}, t)$$

a) Spezialfall: F periodisch, z.B. $F = F_0 \cdot \cos(\omega t)$

⇒ Störungsrechnung bei kleinen Nichtlinearitäten

Ansatz:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = -x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$F = F_0 \cos(\omega t)$$

$$\gamma = \gamma(x, \dot{x}) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \dots$$

Fourierentwicklung

Einsetzen

$$m\ddot{x} + \gamma(x, \dot{x})\dot{x} + Dx = F(x, \dot{x}, t)$$

Koeffizientenvergleich

$$x_0, \varphi$$

b) Allgemeines Verfahren:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g(x, \dot{x}, t)$$

$$\begin{aligned} \underline{g=0}: \quad x(t) &= a \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}(t) &= a\omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{array} \right\} \Rightarrow a, \varphi$$

$$\begin{aligned} \underline{g \neq 0}: \quad x(t) &= a(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \\ \dot{x}(t) &= a(t)\omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{g}{\omega_0} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \\ \dot{\varphi} &= -\frac{g}{\omega_0} \cdot \frac{1}{a(t)} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{array} \right\} \Rightarrow a(0), \varphi(0)$$

Beweis: Einsetzen und Nachrechnen!

$$x(t) = a(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi(t))$$

$$\dot{x}(t) = a(t)\omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

&

$$\dot{a} = \frac{g}{\omega_0} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{g}{\omega_0} \cdot \frac{1}{a(t)} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi(t))$$

⇒ noch nichts gewonnen
(Gesetz der konstanten Mühsal)

Näherung: x, \dot{x} - Terme in g „klein“ (inklusive γ)

⇒ $a, \varphi \approx \text{const.}$ während Periode $T = 2\pi/\omega_0$

$$\Rightarrow \langle a \rangle(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} a(t) dt, \quad \langle \varphi \rangle(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi(t) dt$$

$$\frac{d}{dt} \langle a \rangle(t) = \langle \dot{a} \rangle(t), \quad \frac{d}{dt} \langle \varphi \rangle(t) = \langle \dot{\varphi} \rangle(t)$$

Folge:

$$\omega(t) \approx \frac{d}{dt} (\omega_0 t + \langle \varphi \rangle) = \omega_0 + \langle \dot{\varphi} \rangle, \quad \langle a \rangle(t) \approx a(0) + \int_0^t d\tau \langle \dot{a} \rangle(\tau)$$

Beispiel: Schwach gedämpfter, freier, linearer Oszillator

$$F = 0 \Rightarrow g = -\frac{\gamma}{m} \dot{x} = -2\alpha \dot{x}$$

$$\langle \dot{a} \rangle = \left\langle \frac{g}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \varphi) \right\rangle$$

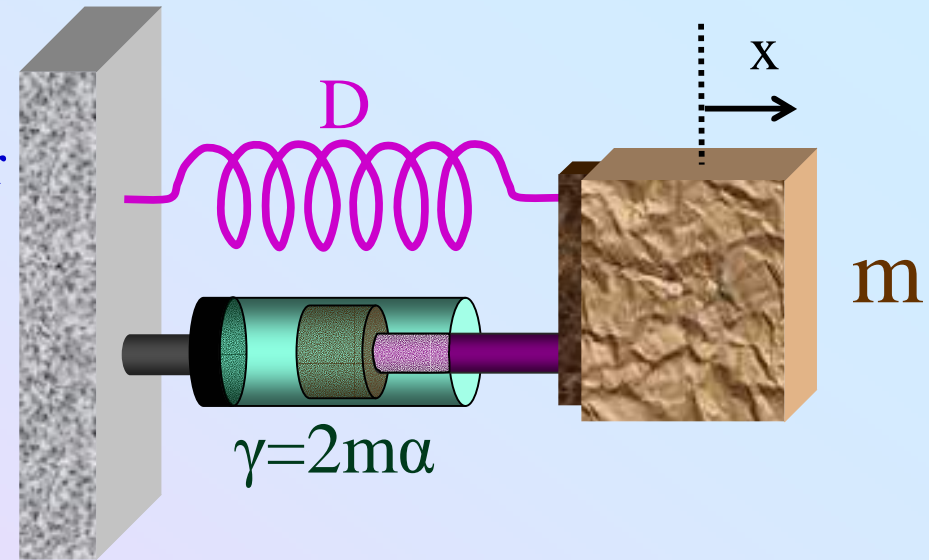
$$= -\frac{2\alpha}{\omega_0} \langle \dot{x} \cos(\omega_0 t + \varphi) \rangle = -\frac{2\alpha}{\omega_0} \langle a \omega_0 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle \approx -\frac{2\alpha}{\omega_0} \underbrace{\langle a \rangle \omega_0}_{-\alpha \cdot \langle a \rangle} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = -\left\langle \frac{g}{a \omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi) \right\rangle = 2\alpha \left\langle \frac{\dot{x}}{a} \sin(\omega_0 t + \varphi) \right\rangle$$

$$= 2\alpha \langle \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) \rangle = 0$$

Also: $x(t) \approx \langle a(0) \rangle e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \langle \varphi(0) \rangle)$

Korrekt für $\alpha \ll \omega_0$!
(vgl. 1.2.)



1.5.2. Der Duffing Oszillator

(Paradebeispiel für Chaos und seltsame Attraktoren)

Physikalischer Ansatz: $D \rightarrow D + \beta m \dot{x}^2$ (nicht lineare Dämpfung)

d.h.

$$g(t) = f(t) - 2\alpha\dot{x} - \beta x^3$$

oft: $f(t) \propto \cos(\omega t)$

- Frequenz hängt von Amplitude ab
- Hysterese bei großen Amplituden

Analytisches Verfahren \Rightarrow

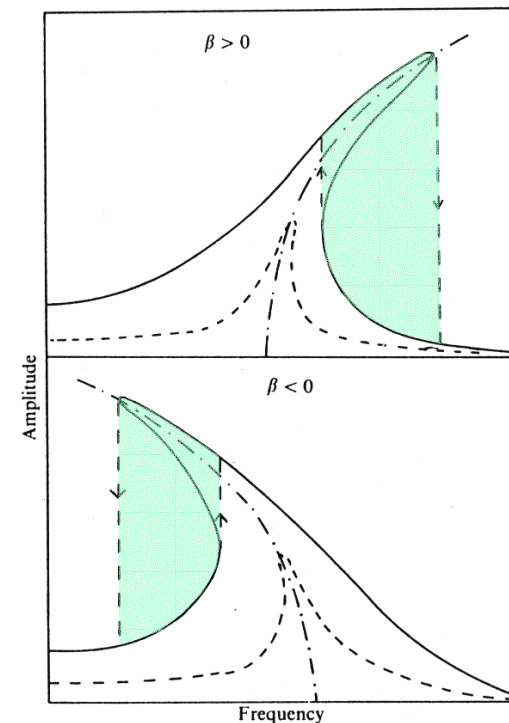


FIGURE 5.1. The frequency response of a nonlinear oscillator of the Duffing type excited by an external sinusoidal force, for the cases of hardening ($\beta > 0$) and softening ($\beta < 0$) behavior. The dotted curves show the response for a smaller exciting force, and the dash-dot curves show the frequency-amplitude relation for free vibration. The vertical broken lines show transitions as the frequency is swept with a constant exciting force.

Störungsrechnung:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g(t) = f(t) - 2\alpha \dot{x} - \beta x^3$$

Ansatz:

$$(f(t) = f_0 \cdot \cos(\omega t) \quad , \quad \alpha \rightarrow 0)$$

$$x = a \cdot \cos(\omega t) \quad \ddot{x} = -a\omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

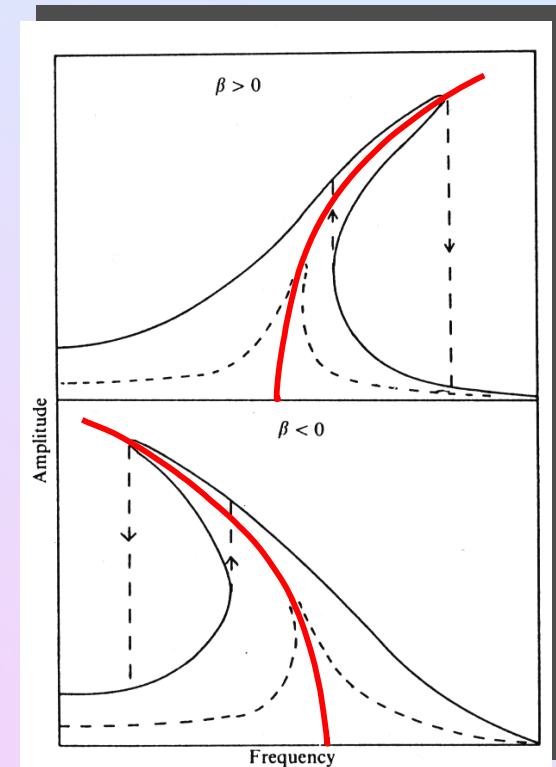
$$x^3 = a^3 \cdot \cos^3(\omega t) = a^3 \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cdot \cos(3\omega t) \right]$$

Koeffizientenvergleich der $\cos(\omega t)$ Terme:

$$-a\omega^2 + a\omega_0^2 = f_0 - \frac{3}{4}\beta a^3 \Rightarrow \omega(a)$$

Freier Oszillator ($f_0 = 0$):

$$\omega_{\text{Eigen}}(a) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta a^2}$$



1.5.3. Selbsterregung: Van der Pol Oszillator

- 🎵 Konstanter äußerer Energiefluss (Luftströmung, Bogenstrich, ...)
- 🎵 Musikinstrument \Rightarrow Modulation des Energieflusses
- 🎵 Nichtlineare Rückkopplung \Rightarrow selbstangeregte stabile Schwingung

Physikalischer Ansatz: $2\alpha \rightarrow \alpha \cdot (1 - x^2)$ (nicht lineare Dämpfung)

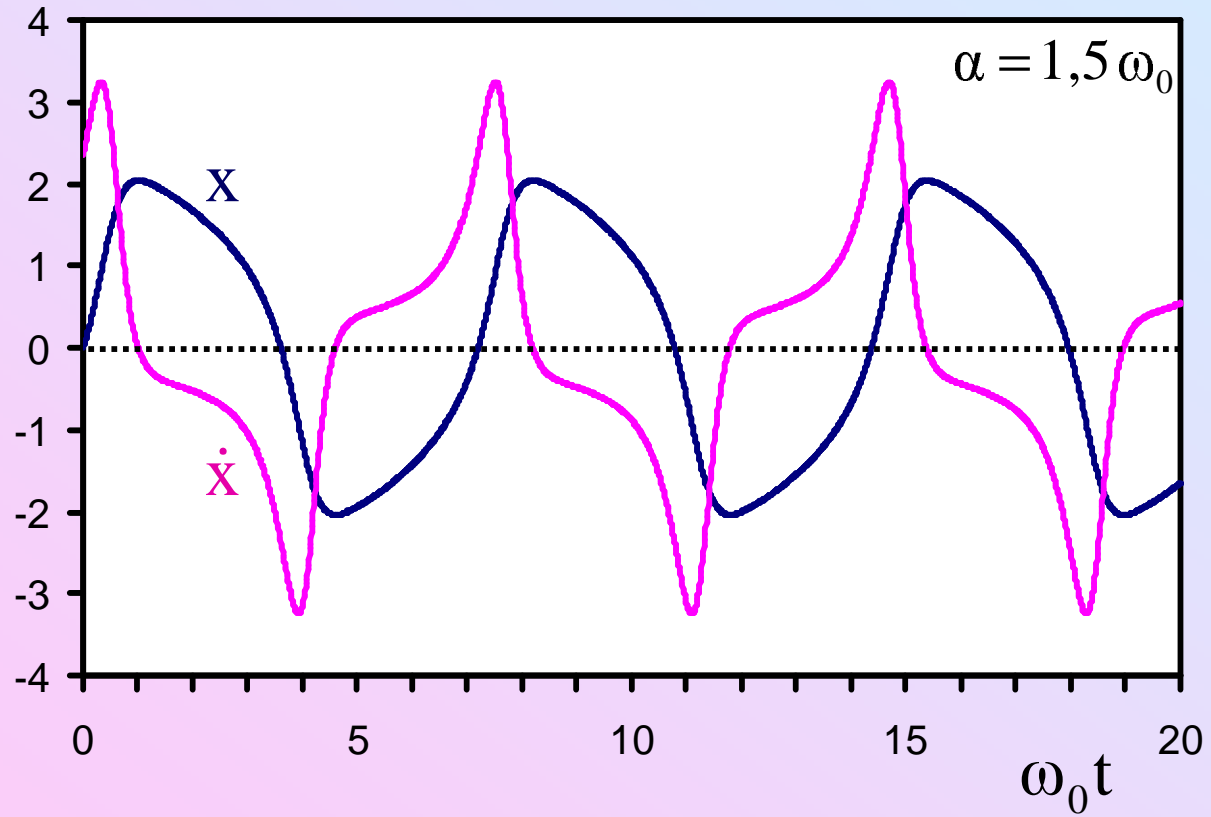
$$\text{d.h. } \alpha \cdot (1 - x^2) \begin{cases} > 0 & \text{für } |x| < 1 \Rightarrow \text{Wachstum} \\ < 0 & \text{für } |x| > 1 \Rightarrow \text{Dämpfung} \end{cases}$$

Van – der – Pol – Oszillator:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g(x, \dot{x}) = \alpha \cdot \dot{x} \cdot (1 - x^2)$$

- $x \equiv 0$ ist stets Lösung, aber **nicht stabil**
- geeignete $\alpha \Rightarrow$ **Grenzyklen**
- Grenzyklen fast harmonisch, mit **anharmonischen Beimischungen**

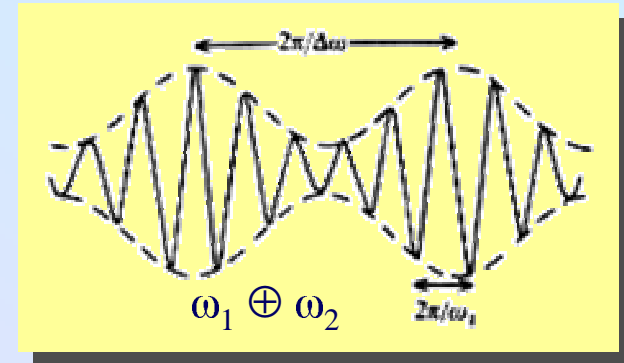
Van der Pol Oscillator



1.5.4. Moden Stabilisierung

Musikinstrumente sind ...

- 🎵 selbsterregende **Multi-Moden** Systeme ...
- 🎵 mit annähernd **linearem Moden-Verhalten** ...
- 🎵 und mit einigermaßen **harmonischen Frequenzverhältnissen**
(Anharmonizitäten \Rightarrow störende niederfrequente **Schwebungen**)



Musikinstrumente erfordern periodisches, schwebungsfreies Signal:

- 🎵 Selbstadjustierung der Eigenfrequenzen notwendig
 - 🎵 Selbststabilisierung relativer Phasen notwendig
- } **Moden Einrastung**
(**mode locking**)

Notwendige Voraussetzung hierfür:

Starke nichtlineare Modenkopplung

Beispiel: Moden: ω_n, ω_m } fast harmonisch: $n \cdot \omega_m \cong m \cdot \omega_n$
 Amplituden: a_n, a_m } $n, m \in \mathbb{N}$

Nichtlineare Kopplungsterme: $\sum_{p,q} c_{p,q} X_n^p X_m^q$

♫ Der Term ... $c_{m-1,n} X_n^{m-1} X_m^n$

$$= c_{m-1,n} (a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n))^{m-1} (a_m \cos(\omega_m t + \varphi_m))^n$$

$$\propto a_n^{m-1} a_m^n \cdot [\cos((m-1)\omega_n t) \cdot \cos(n\omega_m t) + \dots]$$

$$= a_n^{m-1} a_m^n \cdot \underbrace{[\cos((m\omega_n - n\omega_m)t)]}_{\approx 1} \cdot \cos(\omega_n t) + \dots \cong a_n^{m-1} a_m^n \cdot \cos(\omega_n t) + \dots$$

... treibt die ω_n ~~Mde~~

♫ Der Term ... $c_{m,n-1} X_n^m X_m^{n-1}$

$$= c_{m,n-1} (a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n))^m (a_m \cos(\omega_m t + \varphi_m))^{n-1}$$

$$\propto a_n^m a_m^{n-1} \cdot \cos(\omega_m t) + \dots$$

... treibt die ω_m ~~Mde~~

Wann ist ein Musikinstrument gut ?

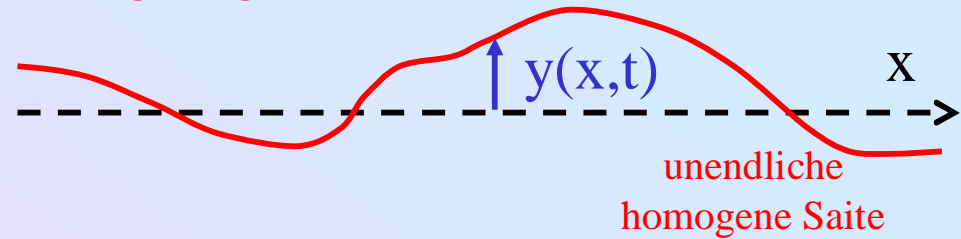
(\Leftrightarrow möglichst schnelles Erreichen eines periodischen Signals)

- ‡ Inharmonizitäten der natürlichen Frequenzen möglichst klein
- ‡ Koeffizienten n, m der gekoppelten Moden möglichst klein
(\Leftrightarrow Kopplungsamplituden $\propto a_n^{m-1} a_m^n, a_n^m a_m^{n-1}$ möglichst groß)
- ‡ Amplituden der gekoppelten Moden (a_n, a_m) möglichst groß
- ‡ Nichtlinearität der Kopplungsfunktion möglichst groß
(\Leftrightarrow Kopplungskoeffizienten $c_{m-1,n}, c_{m,n-1}$ möglichst groß)
- ‡ Fundamentalmode ($n = 1$) möglichst stark an nichtlinearer Kopplung beteiligt

2. Saiten und Stäbe

2.1. Transversale Saitenschwingungen

2.1.1. Wellengleichung



Massendichte: $\mu = \frac{dm}{dx} = \text{const}$

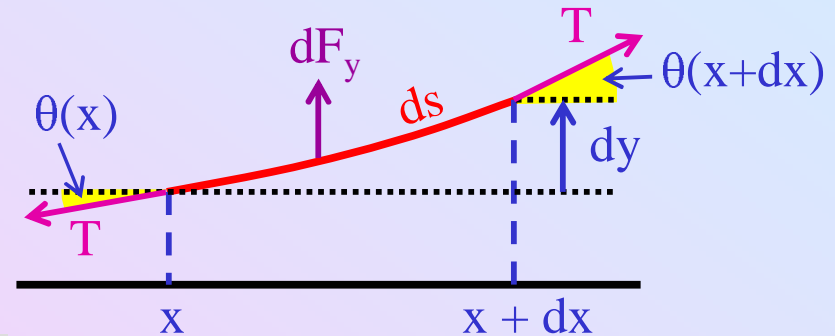
Spannung: $T = \text{Kraft von Segment zu Segment}$

Kleine Auslenkung (\Leftrightarrow lineare Näherung): $|\partial y / \partial x| \ll 1$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan\theta \cong \sin\theta \cong \theta$$

$$dx = ds \cdot \cos\theta = ds \cdot (1 + O(\theta^2)) \cong ds$$

$$\begin{aligned} dF_y &\cong T \cdot \theta(x) - T \cdot \theta(x + dx) = T \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \\ &= m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ds \cong \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx \end{aligned}$$



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ; \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

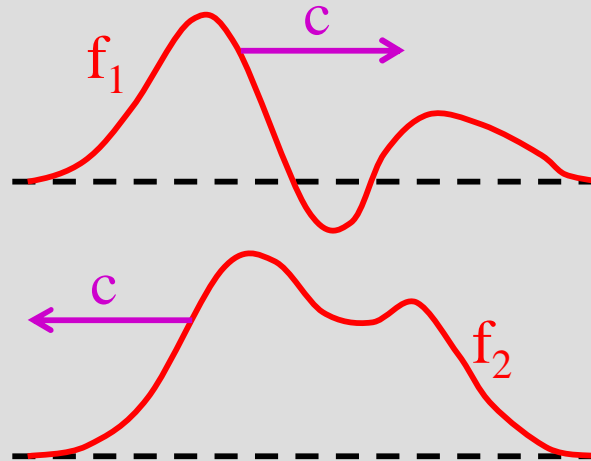
„Wellengleichung“

Allgemeine Lösung (nach d'Alembert)

$$y(x,t) = f_1(ct - x)$$

$$+ f_2(ct - x)$$

= Superposition von rechts/links laufenden Wellenpaketen



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Fouriertransformation \Rightarrow Zerlegung in harmonische (ebene) Wellen

$$y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)} ; \quad A, B \text{ komplex}$$

($\text{Re}(y)$ = physikalischer Teil)

wobei:

$$\omega = \omega(k) = c \cdot k = c \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

Dispersionsrelation

(hier linear, $\omega \propto k$)

Spezialfall: Stehende Wellen

$$y(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}$$

$$|A| = |B| = a$$

Phasen:

$$A = a e^{i\varphi_A}$$

$$B = a e^{i\varphi_B}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_A - \varphi_B)$$

$$\psi = \frac{1}{2}(\varphi_A + \varphi_B)$$

$$y(x, t) = ae^{i\omega t} \left(e^{-ikx} e^{i\varphi_A} + e^{ikx} e^{i\varphi_B} \right)$$

$$= ae^{i(\omega t + \psi)} \left(e^{-ikx} e^{-i\varphi} + e^{ikx} e^{i\varphi} \right) \stackrel{C=2ae^{i\psi}}{=} C e^{i\omega t} \cos(kx + \varphi)$$

Reelle Schreibweise:

$$y(x, t) = |C| \cos(\omega t + \psi) \cos(kx + \varphi)$$

$$\dot{y}(x, t) = -|C| \omega \sin(\omega t + \psi) \cos(kx + \varphi)$$

$$\ddot{y}(x, t) = -\omega^2 y(x, t)$$

Energie der stehenden Welle:

$$\begin{aligned}y(x, t) &= |C| \cos(\omega t + \psi) \cos(kx + \varphi) \\ \dot{y}(x, t) &= -|C| \omega \sin(\omega t + \psi) \cos(kx + \varphi) \\ \ddot{y}(x, t) &= -\omega^2 y(x, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dE_{\text{pot}} &= - \int_0^y dF_y(\tilde{y}) d\tilde{y} = -\mu dx \int_0^y \ddot{y}|_{\tilde{y}} d\tilde{y} = \mu \omega^2 dx \int_0^y \tilde{y} d\tilde{y} \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 y^2 dx = \frac{1}{2} \mu \omega^2 |C|^2 \cos^2(\omega t + \psi) \cos^2(kx + \varphi) dx\end{aligned}$$

$$dE_{\text{kin}} = \frac{1}{2} dm (\dot{y})^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 |C|^2 \sin^2(\omega t + \psi) \cos^2(kx + \varphi) dx$$

$$dE = dE_{\text{pot}} + dE_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 |C|^2 \cos^2(kx + \varphi) dx$$

Energie des Saitenstücks der Länge $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$:

$$\left\langle \cos^2(kx + \varphi) \right\rangle_{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow E(L) = \frac{1}{4} \omega^2 \mu L \cdot |C|^2$$

2.1.2. Impedanz

(Verwende komplexe Schreibweise!)

Definition: Charakteristische Impedanz
bzw. Wellenwiderstand

$$Z_0 = \frac{T}{c} = \sqrt{T\mu} = \mu c$$

Bemerkung: • Z_0 ist reell (\Leftrightarrow verlustfreie Saite)

• Charakteristische Admittanz

$$Y_0 = 1/Z_0$$

Definition: Eingangsimpedanz

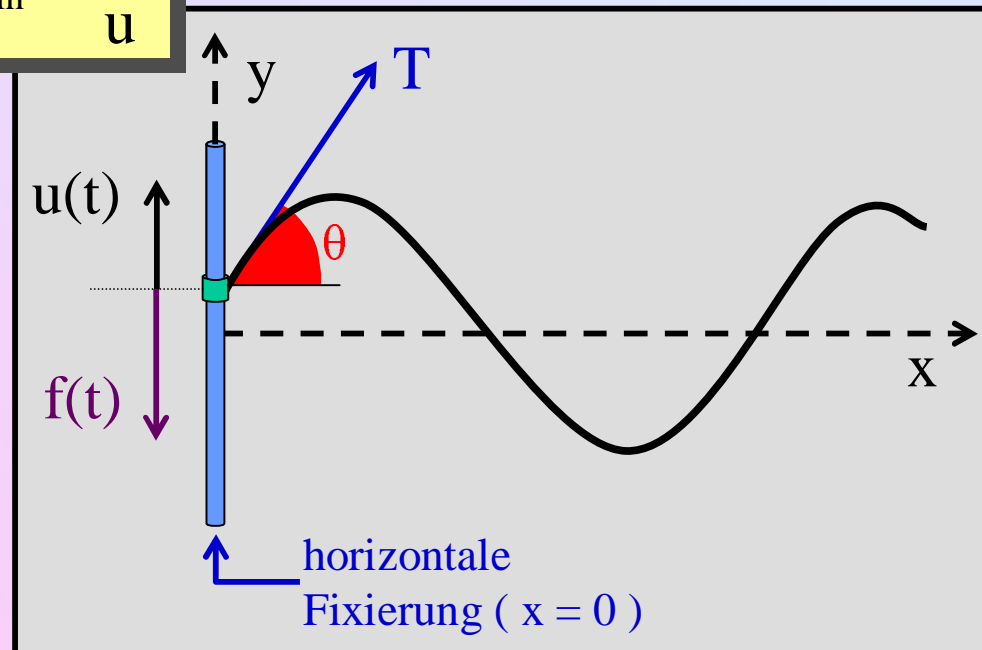
$$Z_{\text{in}} = \frac{f}{u}$$

- Geschwindigkeit des Eingangs
Aufhängepunktes:

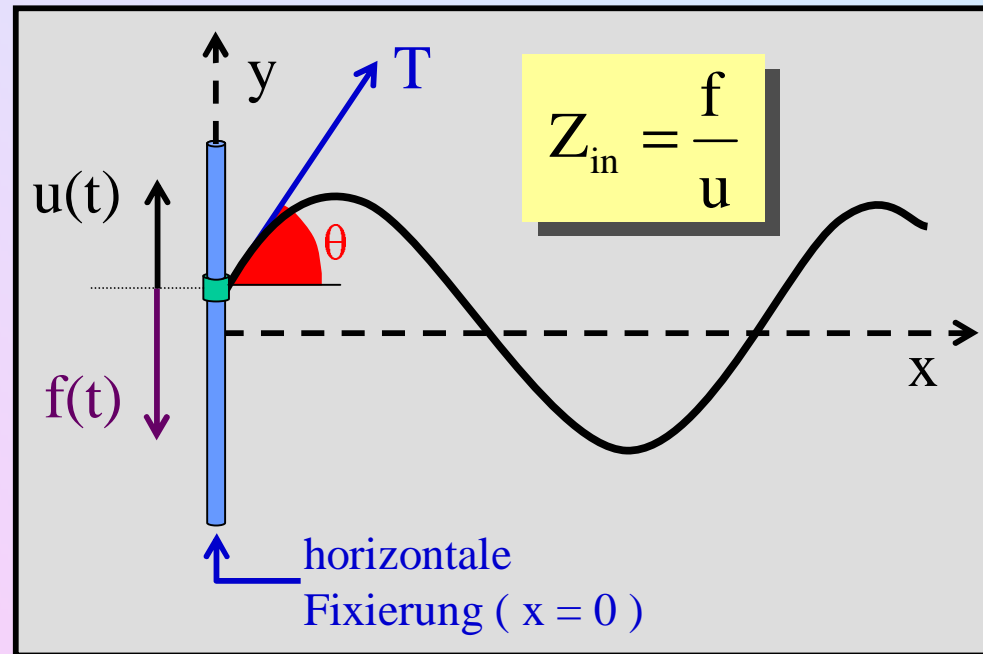
$$u(t) = \dot{y}(x = 0, t)$$

- Externe Treiberkraft (kompensiert
Vertikalkomponente von T)

$$f(t) = -T \cdot \sin\theta \cong -T \cdot y'(x = 0, t)$$



Beispiel: Nach rechts unendliche Saite \Rightarrow nur rechtslaufende Welle



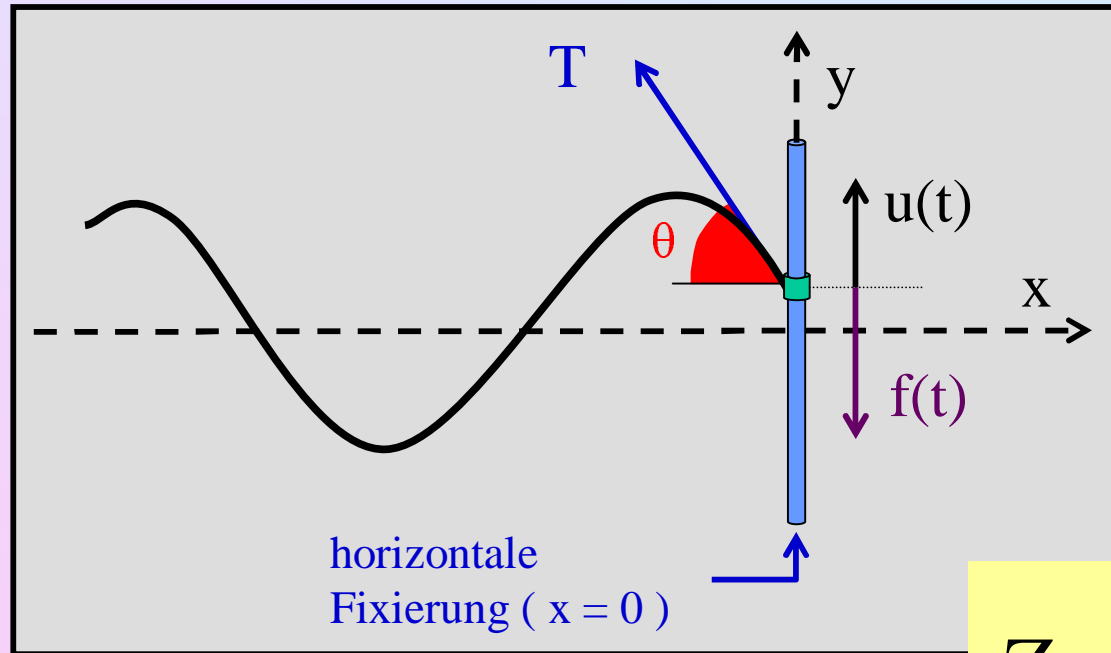
$$y(x, t) = ae^{i(\omega t - kx)}$$

$$u(t) = \dot{y}(0, t) = i\omega ae^{i\omega t}$$

$$f(t) = -T y'(0, t) = iTkae^{i\omega t}$$

$$Z_{in} = T \frac{k}{\omega} = \frac{T}{c} = Z_0$$

Definition: Abschlussimpedanz



$$Z_{ab} = \frac{f}{u}$$

$Z_{ab} \leftrightarrow$ physikalische Eigenschaften der nachgiebigen Aufhängung
(z.B. Elastizität & innere Reibung des Stegs der Geige,
Energietransfer auf Klangkörper der Geige etc.)

Reflexion am Abschlusspunkt:

- Einlaufend: $a e^{i(\omega t - kx)}$
 - reflektiert: $R \cdot a e^{i(\omega t + kx)}$
- $$\left. \begin{array}{l} y(x,t) = a e^{i\omega t} (e^{-ikx} + R \cdot e^{ikx}) \\ u(t) = \dot{y}(0,t) = i\omega a e^{i\omega t} (1 + R) \\ f(t) = -T y'(0,t) = ikT a e^{i\omega t} (1 - R) \end{array} \right\}$$

$$Z_{ab} = \frac{f}{u} = \frac{Tk}{\omega} \frac{1 - R}{1 + R} = Z_0 \frac{1 - R}{1 + R}$$

Reflexionskoeffizient:

$$R = \frac{Z_0 - Z_{ab}}{Z_0 + Z_{ab}}$$

- fixiertes Ende: $y(0,t) = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow Z_{ab} = \infty \Rightarrow R = -1$
- offenes Ende: $\Rightarrow f = 0 \Rightarrow Z_{ab} = 0 \Rightarrow R = +1$

Beispiel: Eingangsimpedanz der abgeschlossenen Saite

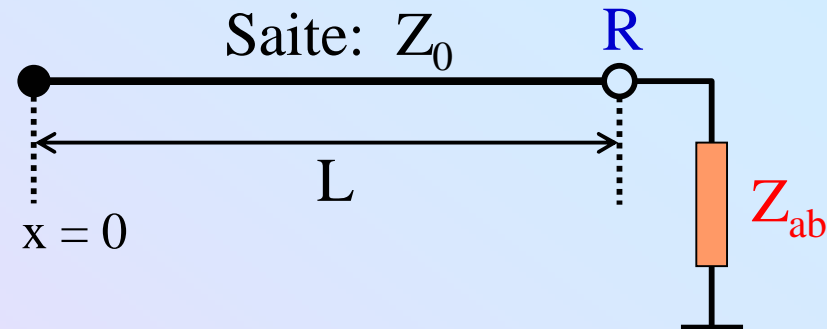
$$y(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}$$

$$\Rightarrow R = \frac{Be^{ikL}}{Ae^{-ikL}} = \frac{B}{A} e^{2ikL}$$

$$\Rightarrow y = Ae^{i\omega t} \left(e^{-ikx} + Re^{-2ikL} e^{ikx} \right)$$

$$u(t) = \dot{y}(0, t) = i\omega Ae^{i\omega t} (1 + Re^{-2ikL})$$

$$f(t) = -Ty'(0, t) = ikTAe^{i\omega t} (1 - Re^{-2ikL})$$

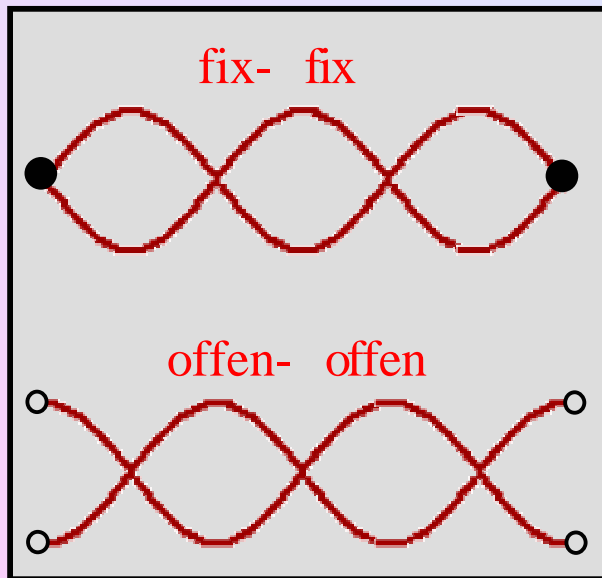


$$Z_{in} = \frac{f}{u} = Z_0 \frac{1 - Re^{-2ikL}}{1 + Re^{-2ikL}}$$

- **fixiertes Ende:** $R = -1 \Rightarrow Z_{in} = -iZ_0 \cot(kL)$ (rein reaktiv)
Resonanzen: $Z_{in} = 0 \Leftrightarrow kL = (n - 1/2)\pi \Leftrightarrow \lambda_n = 2L / (n - 1/2)$
Antiresonanzen: $Z_{in} = \infty \Leftrightarrow kL = n\pi \Leftrightarrow \lambda_n = 2L / n$
- **offenes Ende:** $R = +1 \Rightarrow Z_{in} = iZ_0 \tan(kL)$ (rein reaktiv)
Resonanzen, Antiresonanzen vertauscht
- **angepasster Abschluss:** $R = 0 \Rightarrow Z_{in} = Z_0 = Z_{ab}$

2.1.3. Eigenschwingungen der endlichen Saite

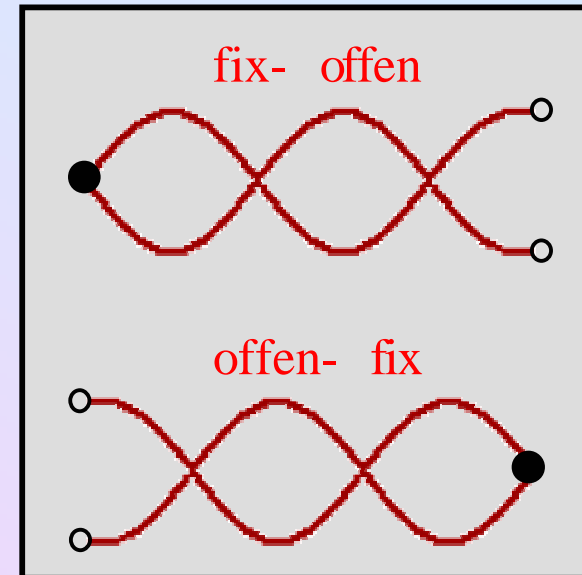
a) fixierte / offene Enden



$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\omega_n = \frac{\pi c}{L} n \quad \text{harmonisch}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$$

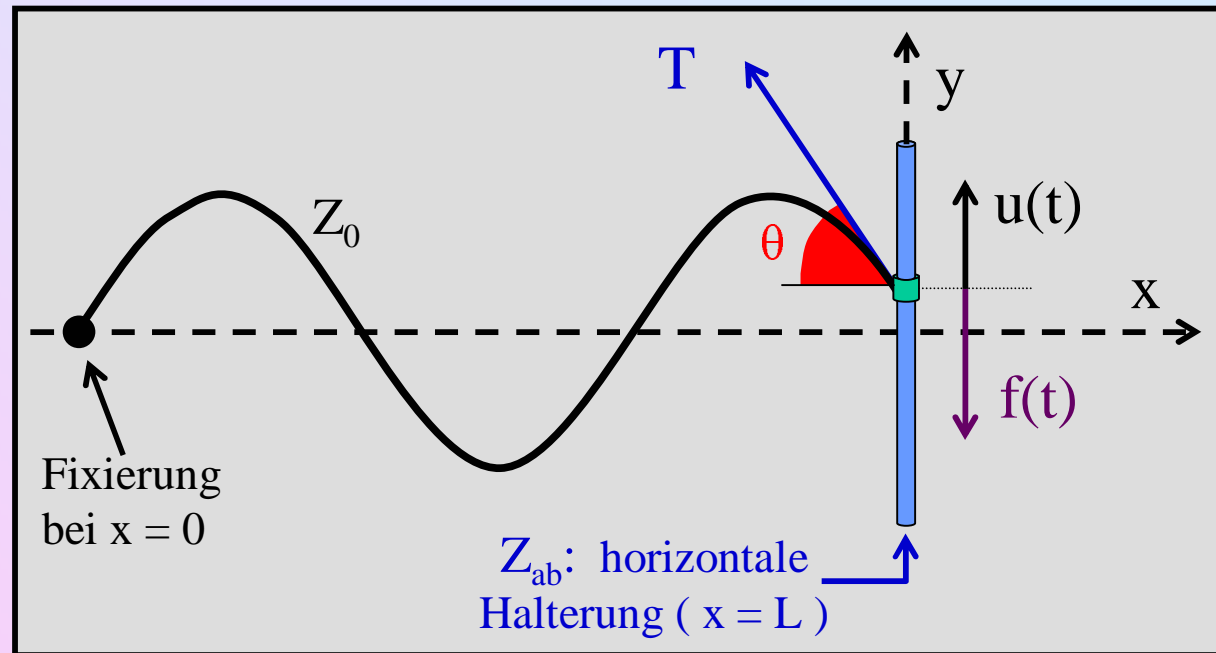


$$\lambda_n = \frac{2L}{n - \frac{1}{2}}$$

$$\omega_n = \frac{\pi c}{L} \left(n - \frac{1}{2} \right) \quad \text{nicht ganz harmonisch}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{2L} \quad \text{klingt eine Oktave tiefer}$$

b) Nachgiebiges (verlustfreies) Ende



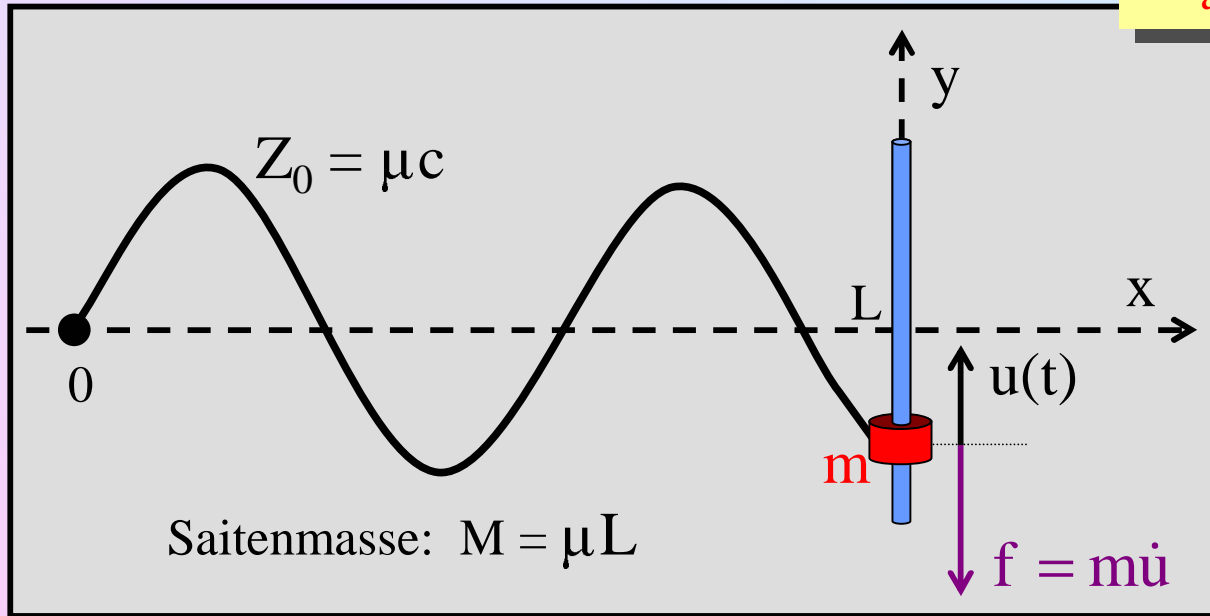
$$y = e^{i\omega t} (Ae^{-ikx} + Be^{ikx}) \underset{\substack{y(0,t)=0 \\ \Rightarrow B=-A}}{=} -2iA e^{i\omega t} \sin(kx)$$

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \dot{y}(L, t) = 2\omega A e^{i\omega t} \sin(kL) \\ f(t) &= -Ty'(L, t) = 2ikT A e^{i\omega t} \cos(kL) \end{aligned} \right\}$$

$$Z_{ab} = \frac{f}{u} = i \underbrace{\frac{kT}{\omega}}_{Z_0} \cot(kL)$$

i) Massenartiger Abschluss

$$Z_{ab} = iZ_0 \cot(kL)$$



$$\dot{u} = i\omega u = \frac{f}{m} = Z_{ab} \frac{u}{m} \Rightarrow$$

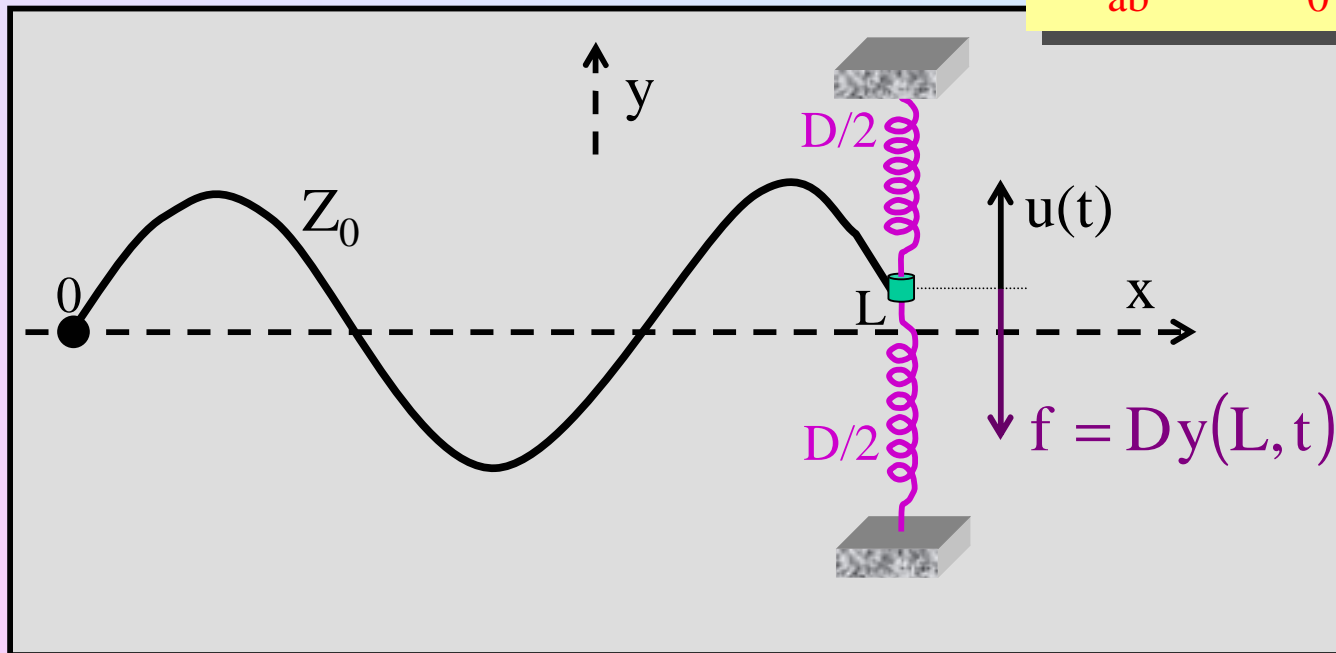
$$Z_{ab} = i\omega m \hat{=} i\omega L_{ind}$$

