

Formale Grundlagen

1. Übungsaufgaben

2006-03-14, Lösungen

1. Beweisen Sie geometrisch, daß die Addition von Vektoren in der Ebene assoziativ ist.

Lösung: Man zeichnet die entsprechenden Parallelogramme.

2. Der *Kern* einer linearen Abbildung h besteht aus allen Vektoren \mathbf{v} , die $h(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$ erfüllen. Rechnen Sie nach, daß dies stets ein linearer Unterraum ist.

Lösung: Seien \mathbf{v} und \mathbf{w} im Kern; wir zeigen, daß dann auch $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ und $\lambda\mathbf{v}$ (λ ein beliebiger Skalar) im Kern sind.

Laut Voraussetzung gelten $h(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$ und $h(\mathbf{w}) = \mathbf{o}$. Weil h linear ist, gelten dann auch

$$\begin{aligned}h(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= h(\mathbf{v}) + h(\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{o} + \mathbf{o} \\ &= \mathbf{o} \\ h(\lambda\mathbf{v}) &= \lambda h(\mathbf{v}) \\ &= \lambda\mathbf{o} \\ &= \mathbf{o}.\end{aligned}$$

3. Zeigen Sie, daß eine lineare Abbildung genau dann injektiv ist, wenn deren Kern nur den Nullvektor umfaßt.

Lösung: Einerseits sieht man leicht, daß $h(\mathbf{o})$ für jede lineare Abbildung h gilt.

Ist nun \mathbf{v} irgendein Vektor mit $h(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, dann ist somit $h(\mathbf{v}) = h(\mathbf{o})$; und wenn h injektiv ist, daher auch $\mathbf{v} = \mathbf{o}$.

4. Ist die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen wieder linear?

Lösung: Ja. Seien h_1, h_2 zwei lineare Abbildungen. Dann gelten:

$$\begin{aligned}(h_2 \circ h_1)(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (h_1(h_2(\mathbf{v} + \mathbf{w}))) && \text{(Def. v. } \circ \text{)} \\ &= h_2(h_1(\mathbf{v}) + h_1(\mathbf{w})) && \text{