Also: $\cot(kL) = \frac{ikcm}{i\mu c} = \frac{m}{\mu L} kL \Rightarrow$

$$\cot(kL) = \frac{m}{M} kL$$

ii) Federartiger Abschluss

$$Z_{ab} = iZ_0 \cot(kL)$$

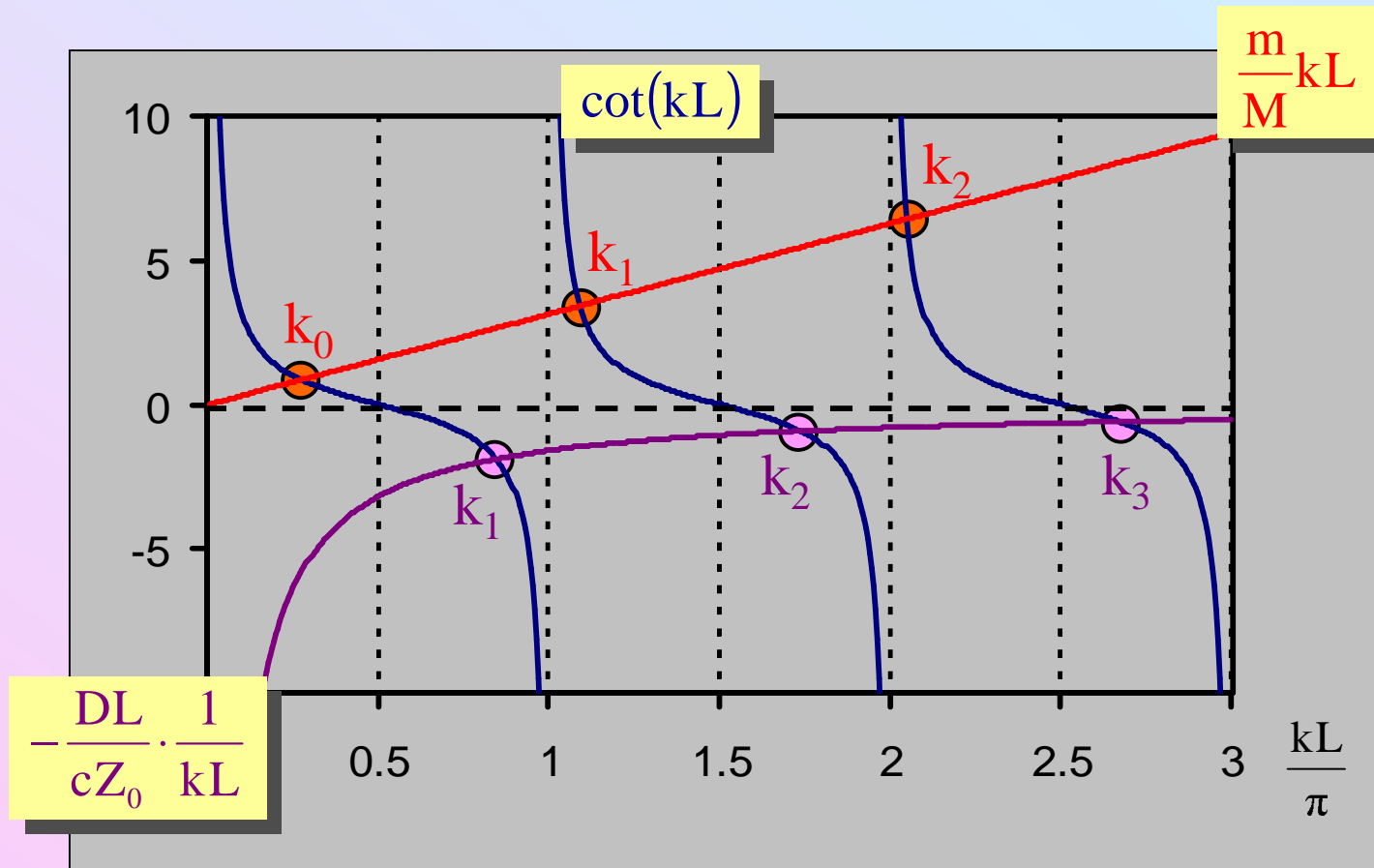


$$u = \dot{y}(L, t) = i\omega y(L, t) = i\omega \frac{f}{D} \Rightarrow$$

$$Z_{ab} = \frac{f}{u} = \frac{D}{i\omega} \hat{=} \frac{1}{i\omega C}$$

Also: $\cot(kL) = \frac{D}{i^2 \omega Z_0} = -\frac{D}{ckZ_0} \Rightarrow$

$$\cot(kL) = -\frac{DL}{cZ_0} \cdot \frac{1}{kL}$$



massenartig: $n \rightarrow \infty: k_n \cong n \pi/L$ \approx harmonisch
 $n \rightarrow 0: k_n > n \pi/L$ angehobene Frequenz

federartig: $n \rightarrow \infty: k_n \cong (n - \frac{1}{2})\pi/L \cong n \pi/L$ \approx harmonisch
 $n \rightarrow 0: (n - \frac{1}{2})\pi/L < k_n < n \pi/L$ abgesenkte Frequenz

2.1.3. Dämpfung

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}$$

a) Luftdämpfung:

$$\tau_1 \propto \begin{cases} \rho r^2 & v \rightarrow 0 \\ \rho r / \sqrt{v} & v \rightarrow \infty \end{cases}$$

v = Frequenz
 ρ = Saitendichte
 r = Saitenradius

b) Interne Dämpfung

$$\tau_2 = \frac{1}{\pi v} \frac{\operatorname{Re}(E)}{\operatorname{Im}(E)}$$

$E(v, T, \dots)$ = komplexer Elastizitätsmodul

c) Energietransfer zur Halterung (Brücke, Resonator)

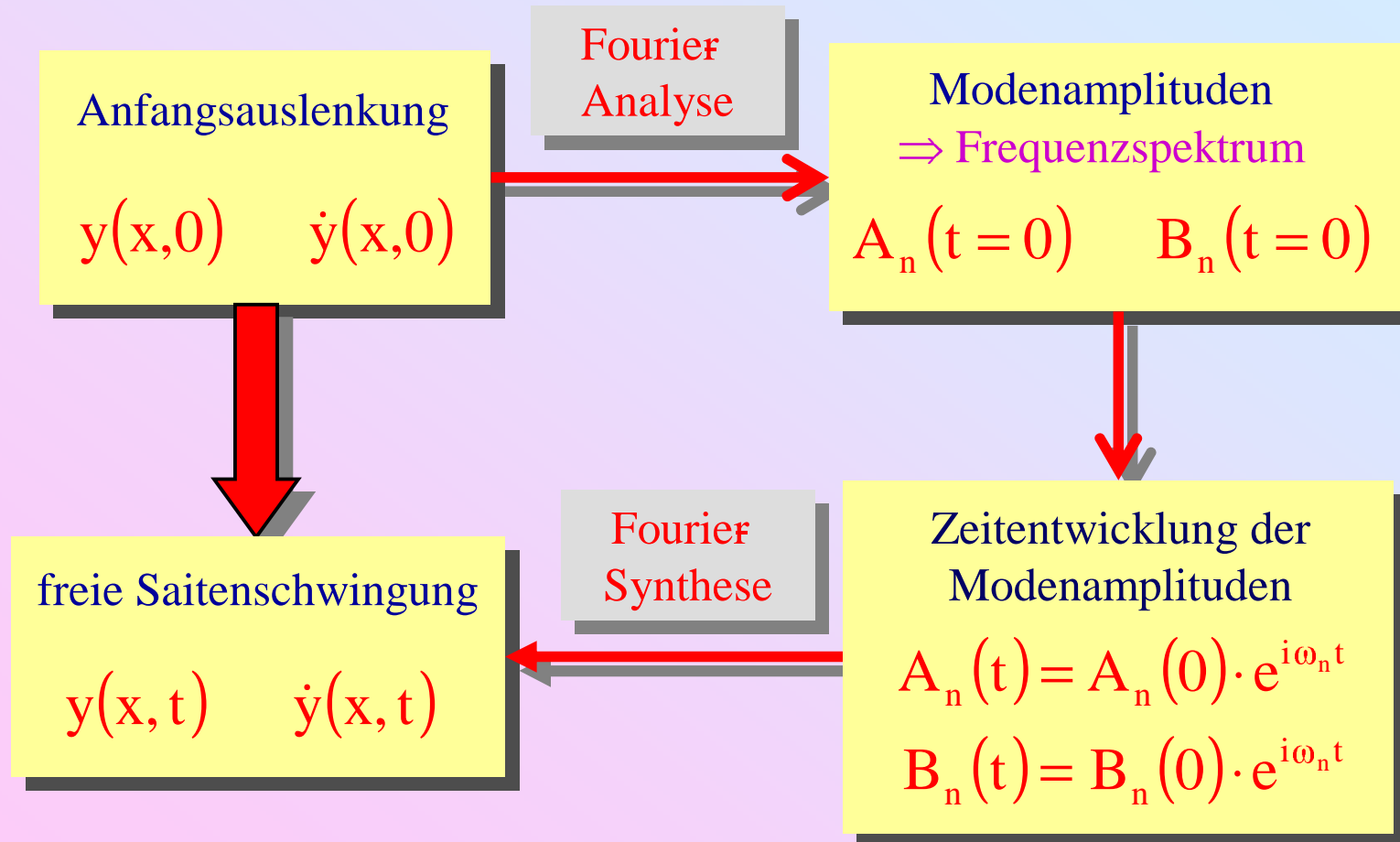
$$\tau_3 = \frac{1}{8\mu L v^2} \cdot \frac{1}{G}$$

$G = \operatorname{Re}(Y)$

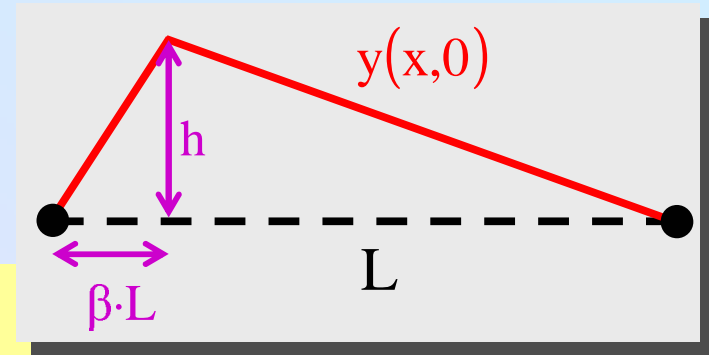
Y = Admittanz der Stützstruktur der Saite

2.1.4. Anregung

a) Einmalige Auslenkung bei $t = 0$ (allgemeines Verfahren):

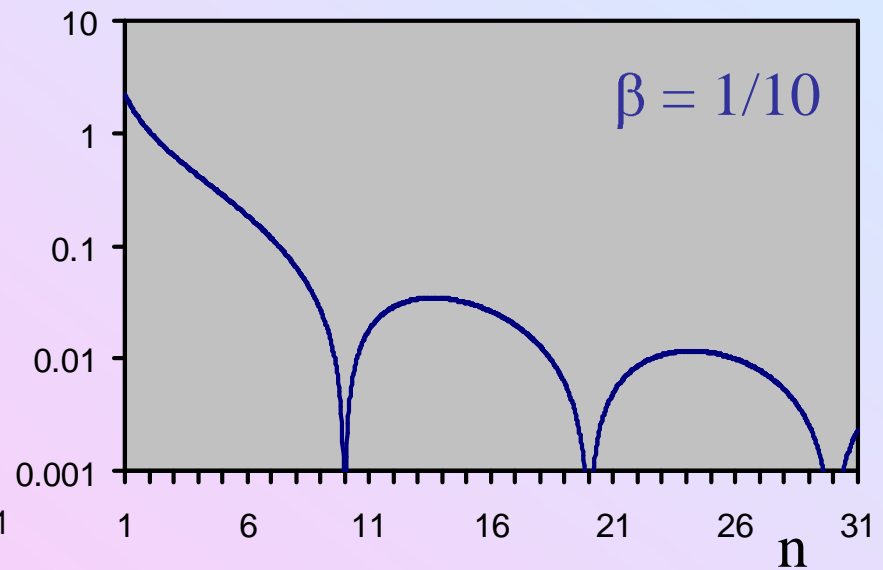
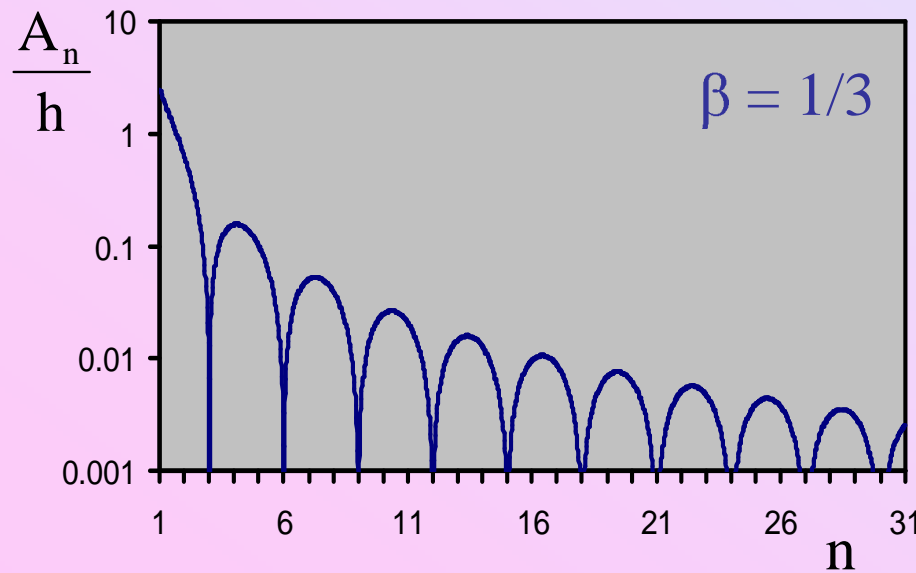


Beispiel: Gezupfte Saite ($\dot{y}(x,0)=0$)

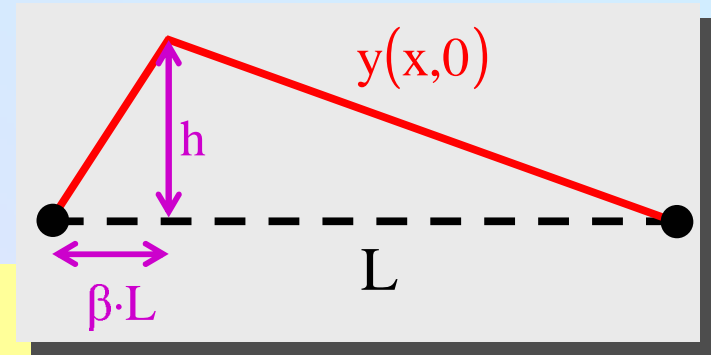


$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) \cdot \sin(k_n x)$$

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}, \quad \frac{A_n}{h} = \frac{2}{n^2 \beta(1-\beta)\pi} \cdot \sin(\beta n \pi)$$



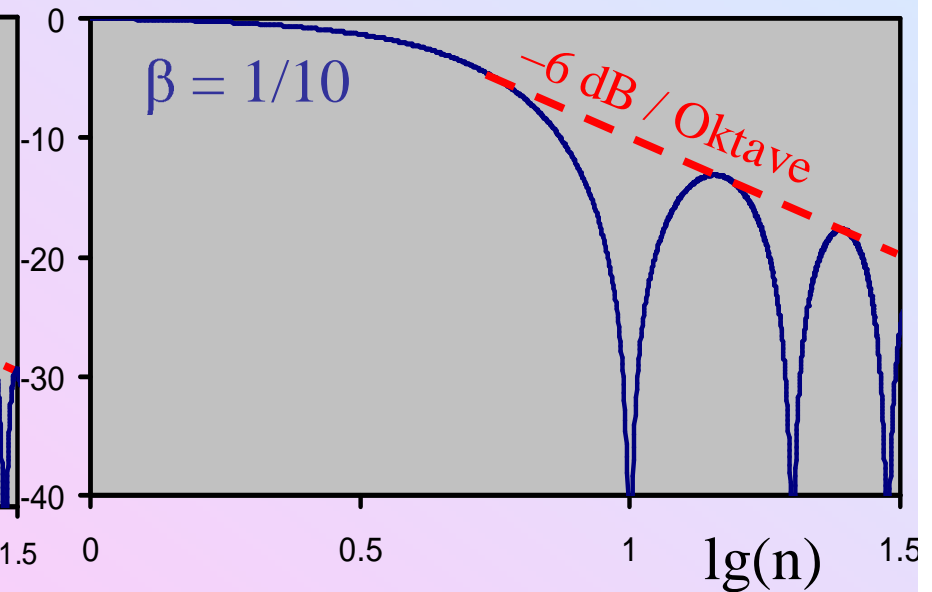
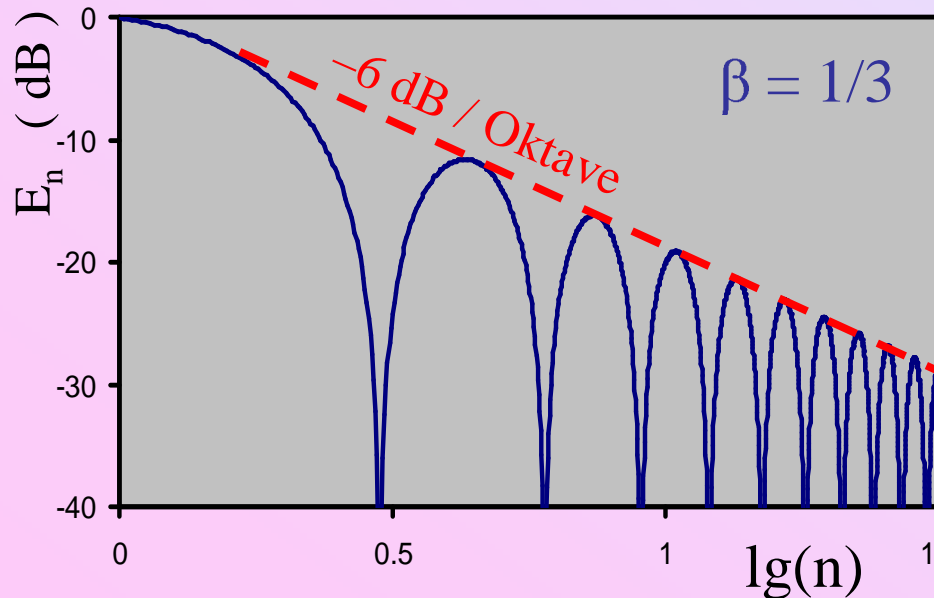
Beispiel: Gezupfte Saite ($\dot{y}(x,0)=0$)



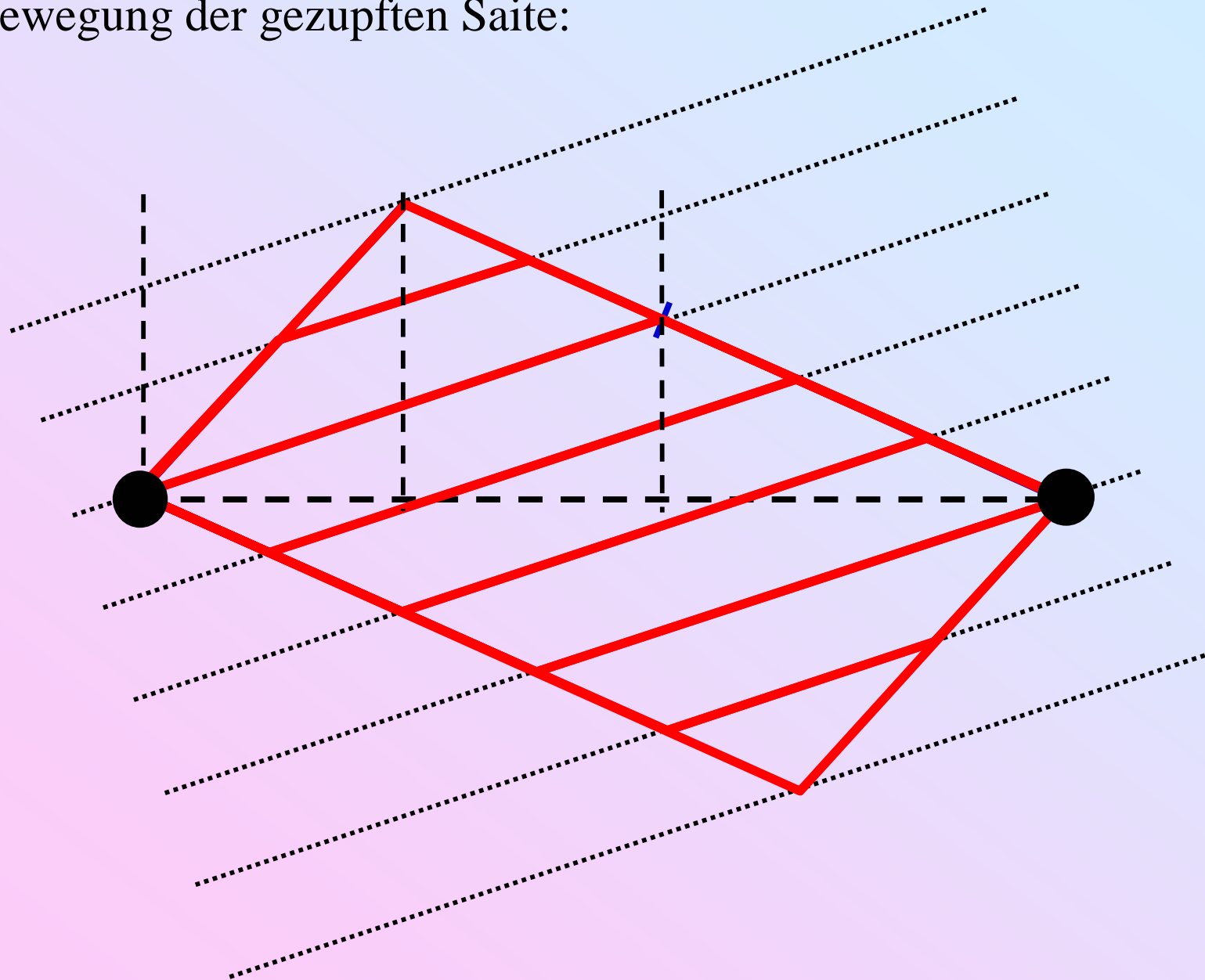
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) \cdot \sin(k_n x)$$

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}, \quad \frac{A_n}{h} = \frac{2}{n^2 \beta(1-\beta)\pi} \cdot \sin(\beta n \pi)$$

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \cdot \sin^2(\beta n \pi)$$

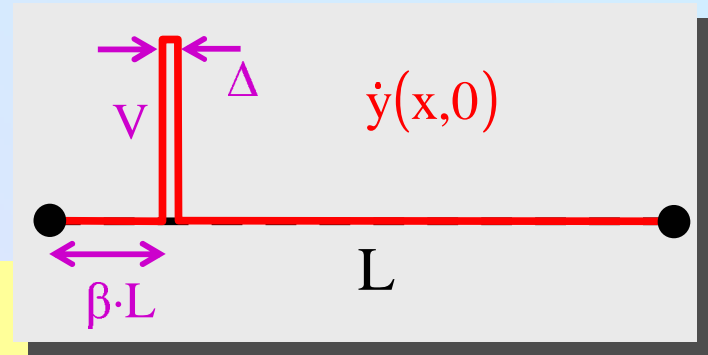


Bewegung der gezupften Saite:



b) Hammer Anregung:

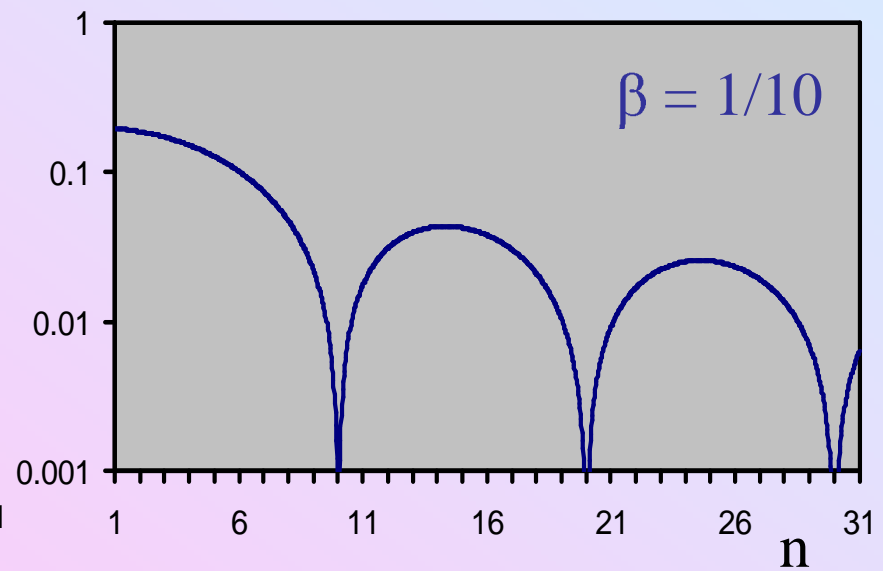
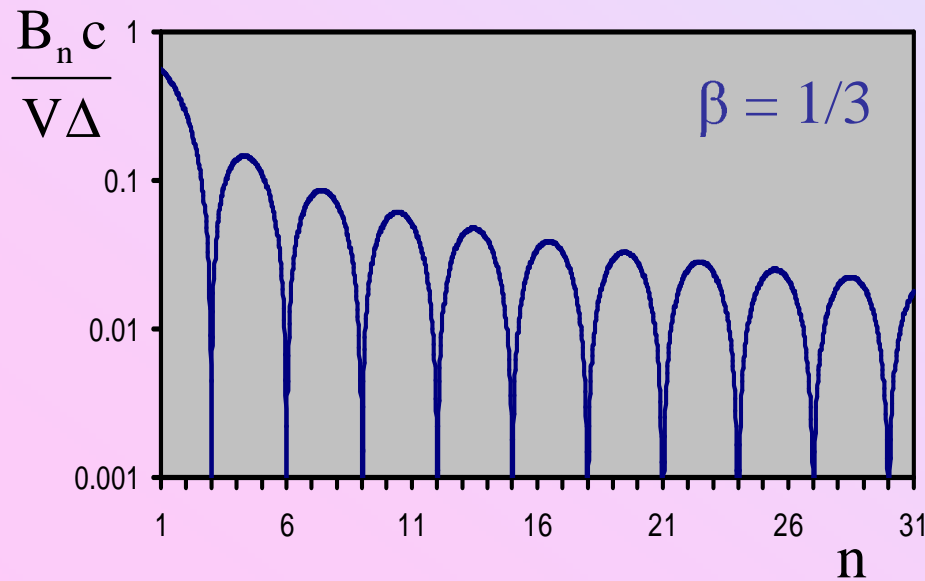
Idealfall: $\dot{y}(x,0) = V\Delta \cdot \delta(x - \beta L)$, $y(x,0) = 0$



$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\omega_n t) \cdot \sin(k_n x)$$

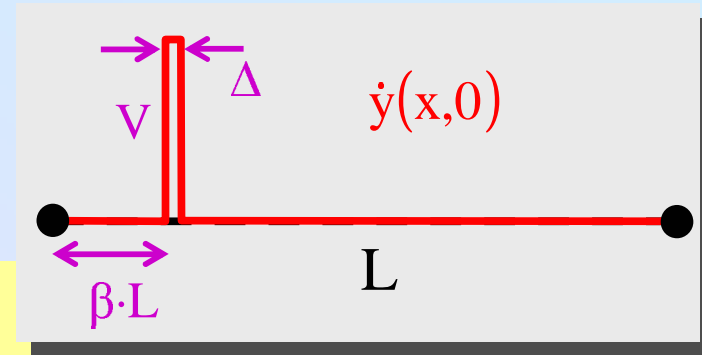
$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}, \quad B_n = \frac{2V\Delta}{n\pi c} \cdot \sin(\beta n\pi)$$

$$E_n = \frac{\mu V^2 \Delta^2}{L} \cdot \sin^2(\beta n\pi)$$



b) Hammer Anregung:

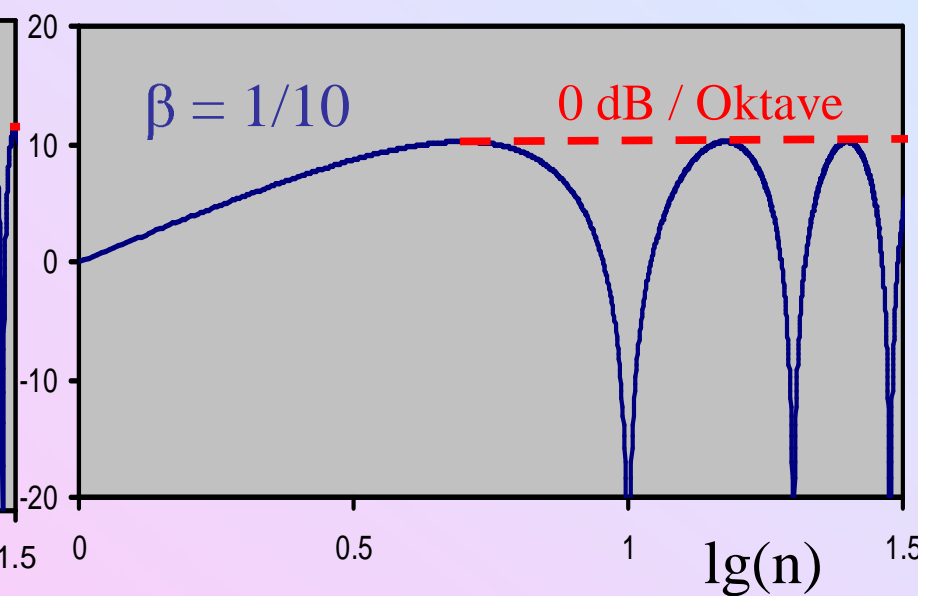
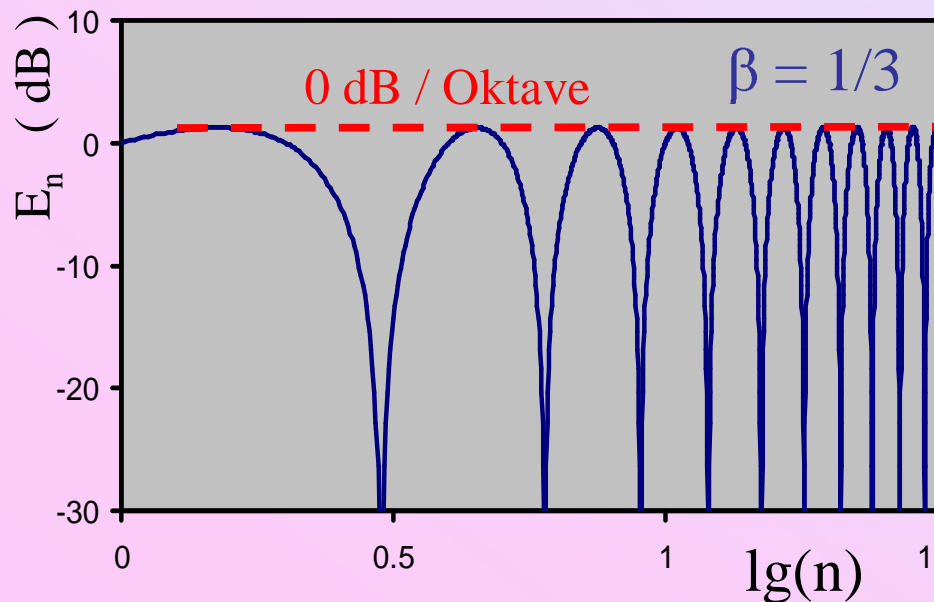
Idealfall: $\dot{y}(x,0) = V\Delta \cdot \delta(x - \beta L)$, $y(x,0) = 0$



$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\omega_n t) \cdot \sin(k_n x)$$

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}, \quad B_n = \frac{2V\Delta}{n\pi c} \cdot \sin(\beta n\pi)$$

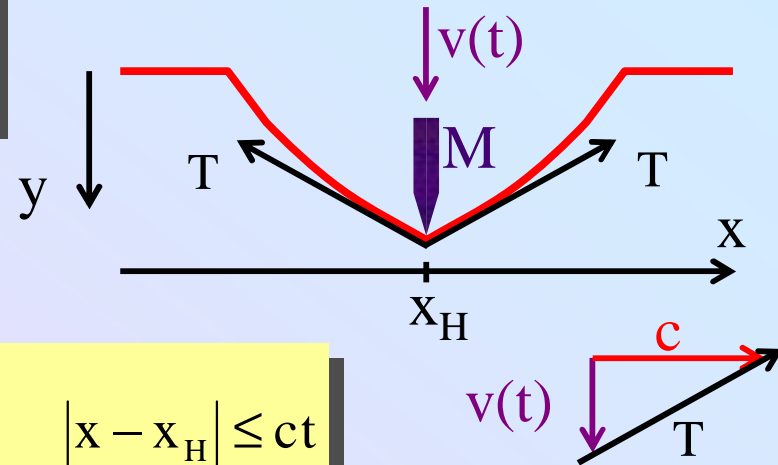
$$E_n = \frac{\mu V^2 \Delta^2}{L} \cdot \sin^2(\beta n\pi)$$



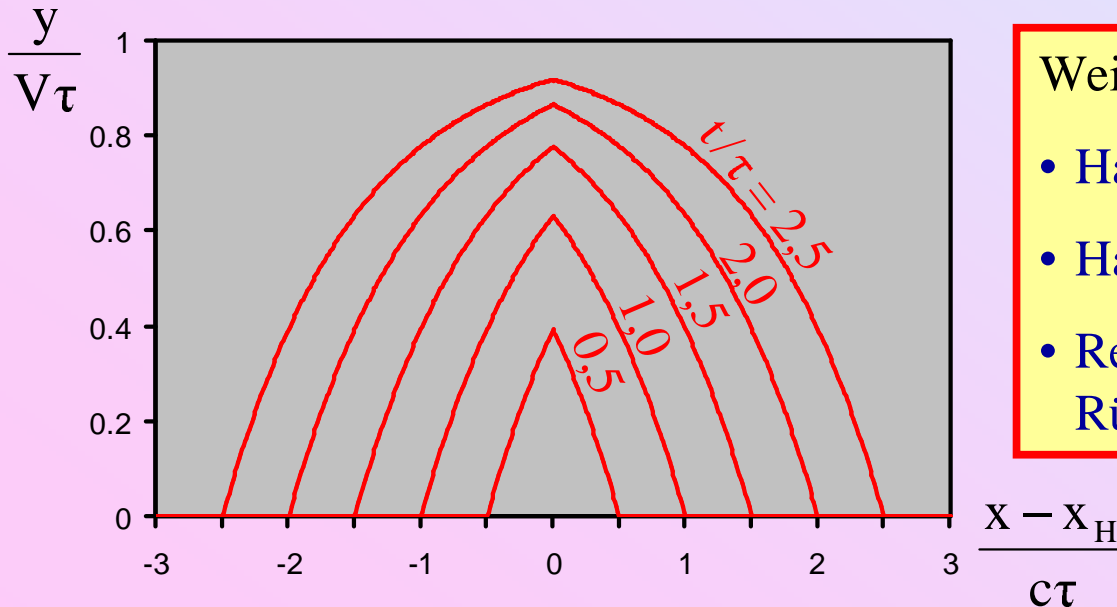
Anschlagsdynamik eines **harten, spitzen** Hammers:

$$M\dot{v} = -2T\frac{v}{c} \Rightarrow v(t) = V \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Bremszeit: $\tau = \frac{2T}{Mc}$



$$y(x, t) = V\tau \cdot \left[1 - \exp\left(\frac{|x - x_H| - ct}{c\tau}\right) \right], \quad |x - x_H| \leq ct$$



Weitere Komplikationen:

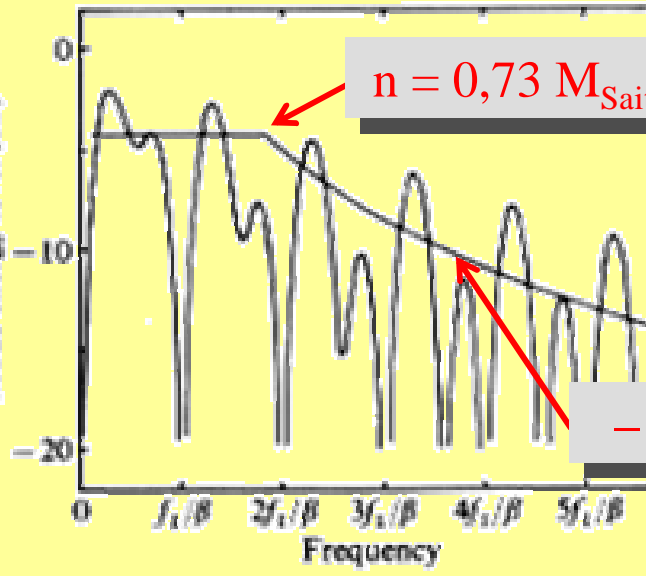
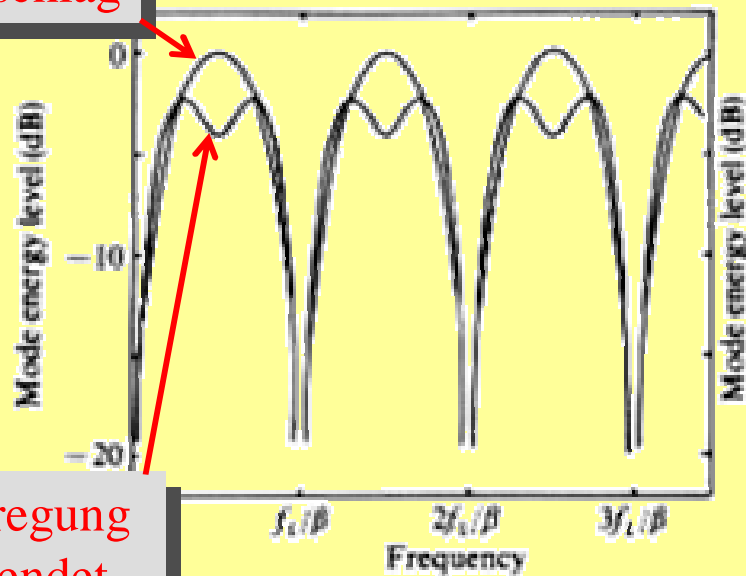
- Hammer Nachgiebigkeit
- Hammermaße
- Reflexionen an Einspannung, Rückwirkung auf Hammer

Modenspektrum stets flacher (\Rightarrow reicher, voller) als beim Zupfen

Beim
Anschlag

$$M_{\text{Hammer}} \ll M_{\text{Saite}}$$

$$M_{\text{Hammer}} = 0,4/\beta \cdot M_{\text{Saite}}$$



-6 dB/Oktave

Anregung
beendet

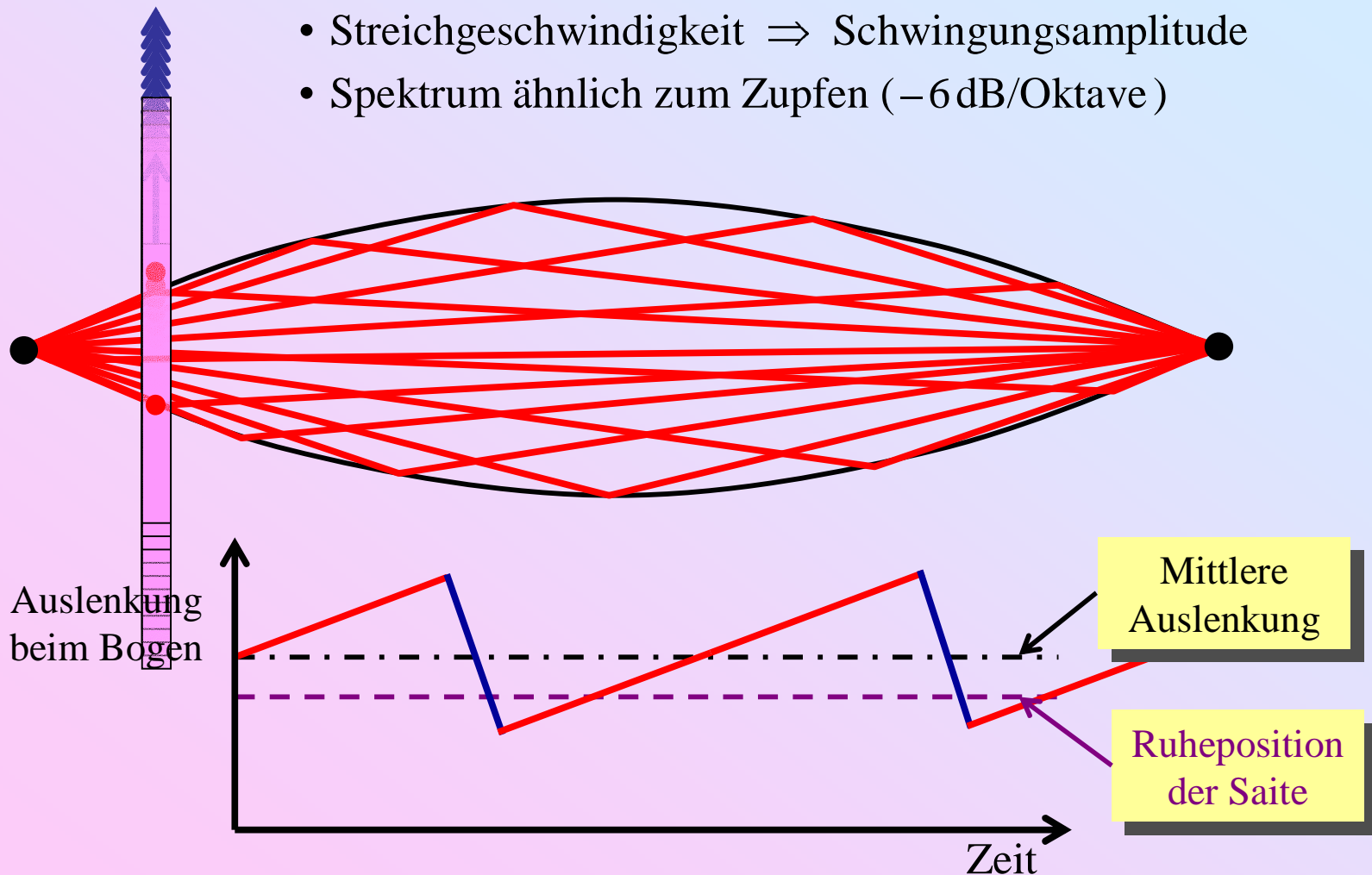
FIGURE 2.10. Spectrum envelopes for a string struck at a fraction β of its length: (a) hammer mass $M \ll$ string mass M_s ; (b) $M = 0.4/\beta M_s$ (from Hall, 1986).

Bemerkung: Fehlende Moden bei Vielfachen von $\frac{1}{2\beta}$, nicht nur von $\frac{1}{\beta}$

c) Bogen Anregung: Helmholtz Bewegung

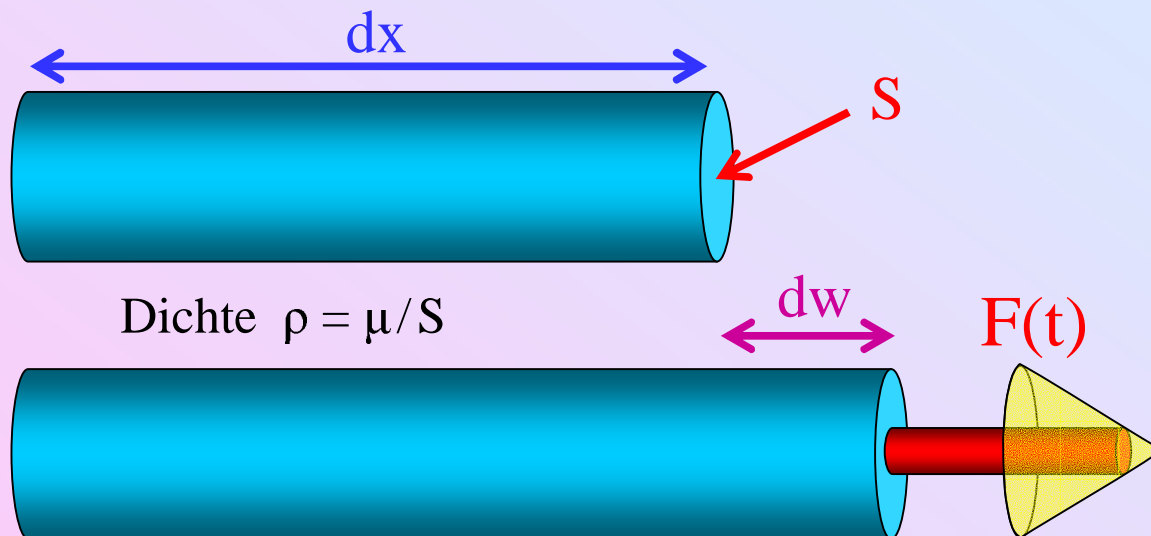
Periode Teil 1: Saite haftet am Bogen und wird mitgeführt } Mehrfachsprünge möglich
Periode Teil 2: Saite löst sich und schnell zurück }

- Streichgeschwindigkeit \Rightarrow Schwingungsamplitude
- Spektrum ähnlich zum Zupfen (-6 dB/Oktave)



2.2. Saiten und dünner Stäbe: Longitudinalschwingungen

Rückstellkraft bei Dehnung: Molekulare Bindungskräfte \Rightarrow Elastizitätsmodul
(reine Materialeigenschaft, Saitenspannung nicht relevant)



Hookesches Gesetz:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\partial w}{\partial x}$$

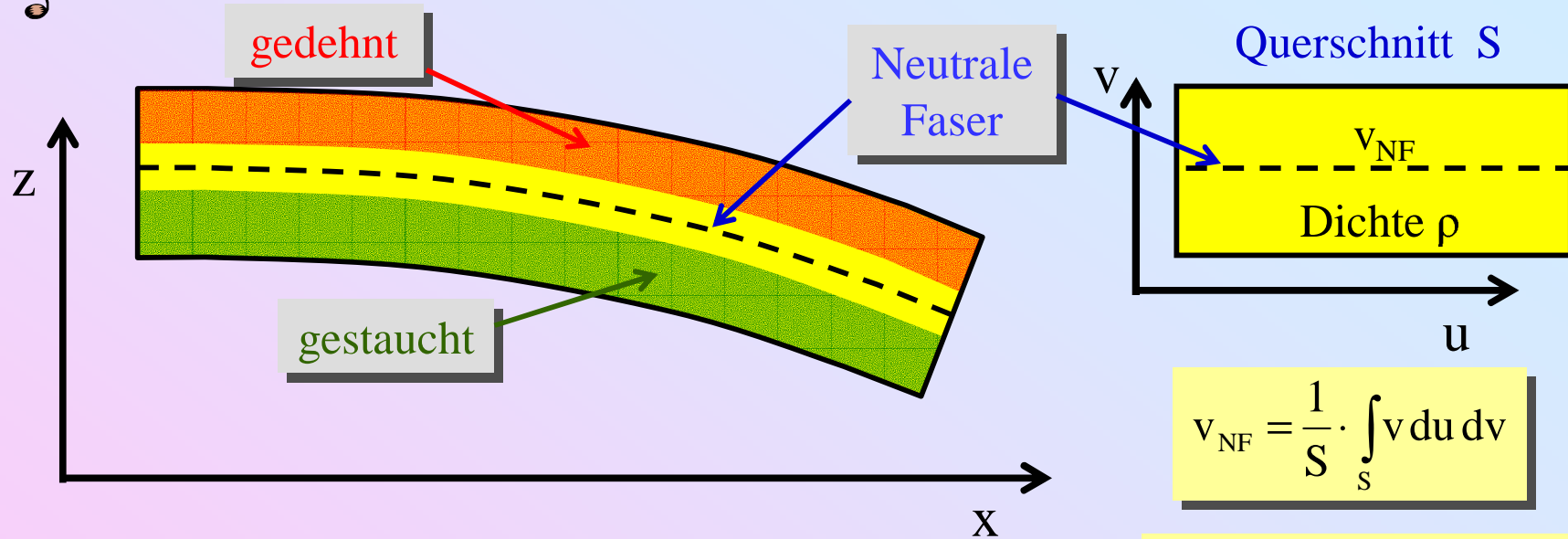
$E =$ Youngsches Modul

Wellengleichung:
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Lösungen, Randbedingungen, ... analog zu transversalen Saitenschwingungen



2.3. Biegewellen von Balken und Stäben



Neutrale Faser: $z(x, t)$ Ruhelage: $z_0(x, t)$
 Auslenkung: $y(x, t) = z(x, t) - z_0(x, t)$

$$v_{NF} = \frac{1}{S} \cdot \int_S v \, du \, dv$$

$$I = \frac{1}{S} \cdot \int_S (v - v_{NF})^2 \, du \, dv$$

Rücktreibende Kraft pro Länge: $\frac{\partial F}{\partial x} = -ESI \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$

E = Young Modul

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad dm = \rho S dx \quad \Rightarrow$$

Wellengleichung: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{EI}{\rho} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$

Lösung der Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{EI}{\rho} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \varphi) \cdot [A \cosh(kx) + B \sinh(kx) + C \cos(kx) + D \sin(kx)]$$

Einsetzen: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = k^4 y$

Dispersionsrelation: $\omega(k) = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \cdot k^2$ (nichtlinear)

Phasengeschwindigkeit: $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \cdot k = \sqrt{I} c_L \cdot k \propto \sqrt{\omega}$

Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2 v_\varphi$

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \varphi) \cdot [A \cosh(kx) + B \sinh(kx) + C \cos(kx) + D \sin(kx)]$$

⇒ zwei Randbedingungen pro Endpunkt, z.B.:

frei:



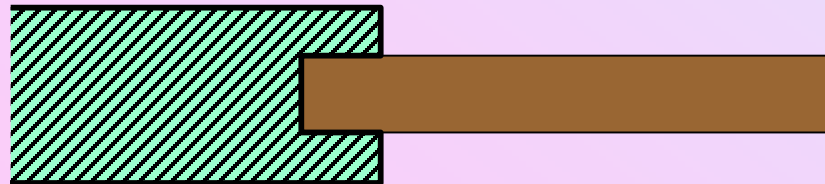
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

unterstützt / eingehängt:



$$y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

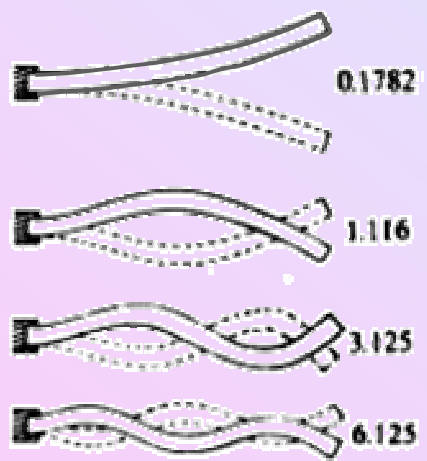
eingeklemmt:



$$y = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Eigenmoden und Eigenfrequenzen:

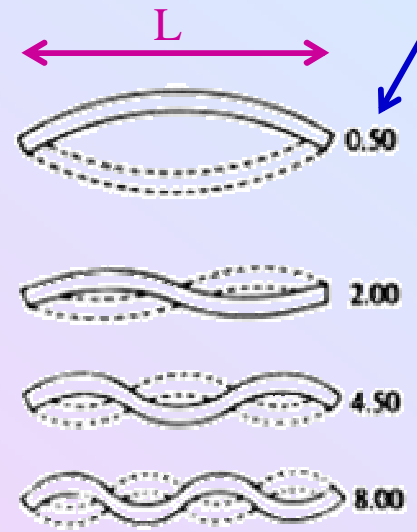
ω_n in Einheiten von $\frac{2\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$



einseitig eingeklemmt

$$\cot(k_n L/2) = \pm \tanh(k_n L/2)$$

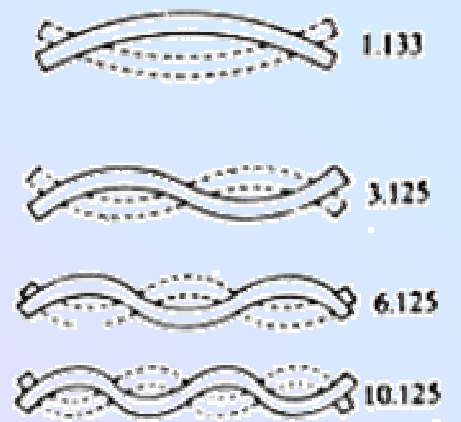
$$\omega_n \cong (2n-1)^2 \frac{\omega_1}{1,426}$$



beidseitig unterstützt
bzw. eingehängt

$$k_n = n\pi/L$$

$$\omega_n = n^2 \omega_1$$



beidseitig frei

$$\tan(k_n L/2) = \pm \tanh(k_n L/2)$$

$$\omega_n \cong (2n+1)^2 \frac{\omega_1}{9,066}$$

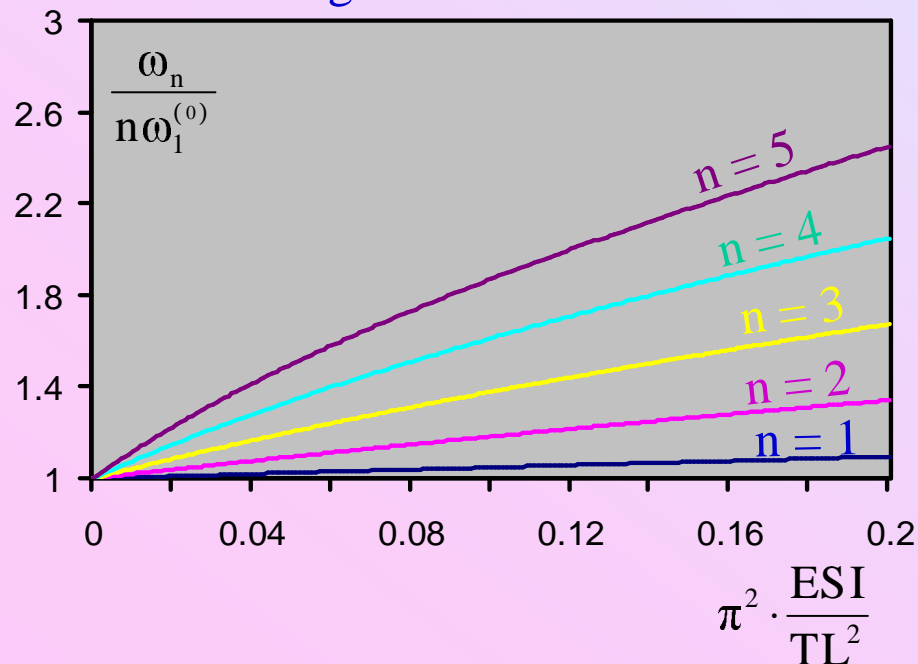
- Frequenzverhältnisse nicht exakt harmonisch
- Knotenpositionen nicht äquidistant
- Klanghöhe sehr stark abhängig von Randbedingungen

2.4. Transversalschwingung steifer Saiten

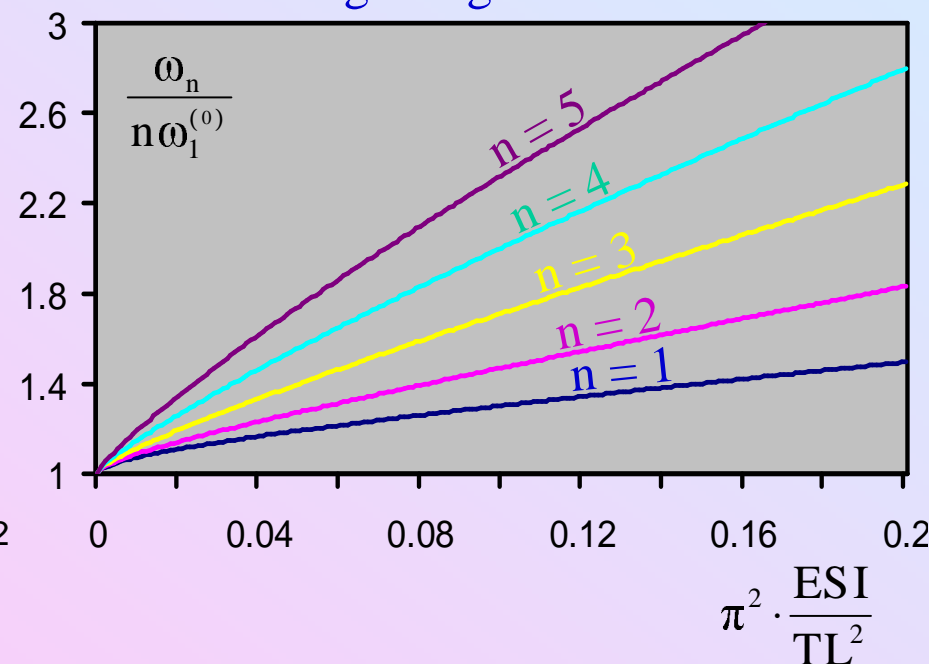
Rückstellkraft = Spannungskraft + elastische Rückstellkraft

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ESI \frac{\partial^4 y}{\partial y^4}$$

eingeklemmte Enden



eingehängte Enden



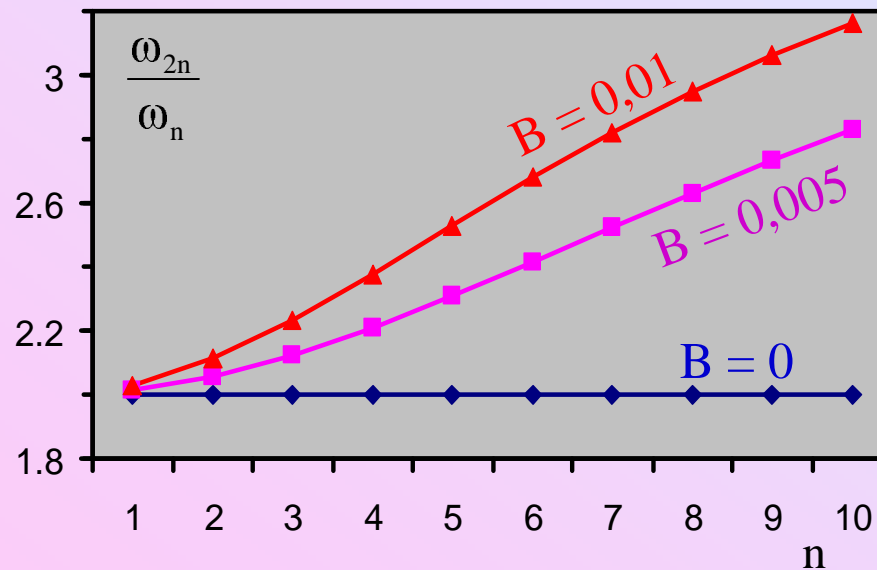


2.4. Transversalschwingung steifer Saiten

Rückstellkraft = Spannungskraft + elastische Rückstellkraft

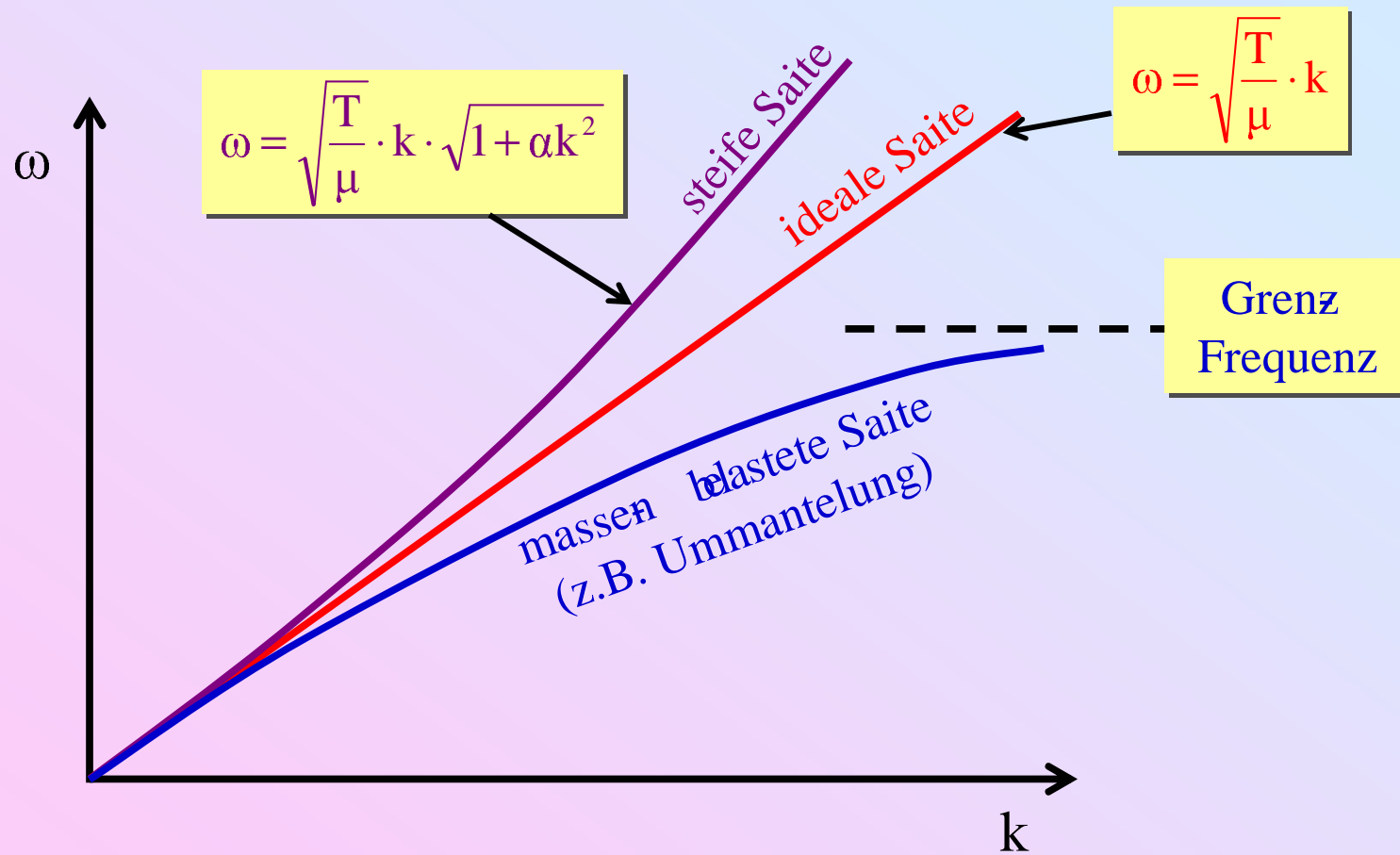
$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ESI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

eingeklemmte / eingehängte Enden



$$B = \pi^2 \cdot \frac{ESI}{TL^2}$$

Beeinflussung der Dispersionsrelation:





2.5. Torsionsschwingungen von Saiten und Stäben

Young Modul $E \rightarrow$ Torsionsmodul G

homogenes, isotropes Material:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(ν = Poisson Zahl)

Dispersionsrelation linear:

$$\omega(k) = c_T \cdot k$$

- Saiten:
- c_T typisch 3 ... 8 mal so groß wie c
 - starke innere Dämpfung

Abhängigkeit von c_T von Querschnittsform:



$$c_T = \sqrt{G/\rho}$$



$$c_T = 0.92 \sqrt{G/\rho}$$



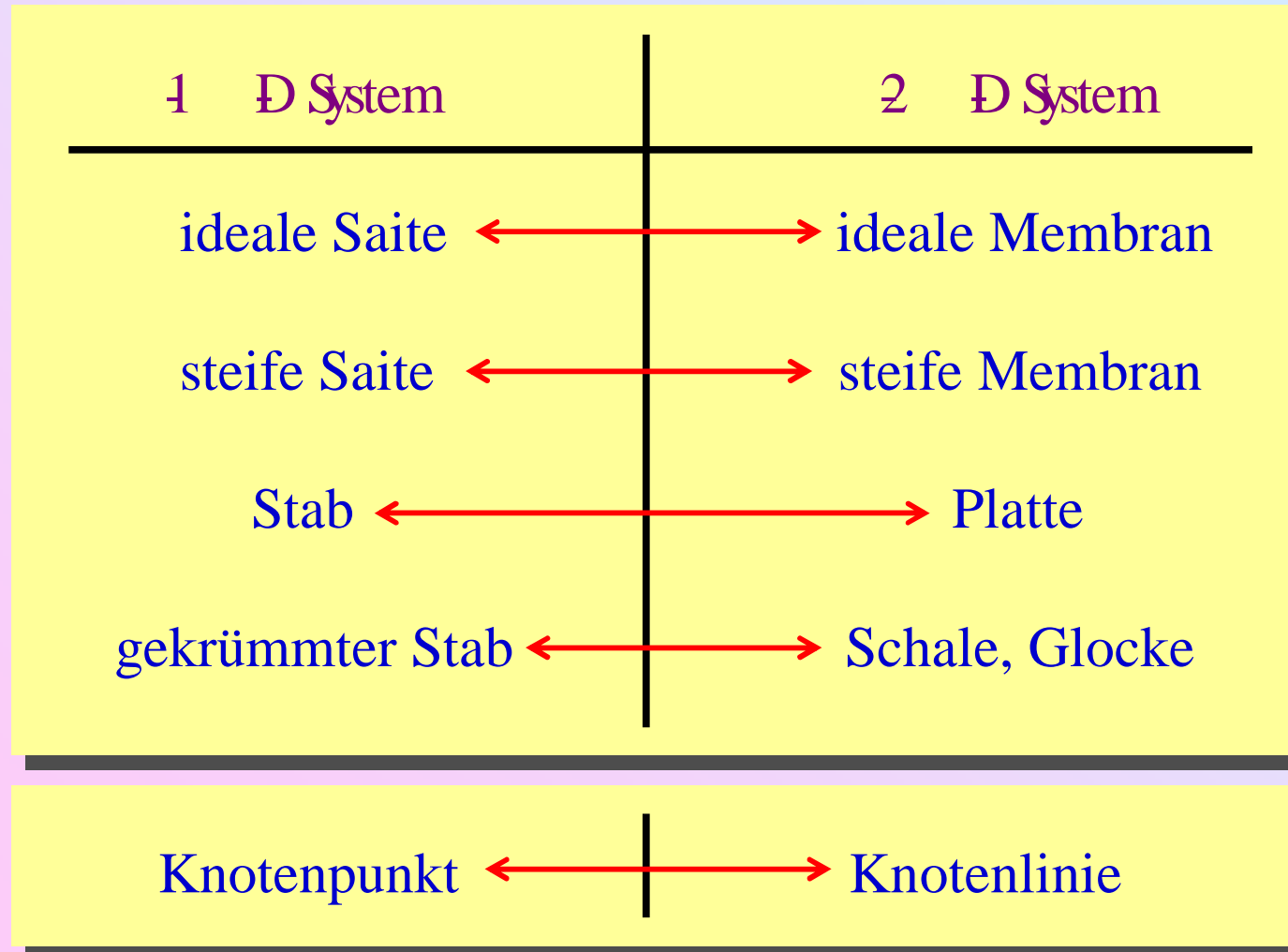
$$c_T = 0.74 \sqrt{G/\rho}$$



$$c_T = (2h/w) \sqrt{G/\rho}$$

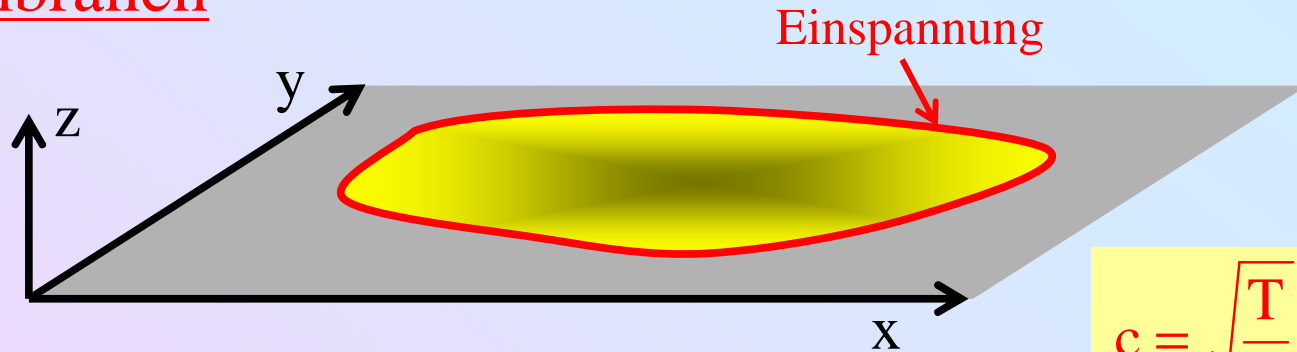
3. Membranen, Platten und Schalen

Analogien:





3.1. Membranen



$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

Massendichte: $\sigma = \frac{dm}{dxdy} = \text{const}$

Spannung: $T ds = \text{Spannkraft senkrecht zu Rand jedes Flächenelements}$
 = (konstante) **Oberflächenspannung der Membran**

Kleine Auslenkung (\Leftrightarrow lineare Näherung): $|\vec{\nabla}_{x,y} z| \ll 1$

2 D Wellengleichung: Koordinatenwahl \leftrightarrow Form der Einspannung
 (Transversalschwingung)

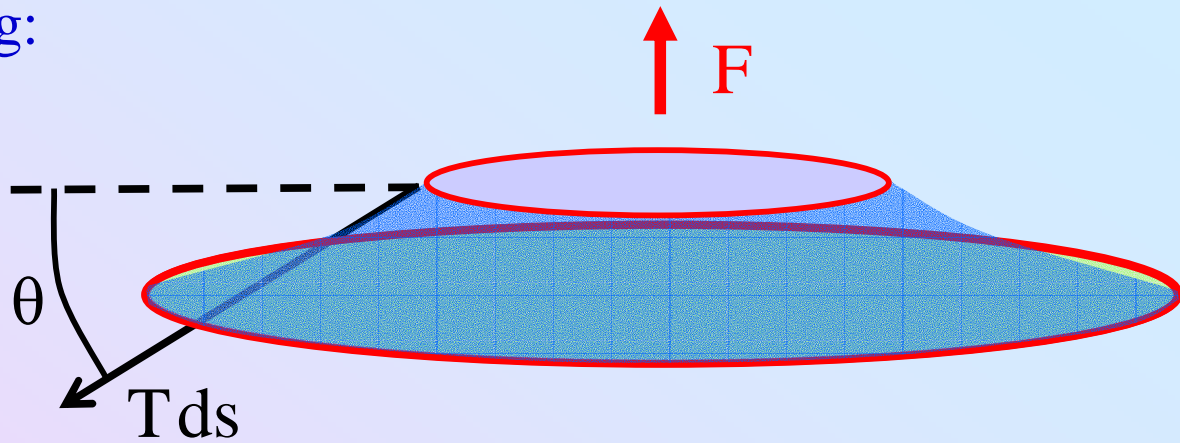
Rechteckmembran	Kreismembran
$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$

Statische Auslenkung:

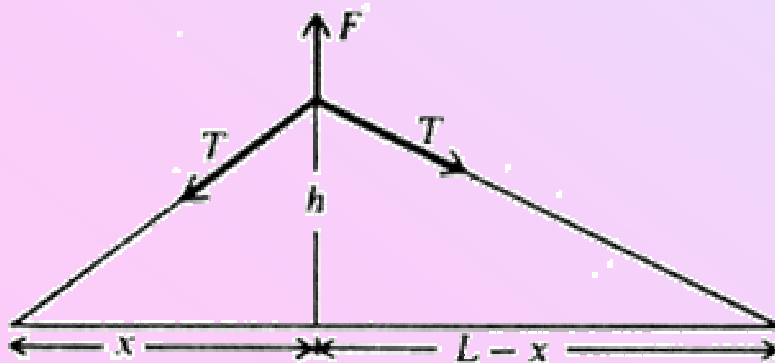
$$F = - \oint T \sin \theta \, ds$$

$$\propto L(\text{---})$$

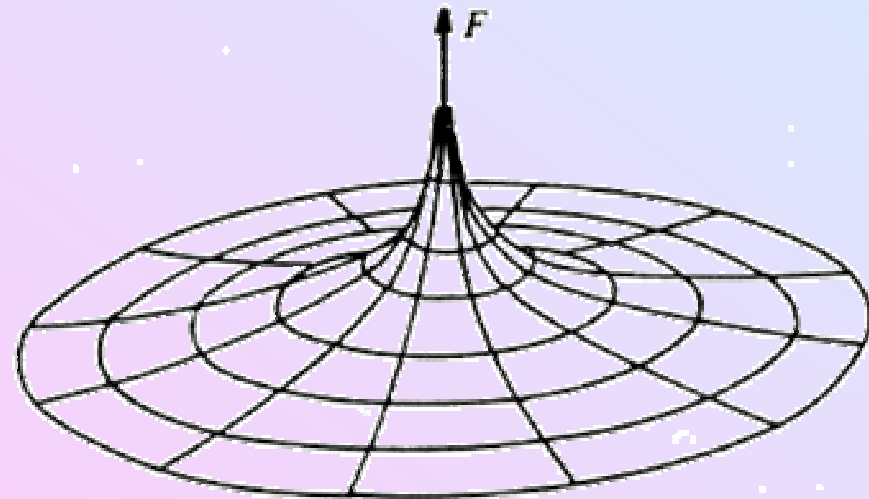
= 0 für Angriffspunkt



Membran widersteht keiner Kraft mit Angriffspunkt

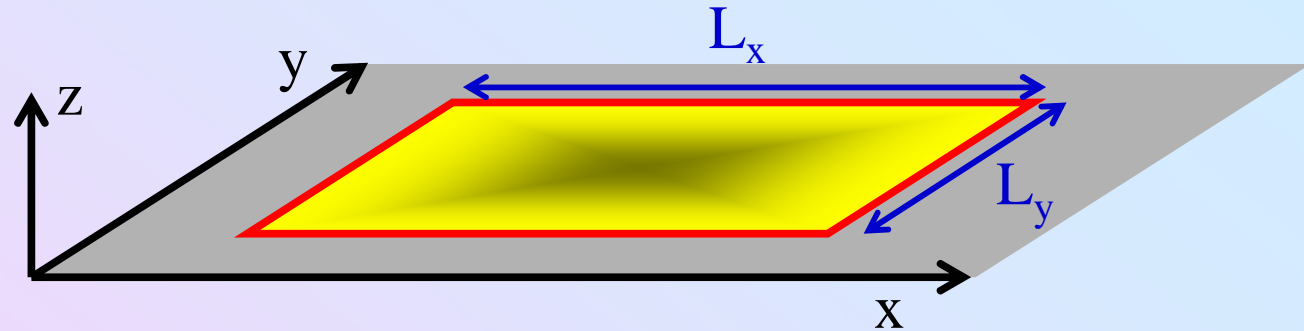


Saite



Membran

Schwingungsmoden von Rechteckmembranen:



$$z_{mn} = A e^{i\omega_{mn}t} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)$$

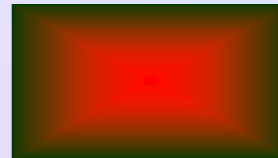
$$\omega_{mn} = \pi \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}$$

Quadratische Membran $L_x = L_y$

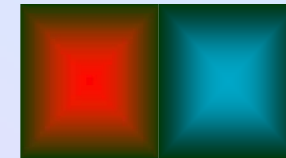
⇒ Entartung $\omega_{mn} = \omega_{nm}$

⇒ Modenüberlagerung möglich

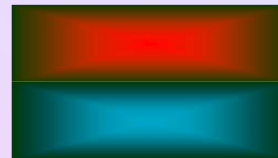
$m = 1 \quad n = 1$



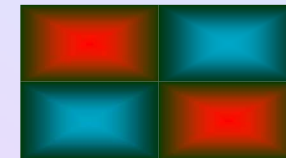
$m = 2 \quad n = 1$



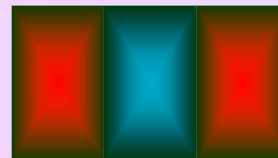
$m = 1 \quad n = 2$



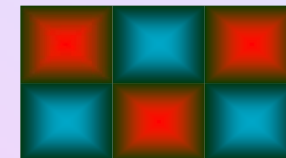
$m = 2 \quad n = 2$



$m = 3 \quad n = 1$



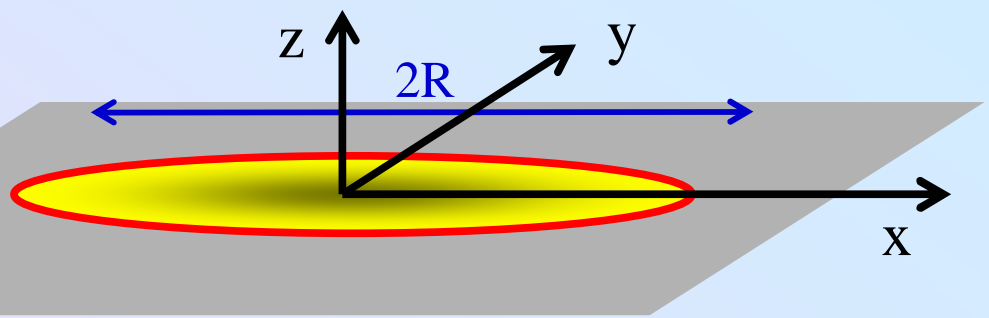
$m = 3 \quad n = 2$



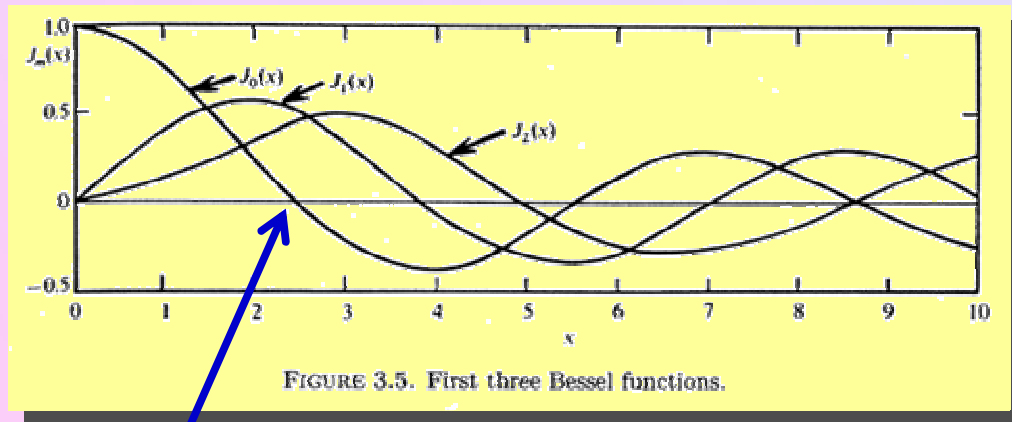
Schwingungsmoden von Kreismembranen:

$$z_{mn} = A e^{i\omega_{mn}t} \cdot e^{im\phi} \cdot J_m(\xi_{mn} r/R)$$

$$\omega_{mn} = \frac{\xi_{mn}}{R} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$



$\xi_{mn} = n$ te Nullstelle der Besselfunktion J_m



$$\xi_{01} \cong 2,405$$

$m = 0 \quad n = 1$	$m = 1 \quad n = 1$
$m = 2 \quad n = 1$	$m = 3 \quad n = 1$
$m = 0 \quad n = 2$	$m = 3 \quad n = 2$

Frequenzfolge bei idealen Kreismembranen:

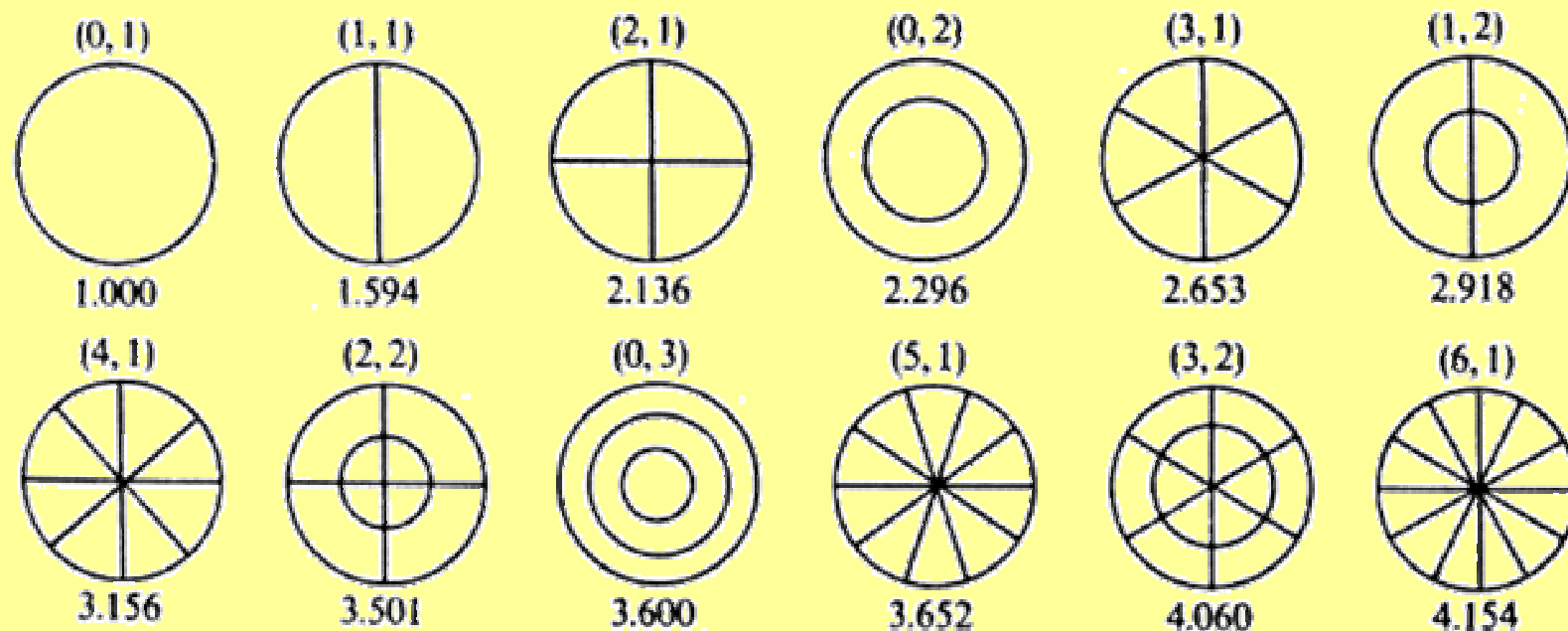


FIGURE 3.6. First 14 modes of an ideal membrane. The mode designation (m, n) is given above each figure and the relative frequency below. To convert these to actual frequencies, multiply by $(2.405/2\pi a)\sqrt{T/\sigma}$, where a is the membrane radius.

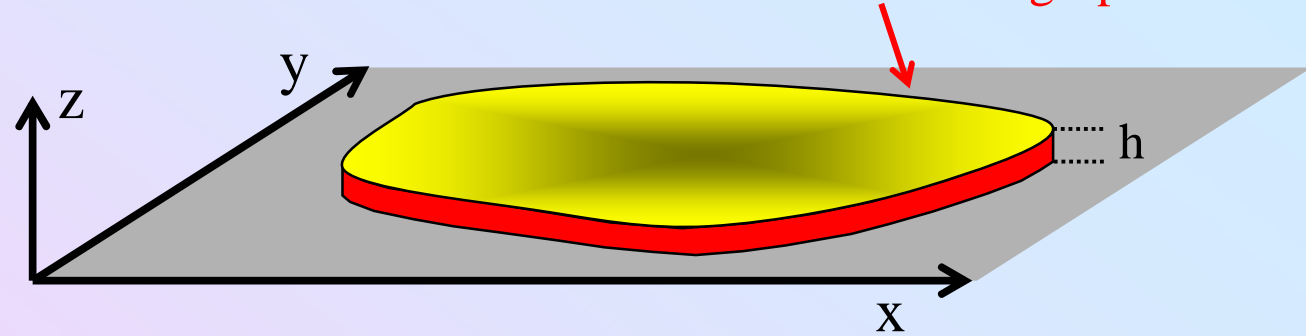


3.2. Dünne isotrope Platten

frei / einfach unterstützt / eingespannt

Massendichte:

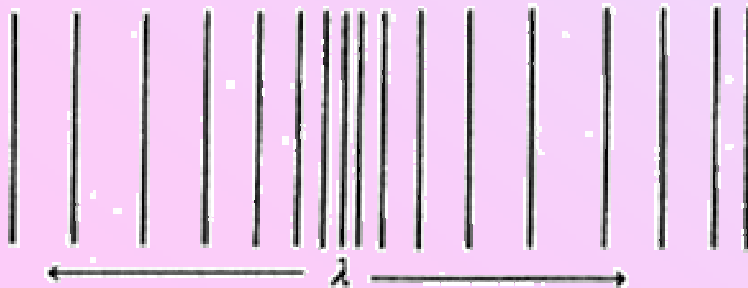
$$\rho = \frac{dm}{dV} = \text{const}$$



a) Longitudinale Wellen: nicht- dispersiv; keine signifikante Schallabstrahlung

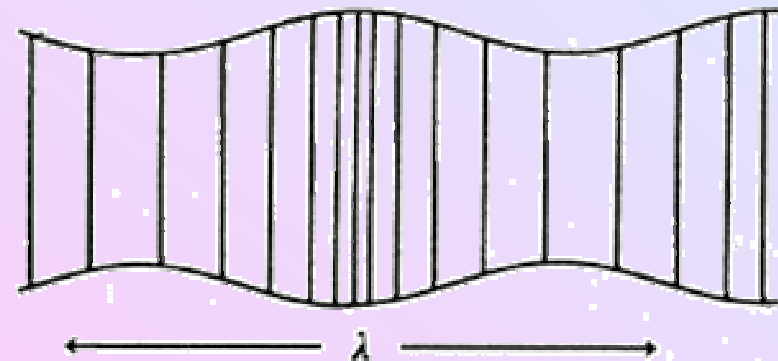
„Unendliches“ Medium (rel. zu λ)

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$



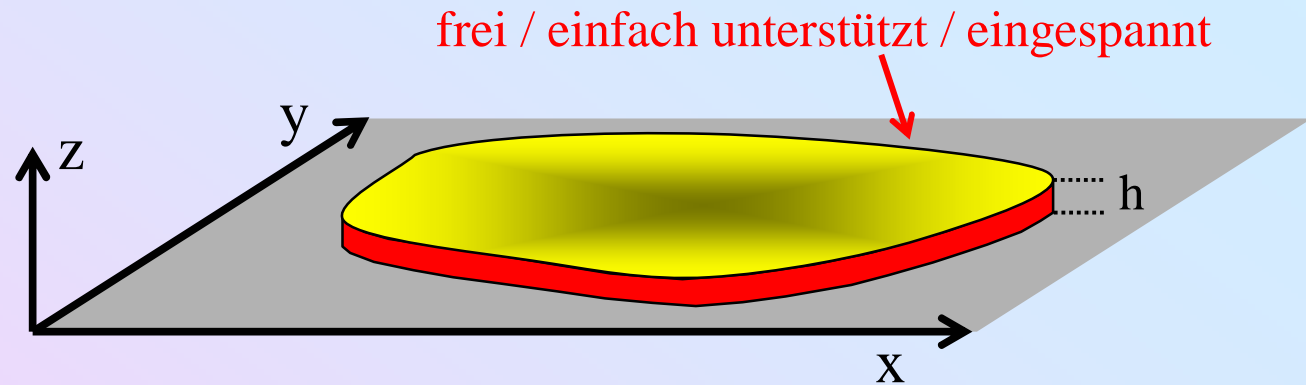
„Dünne“ (rel. zu λ) Balken / Platten

$$c'_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu^2)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$



Massendichte:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \text{const}$$



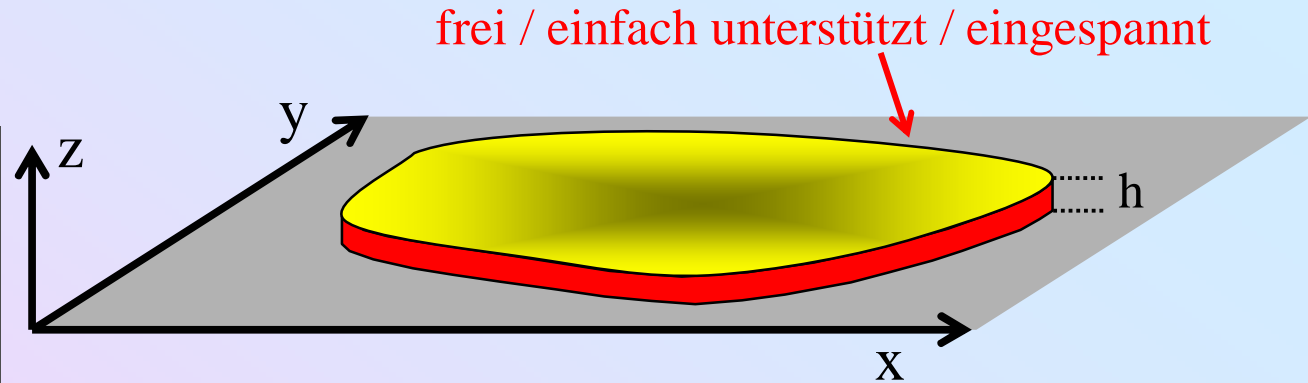
b) **Transversale Wellen:** nicht dispersiv; keine signifikante Schallabstrahlung
(zweidimensionales Analogon zu Torsionsschwingungen von Stäben)

„Unendliches“ Medium oder „unedlich große“, „flache“ Platten (rel. zu λ)

$$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{typisch} \quad \approx 60\% c_L$$

Massendichte:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \text{const}$$



c) Biege/Verformungs **Wellen: dispersiv; signifikante Schallabstrahlung**
(zweidimensionale Verallgemeinerung der Balken-Biegeschwingung)

Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{c_L^2 h^2}{12} \Delta^2 z = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$
 $\Delta^2 z = k^4 z$

Dispersionsrelation:

$$\omega(k) = \frac{c_L h}{\sqrt{12}} \cdot k^2 \quad (\text{nichtlinear})$$

Phasengeschwindigkeit:

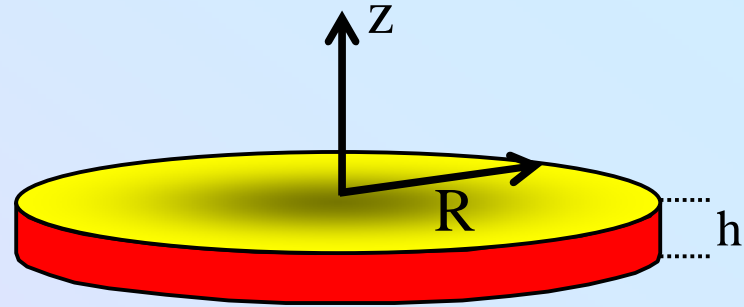
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c_L h}{\sqrt{12}} \cdot k = \sqrt{\frac{c_L h}{\sqrt{12}}} \cdot \sqrt{\omega} \propto \sqrt{\omega}$$

Gruppengeschwindigkeit:

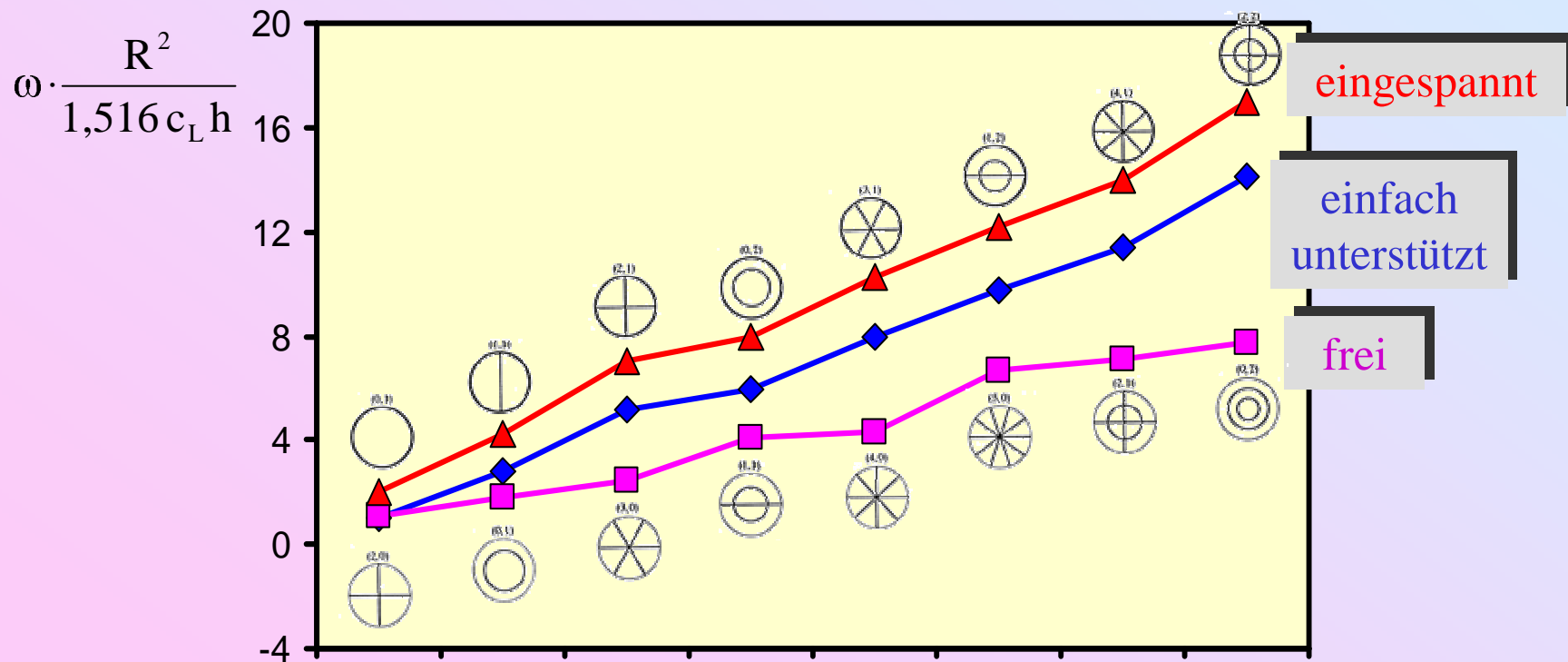
$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2 v_\varphi$$

 Beispiel: Die dünne Kreisplatte

$$z(r, \varphi, t) = e^{i\omega t} \cdot e^{im\varphi} \cdot [AJ_m(kr) + BI_m(kr)]$$



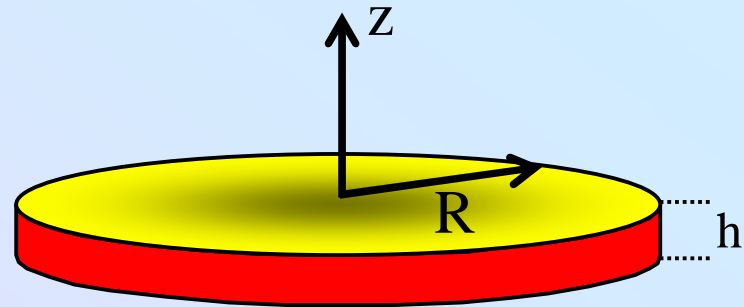
Hyperbolische Besselfunktionen: $I_m(kr) = i^{-m} J_m(kr)$



Asymptotisches Spektrum:

$$k_{mn} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (m + 2n) \cdot \frac{\pi}{2R}$$

$$\omega_{mn} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (m + 2n)^2 \cdot \frac{\pi^2 c_L h}{8\sqrt{3}R^2}$$



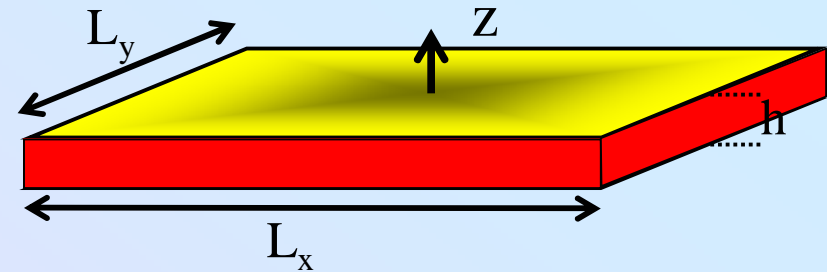
Lord Rayleigh (1894): Frequenzzunahme durch Zufügen eines Knotenrings ist ungefähr identisch mit der durch Zufügen zweier Knotendiagonalen (Chladni Gesetz)

Empirischer Ansatz für Kreisplatten,- schalen,- glocken:

$$\omega_{mn} = C \cdot (m + 2n)^p \quad p \begin{cases} \approx 2 & , \text{ flache Platten} \\ < 2 & , \text{ Schalen / Glocken} \end{cases}$$

 Beispiel: Die dünne Rechteckplatte

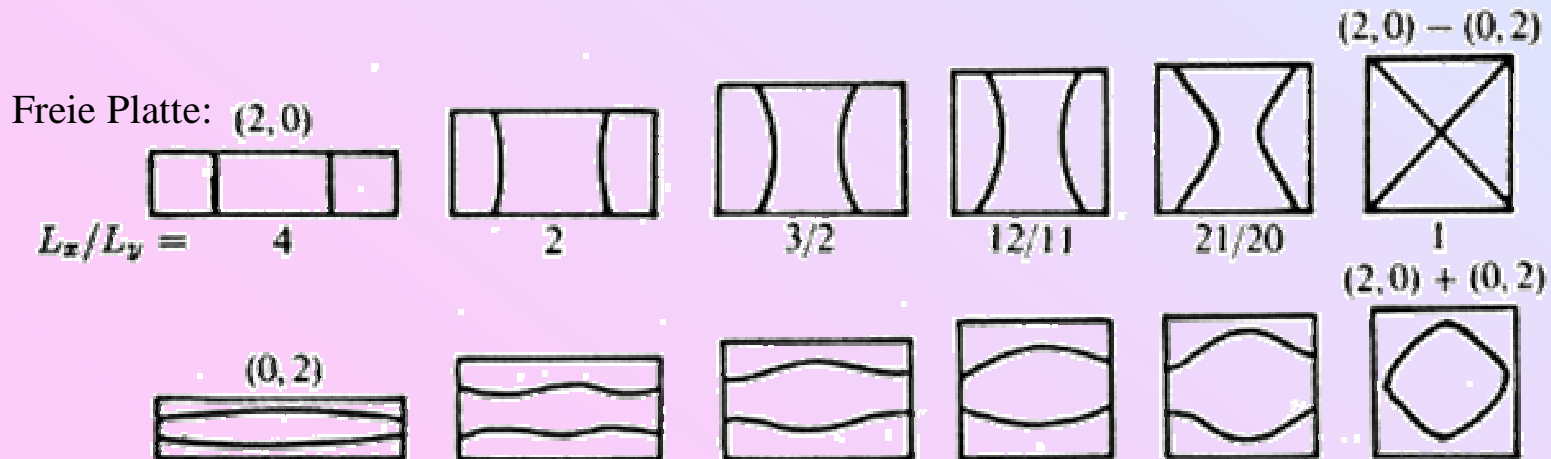
(i.a. schwieriges Problem)



(x,y) – Kopplung

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right) z(x, y) = k^4 \cdot z(x, y)$$

- **Einfache Unterstützung:** Knotenlinien (m,n) wie Membran
- **Andere Randbedingungen:** Gekrümmte Knotenlinien durch Mischung der (m,n) und (n,m) Membranmoden für $|m - n| = 2, 4, 6, \dots$

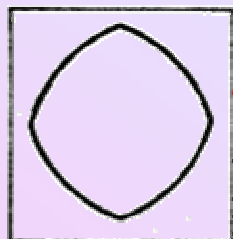


Messung an freier Aluminiumplatte

(x,y) – Kopplung bei $L_x \approx L_y$:

Ringmode

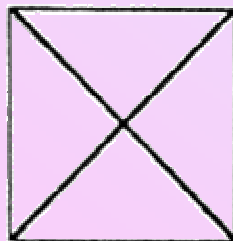
$(2,0) + (0,2)$



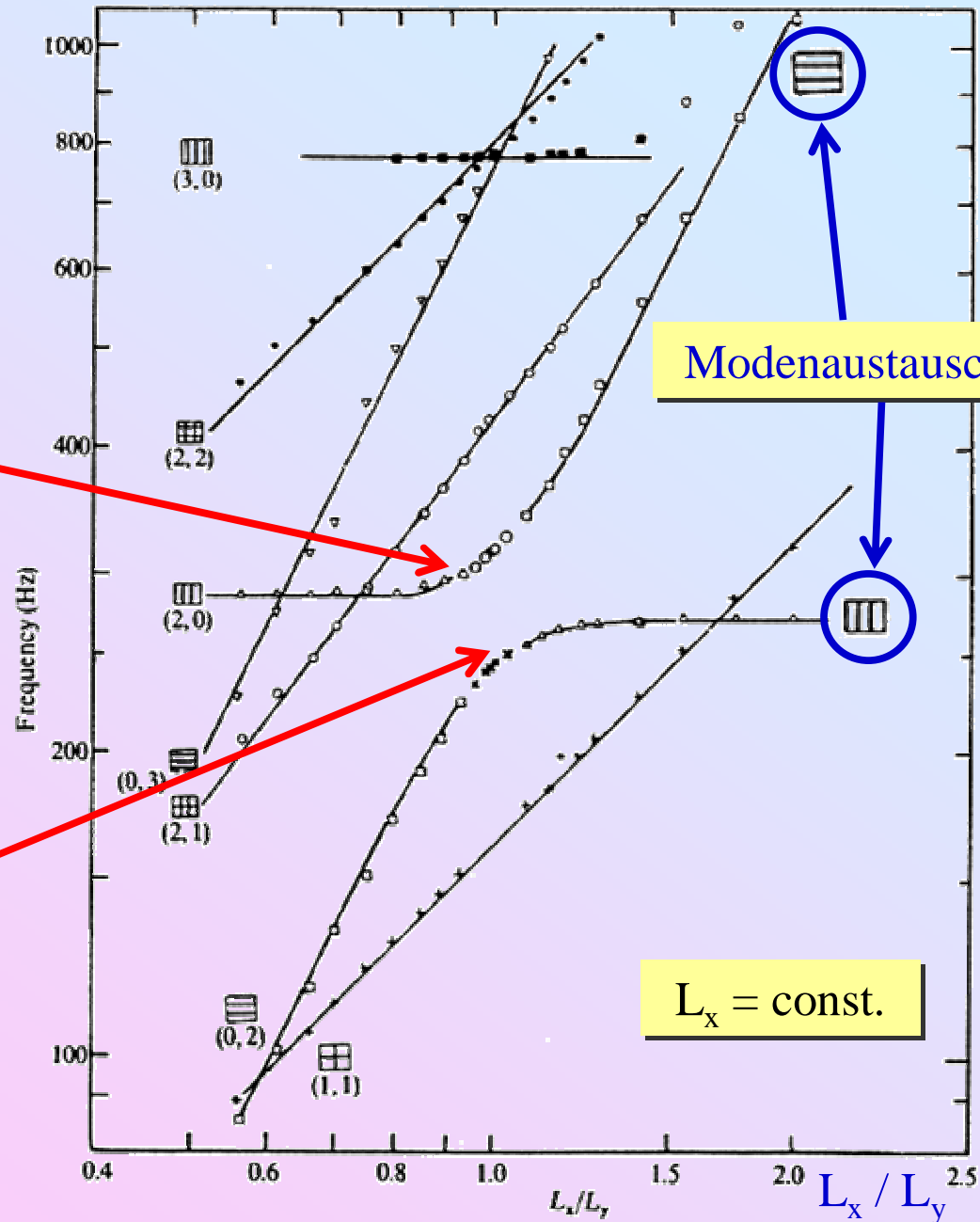
1.94

Diagonal Mode
(X Mode)

$(2,0) - (0,2)$

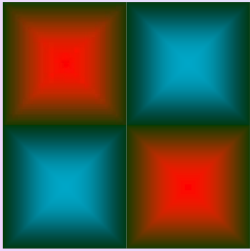


1.52



Fundamentalmoden quadratischer Platten:

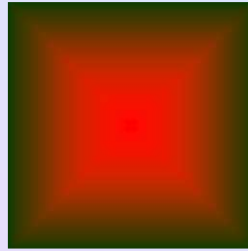
frei ($\nu=0,3$)



(1,1)

$$\omega_{11} = 3,717 \frac{c_L h}{L^2}$$

einfach unterstützt



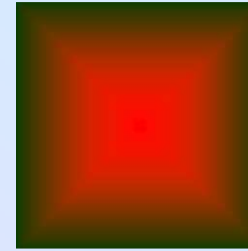
(0,0)

$$\omega_{00} = 5,698 \frac{c_L h}{L^2}$$



$$\omega_{11} = 22,79 \frac{c_L h}{L^2}$$

eingespannt



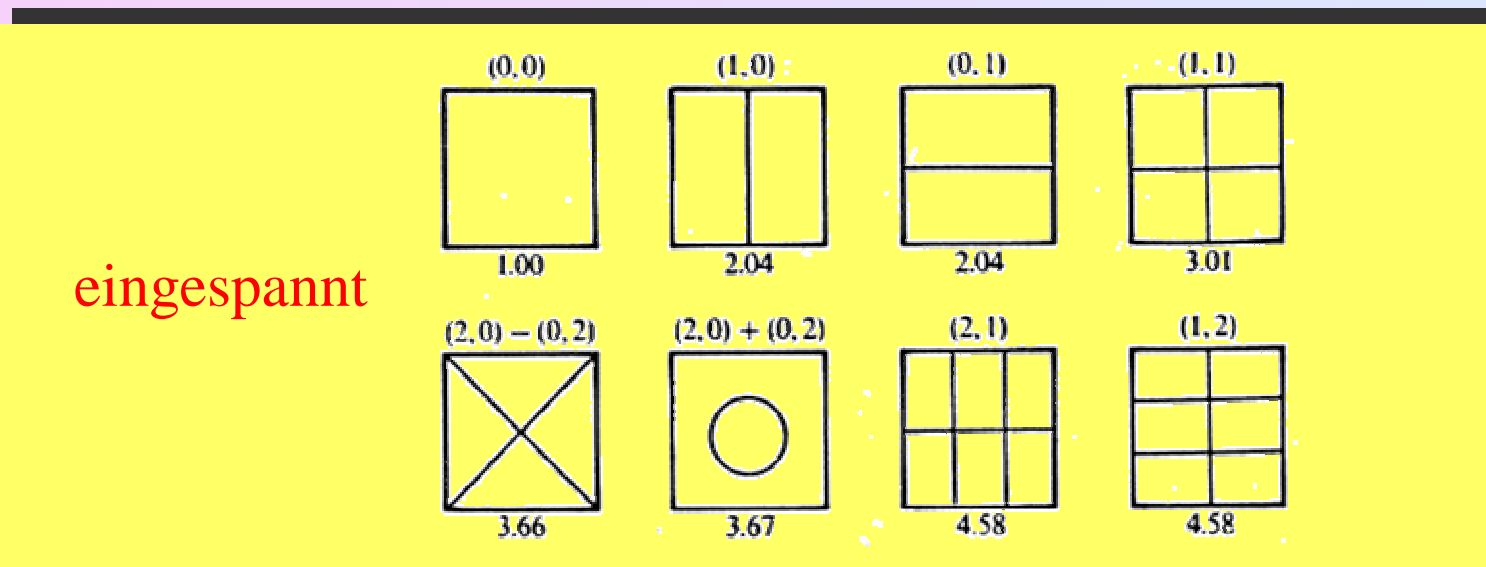
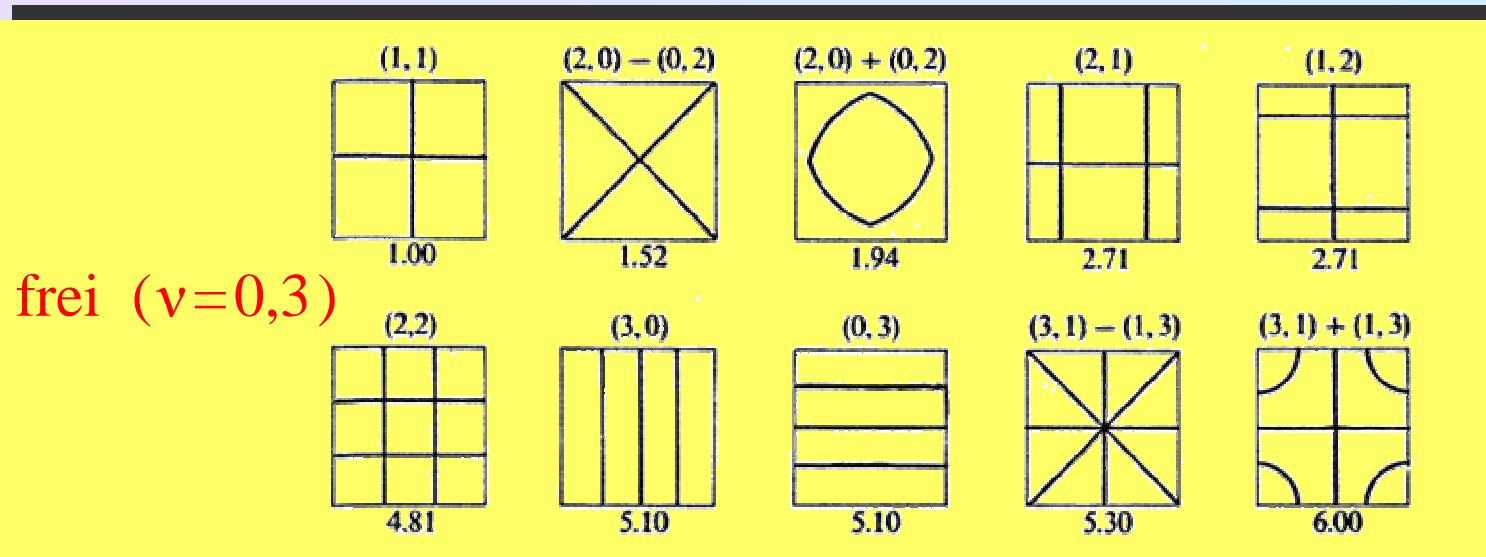
(0,0)

$$\omega_{00} = 10,39 \frac{c_L h}{L^2}$$

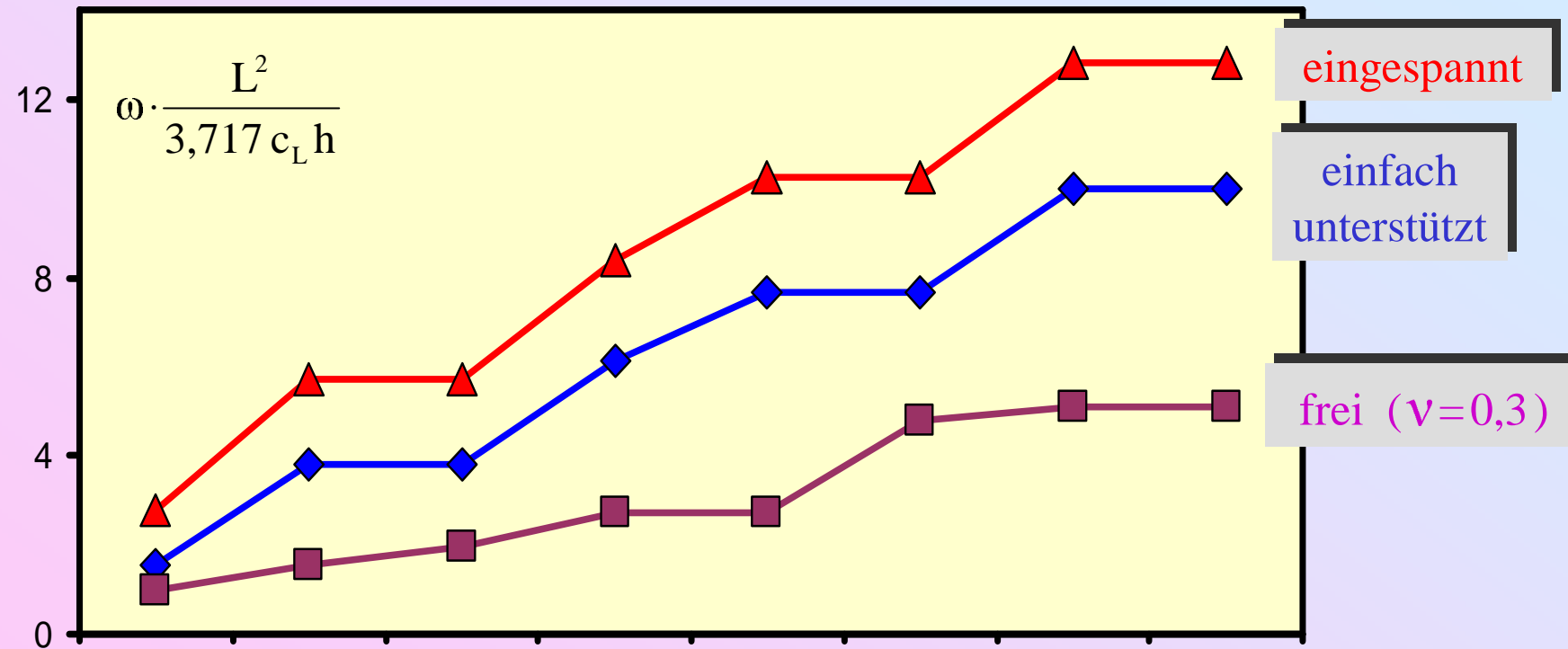


$$\omega_{11} = 31,28 \frac{c_L h}{L^2}$$

Moden quadratischer Platten:



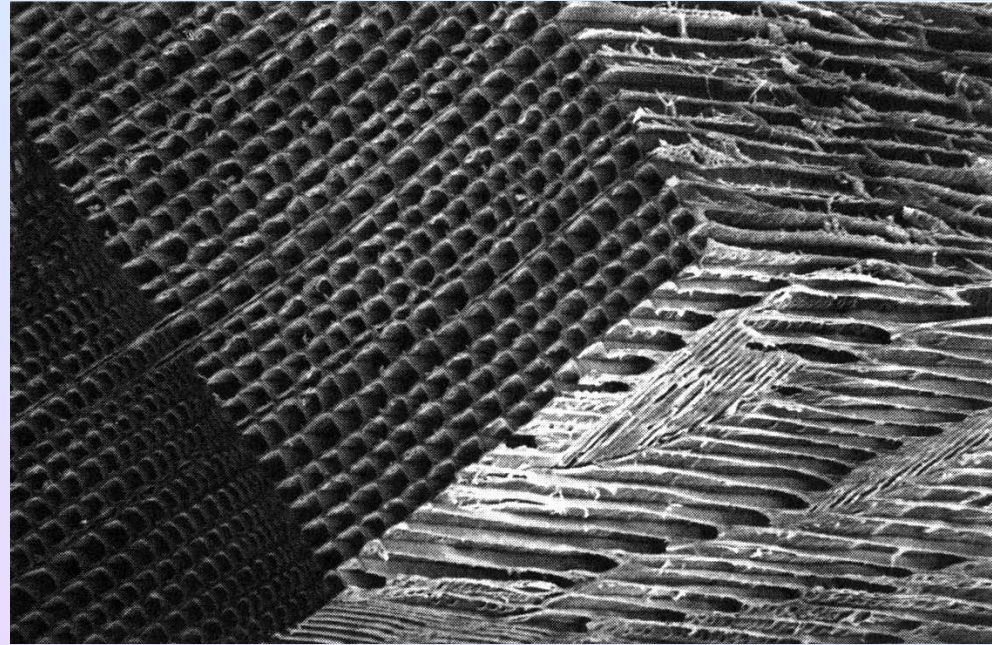
Modenspektren quadratischer Platten:



3.3. Dünne Holzplatten

Deckelplatten von Geigen:

- Fasern entlang Plattenlänge
- Jahresringe senkrecht zur Platte
- \Rightarrow Länge / Breite $\approx 3 / 1$



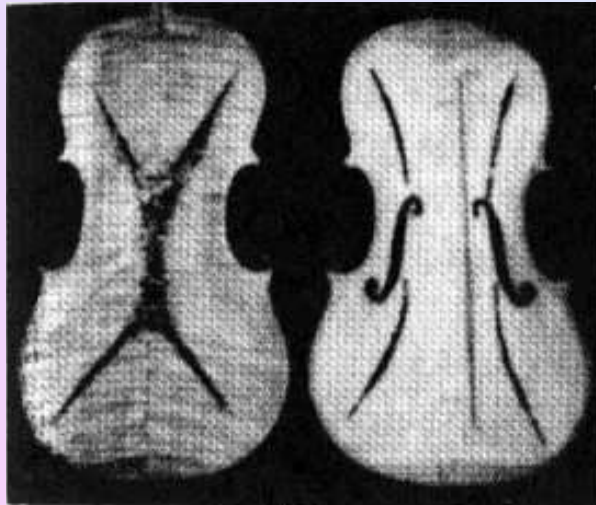
Fichtenholz
(orthotrop, 9 elastische Parameter)

Qualitative Eigenschaften ähnlich, ... aber

$$\left. \begin{array}{l} \bullet E \rightarrow E_x, E_y \\ \bullet \nu^2 \rightarrow \nu_{xy} \nu_{yx} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} c_x = \sqrt{\frac{E_x}{\rho(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}} \\ c_y = \sqrt{\frac{E_y}{\rho(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}} \end{array} \right\}$$

Beispiel: Freie Viola Deckel

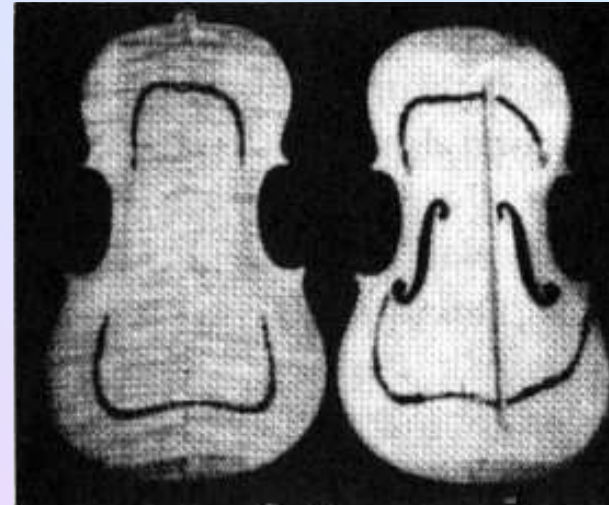
$(2,0) - (0,2)$ X ~~Mod~~



Rücken

Front

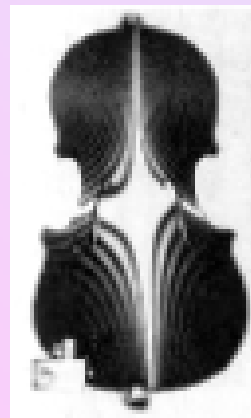
$(2,0) + (0,2)$ Ring ~~Mod~~



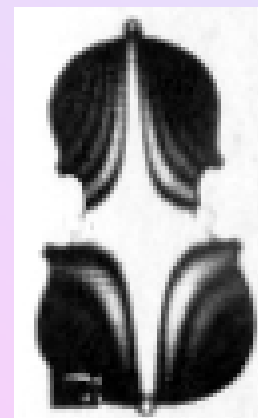
Rücken

Front

Dritte wichtige Mode:
 $(1,1)$ - Verwindungsmode



Rücken



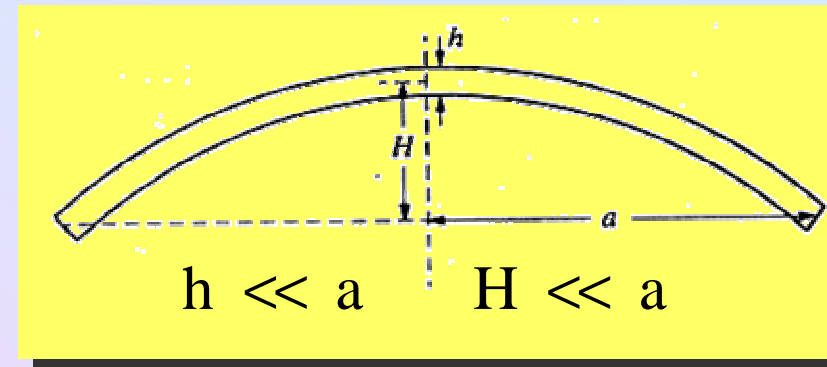
Front

3.4. Schalen

Sehr komplexes Problem, aber hochrelevant:

- Geigen Frontplatte / gesamter Resonanzkörper
- Kugelschalensegmente (Becken,...)
- Zylinderschalen (Zylinderglocken,...)
- Kirchenglocken

- Schalendimension: a
- Schalendicke: h
- Schalenwölbung: H



Modenklassifizierung (Love, Rayleigh):

- **Dehnungsmoden:** Längenänderungen in erster Ordnung

Linienmasse $\propto h$	}	$\omega(h) = \text{const.}$
Federkonstante $\propto h$		
- **Biegungsmoden:** Keine Längenänderungen in erster Ordnung

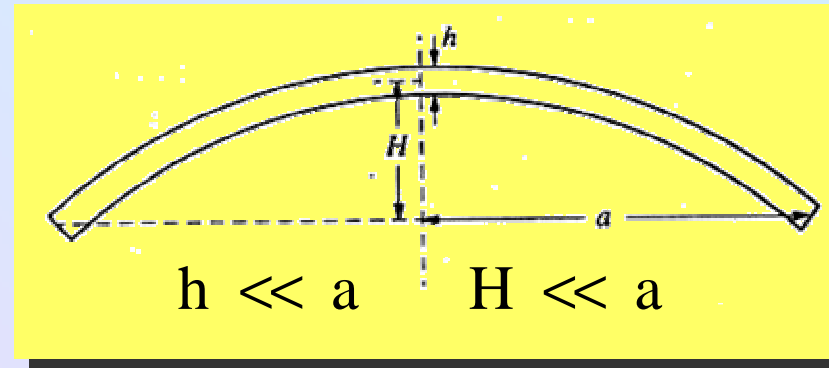
Schalenmasse $\propto h$	}	$\omega(h) \propto h^2$
Federkonstante $\propto h^3$		

Empirische Modenparametrisierung:

$$\omega_{mn} = \sqrt{A_{mn} + B_{mn} h^2}$$

Beispiel: Flache sphärische Schale

$$z(r, \varphi, t) = e^{i\omega t} \cdot e^{im\varphi} \cdot [AJ_m(kr) + BI_m(kr)]$$



Niedrigste Mode: $ka = \mu$ (abhängig von Einspannung)

Spezialfall der flachen Platte ($H=0$): $ka = \mu_0$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^4 + \frac{48}{\mu_0^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2} \quad \frac{H}{h} > 20, \frac{a}{H} > 4 \quad \approx \quad 2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{H}{a^2}$$

Sehr starke Frequenzzunahme (d.h. Steifigkeitszunahme) mit $H \Rightarrow$

- gewölbter Geigendeckel benötigt keine innere Verstrebung
- flacher Gitarrendeckel erfordert starke innere Verstrebung

4. Schall in Luft

4.1. Schallwellen

~~Elastischer Scherungswiderstand~~

Reibungswiderstand ✓

Elastischer Kompressionswiderstand ✓

Gesamtluftdruck: p_L

Akustischer Druck: $p \equiv \delta p_L \ll p_L$

Schallwellen =
longitudinale Druckwellen

Wellengleichung:
$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 p$$

Schallgeschwindigkeit c : $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$

Kompressionsmodul K : $p = -K \frac{dV}{V}$

Dichte ρ : $\rho = \frac{dm}{dV}$

4.1.1. Schallgeschwindigkeit

Luft ist ideales Gas $\Rightarrow p_L V = NkT$

Luft \approx zweiatomig $\Rightarrow U = \frac{5}{2} NkT$

1. Hauptsatz $\Rightarrow \delta U = \delta Q - p_L \delta V$

$$\left. \begin{aligned} C_p &= \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_{p_L} \\ C_v &= \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Isothermer Fall ($T = \text{const.}$):

$$\frac{p}{p_L} = \frac{\delta p_L}{p_L} = - \frac{\delta V}{V} = \frac{p}{K}$$

$$c = \sqrt{\frac{p_L}{\rho}}$$

Für Musikinstrumente nur in
Extremfällen interessant

Adiabatischer Fall ($\delta Q = 0$):

$$\begin{aligned} -p_L \delta V &= \delta U = \frac{5}{2} Nk \delta T \\ &= \frac{5}{2} V \delta p_L + \frac{5}{2} p_L \delta V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma p_L = -p \frac{V}{\delta V} = K$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_L}{\rho}}$$

Wellengleichung: $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 p$ $c = \sqrt{\frac{\gamma p_L}{\rho}}$

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{Nm_L}{V} \\ p_L V = NkT \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p_L}{\rho} = \frac{kT}{m_L} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{\gamma kT}{m_L}}$$

- c^2 proportional zur (absoluten) Temperatur
- c unabhängig vom Luftdruck
- m_L und somit c abhängig von Luftfeuchtigkeit

Taylorentwicklung um 0°C bei 50% relativer Luftfeuchtigkeit:

$$c \approx 332 \left(1 + 0,00166 \Delta T / ^\circ\text{C} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.1.2. Strömungsfeld

$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t) =$ Strömungsgeschwindigkeitsdichte Feld

Wellengleichung: $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 p$

Bewegungsgleichung: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p$

$p \leftrightarrow$ Potential \leftrightarrow Spannung
 $u \leftrightarrow$ Geschwindigkeit \leftrightarrow Strom

Lösung (Superposition ebener Wellen): $p(\vec{r}, t) = p e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}$ $\omega = c |\vec{k}|$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}$$

Folge: $\vec{u} = \frac{p}{\rho c} \vec{e}_k$

Ohmsches
Gesetz

$$z = \frac{p}{u} = \rho c$$

$$\approx 428(1 - 0,0017 \Delta T / ^\circ\text{C}) \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Normaldruck

(spezifische akustische)
Impedanz



4.1.3. Kugelwellen

Sphärisch symmetrische Quelle \Rightarrow

$$\text{Wellengleichung: } \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 p = c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right)$$

$$\text{Bewegungsgleichung: } \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p = -\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r$$

Lösung (Kugelwelle): $p(r, t) = \left(\frac{A}{r} e^{-ikr} + \frac{B}{r} e^{ikr} \right) e^{i\omega t}$

$\omega = ck$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c\rho r} \left(\underbrace{A \frac{ikr+1}{ikr} e^{-ikr}}_{\text{auslaufend}} + \underbrace{B \frac{ikr-1}{ikr} e^{ikr}}_{\text{einlaufend}} \right) e^{i\omega t} \vec{e}_r$$

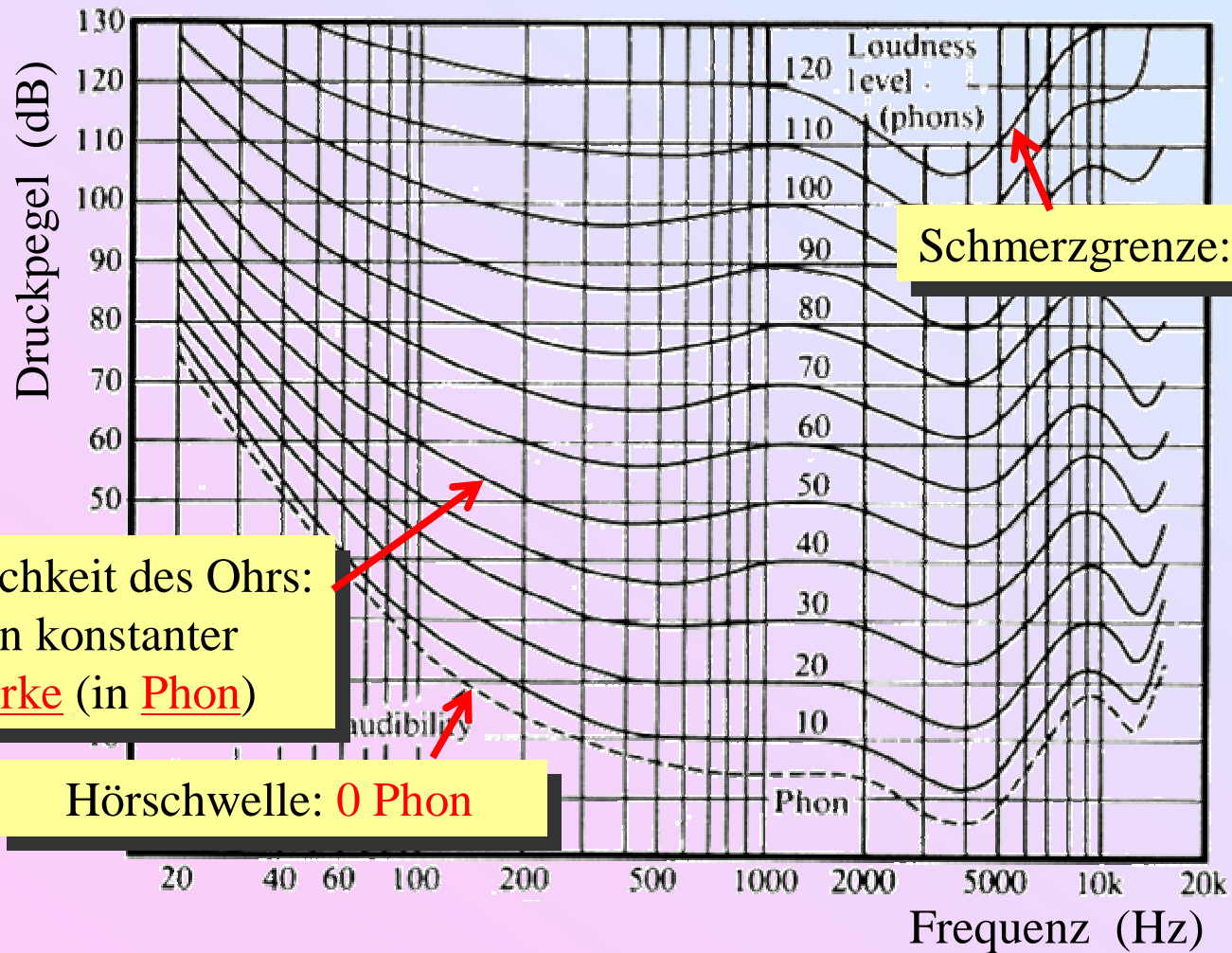
Akustische Impedanz:

$$z = \frac{p}{u} = \begin{cases} \rho c \frac{ikr}{ikr+1}, & \text{auslaufend} \\ \rho c \frac{ikr}{ikr-1}, & \text{einlaufend} \end{cases}$$



4.1.4. Druckpegel, Lautstärke, Intensität

Druckpegel: $L_p = 20 \log_{10} \left(\frac{p}{p_0} \right) \text{ dB}$ $p_0 = 20 \mu\text{Pa} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^{-2}$



Empfindlichkeit des Ohrs:
Kurven konstanter
Lautstärke (in Phon)

Hörschwelle: 0 Phon

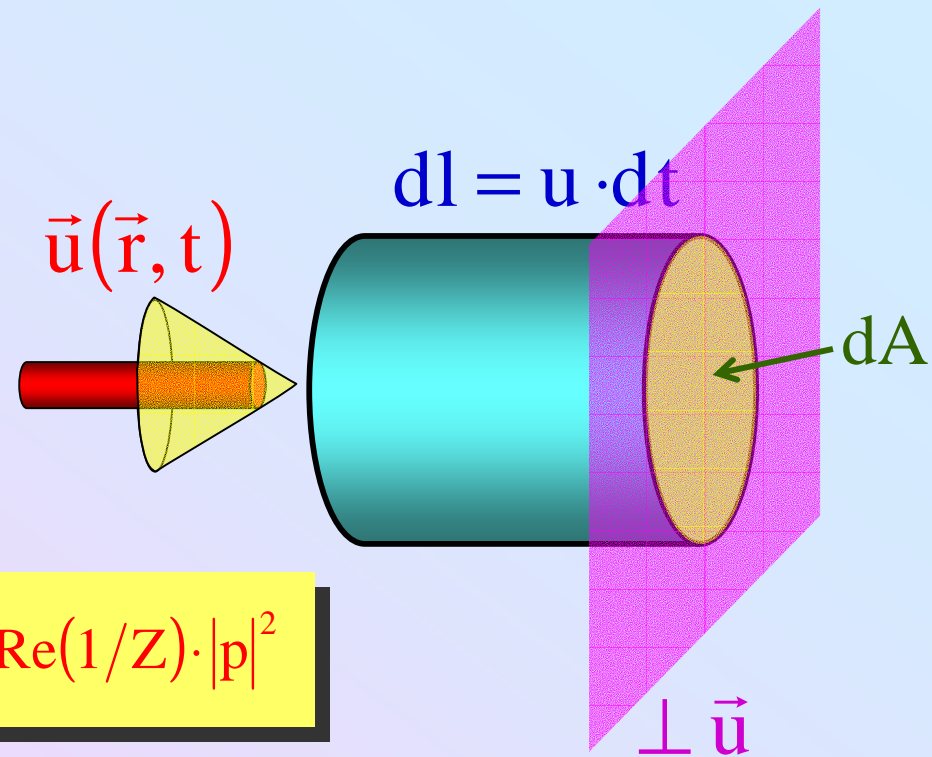
Schmerzgrenze: 120 Phon

Intensität an einer Fläche:

$$I = \left\langle \frac{d^2 E}{dA dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dF dl}{dA dt} \right\rangle = \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \rangle$$

Komplexe Schreibweise:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{u}^* \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z) \cdot |\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(1/Z) \cdot |\mathbf{p}|^2$$



Intensitätspegel:

$$L_I = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{ dB} \quad I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$$

Ebene Wellen: $L_I \cong L_p$

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u^* p) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z) \cdot |u|^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(1/Z) \cdot |p|^2$$

Ebene Welle:

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} \\ u &= u_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} \\ Z &= \rho c \end{aligned} \right\} I = \frac{1}{2} \rho c u_0^2 = \frac{p_0^2}{2\rho c} = \frac{1}{2} p_0 u_0$$

Kugelwelle:

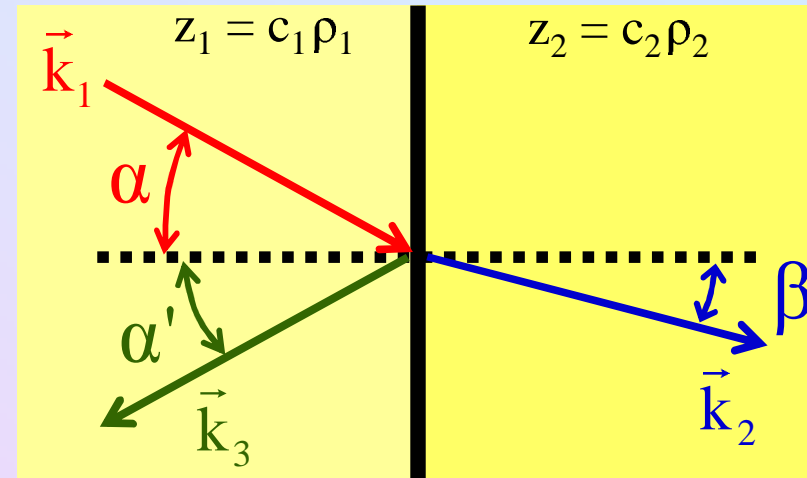
$$\left. \begin{aligned} p &= p_0(r) e^{i(\omega t - kr)} & p_0(r) &= \frac{A}{r} \\ u &= u_0(r) e^{i(\omega t - kr)} & u_0(r) &= \frac{p_0(r)}{Z} \\ Z &= \rho c \left(\frac{ikr}{1 + ikr} \right) \end{aligned} \right\} I = \frac{p_0^2}{2\rho c}$$

4.1.5. Reflexion, Brechung, Beugung

a) $\lambda \ll$ Randstrukturen \Rightarrow Gesetze der geometrischen Optik

Reflexionsgesetz: $\alpha = \alpha'$

Brechungsgesetz: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{z_1}{z_2}$



Ebene Wellen gegen ebene Grenzfläche

Reflexionskoeffizient

Amplitude: $r = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$

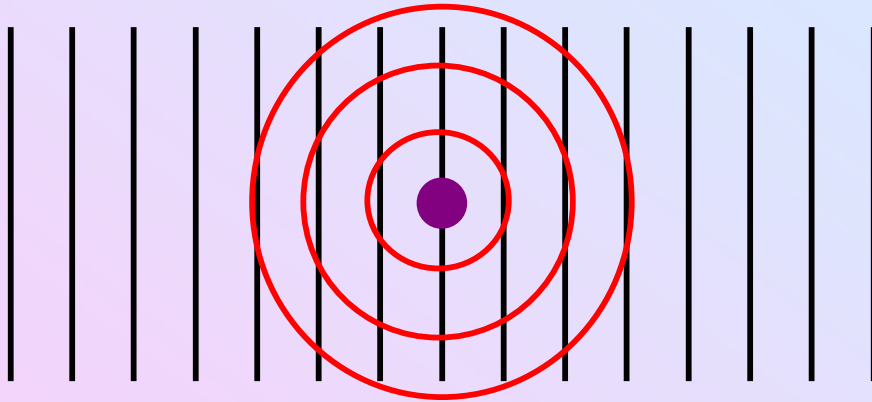
Intensität: $R = r^2$

Transmissionskoeffizient

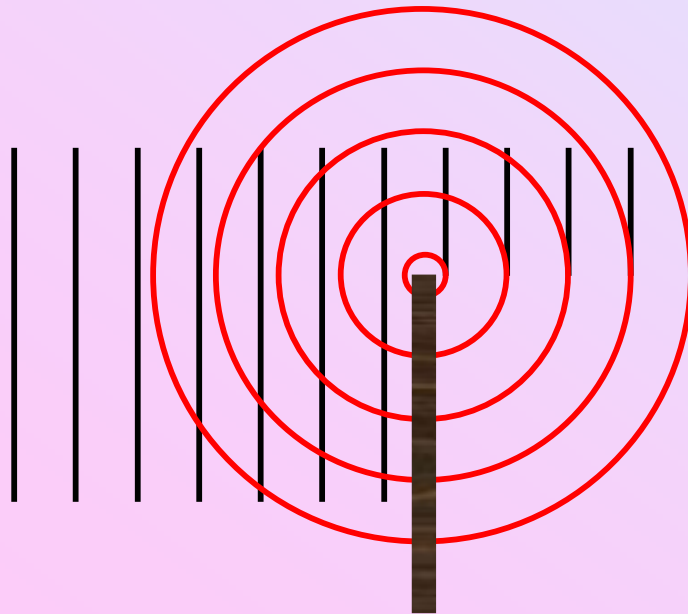
$t = 1 + r$

$T = 1 - R$

b) $O(10\lambda) >$ Randstrukturen \Rightarrow Beugung an Rändern



Frequenz	Wellenlänge
20 Hz	17 m
1 kHz	34 cm
15 kHz	2,3 cm



4.1.6. Dämpfung

$$k \rightarrow \frac{\omega}{c} - i\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p(\vec{r}, t) \propto e^{-\alpha \vec{r} \cdot \vec{e}_k}, & \text{ebene Welle} \\ p(r, t) \propto e^{-\alpha r}, & \text{Kugelwelle} \end{cases}$$

Ursachen:

- Viskosität
 - thermische Verluste
 - Molekularer Energieaustausch
- } z.B. Wände von Musikinstrumenten

Beispiel: Dämpfung in Luft (relative Luftfeuchtigkeit > 50%)

$$\alpha \approx 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1} \cdot f / \text{Hz}, \quad 100 \text{ Hz} < f < 1 \text{ kHz}$$

$$\alpha \approx 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^{-1} \cdot f^2 / \text{Hz}^2, \quad 2 \text{ kHz} < f < 100 \text{ kHz}$$

$\Rightarrow \alpha(10 \text{ kHz}) \approx 0,1 \text{ dB/m} \Rightarrow$ relevant für große Konzertsäle

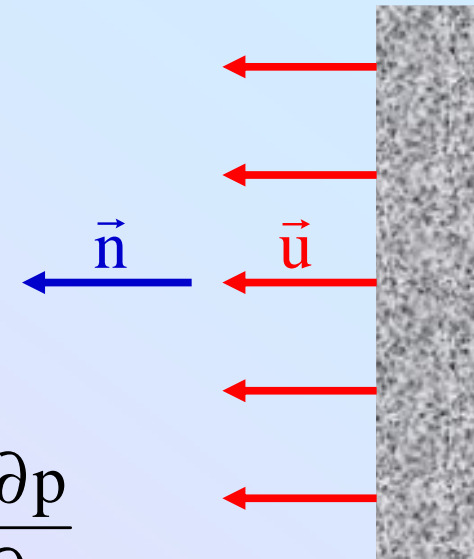
4.1.7. Hohlraummoden

An der Wand:

$$\vec{u}_{\text{Wand}} = \vec{u}_{\text{Luft}} \equiv \vec{u}$$

$$p = z_w u$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \quad \Rightarrow \quad i\omega\rho u = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p = -\frac{\partial p}{\partial n}$$



Starre Wand
Impedanz: z_w

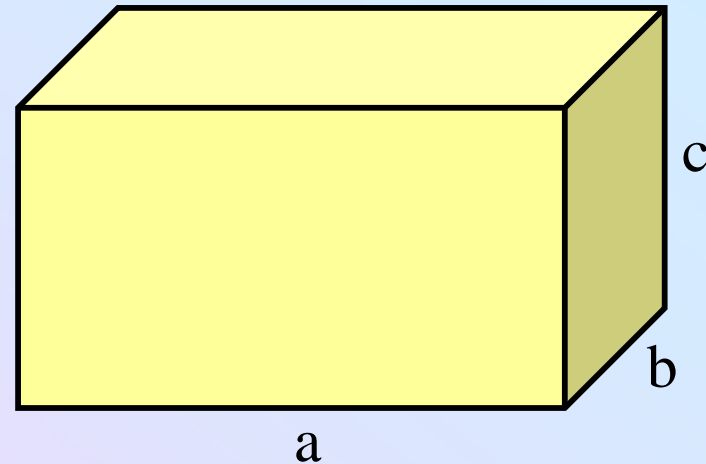
$$\text{Randbedingung: } p = \frac{iz_w}{\rho\omega} \frac{\partial p}{\partial n}$$

$$\text{Spezialfall der festen Wand: } z_w = \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

Beispiel: Quaderförmiges Auditorium mit festen Wänden

$$p(\vec{r}, t) = A \cos\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{c}\right)$$

$$\omega_{lmn} = \pi c \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}$$

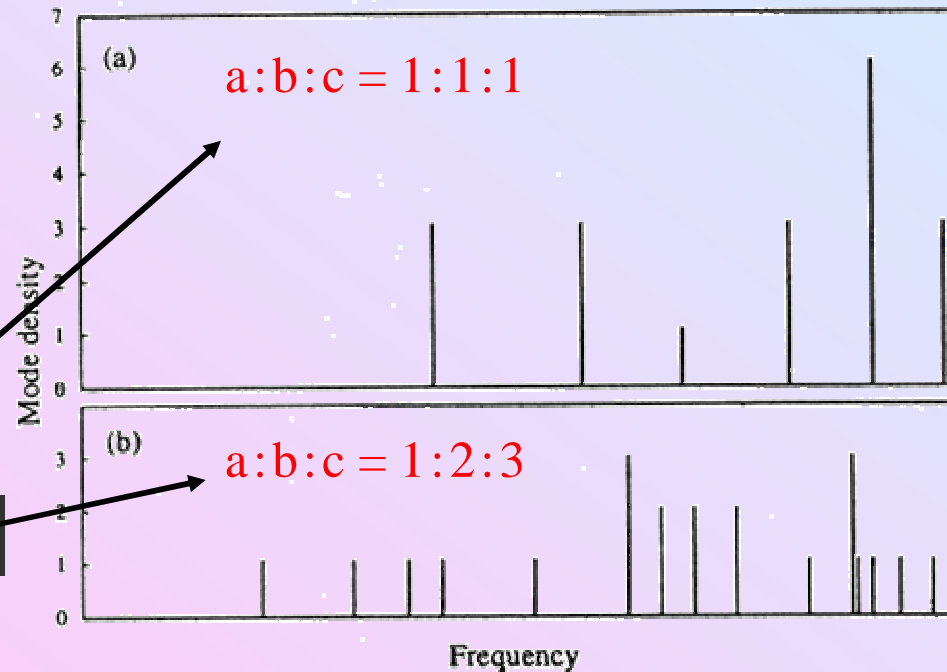


Design von Konzertsälen:

Gleichmäßige Modendichte
bei niedrigen Frequenzen

Schlechtes Design

Besseres Design





4.2. Schallausstrahlung

- Kugelstrahler: Wichtiges Modellsystem
- Multipol **Quellen**: Konfiguration von Punktquellen, Abstände klein gegen Wellenlänge
- Überlagerte **Punktquellen**: Beliebige ausgedehnte Konfigurationen von Punktquellen
- Ebene **Quellen**:
 - Quellfläche in unendlicher Schallwand
 - Unabgeschirmte Quellfläche
 - Unendlich große Platten

4.2.1. Kugelstrahler

Gutes Modellsystem für pulsierende
Hohlkörper **jeder** Form!

Definition:

Quellstärke

$$Q = 4\pi a^2 v(a)$$

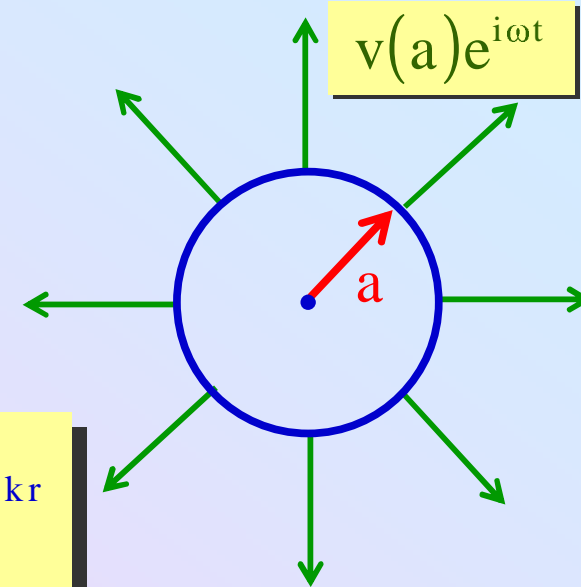
Abgestrahlte Kugelwelle:

$$p(r) = \frac{A}{r} e^{-ikr} \quad v(r) = \frac{A}{\rho c r} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) e^{-ikr}$$

$$v(a) = \frac{Q}{4\pi a^2} \Rightarrow A = \frac{i\omega\rho Q}{4\pi} \frac{e^{ika}}{1+ika}$$

Intensität:

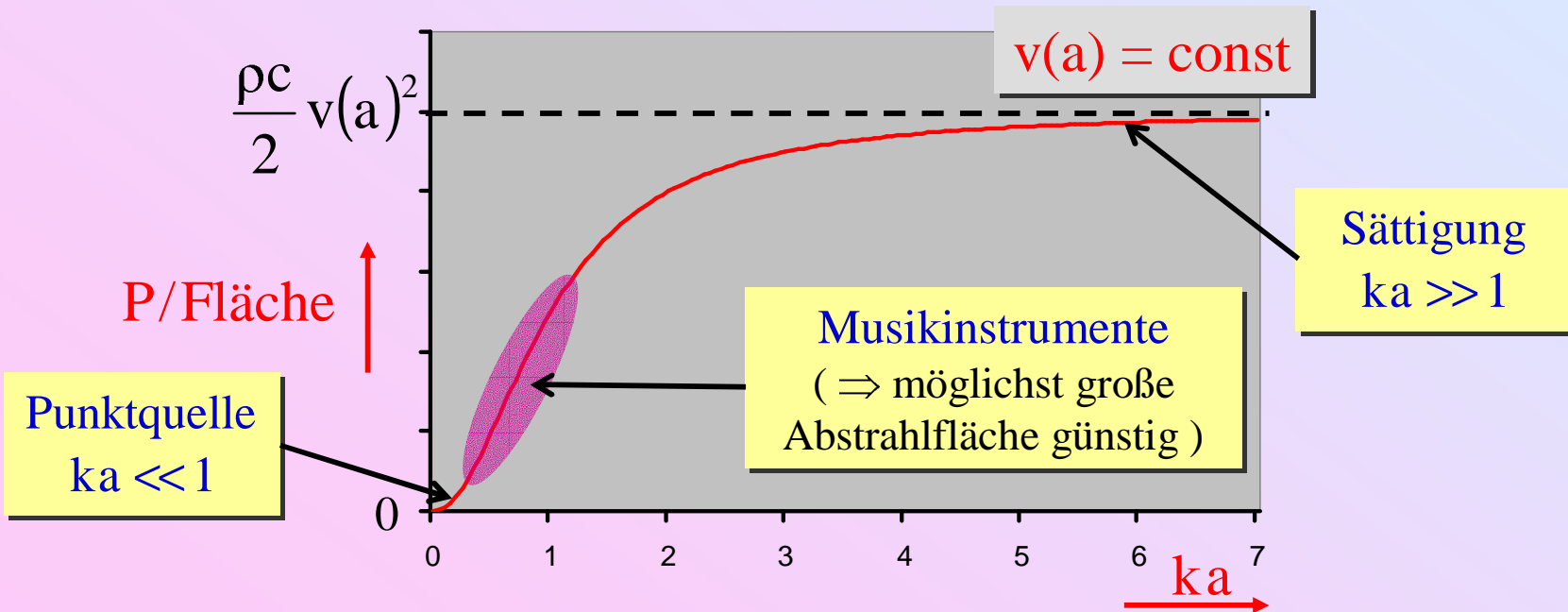
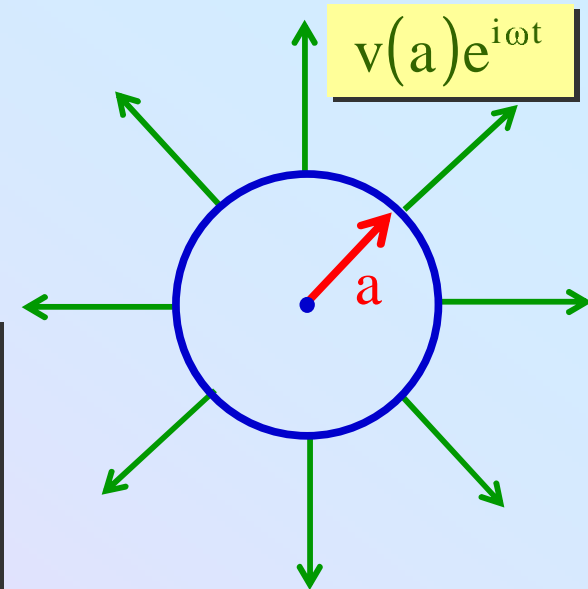
$$I(r) = \frac{|p(r)|^2}{2\rho c} = \frac{\rho c Q^2}{32\pi^2 a^2} \frac{(ka)^2}{1+(ka)^2} \frac{1}{r^2}$$



$$I(r) = \frac{|p(r)|^2}{2\rho c} = \frac{\rho c Q^2}{32\pi^2 a^2} \frac{(ka)^2}{1+(ka)^2} \frac{1}{r^2}$$

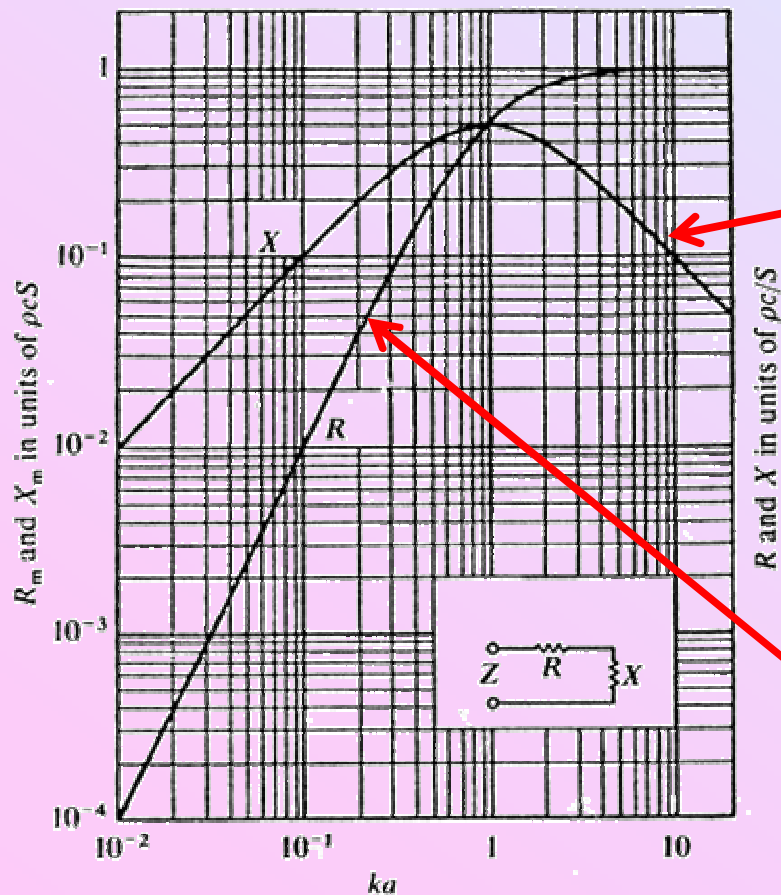
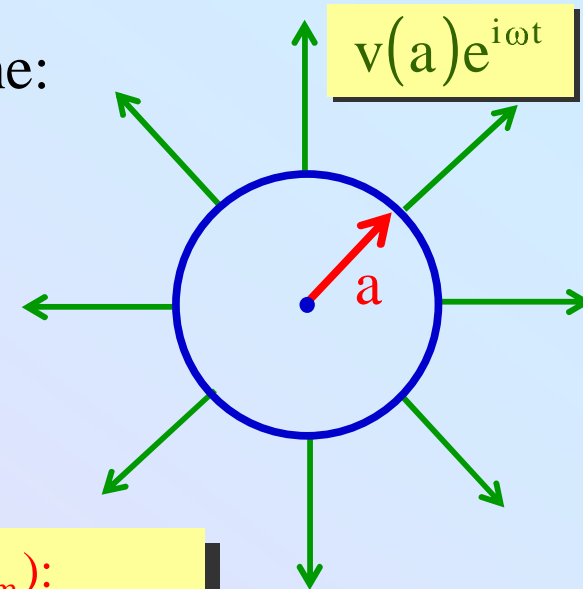
Gesamtstrahlungsleistung

$$P = \iint I(r) \cdot r^2 d\cos\theta d\varphi = \frac{\rho c Q^2}{8\pi a^2} \frac{(ka)^2}{1+(ka)^2}$$



Mechanische Last an schwingender Oberfläche:

$$Z_m = \frac{F}{v(a)} = \frac{S \cdot p(a)}{v(a)} = \rho c S \frac{i k a}{1 + i k a}$$



$X = \text{Im}(Z_m)$:
Reaktivität der
mitschwingenden Luft

$R = \text{Re}(Z_m)$:
Dissipation durch Abstrahlung

4.2.2. Multipol Quellen

Quellstärke

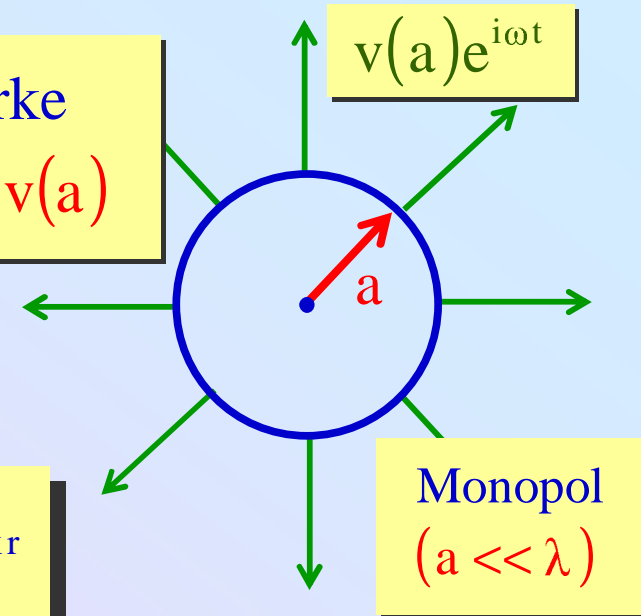
$$Q = 4\pi a^2 v(a)$$

Abgestrahlte Kugelwelle:

$$p(r) = \frac{A}{r} e^{-ikr} \quad v(r) = \frac{A}{\rho cr} \left(1 - \frac{i}{kr} \right) e^{-ikr}$$

$$A = \frac{i\omega\rho Q}{4\pi} \frac{e^{ika}}{1+ika} \xrightarrow{a \ll \lambda} \frac{i\omega\rho Q}{4\pi}$$

Amplitude unabhängig von Quellgröße $a \Rightarrow$ „Punktquelle“



Multipolkonfigurationen:

Punktquelle:

$$A = \frac{i\omega\rho Q}{4\pi}$$

Monopol: $+Q \bullet$ $I(\vec{r}) = \frac{1}{2\rho c} \left| \frac{A}{r} \right|^2 = \frac{\rho c Q^2}{32\pi^2} \frac{1}{r^2} \frac{\omega^2}{c^2}$

Dipol: $+Q \bullet$
 $-Q \circ$ δz $I(\vec{r}) = \frac{\rho c Q^2}{32\pi^2} \frac{\delta z^2}{r^2} \cos^2(r, z) \frac{\omega^4}{c^4}$

Quadrupol: $+Q \bullet$
 $-Q \circ$ δz
 $+Q \bullet$ δz
 $-Q \circ$ δz $I(\vec{r}) = \frac{\rho c Q^2}{32\pi^2} \frac{\delta z^4}{r^2} \cos^4(r, z) \frac{\omega^6}{c^6}$

$+Q \bullet$ δz $-Q \circ$ δx $+Q \bullet$
 $-Q \circ$ δx $+Q \bullet$ $I(\vec{r}) = \frac{\rho c Q^2}{32\pi^2} \frac{\delta x^2 \delta z^2}{r^2} \cos^2(r, x) \cos^2(r, z) \frac{\omega^6}{c^6}$

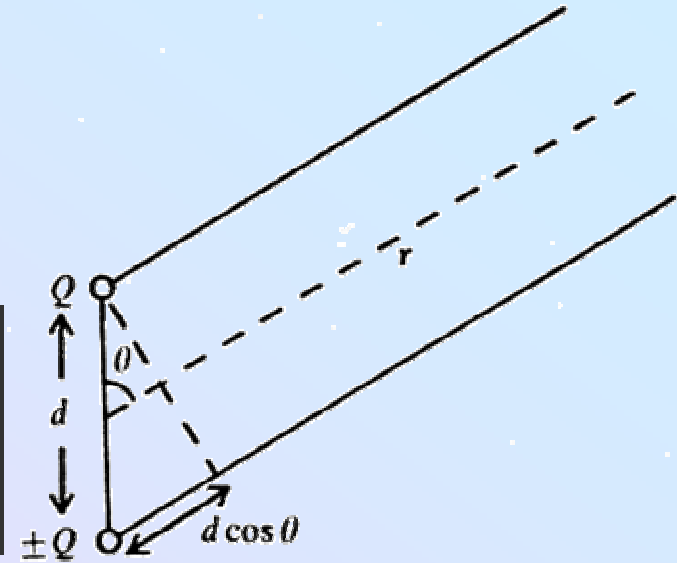
- zunehmend komplexere Winkelverteilung
- zunehmend ineffizient bei niedrigen Frequenzen

4.2.3. Überlagerte Punktquellen

Strahlung zweier Punktquellen bei $r \gg d$:

$$I(r, \theta, \varphi) = \frac{\omega^2 \rho Q^2}{4\pi c} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \end{array} \right\} \left(\frac{1}{2} k d \cos \theta \right)$$

+Q -Q



Gesamtstrahlungsleistung durch Kugelfläche mit $r \gg d$:

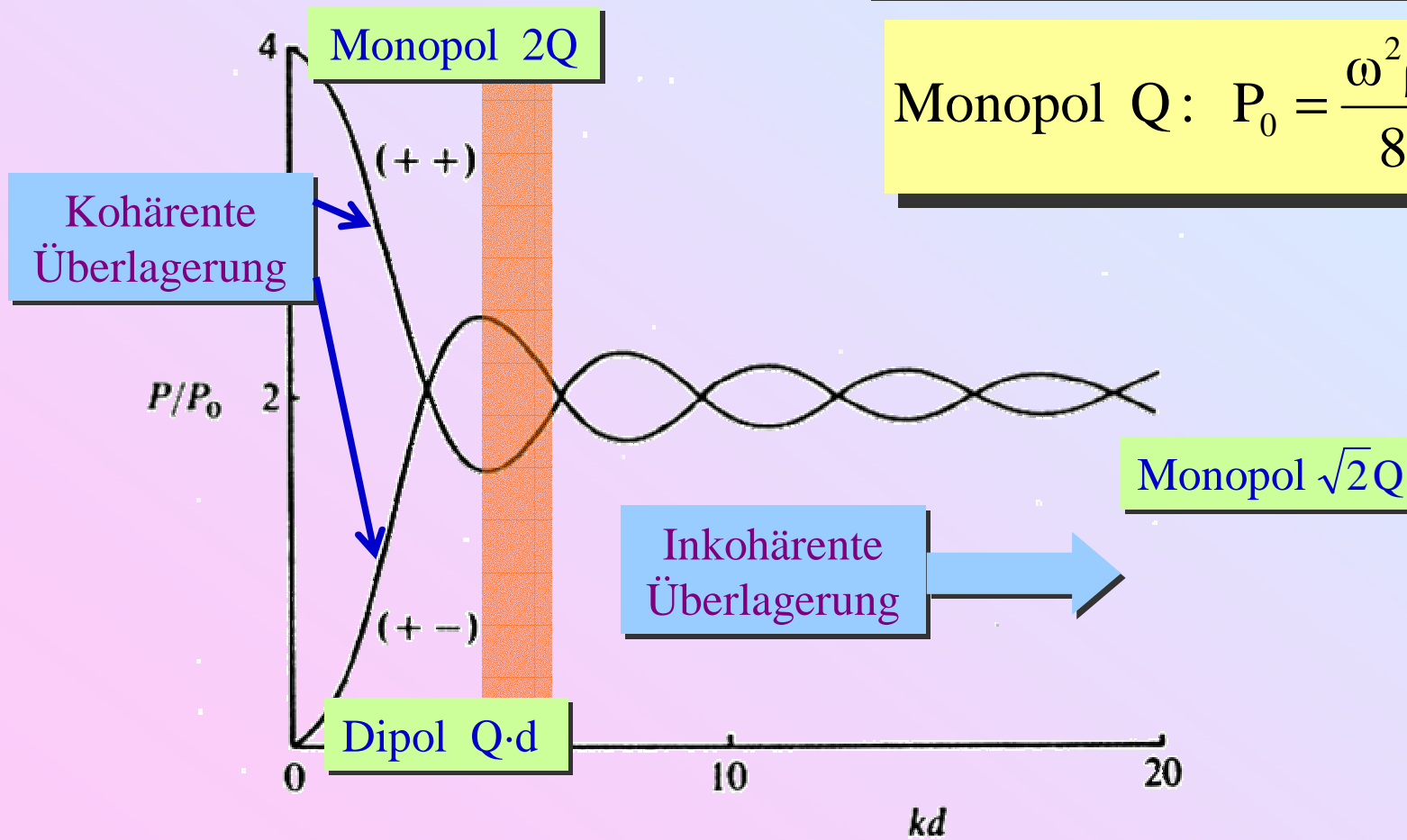
$$P = \iint I(r, \theta, \varphi) \cdot r^2 d\cos\theta d\varphi = \frac{\omega^2 \rho Q^2}{4\pi c} \left[1 \pm \frac{\sin(kd)}{kd} \right]$$

- Komplexes Interferenzmuster
- P unabhängig von r

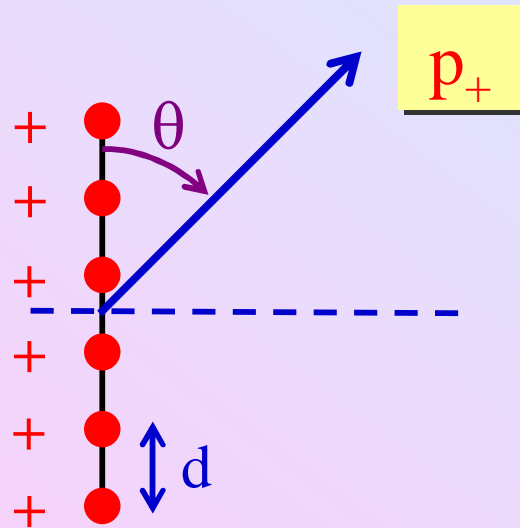
Strahlung zweier Punktquellen ($r \gg d$)

$$P = \frac{\omega^2 \rho Q^2}{4\pi c} \left[1 \pm \frac{\sin(kd)}{kd} \right]$$

$$\text{Monopol } Q: P_0 = \frac{\omega^2 \rho Q^2}{8\pi c}$$



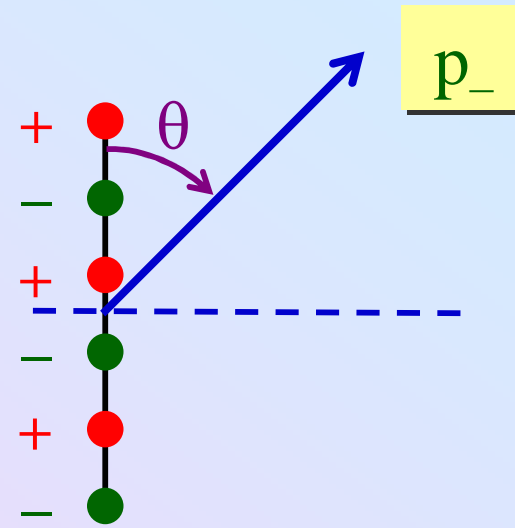
Strahlung von $2N$ Punktquellen bei $r \gg 2Nd$:



$$p_+ \approx \frac{i\omega\rho Q}{4\pi r} e^{-ikr} \left[\frac{\sin(Nkd \cos\theta)}{\sin(\frac{1}{2}kd \cos\theta)} \right]$$

$$\theta \approx \frac{\pi}{2}: \quad \rightarrow \quad 2Np_Q \quad \left(\delta\theta \approx \frac{\lambda}{Nd} \right)$$

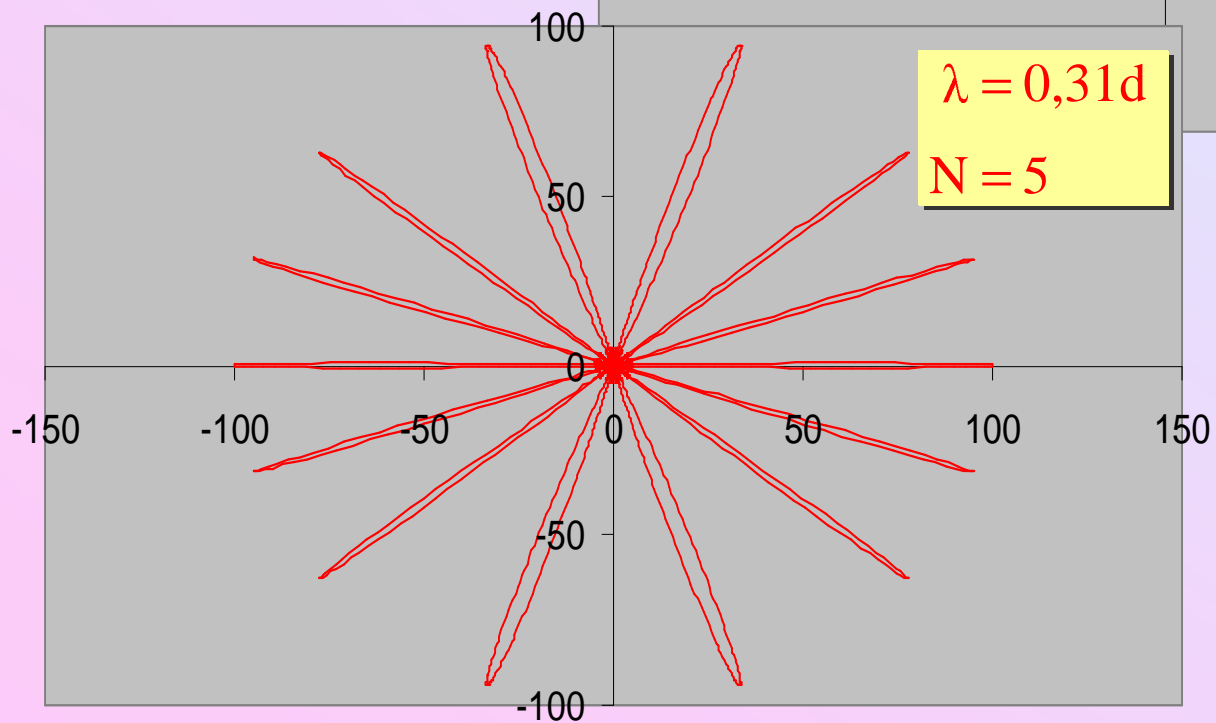
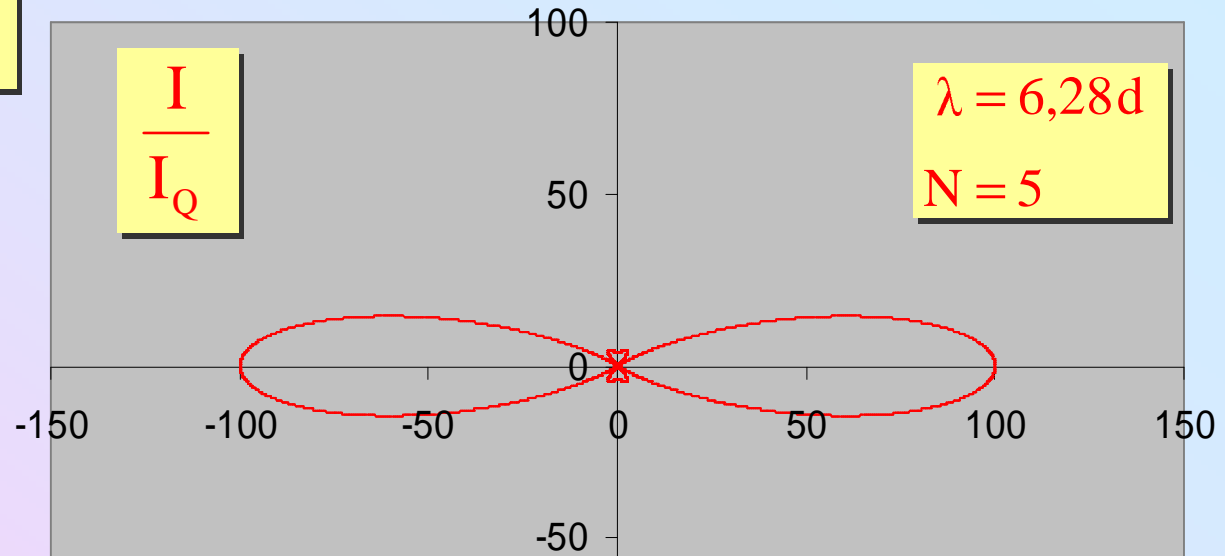
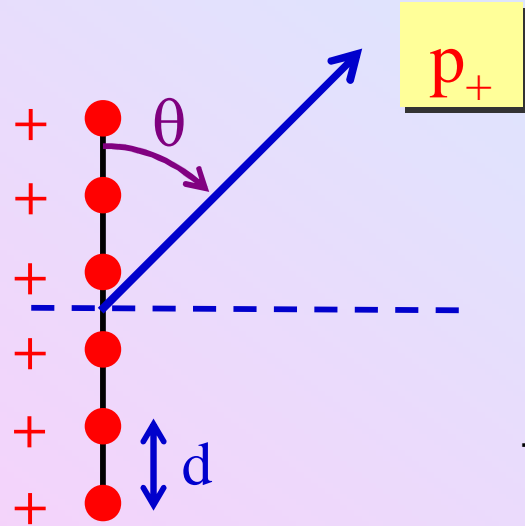
$$\theta_n = \cos^{-1}\left(\frac{2n\pi}{kd}\right): \quad \rightarrow \quad \pm 2Np_Q$$

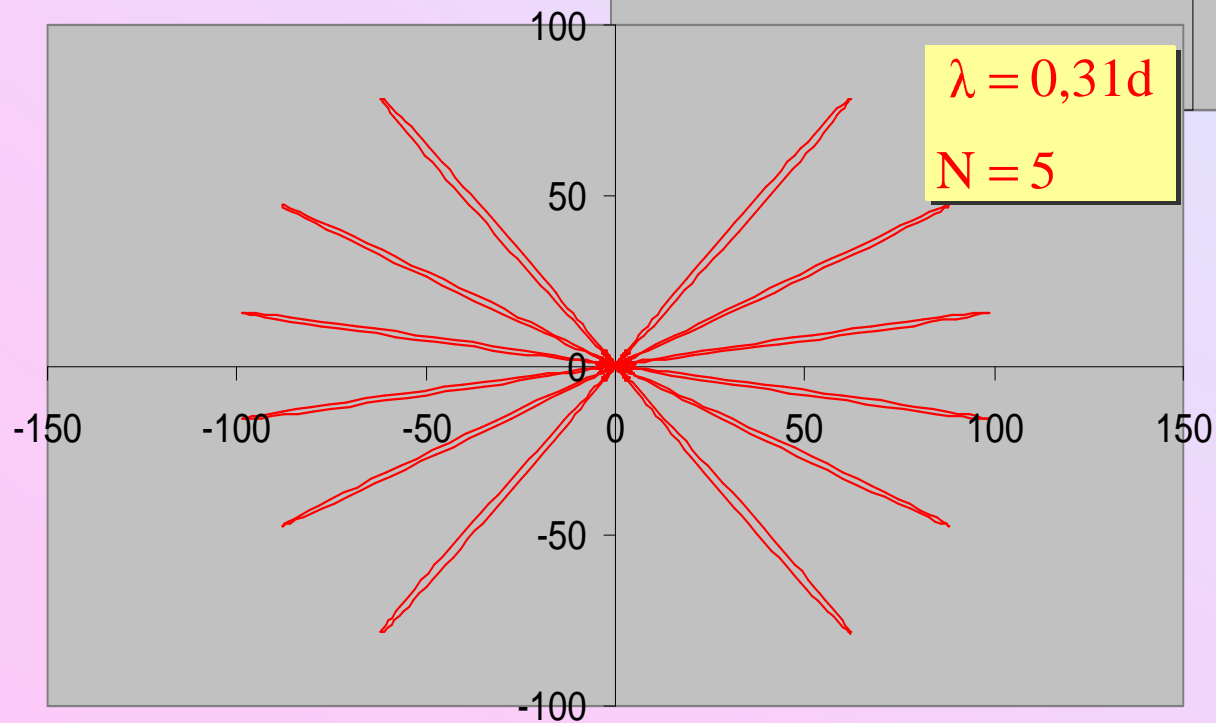
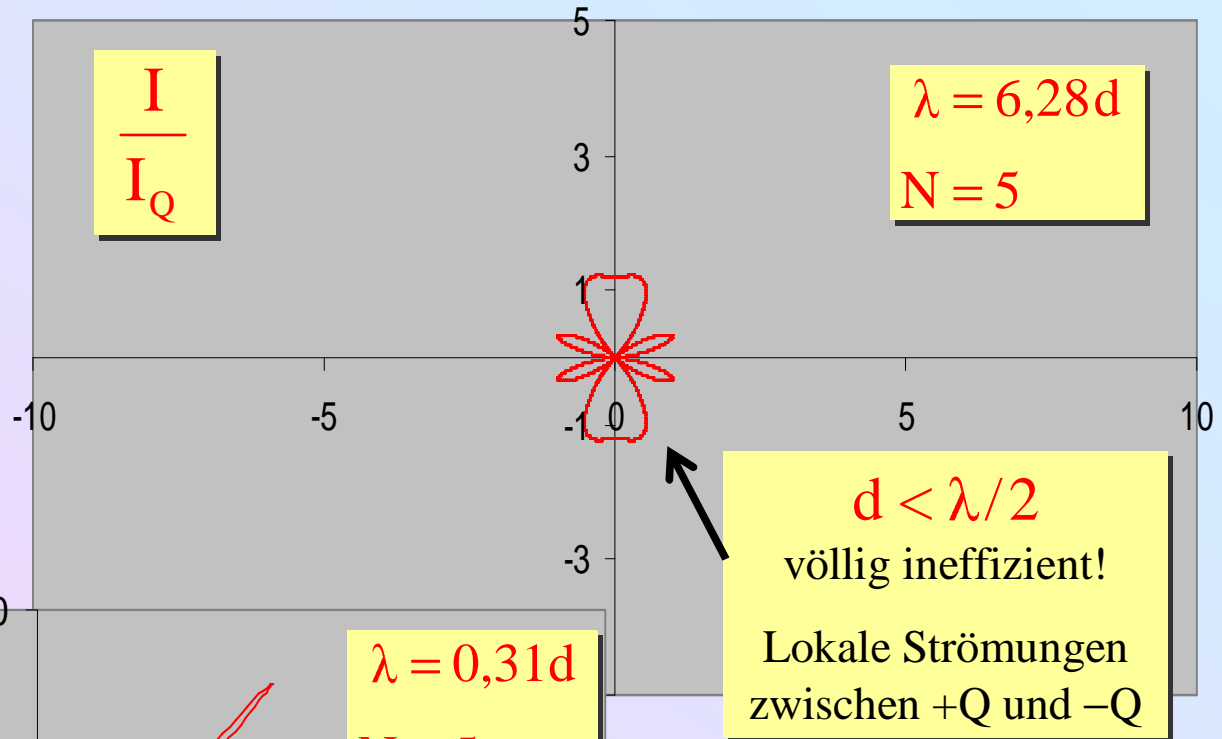
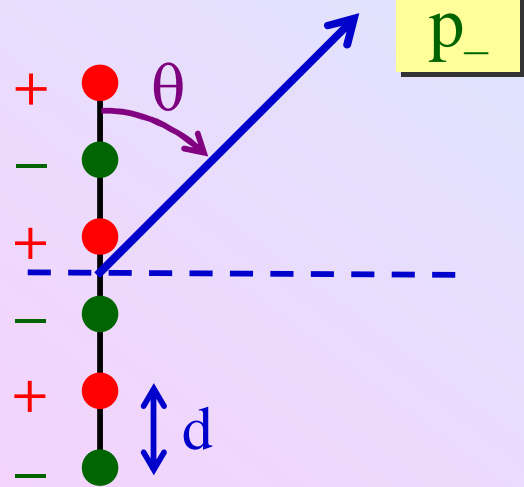


$$p_- \approx \frac{i\omega\rho Q}{4\pi r} e^{-ikr} \left[\frac{(-1)^N \sin(Nkd \cos\theta)}{\cos(\frac{1}{2}kd \cos\theta)} \right]$$

$$\theta \approx \frac{\pi}{2}: \quad \rightarrow \quad 0$$

$$\theta_n = \cos^{-1}\left(\frac{2(n-1)\pi}{kd}\right): \quad \rightarrow \quad \pm 2Np_Q$$





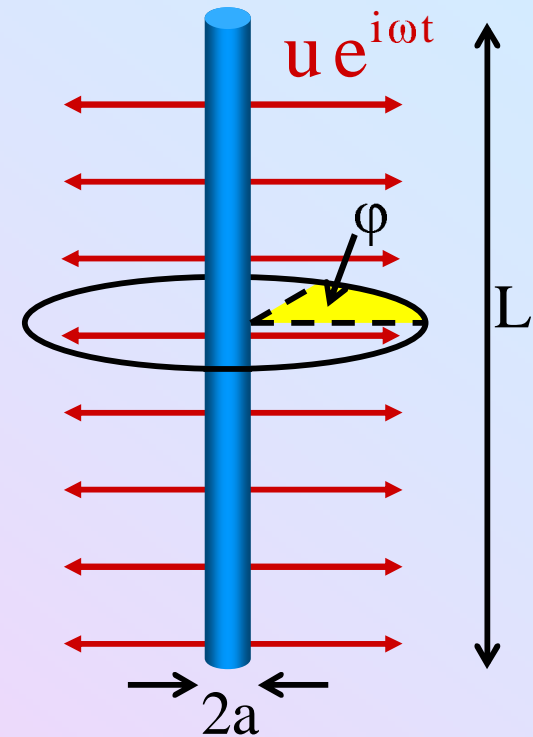
🎵 4.2.4. Linienquellen (\approx schwingende Saite)

a) Fundamentalmode: Näherung \rightarrow starrer dünner Zylinder mit $L \rightarrow \infty$

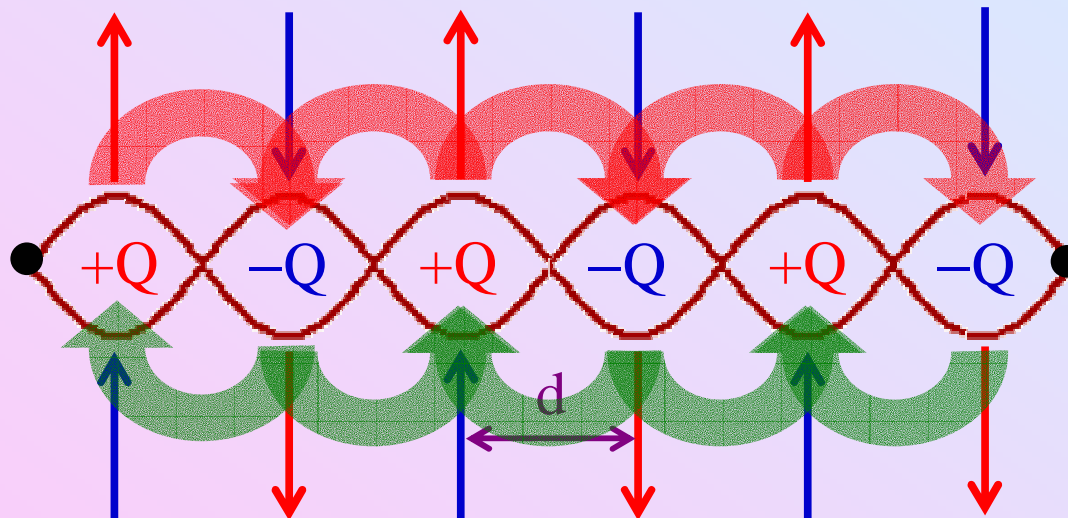
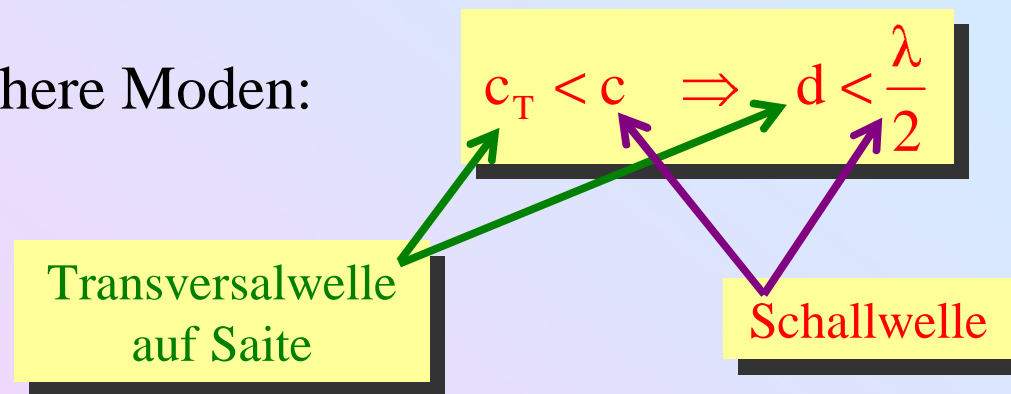
$$I(r, \varphi) \cong \frac{\pi \rho}{4c^2} \cdot \frac{\omega^3 a^4 u^2}{r} \cos^2 \varphi$$

$$\frac{P}{L} = \int_0^{2\pi} I(r, \varphi) r d\varphi \cong \frac{\pi^2 \rho}{4c^2} \cdot \frac{\omega^3 a^4 u^2}{r}$$

$\Rightarrow I, P \propto a^4 \omega^3$ **sehr** ineffizient !



b) Höhere Moden:

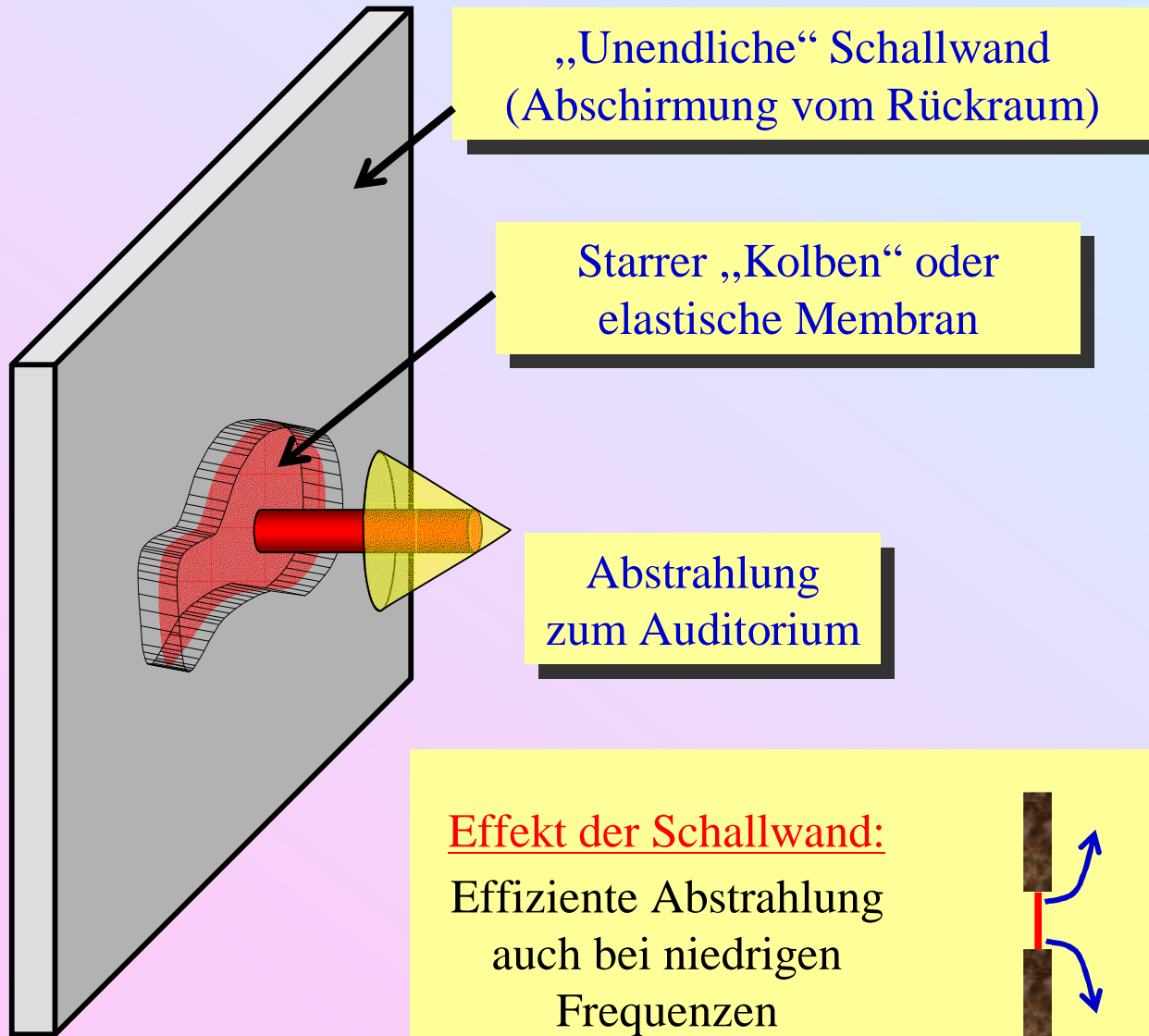


⇒ zusätzlich Auslöschungseffekt (Kette alternierender Punktquellen)

Noch viel ineffizienter !

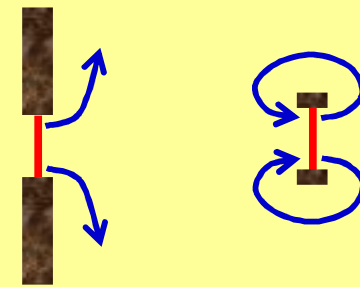


4.2.5. Ebene Quelle mit Schallwand



Effekt der Schallwand:

Effiziente Abstrahlung
auch bei niedrigen
Frequenzen



Praktische Realisierung: (Teil) Separation des rückwärtigen Luftraums



Kesselpauke
(Timpani)



Cello



Konzertgitarre



Piano

Systeme ohne Schallwand:

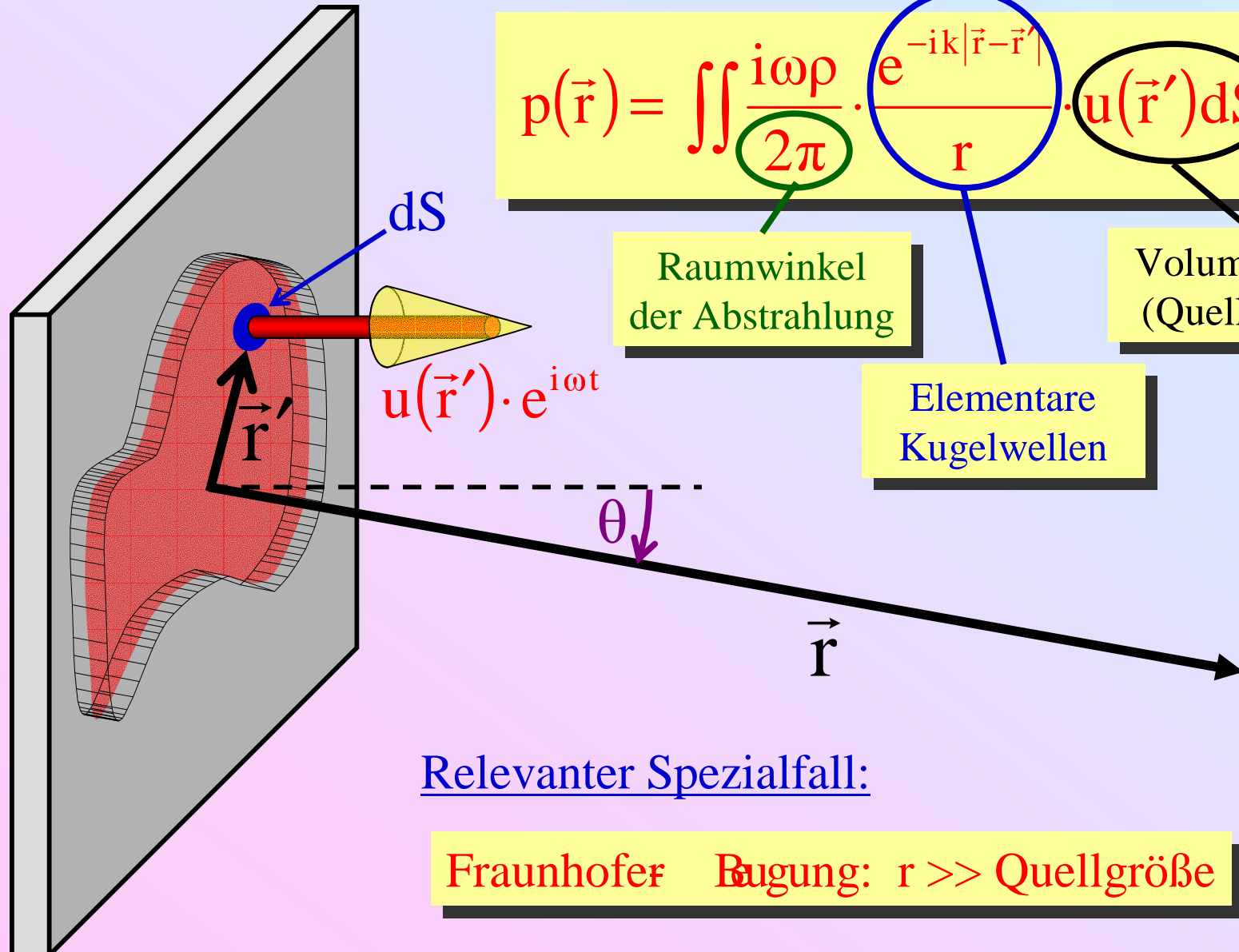
- Niedrige Effizienz bei niedrigen Frequenzen
- Starke Anregung bei niedrigen Frequenzen ermöglicht ausgeglichenes Klangspektrum
- Wenig Abstrahlung \Rightarrow sehr langes Nachklingen



Becken

Glocke

Mathematische Behandlung: Fresnel ~~Kirchhoff~~sches Beugungsintegral



$$p(\vec{r}) = \iint \frac{i\omega\rho}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{r} \cdot u(\vec{r}') dS$$

Raumwinkel
der Abstrahlung

Volumenfluss
(Quellstärke)

Elementare
Kugelwellen

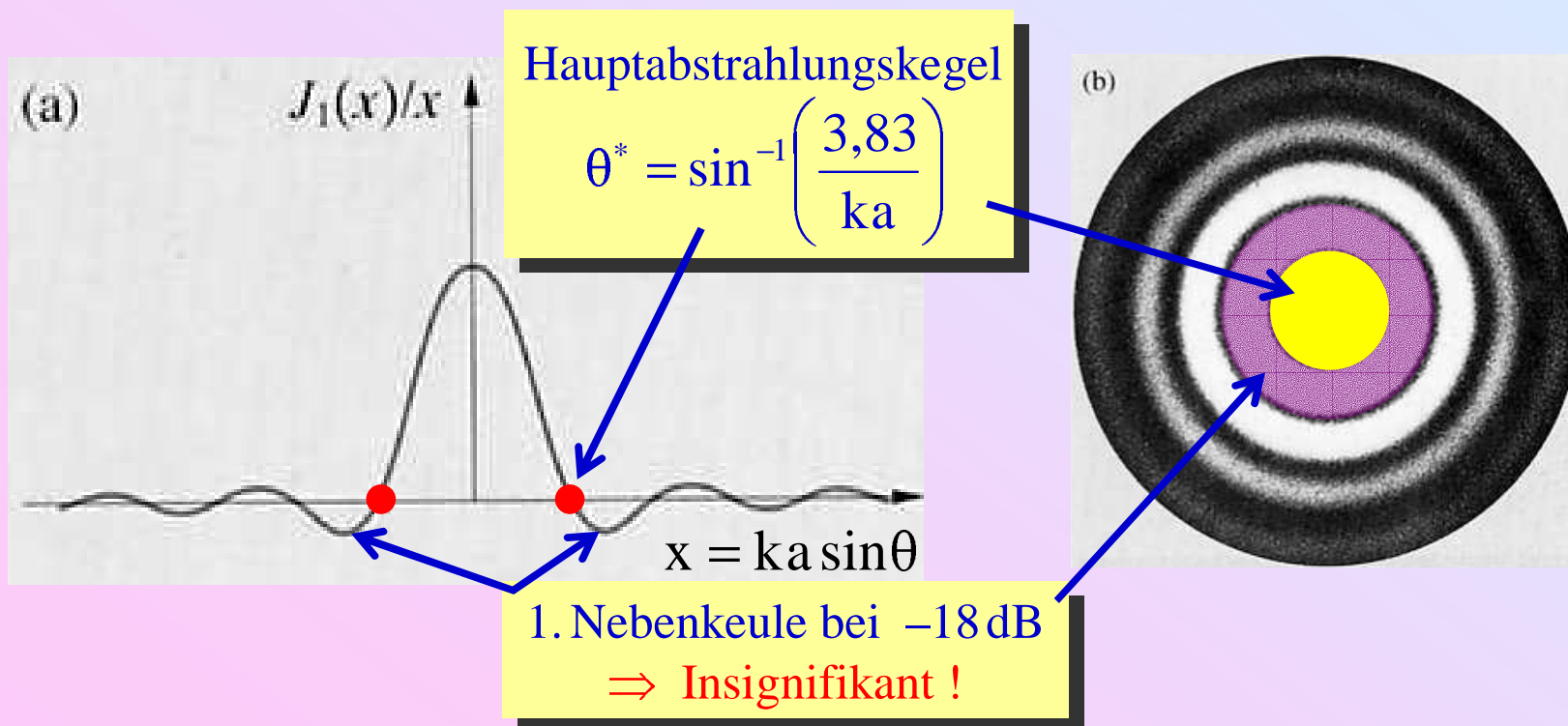
Relevanter Spezialfall:

Fraunhofer Beugung: $r \gg$ Quellgröße

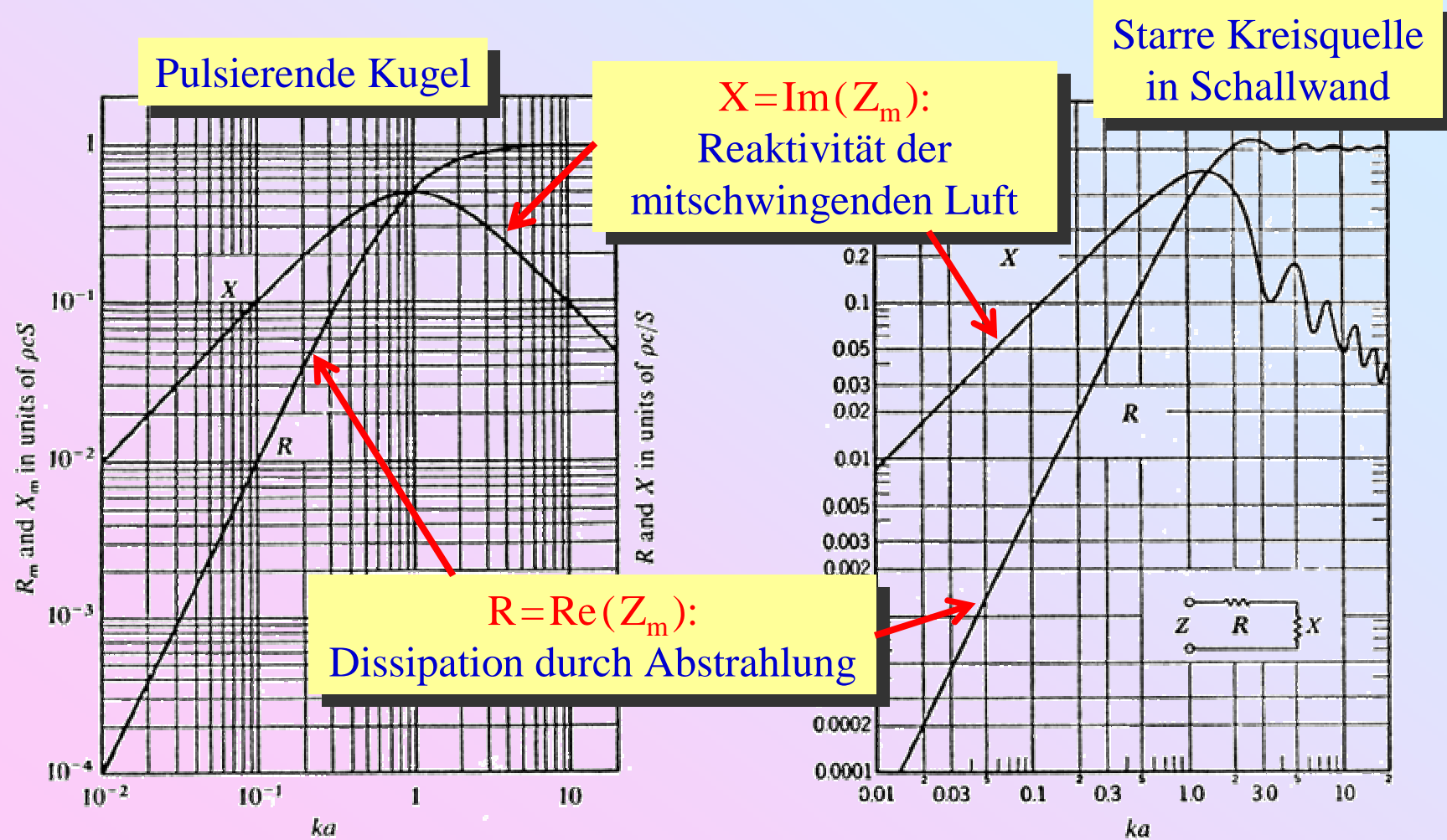
Beispiel: Starre Kreisplatte mit Radius a (Fraunhofer Beugung)

Optisches Analogon: Fraunhofer Beugung an Lochblende

$$p(\theta) \approx \frac{1}{2} i \omega \rho u a^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{2J_1(x)}{x}, \quad x = ka \sin\theta$$

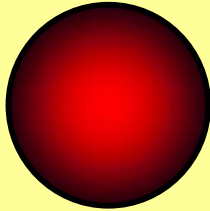


Akustischer Widerstand der Luft



Strahlung einer Kreismembran in einer Schallwand

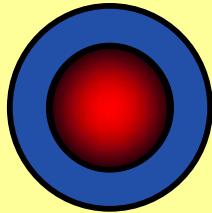
$$m = 0 \quad n = 1$$



Fundamentalmode

- Qualitativ wie starre Kreisplatte
- Effizienter Strahler
- Quantitativ unterschiedlich: $u(r') \propto J_0(k r')$

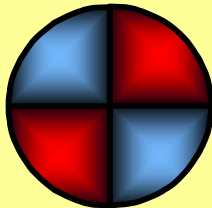
$$m = 0 \quad n = 2$$



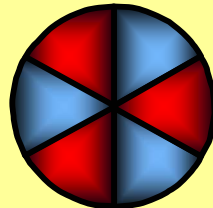
$m = 0$ Moden:

- Verbleibende Netto Monopolkomponente
- Schwache Strahler

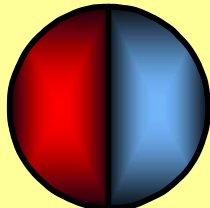
$$m = 2 \quad n = 1$$



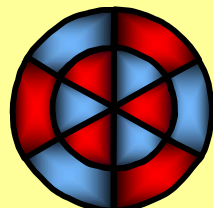
$$m = 3 \quad n = 1$$



$$m = 1 \quad n = 1$$



$$m = 3 \quad n = 2$$

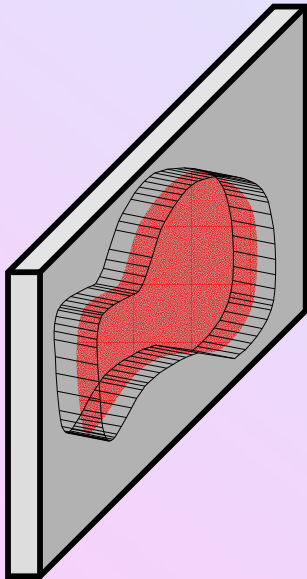


$m > 0$ Moden:

- Keine Monopolkomponente
- Völlig ineffiziente Strahler



4.2.6. Unabgeschirmte ebene Quellen



Unendliche Schallwand

Hohe Frequenz ($ka > 4$):
fast ungeändertes Verhalten



Niedrige Frequenz ($ka < 4$):
Abstrahlraumwinkel $2\pi \rightarrow 4\pi$

- ⇒ 1/2 Strahlungswiderstand
- ⇒ 1/2 Gesamtstrahlungsleistung (3 dB)
- ⇒ 1/4 Intensität (6 dB)
- ⇒ Kompensation: Bassreflexwand, Fussboden, ...



Umschlossener Rückraum

offene Platte
Dipolquelle bei kleinen
Frequenzen



Starre Platte:

$$R_m \approx \begin{cases} 3 \cdot 10^{-2} \rho c S (ka)^4 & , ka < 2 \\ \rho c S & , ka > 3 \end{cases}$$

4.2.7. Strahlung von (unendlich) großen Platten

Einfachstes Beispiel: Ebene Biegewelle der Platte

Luft (Dichte ρ)

Schallgeschwindigkeit:

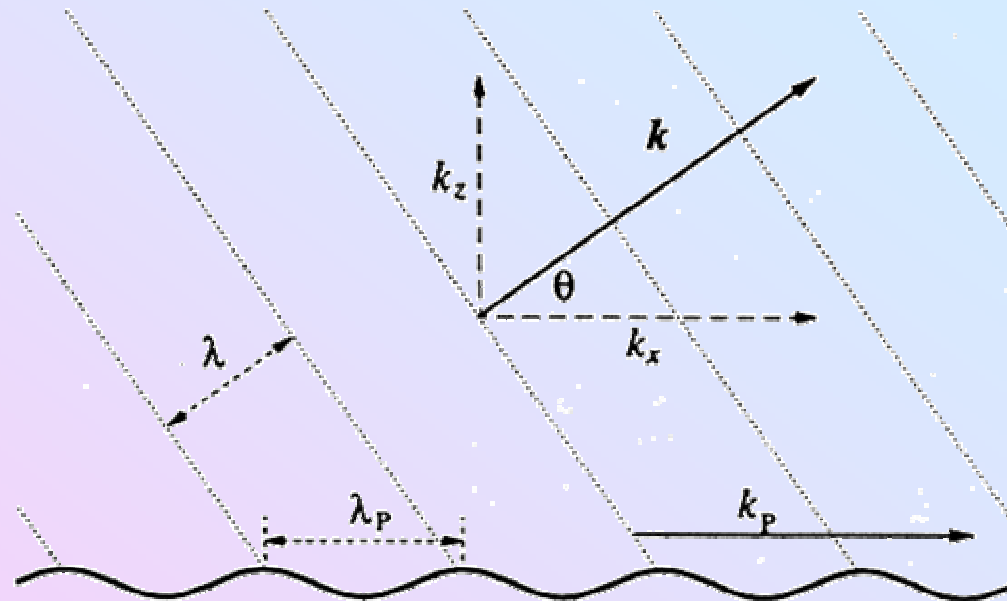
$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Abstrahlungsbedingung:

$$\lambda \leq \lambda_P(\omega)$$

bzw. $k \geq k_P(\omega)$

bzw. $c \leq v_P(\omega)$



Platte (Dicke h , Dichte ρ_P)

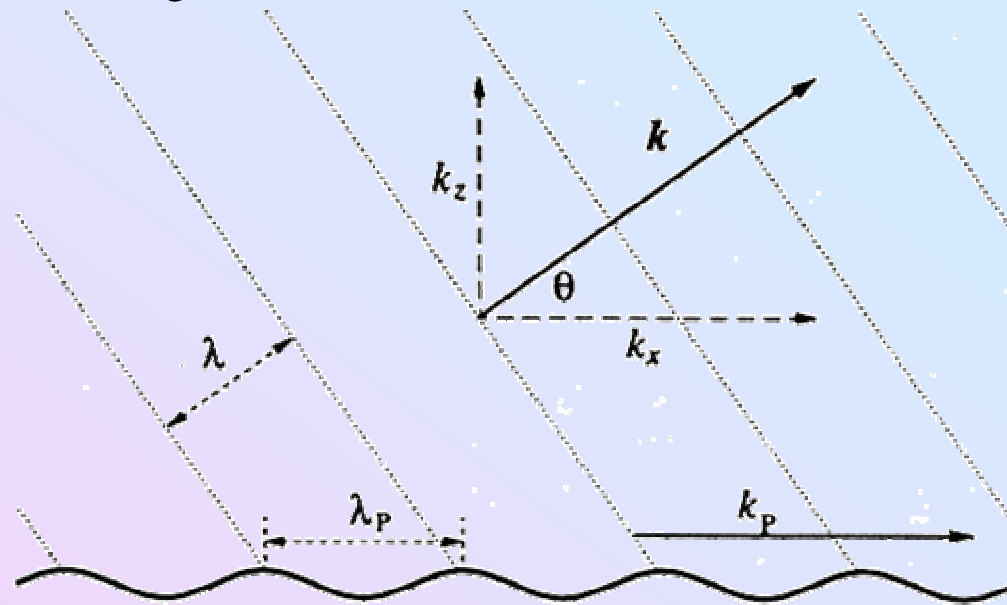
Phasengeschwindigkeit:

$$v_P = \frac{\omega}{k_P} = \sqrt{\frac{hc_L}{\sqrt{12}}} \cdot \sqrt{\omega} = \sqrt[4]{\frac{h^2 E}{\rho_P (1 - \nu^2)}} \cdot \sqrt{\omega}$$

Strahlungsmuster der Überschallbiegewelle ($v_P \geq c$)

(Analogon: Machscher Kegel)

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{\lambda_P} = \frac{k_P}{k} = \frac{v_P}{c}$$



$$v_P = 4 \sqrt{\frac{h^2 E}{\rho_P (1 - v^2)}} \cdot \sqrt{\omega} \Rightarrow$$

$$\cos \theta = 4 \sqrt{\frac{h^2 E}{\rho_P (1 - v^2) c^2}} \cdot \sqrt{\omega}$$

Abschneide bzw. Koinzidenzfrequenz:

$$\omega \leq \omega_c = \sqrt{\frac{\rho_P (1 - v^2) c^2}{h^2 E}}$$

4.3. Schallwellenleiter (Pfeifen, Flöten, Hörner)



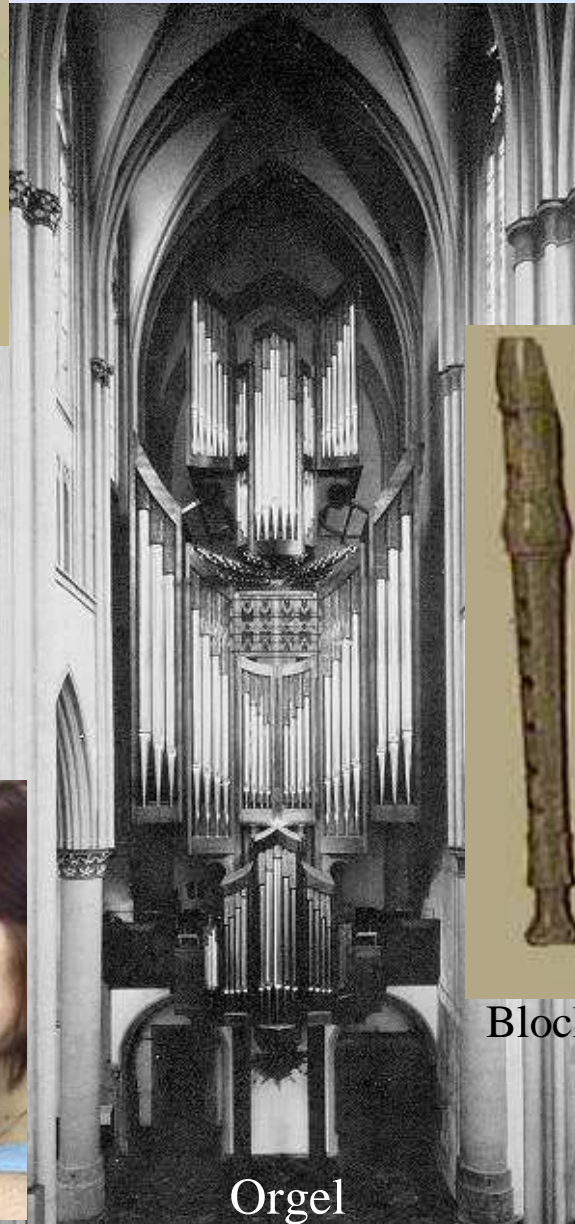
Französ.
Horn



Flügelhorn



Querflöte



Orgel



Klarinette



Blockflöte



Saxophon

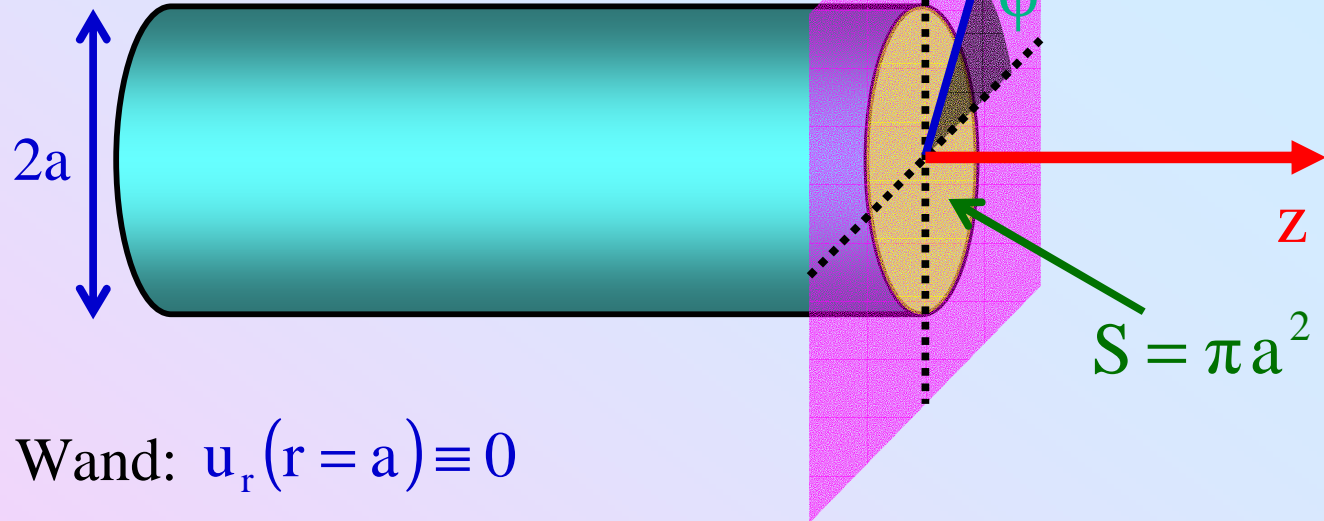


Oboe



4.3.1. Unendliche Zylinderrohre

Ruhende oder
gleichmäßig
strömende Luft



Perfekt steife Wand: $u_r(r = a) \equiv 0$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=a} \equiv 0 \Rightarrow$$

analog zur
Kreismembran

$$p_{mn}(r, \varphi, z, t) = A \cos(m\varphi + \alpha) J_m\left(\frac{\pi q_{mn} r}{a}\right) e^{i(\omega t - k_{mn} z)}$$

$$\pi q_{mn} = (n+1)\text{-te Nullstelle von } J'_M$$

$k_r = k_{mn}$ **quantisiert**
 k_z **unbeschränkt**
(keine z-Randbedingung)

$$k^2 = k_r^2 + k_z^2$$

$\omega = ck$

$$k_{mn}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi q_{mn}}{a}\right)^2$$

$$p_{mn}(r, \varphi, z, t) = A \cos(m\varphi + \alpha) J_m\left(\frac{\pi q_{mn} r}{a}\right) e^{i(\omega t - k_{mn} z)}$$

$$k_{mn}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi q_{mn}}{a}\right)^2$$

Wichtiger Spezialfall $m = n = 0$: $q_{00} = 0$, $J_0(0) = 1 \Rightarrow$

Ebene Welle: $p_{00}(r, t) = p e^{i\omega(t-z/c)}$

$$u_{00}(r, t) = u e^{i\omega(t-z/c)} = \frac{p}{\rho c} e^{i\omega(t-z/c)}$$

Volumenfluss: $U(r, t) = \int_S u_{00} dS = \frac{Sp}{\rho c} e^{i\omega(t-z/c)}$

Bemerkung: In allen anderen Moden ist $U = 0$

Definition:

(Wellen) Impedanz

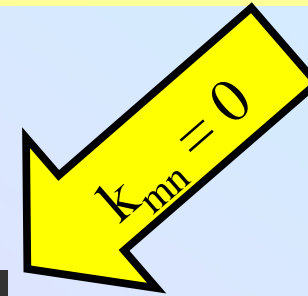
Charakteristische Impedanz

$$z = \frac{p}{u} = \rho c$$

$$Z_0 = \frac{p_{00}}{U} = \frac{\rho c}{S}$$

$$p_{mn}(r, \varphi, z, t) = A \cos(m\varphi + \alpha) J_m\left(\frac{\pi q_{mn} r}{a}\right) e^{i(\omega t - k_{mn} z)}$$

$$k_{mn}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi q_{mn}}{a}\right)^2$$



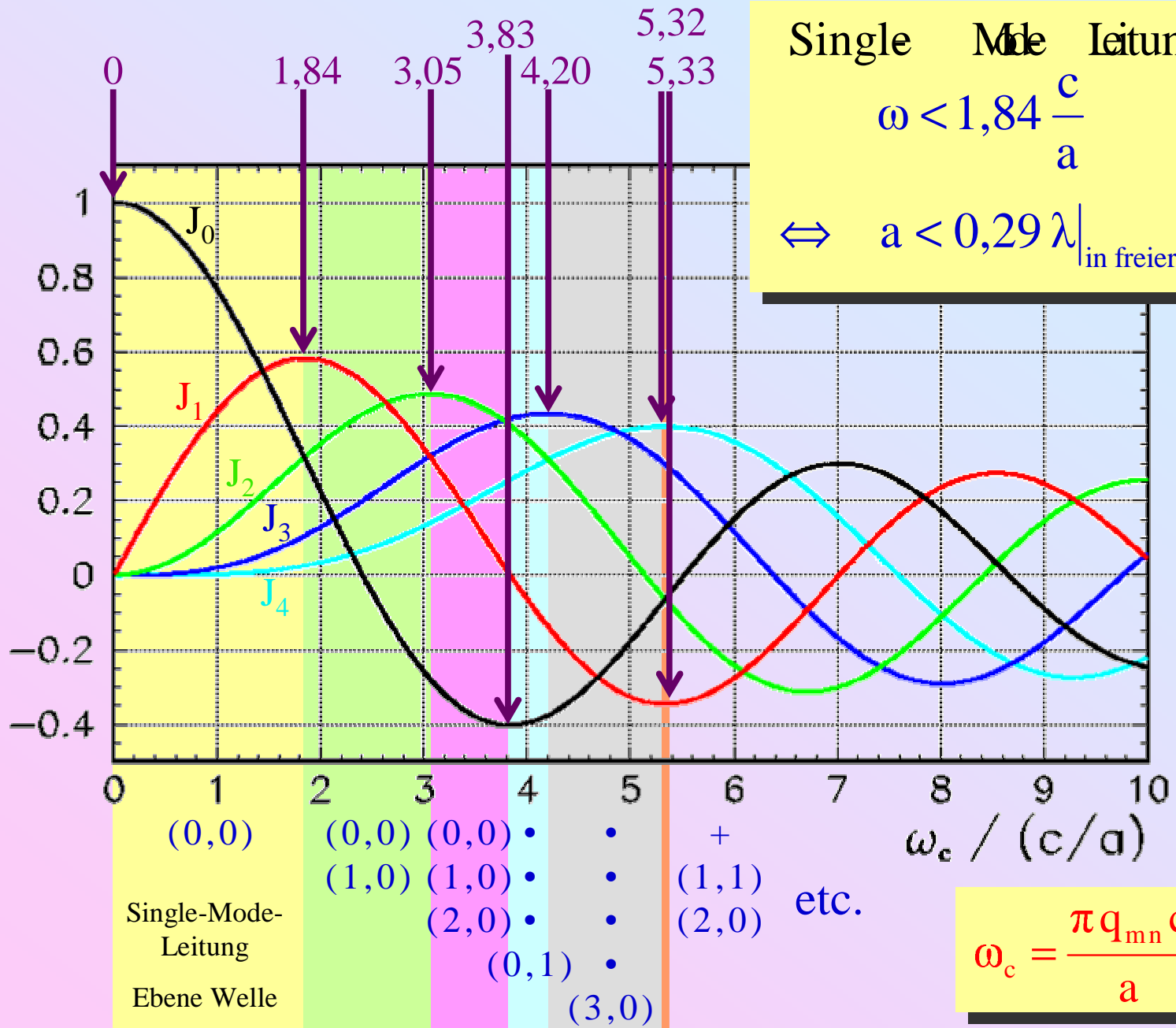
Kritische Frequenz:

$$\omega_c = \frac{\pi q_{mn} c}{a}$$

$\omega > \omega_c$: k_{mn} , z reell \Rightarrow ungedämpfte Ausbreitung

$\omega < \omega_c$: k_{mn} , z imaginär \Rightarrow gedämpfte Ausbreitung
(keine Wellenleitung)

$q_{00} = 0 \Rightarrow$ ebene (0,0) Mode wird bei allen Frequenzen geleitet !



$$p_{mn}(r, \varphi, z, t) = A \cos(m\varphi + \alpha) J_m\left(\frac{\pi q_{mn} r}{a}\right) e^{i(\omega t - k_{mn} z)}$$

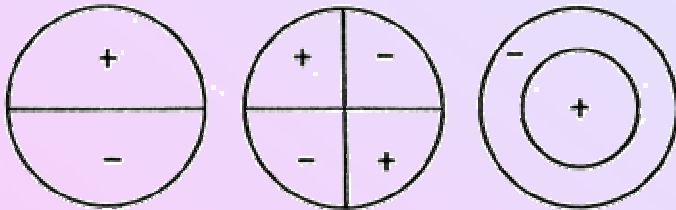
$$k_{mn}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi q_{mn}}{a}\right)^2$$

Querschnitt

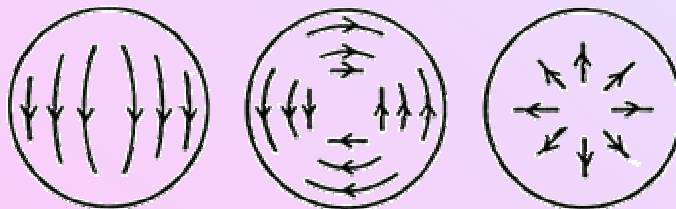
Ebene
Fundamental
Mode

Flussmuster im Längsschnitt

p



\vec{u}

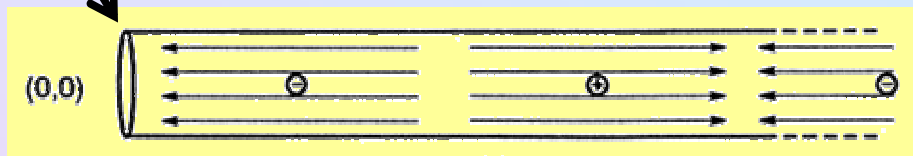


(1,0)

(2,0)

(0,1)

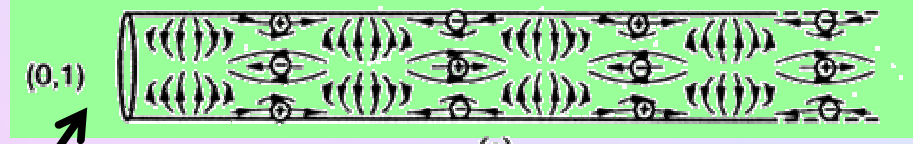
$\omega > \omega_c$



(a)

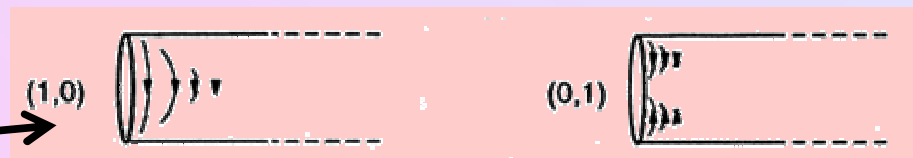


(b)



(c)

$\omega < \omega_c$



(d)

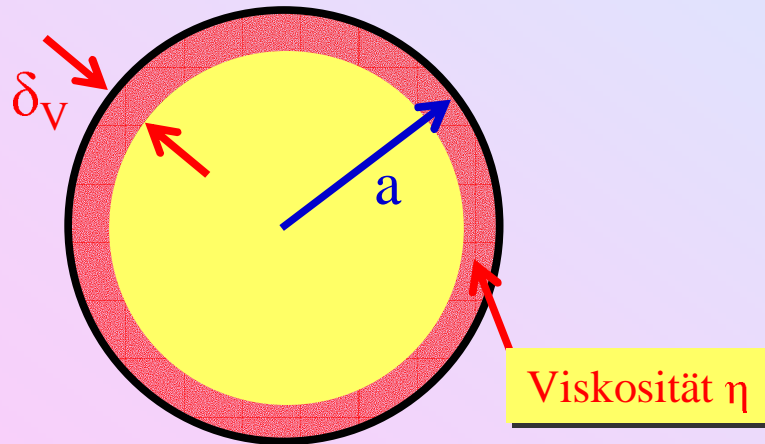
(e)



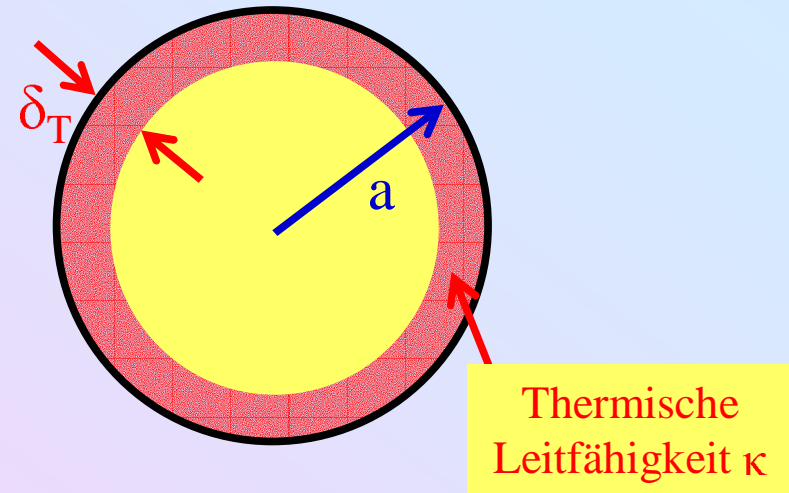
4.3.2. Wandverluste in unendlichen Zylinderrohren

Verluste in dünnen Randschichten an der Wand:

a) Reibungsverluste



b) Thermische Verluste

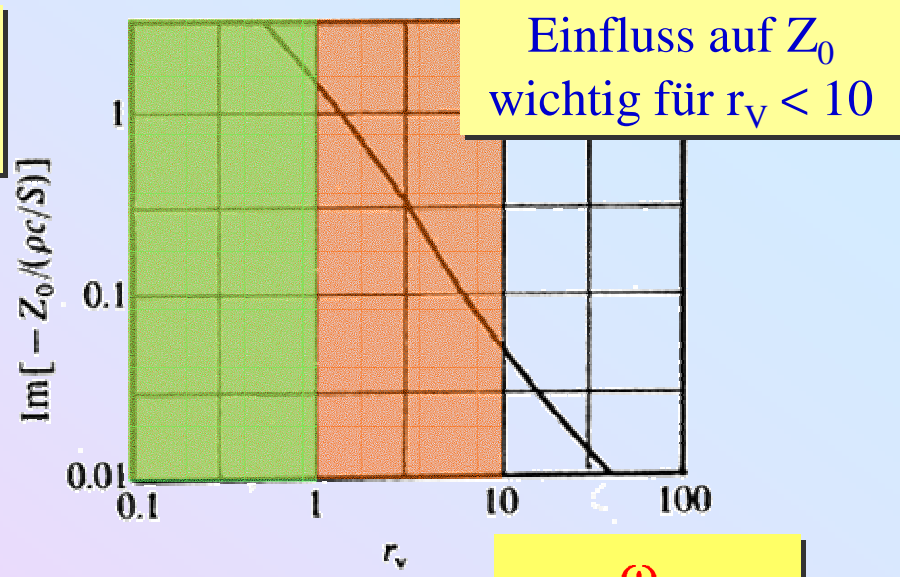
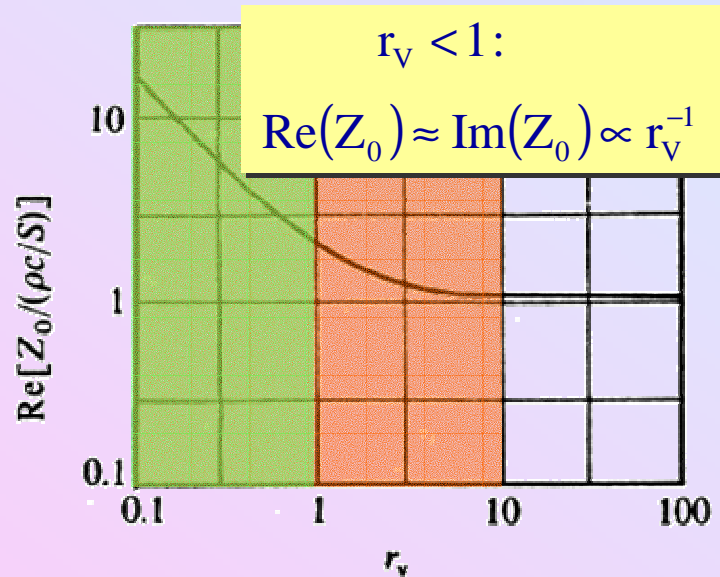


$$r_V = \frac{a}{\delta_V} = \sqrt{\frac{\omega \rho}{\eta}} a$$
$$\approx 252,5 \frac{a}{\text{m}} \sqrt{\frac{\omega}{\text{s}^{-1}}} \left[1 - 0,0029 \cdot \left(\frac{T}{\text{K}} - 300 \right) \right]$$

$$r_T = \frac{a}{\delta_T} = \sqrt{\frac{\omega \rho C_P}{\kappa}} a$$
$$\approx 212,6 \frac{a}{\text{m}} \sqrt{\frac{\omega}{\text{s}^{-1}}} \left[1 - 0,0031 \cdot \left(\frac{T}{\text{K}} - 300 \right) \right]$$

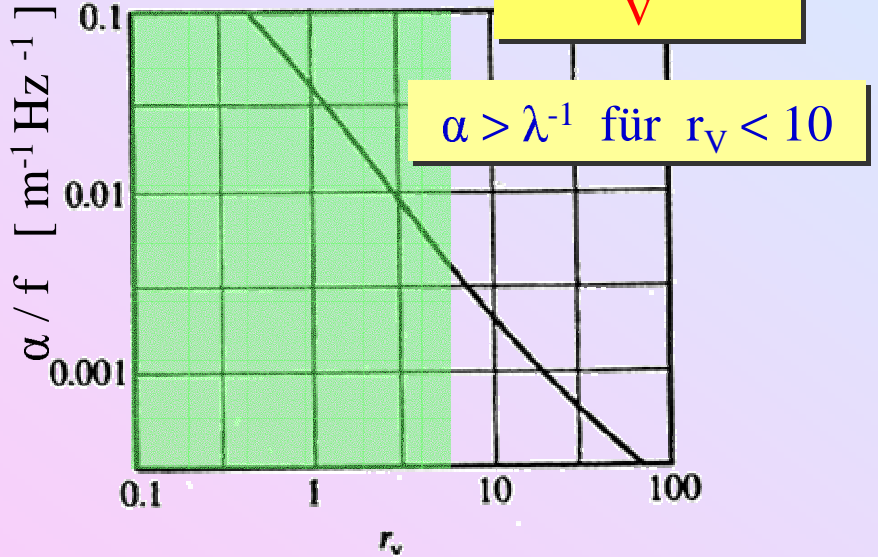
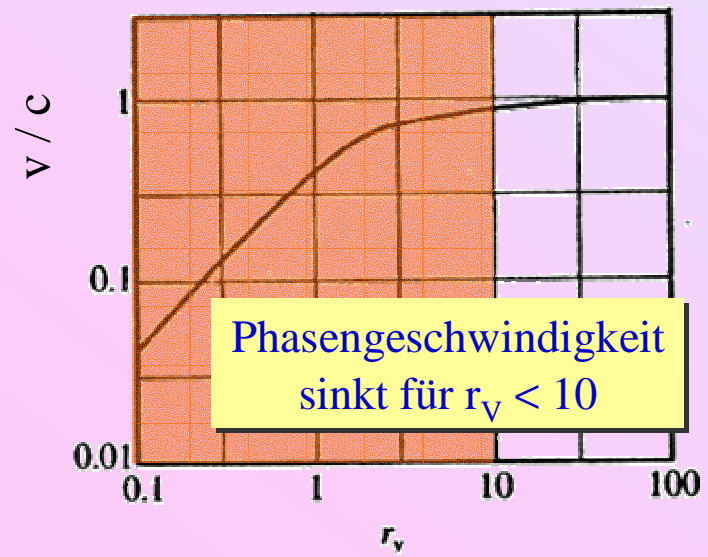
Zusammenhang: $\left(\frac{r_T}{r_V} \right)^2 = C_P \frac{\eta}{\kappa} = \text{Prandtl - Zahl}$

Konsequenz: Z_0 reell \rightarrow Z_0 komplex ...



... und: k reell \rightarrow k komplex:

$$k = \frac{\omega}{v} - i\alpha$$



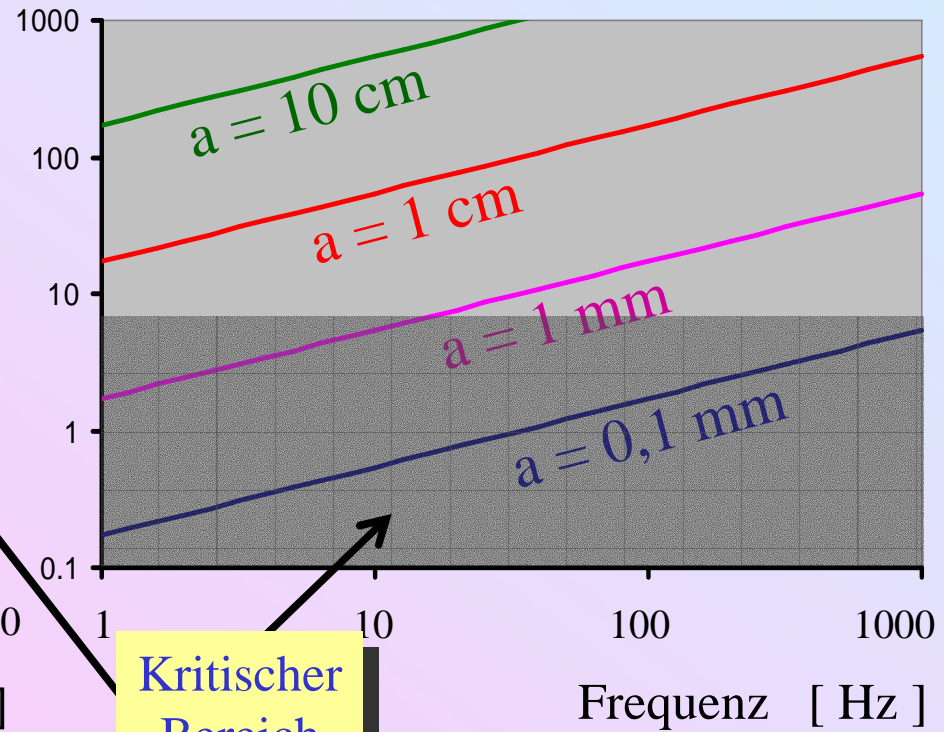
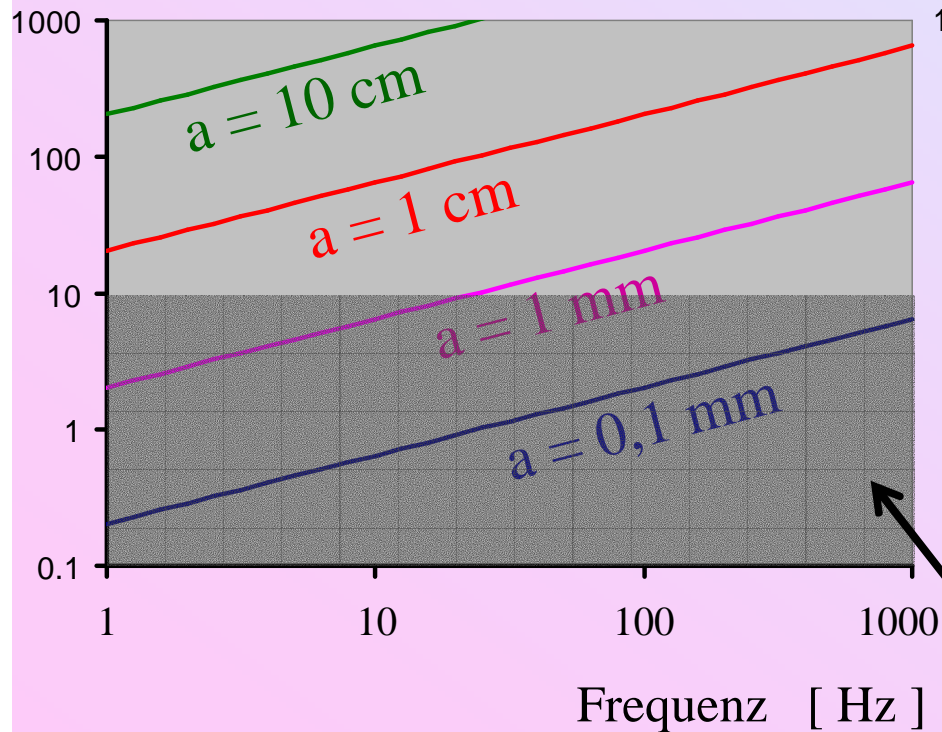
Größenordnungen bei Zimmertemperatur (20 °C):

$$r_V = \frac{a}{\delta_V} = \sqrt{\frac{\omega \rho}{\eta}} a$$

$$\approx 252,5 \frac{a}{m} \sqrt{\frac{\omega}{s^{-1}}} \left[1 - 0,0029 \cdot \left(\frac{T}{K} - 300 \right) \right]$$

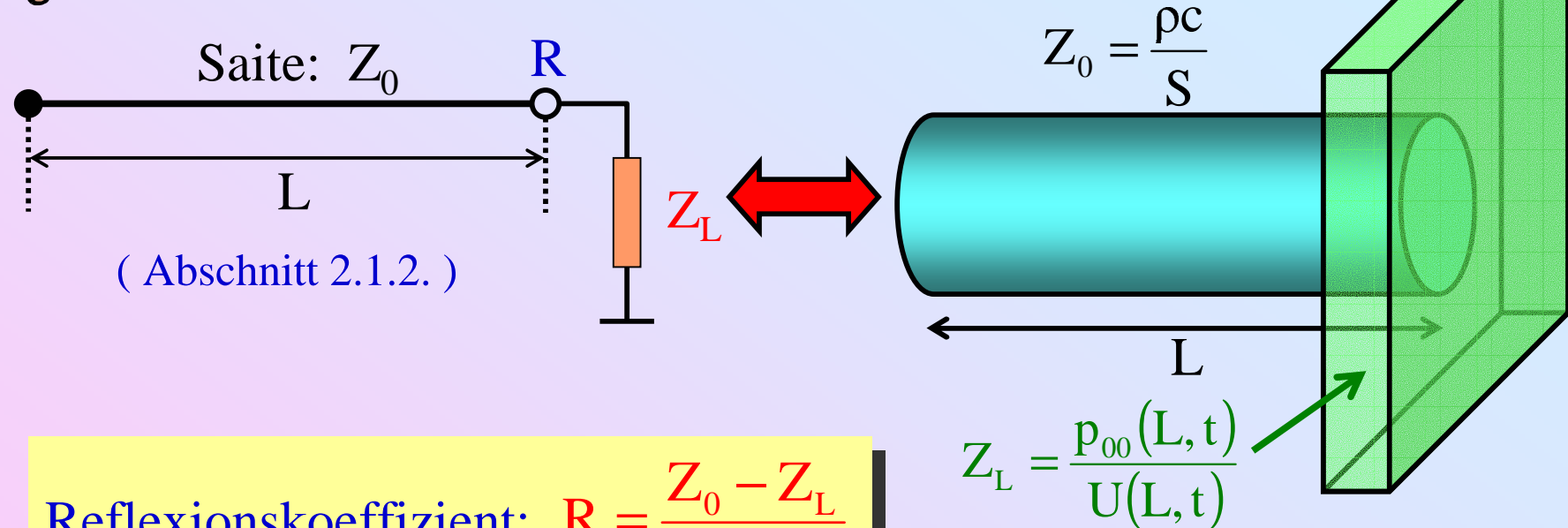
$$r_T = \frac{a}{\delta_T} = \sqrt{\frac{\omega \rho C_P}{\kappa}} a$$

$$\approx 212,6 \frac{a}{m} \sqrt{\frac{\omega}{s^{-1}}} \left[1 - 0,0031 \cdot \left(\frac{T}{K} - 300 \right) \right]$$



Kritischer Bereich

4.3.3. Endliche Zylinderrohre



Reflexionskoeffizient: $R = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_0 + Z_L}$

Eingangsimpedanz: $Z_{in} = \frac{p_{00}(0, t)}{U(0, t)} = Z_0 \frac{1 - R e^{-2ikL}}{1 + R e^{-2ikL}}$

$$= Z_0 \frac{Z_L \cos(kL) + i Z_0 \sin(kL)}{i Z_L \sin(kL) + Z_0 \cos(kL)}$$

Ideal abgeschlossener Rohr: $Z_L = \infty$

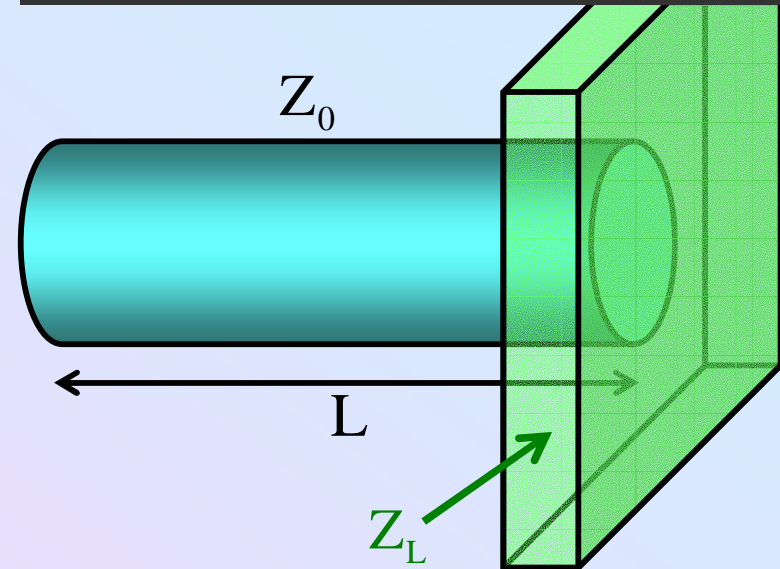
$$Z_{in} = -i Z_0 \cot(kL)$$

Ideal offenes Rohr: $Z_L = 0$

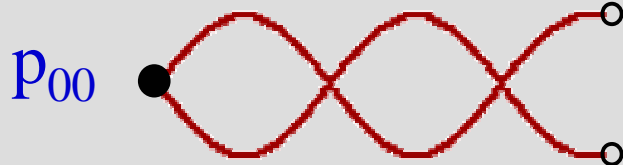
$$Z_{in} = i Z_0 \tan(kL)$$

Ideal offener Eingang: $Z_{in}^{res} = 0$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos(kL) + i Z_0 \sin(kL)}{i Z_L \sin(kL) + Z_0 \cos(kL)}$$

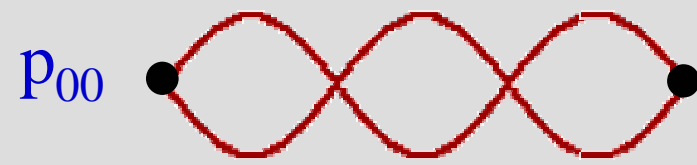


$$Z_L = \infty \Rightarrow \omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{L}$$



U

$$Z_L = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

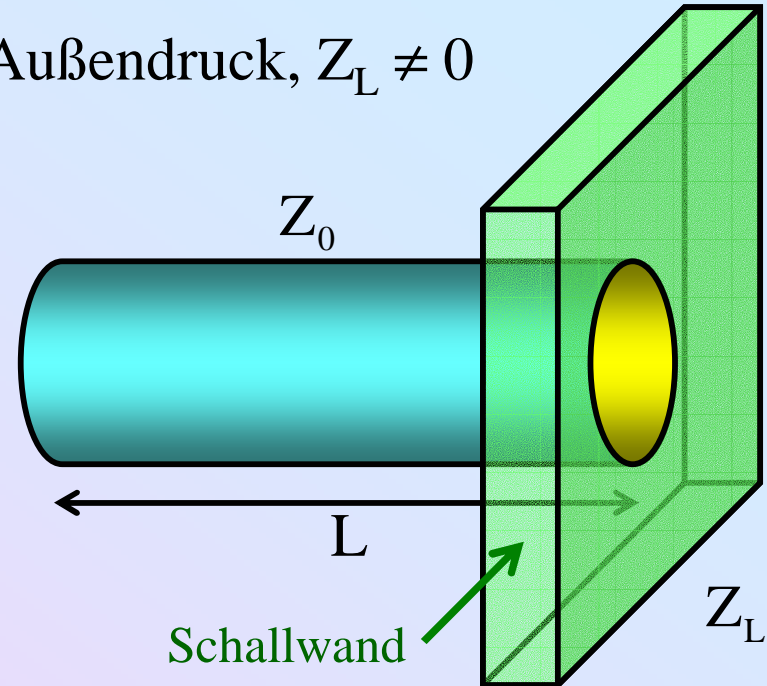
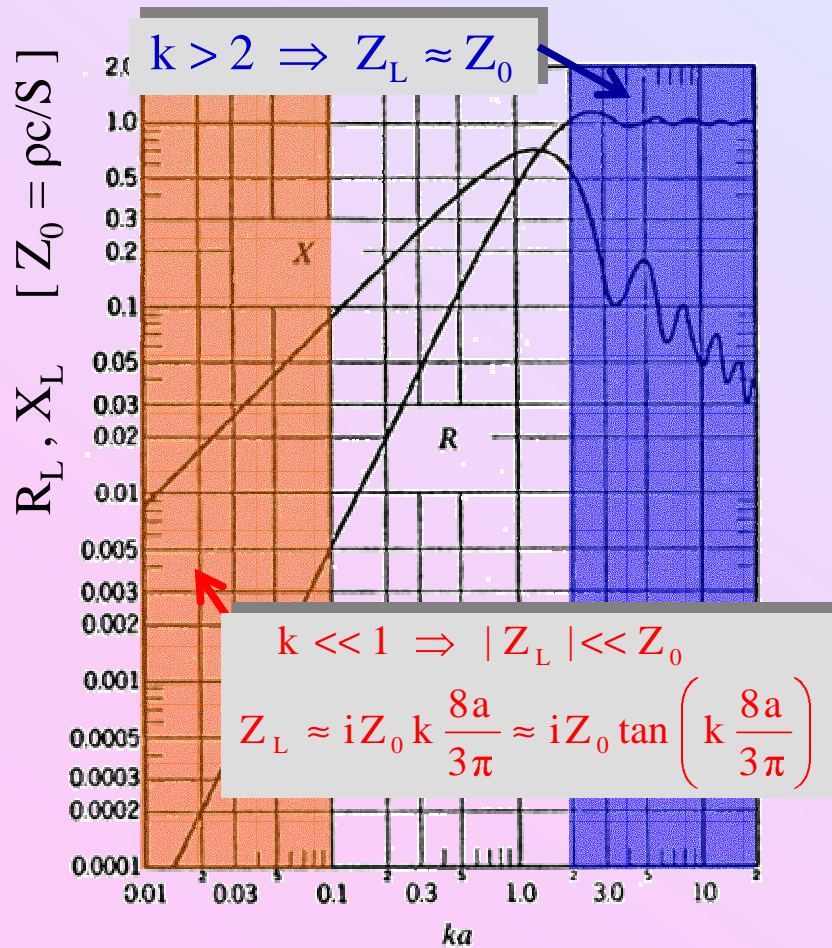


U

Realistische offene Rohre: endlicher Außendruck, $Z_L \neq 0$

a) Abschluss durch Schallwand

(vgl. 4.2.5.)



Musikinstrumente (Fundamentalmoden)

$$k \ll 1$$

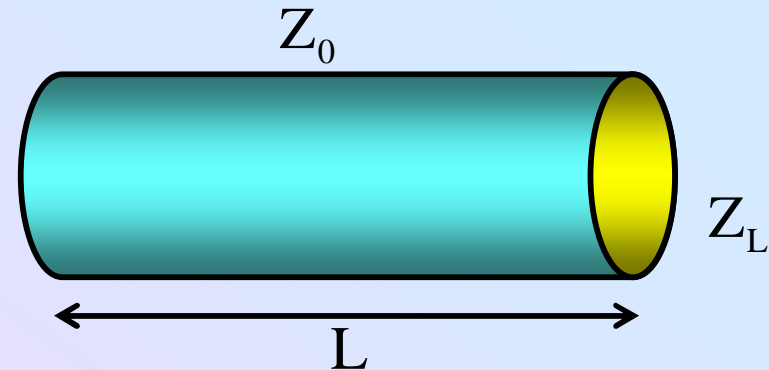
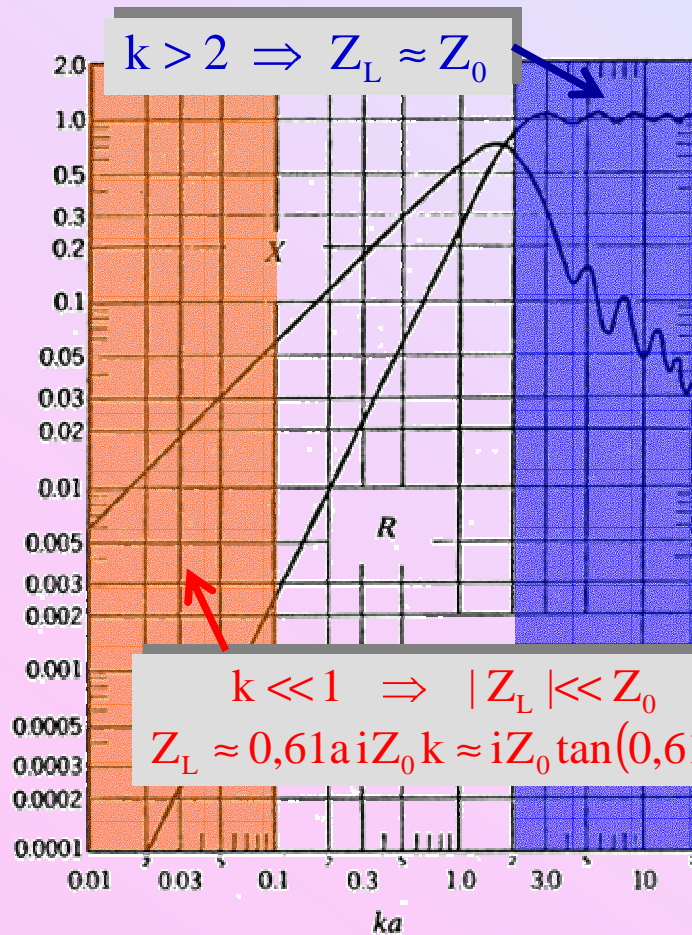
Schallwand wirkt wie ein kurzer ideal offener Zylinder \Rightarrow

$$L_{\text{eff}} = L + \Delta_{\text{SW}}$$

$$\Delta_{\text{SW}} = \frac{8a}{3\pi} \approx 0,85a$$

Realistische offene Rohre: endlicher Außendruck, $Z_L \neq 0$

b) Offener Abschluss



Musikinstrumente (Fundamentalmoden)

$k \ll 1$

Außenluft wirkt wie ein kurzer ideal offener Zylinder \Rightarrow

$$L_{\text{eff}} = L + \Delta_0$$

$$\Delta_0 \approx 0,61a$$



4.3.4. Impedanzkurven realistischer Zylinderrohre

Typische Situation: $r_v > 10$

- Charakteristische Impedanz $\approx Z_0$ (ungeändert)
- Kleine Dämpfung α :

$$k = \frac{\omega}{v} - i\alpha$$

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{Z_L \cos(kL) + i Z_0 \sin(kL)}{i Z_L \sin(kL) + Z_0 \cos(kL)}$$

$$v \approx c \left[1 - \frac{1,65 \cdot 10^{-3}}{a[\text{m}] \sqrt{f [\text{Hz}]}} \right]$$
$$\alpha \approx 3 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{f [\text{Hz}]}}{a[\text{m}]}$$

Ideal abgeschlossener Rohr: $Z_L = \infty$

$$Z_{\text{in}} = -i Z_0 \cot(kL) = Z_0 \frac{1 + i \tanh(\alpha L) \tan(\omega L/v)}{\tanh(\alpha L) + i \tan(\omega L/v)}$$

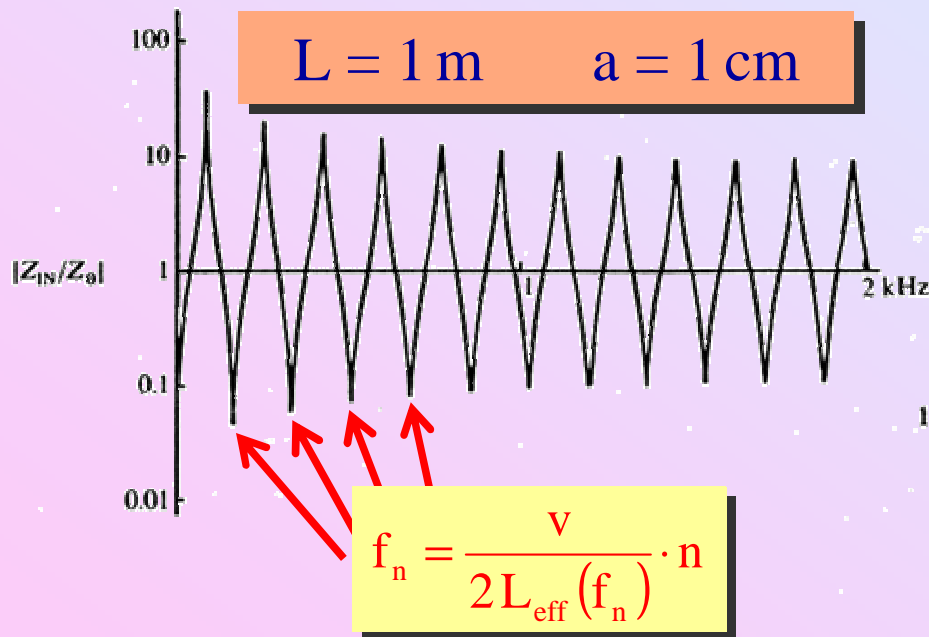
Ideal offenes Rohr: $Z_L = 0$

$$Z_{\text{in}} = i Z_0 \tan(kL) = Z_0 \frac{\tanh(\alpha L) + i \tan(\omega L/v)}{1 + i \tanh(\alpha L) \tan(\omega L/v)}$$

Ideal offenes Rohr: $Z_L = 0$

$$Z_{in} = i Z_0 \tan(kL) = Z_0 \frac{\tanh(\alpha L) + i \tan(\omega L/v)}{1 + i \tanh(\alpha L) \tan(\omega L/v)}$$

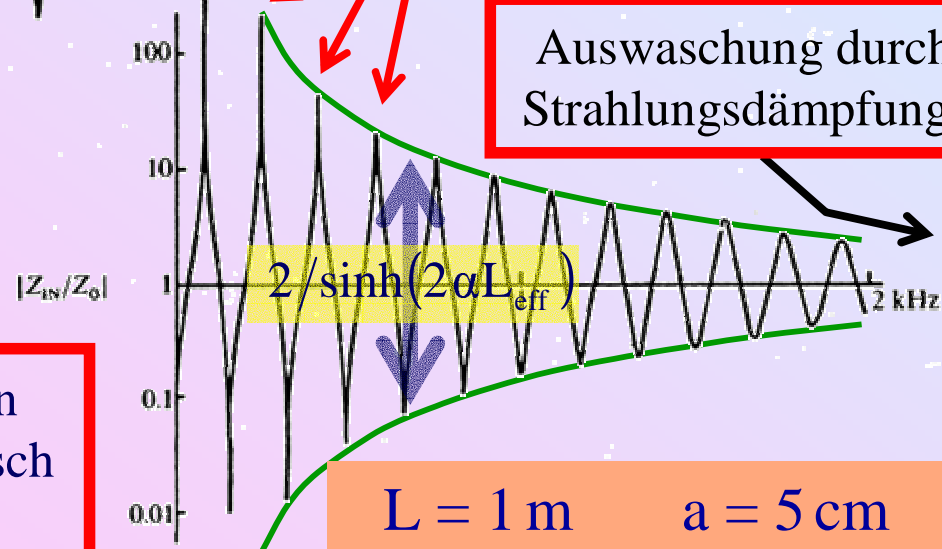
$$\alpha \approx 3 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{f \text{ [Hz]}}}{a \text{ [m]}}$$



(Anti-) Resonanzstruktur durch Wanddämpfung!

$$f_n = \frac{v}{4L_{eff}(f_n)} \cdot (2n+1)$$

Auswaschung durch Strahlungsdämpfung!



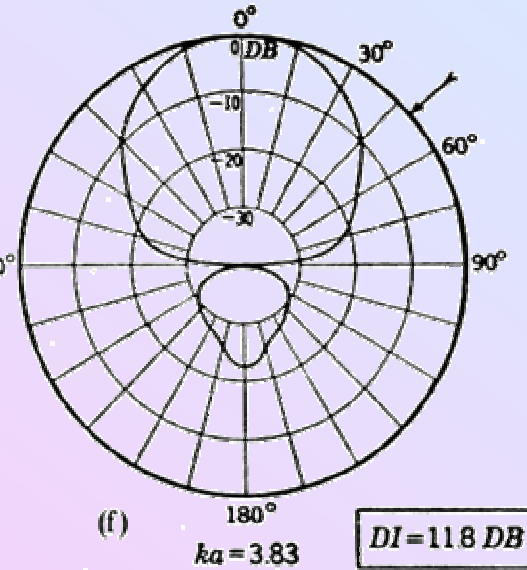
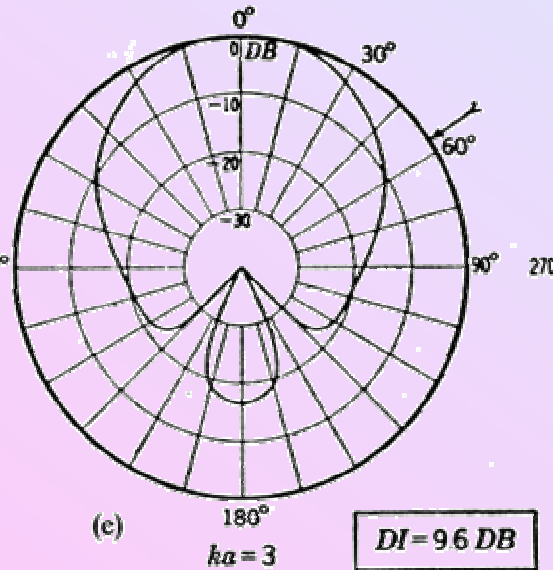
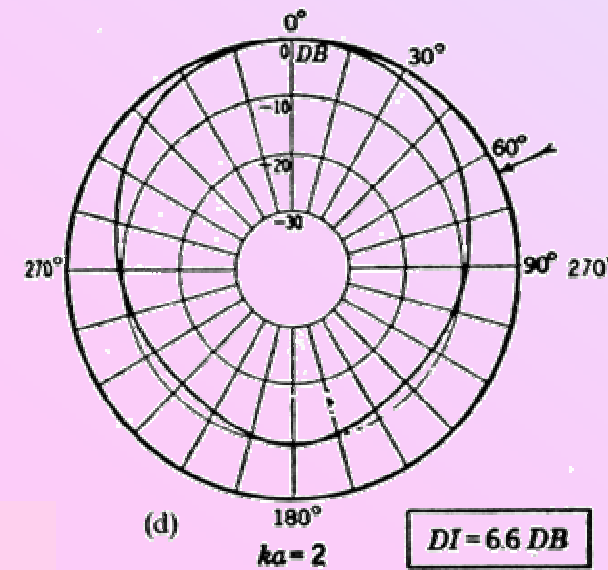
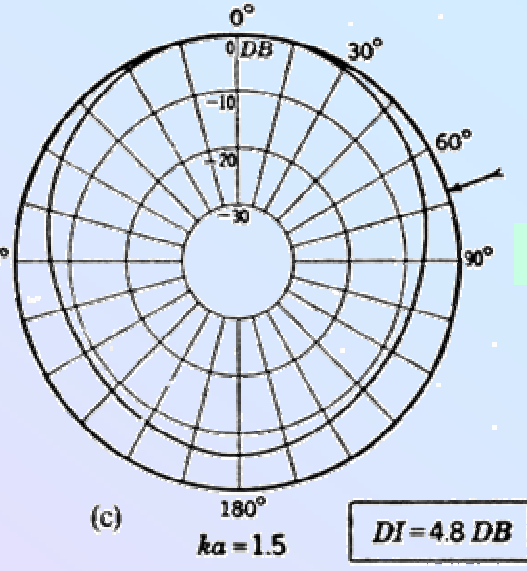
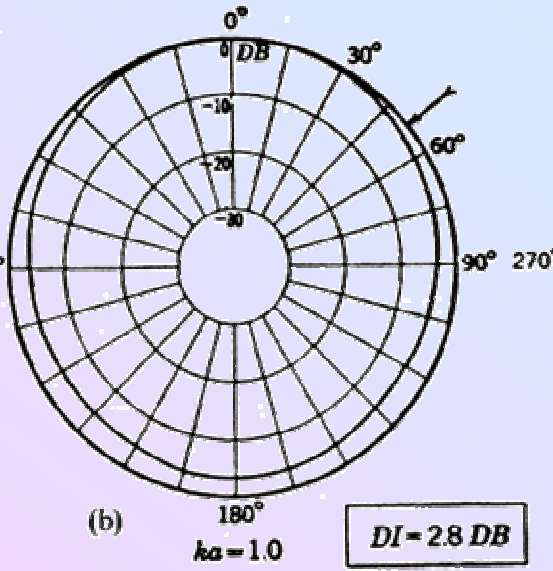
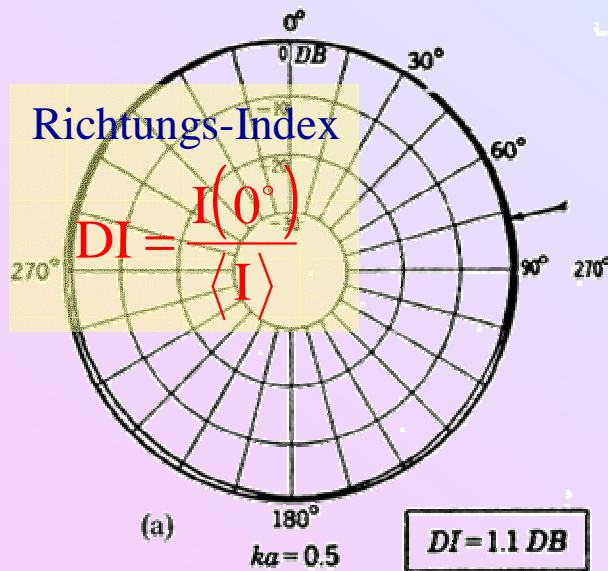
$\frac{dL_{eff}}{d\omega} < 0 \Rightarrow$ (Anti-) Resonanzen nicht ganz harmonisch (gestreckt)



4.3.5. Abstrahlcharakteristik offener Zylinderrohre

Richtungs-Index

$$DI = \frac{I(0^\circ)}{\langle I \rangle}$$



4.3.6. Schallwellen in Hörnern

Vereinfachung: **gerade, unendlich lang**

Wellengleichung für **Frequenz ω** :

$$\vec{\nabla}^2 p + k^2 p = 0 \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c}$$



Randbedingung für **ideal steifes Horn**: $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p = 0$ auf Oberfläche

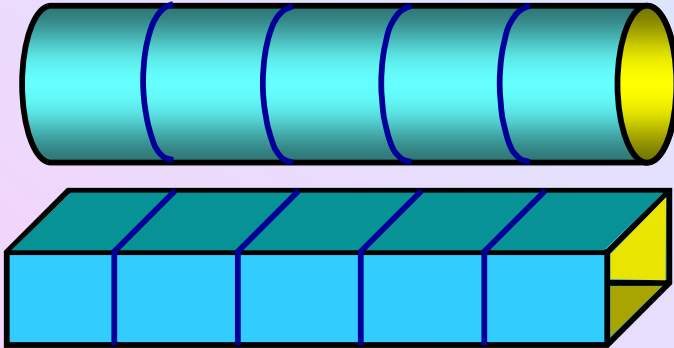
Separierbarkeit/Single ~~Me~~ Leitung: **Spezielle Koordinaten**

Hornfläche = Koordinatenfläche

\Rightarrow **konfokale quadratische Oberflächen** (11 Varianten)

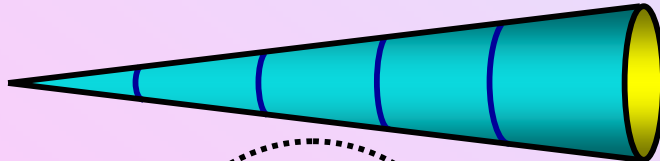
Beispiele:

Kreis/Ellipsen/Rechteck Zylinderrohre



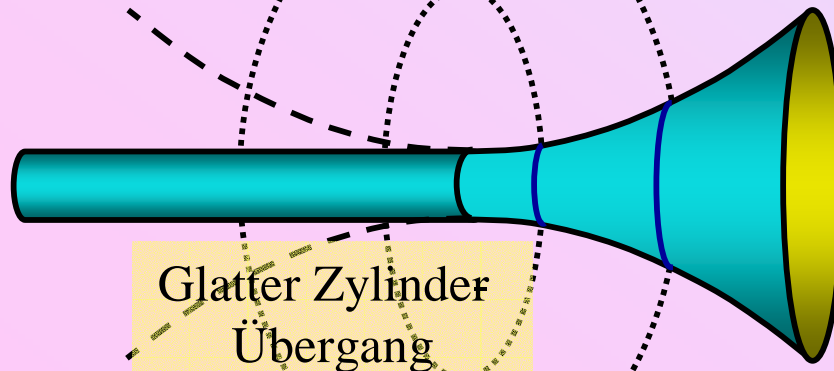
Single Mode ebene Wellen

Konische Hörner



Single Mode Kugelwellen

Hyperbolische Hörner



Glatter Zylinder
Übergang

Single Mode Welle
oblat spheroidal
 \approx zylindrisch \Rightarrow \approx konisch
 \approx eben \Rightarrow \approx sphärisch

Analytische Näherung:

- **Wellenfront:** $p \approx \text{const.}$
- **Lokaler Konus:** x_0, θ
- **Sphärische Näherung:**

x_0, θ nur schwach x abhängig $\Rightarrow S$ annähernd sphärisch

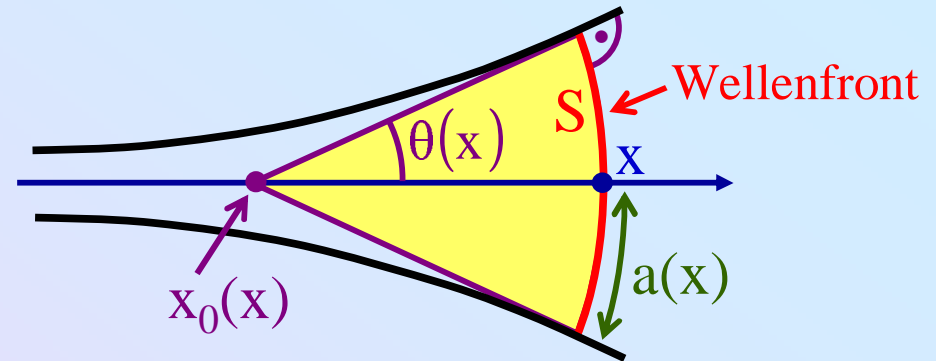
$$\left. \begin{array}{l} r = x - x_0 \\ S \approx 2\pi \sin\theta \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \approx \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} S \frac{\partial}{\partial x}$$

Webster Gleichung: $\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} S \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

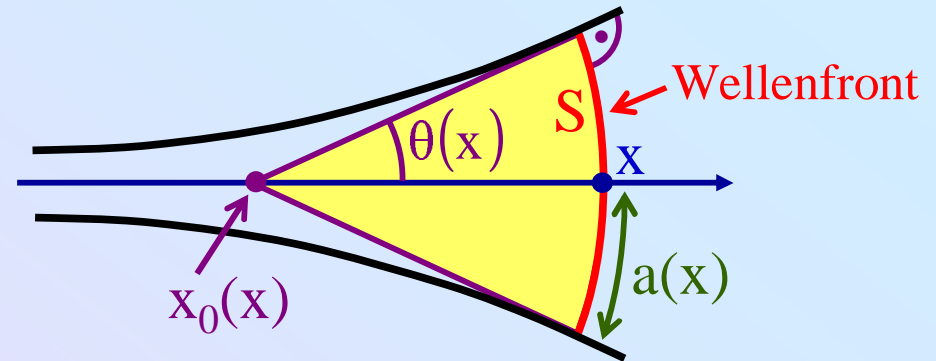
Für kleine θ :

$$S \approx \pi a^2 \quad \text{mit} \quad a = \theta \cdot (x - x_0) \quad \longleftrightarrow \quad \text{Sphärische Näherung}$$

$$S \approx \pi R_T^2 \quad , \quad R_T = \text{Hornradius}(x) \quad \longleftrightarrow \quad \text{Ebene Näherung}$$



$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} S \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \cdot p$$



Konstante Intensität $I \propto p^2 S$

⇒ Ansatz: $\psi = \sqrt{S} \cdot p$

$$S \approx \pi a^2$$

Schrödinger - Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (k^2 - F(x))\psi = 0$$

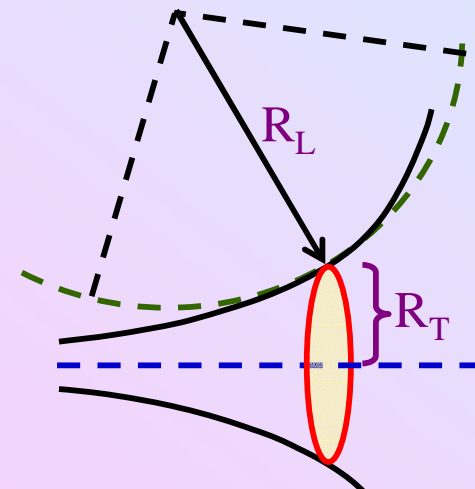
$$k = \frac{\omega}{c} \quad F(x) = \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dx^2}$$

$F(x)$ = Potentialbarriere
= Hornfunktion

$$\theta(x) \ll 1 \Rightarrow F(x) \approx \frac{1}{R_L R_T}$$

Leitung oberhalb Abschneide Frequenz:

$$\omega_c(x) = k_c(x) c = \sqrt{F(x)} \cdot c$$



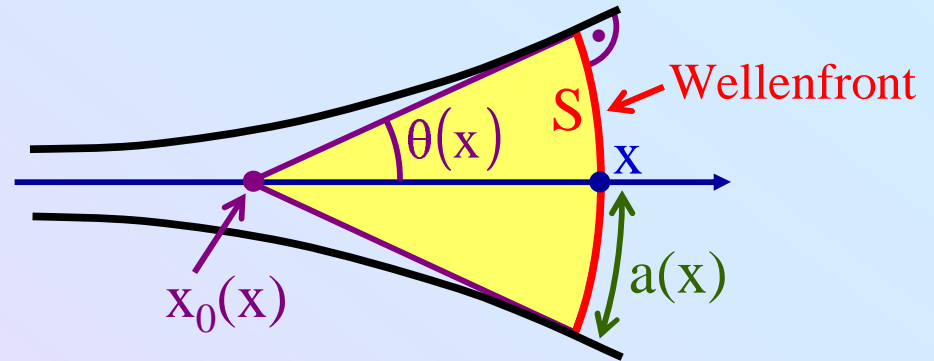


4.3.7. Salmon Hörner (\Leftrightarrow konstanter Abschneidefrequenz)

$$F = \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dx^2} = \text{const.}$$

Lösung:

$$a = a_0 [\cosh(mx) + T \cdot \sinh(mx)]$$
$$p = \frac{p_0}{a} e^{i\omega t} e^{-i\sqrt{k^2 - m^2} x}$$



m = Hornkonstante

Wellenleitung $\Leftrightarrow k^2 > m^2$

Wichtige Spezialfälle:

$T = 1:$ $a = a_0 \exp(mx)$

$T = 1:$ $a = a_0 \cosh(mx)$

$$\left. \begin{matrix} T = \frac{-1}{mx_0} \\ m \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} a = a_0 \left(1 - \frac{x}{x_0} \right)$$

Hörner = kontinuierliche Impedanzwandler \Rightarrow effiziente Abstrahlung oberhalb ω_c

Exponentialhorn

Katenoidalhorn (glatter Zylinderanschluss)

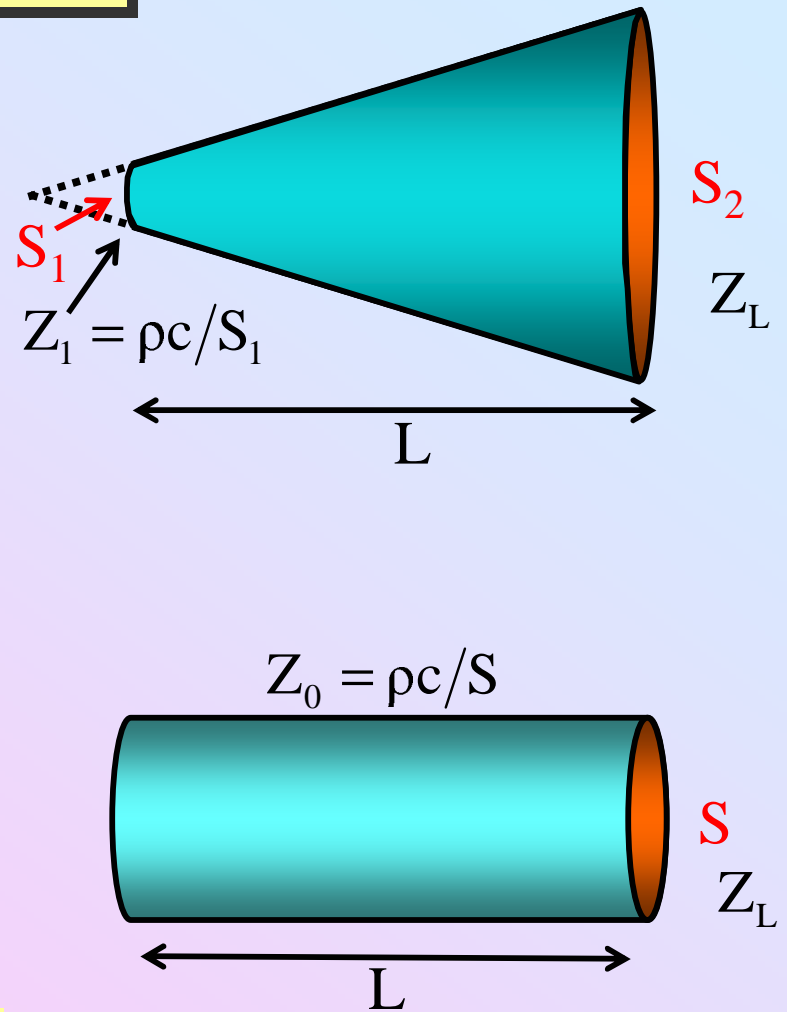
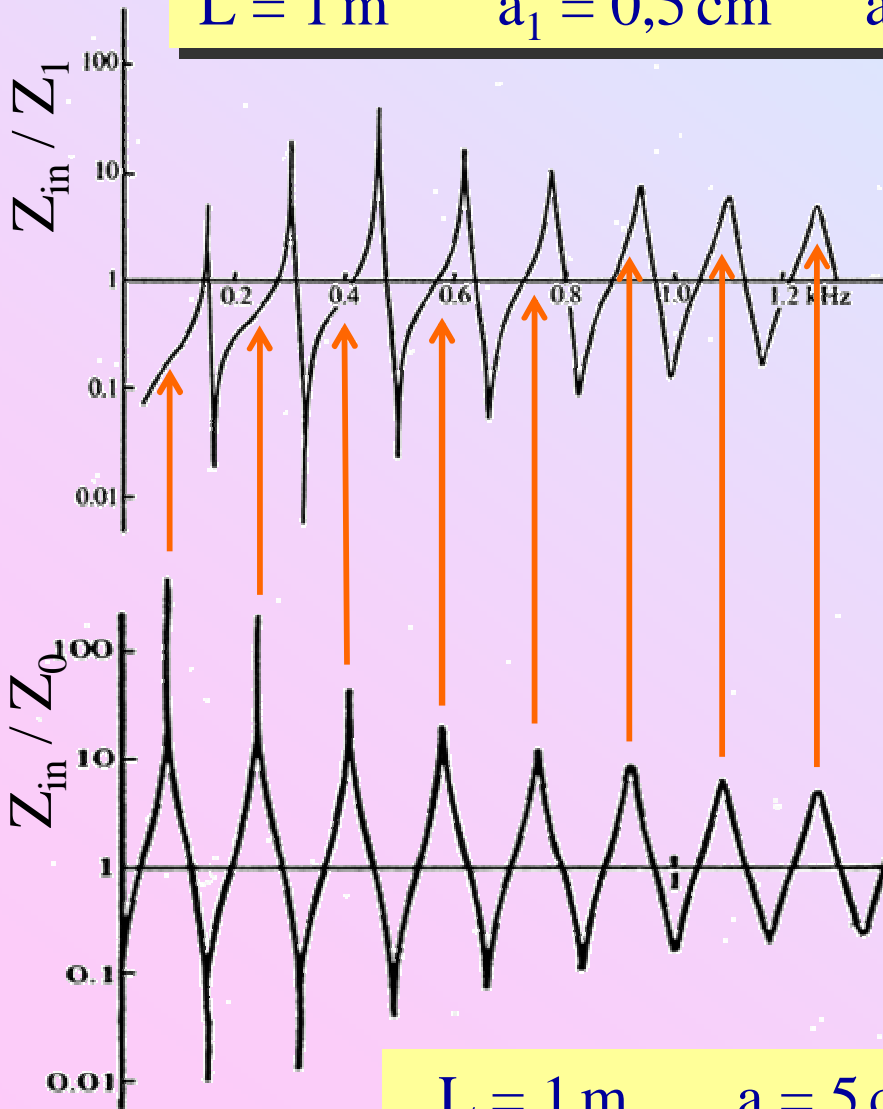
Konisches Horn mit Apex in x_0

($F = 0 \Rightarrow$ kein Frequenzabschnitt)



4.3.8. Endliche konische Hörner

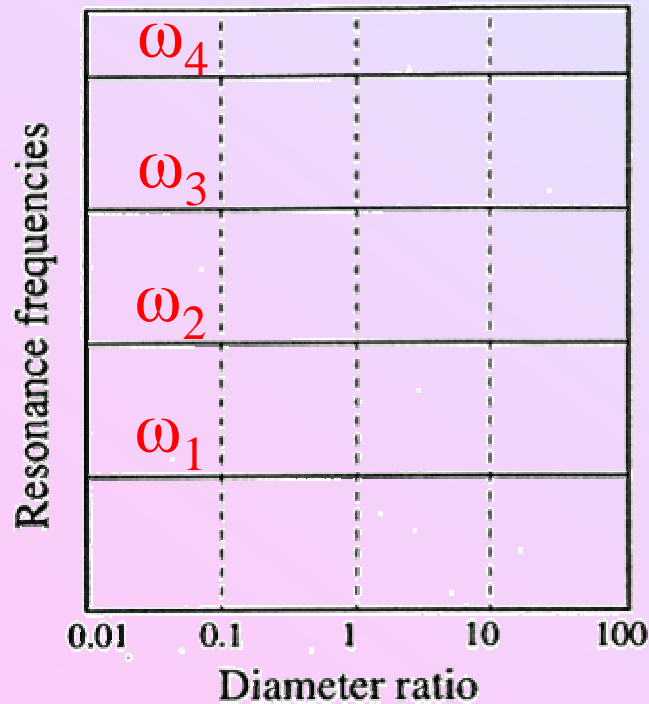
$L = 1 \text{ m}$ $a_1 = 0,5 \text{ cm}$ $a_2 = 5 \text{ cm}$



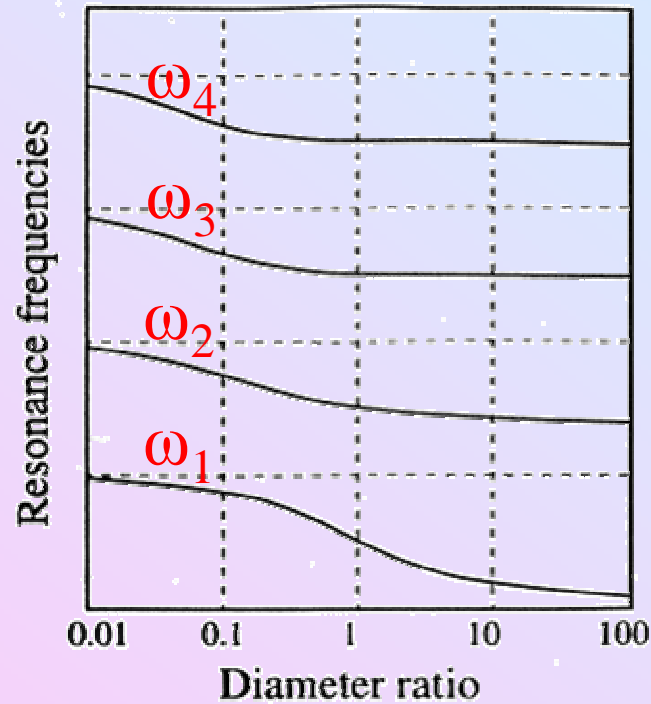
Abhängigkeit der Resonanzfrequenzen vom Öffnungsverhältnis

(Vereinfachte Darstellung für $Z_L = 0$)

Beidseitig offene Hörner
(Flöten, Orgel Rhrpfeifen)



Einseitig geschlossene Hörner
(Rohrblatt / Lippen
getriebene Blasinstrumente)

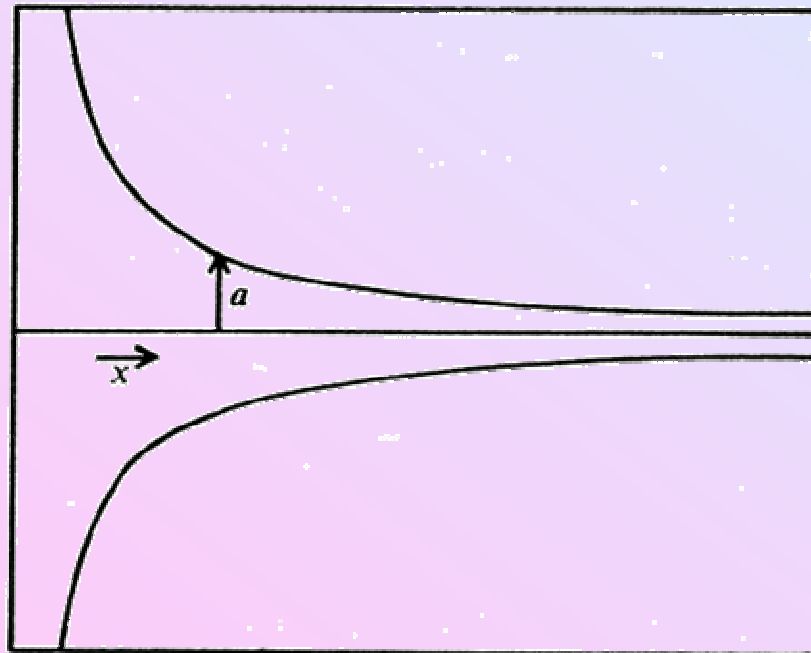


$$a_1 / a_2$$

4.3.9. Besselhörner

$$a = b x^{-\gamma} \quad 0 < x < \infty$$

- $\gamma = 0$: Zylinderrohr
- $\gamma = -1$: konisches Horn mit Apex bei $x = 0$
- $\gamma > 0$: stark divergente Mündung bei $x = 0$
(realistische Beschreibung moderner Blasinstrumente)



Besselhörner:

$$a = b x^{-\gamma} \quad 0 < x < \infty$$

Analytische Lösung für $\gamma > 0$ (ebene Wellen Näherung):

$$p(x) = x^{\gamma + \frac{1}{2}} \left(A J_{\gamma + \frac{1}{2}}(kx) + B N_{\gamma + \frac{1}{2}}(kx) \right)$$

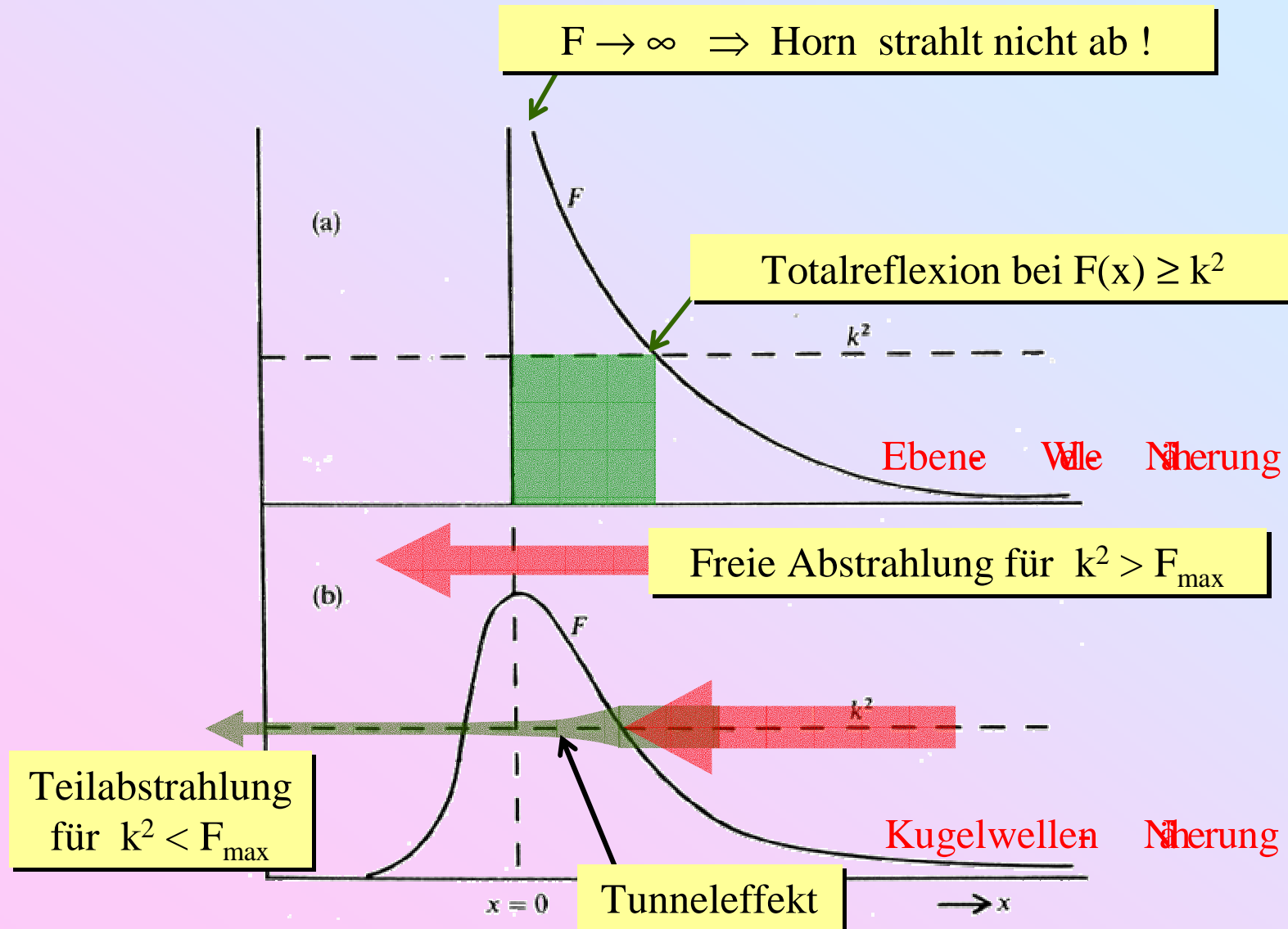
Bessel Funktion

Neumann Funktion

Ideal offenes unendliches Besselhorn:

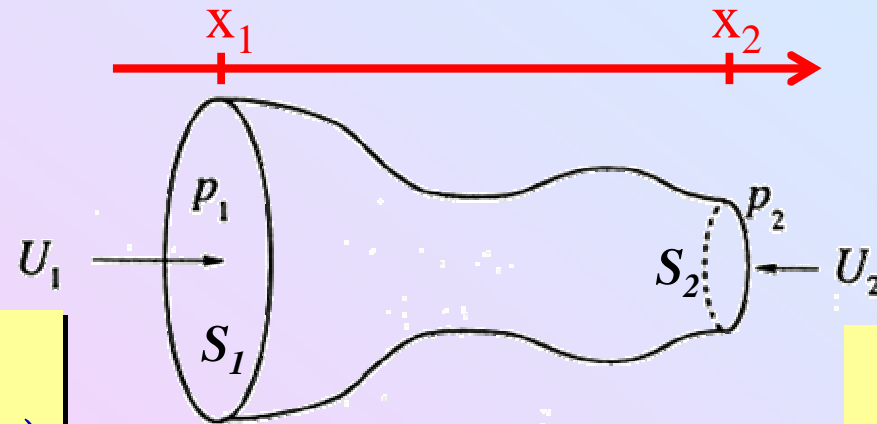
$$p(x) = A x^{\gamma + \frac{1}{2}} J_{\gamma + \frac{1}{2}}(kx)$$

Besselhornfunktion bei offener Mündung:



4.3.10. Netzwerkanalyse

Allgemeiner Wellenleiter \Leftrightarrow (passiver) elektrischer Vierpol



$$\begin{aligned} p_1 &= p(x_1) \\ U_1 &= S_1 \cdot u(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= p(x_2) \\ U_2 &= -S_2 \cdot u(x_2) \end{aligned}$$



Impedanzmatrix:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

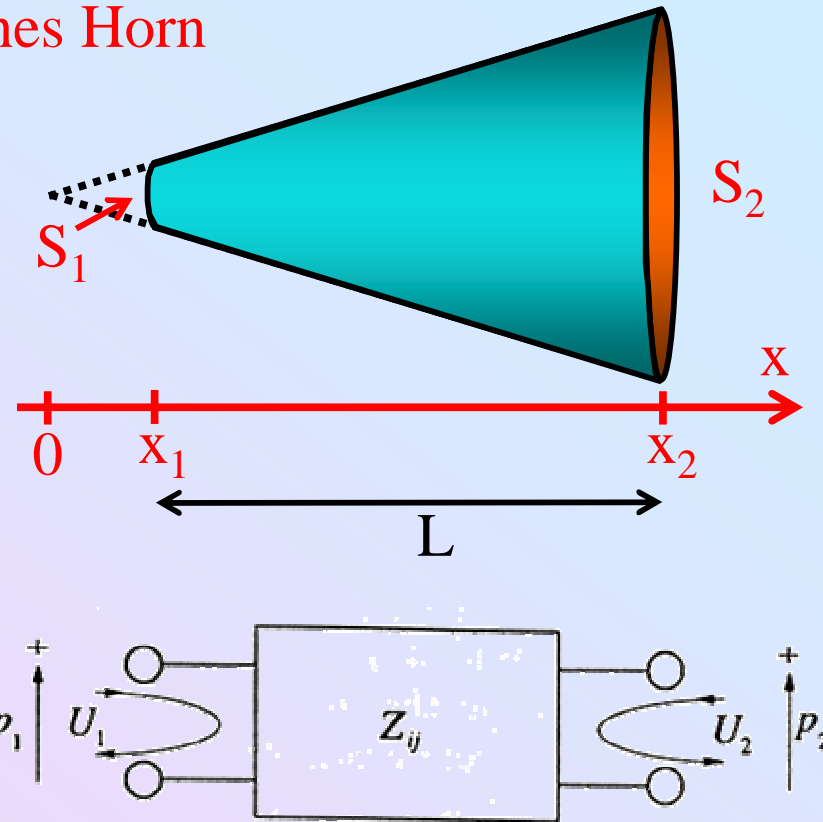
Beispiel: Beidseitig offenes konisches Horn

$$Z_{11} = \frac{ipc}{S_1} \cdot \frac{\sin(kL - \theta_2) \sin \theta_1}{\sin(kL + \theta_1 - \theta_2)}$$

$$Z_{22} = -\frac{ipc}{S_2} \cdot \frac{\sin(kL + \theta_1) \sin \theta_2}{\sin(kL + \theta_1 - \theta_2)}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -\frac{ipc}{\sqrt{S_1 S_2}} \cdot \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(kL + \theta_1 - \theta_2)}$$

mit $\theta_{1,2} = \arctan(k x_{1,2})$



Beobachtung: $Z_{12} = Z_{21} \Rightarrow$ gilt auch allgemein

Reziprozitäts Theorem:

Für beliebige (passive) Hörner gilt

$$\underline{Z_{12} = Z_{21}}$$

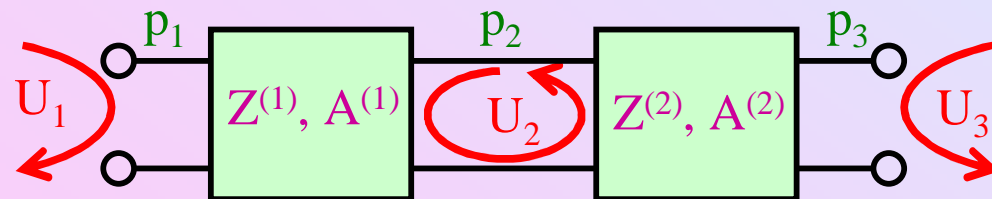
Transportmatrix:

$$A = \frac{1}{Z_{21}} \begin{pmatrix} Z_{11} & \det Z \\ 1 & Z_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} p_2 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

$$Z = \frac{1}{A_{21}} \begin{pmatrix} A_{11} & \det A \\ 1 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = Z \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: $Z_{12} = Z_{21} \Leftrightarrow \det A = 1$

Behandlung zusammengesetzter Hörner:



$$\begin{pmatrix} p_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = A^{(1)} \cdot \begin{pmatrix} p_2 \\ -U_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_2 \\ -U_2 \end{pmatrix} = A^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} p_3 \\ -U_3 \end{pmatrix}$$

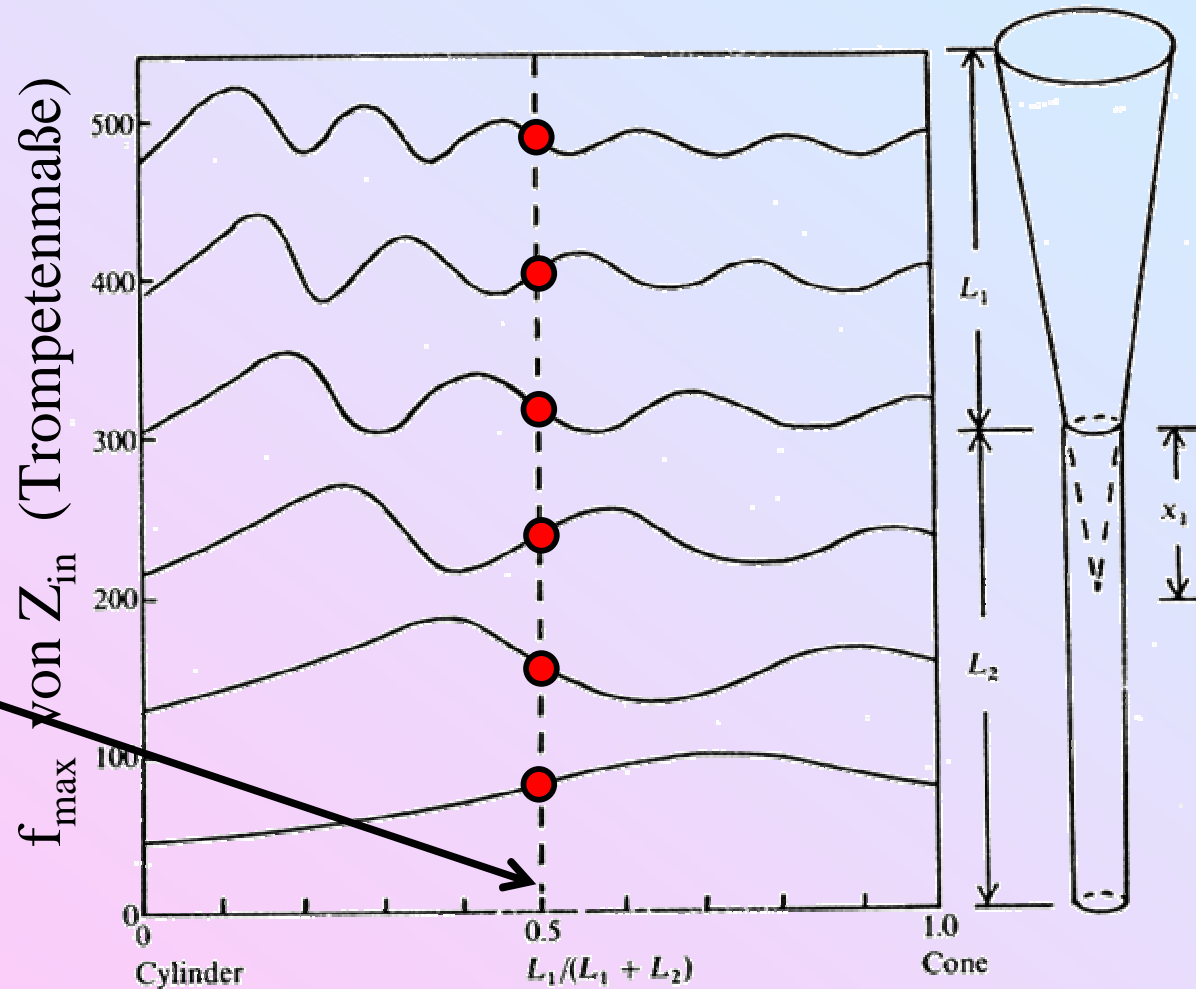
Verkettungsregel: $A^{(\text{tot})} = A^{(1)} \cdot A^{(2)}$

Beispiel: Ideal offenes konisches Rohr mit Zylinder- Eingang

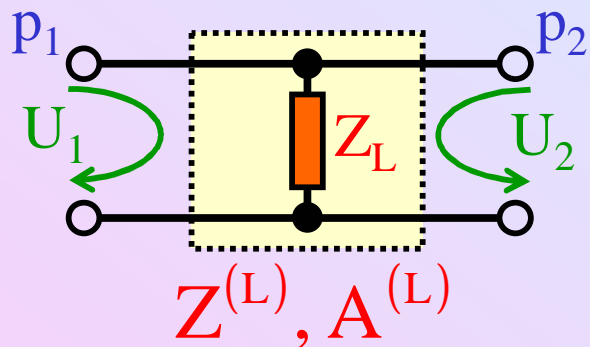
$$A^{(\text{tot})} = A^{(\text{Zylinder})} \cdot A^{(\text{Konus})} \Rightarrow Z^{(\text{tot})}$$

$$Z_{\text{in}} = Z_{11}^{(\text{tot})}$$

Harmonisches
Spektrum bei
 $L_1 \approx L_2$



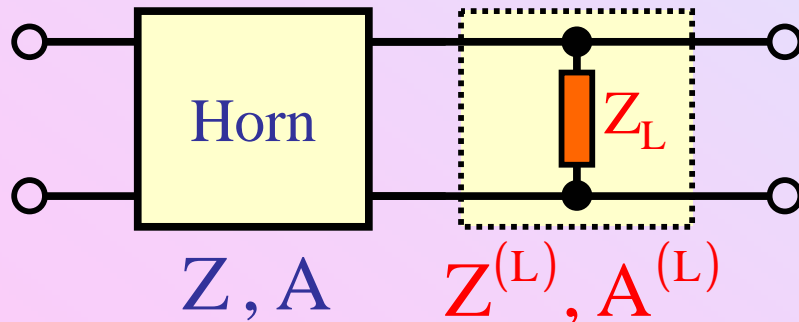
Beispiel: Horn mit Abschlussimpedanz Z_L



$$p_1 = p_2 = Z_L (U_1 + U_2) \quad \Rightarrow$$

$$Z^{(L)} = Z_L \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(L)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Z_L^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$



$$A^{(\text{tot})} = A \cdot A^{(L)} = \frac{1}{Z_{21}} \cdot \begin{pmatrix} Z_{11} + \frac{\det Z}{Z_L} & \det Z \\ 1 + \frac{Z_{22}}{Z_L} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

Eingangsimpedanz:

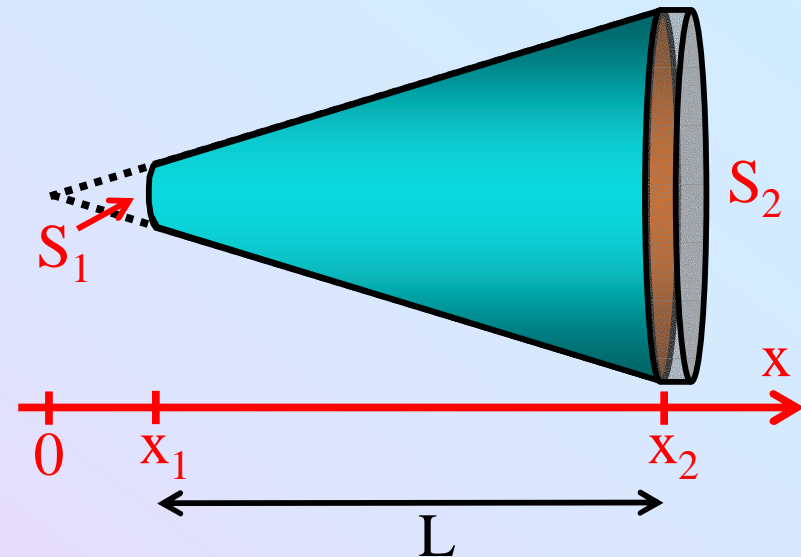
$$Z_{\text{in}} = Z_{11}^{(\text{tot})} = \frac{A_{11}^{(\text{tot})}}{A_{21}^{(\text{tot})}} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} = \begin{cases} Z_{11} & \text{geschlossenes Horn } (Z_L = \infty) \\ \frac{\det Z}{Z_{22}} & \text{ideal offenes Horn } (Z_L = 0) \end{cases}$$

Beispiel: Ideal abgeschlossenes konisches Horn

$$Z_L = \infty$$

$$Z_{\text{in}} = Z_{11} = \frac{ipc}{S_1} \cdot \frac{\sin(kL - \theta_2) \sin \theta_1}{\sin(kL + \theta_1 - \theta_2)}$$

mit $\theta_{1,2} = \arctan(k x_{1,2})$



Quasistatischer Grenzfall: $kL, kx_{1,2} \ll 1$

$$Z_{\text{in}} = \frac{ipc}{S_1} \cdot \frac{\sin(kL - \theta_2) \sin \theta_1}{\sin(kL + \theta_1 - \theta_2)} \rightarrow -\frac{ipc}{kS_1} \cdot \frac{3x_1^2}{x_2^3 - x_1^3} = \frac{1}{i\omega} \frac{\rho c^2}{V}$$

Hohlraumform in diesem Grenzfall irrelevant \Rightarrow

$$Z_{\text{in}} = \frac{1}{i\omega} \frac{\rho c^2}{V} = \text{akustische Impedanz eines Hohlraums}$$

$$\frac{V}{\rho c^2} = \text{akustische Nachgiebigkeit} \Leftrightarrow \text{elektrische Kapazität}$$

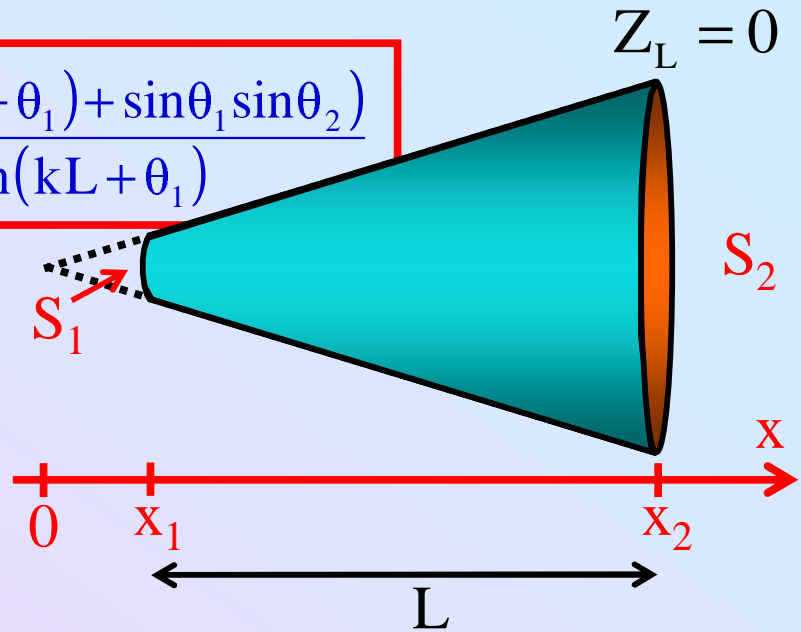
Beispiel: Ideal offenes konisches Horn

$$Z_{in} = \frac{\det Z}{Z_{22}} = \frac{i\rho c}{S_1} \cdot \frac{\sin\theta_1 (\sin(kL - \theta_2)\sin(kL + \theta_1) + \sin\theta_1 \sin\theta_2)}{\sin(kL + \theta_1 - \theta_2)\sin(kL + \theta_1)}$$

mit $\theta_{1,2} = \arctan(k x_{1,2})$

Quasistatischer Grenzfall:

$$Z_{in} \xrightarrow{kx_{1,2} \ll 1} i\omega \cdot \frac{\rho L}{\sqrt{S_1 S_2}}$$



Spezialfall offenes Zylinderrohr:

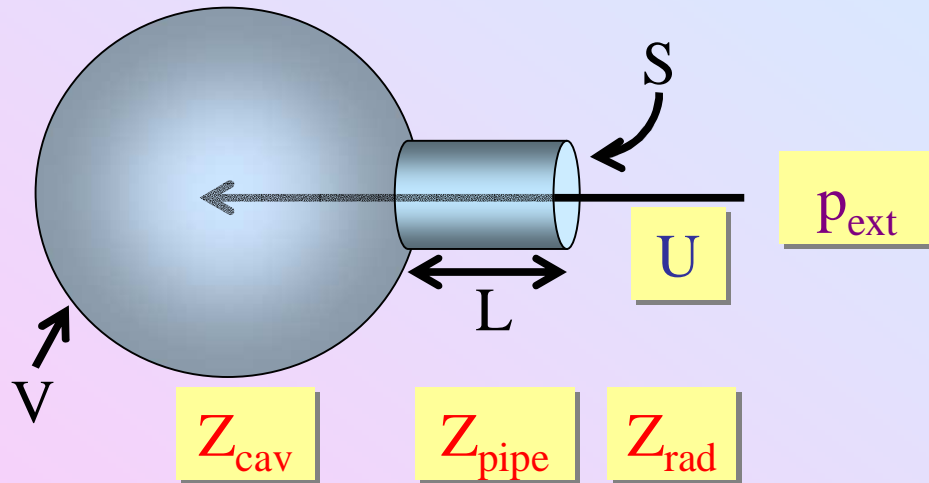
$$S_1 = S_2 = S \Rightarrow Z_{in}^{Zyl} = i\omega \cdot \frac{\rho L}{S}$$

Allgemein:

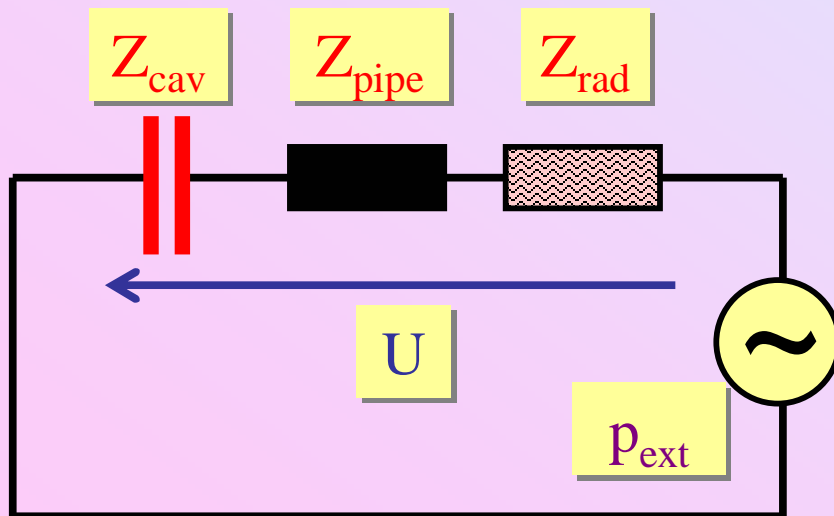
$$Z_{in} = i\omega \cdot \rho L \left\langle \frac{1}{S} \right\rangle_{\text{Horn}} = \text{akustische Impedanz eines ideal offenen Horns}$$

$$\rho L \left\langle \frac{1}{S} \right\rangle_{\text{Horn}} = \text{akustische Trägheit} \Leftrightarrow \text{elektrische Induktivität}$$

Quasistatische Netzwerke: Beispiel 1

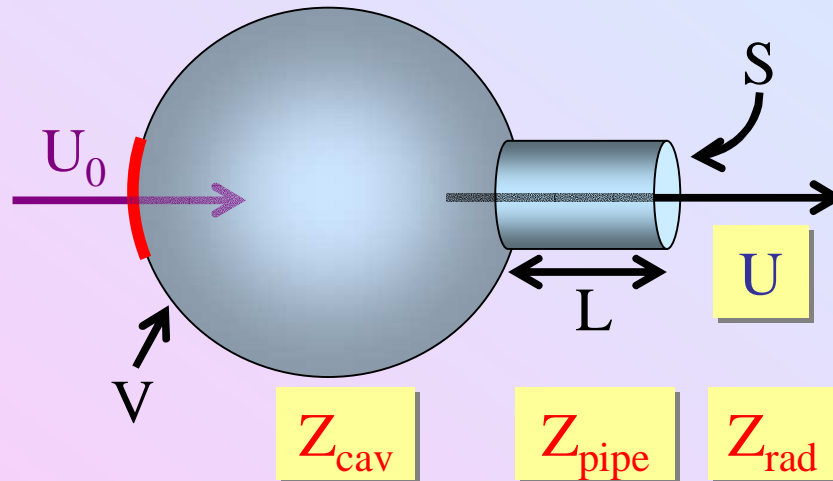


Helmholtz Resonator
getrieben durch äußeres
Schallfeld p_{ext}

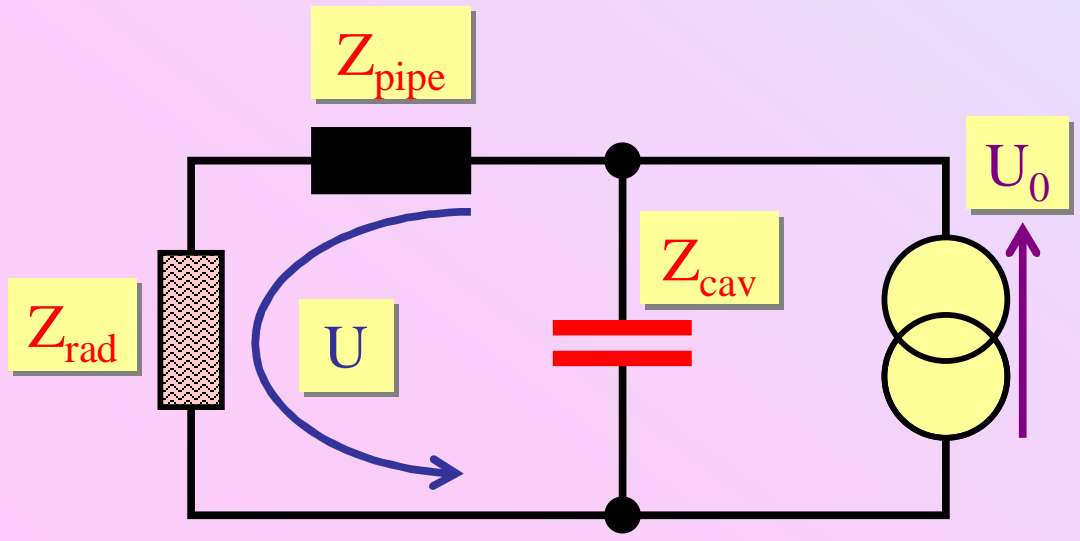


$p_{\text{ext}} \Leftrightarrow$ Wechselspannungsquelle
 $Z_{\text{rad}} \Leftrightarrow$ komplexer Widerstand
 $Z_{\text{pipe}} \Leftrightarrow$ Induktivität
 $Z_{\text{cav}} \Leftrightarrow$ Kapazität

Quasistatische Netzwerke: Beispiel 2



Helmholtz Resonator
intern getrieben durch
vibrierende Wand



$U_0 \Leftrightarrow$ Wechselstromquelle
 $Z_{rad} \Leftrightarrow$ komplexer Widerstand
 $Z_{pipe} \Leftrightarrow$ Induktivität
 $Z_{cav} \Leftrightarrow$ Kapazität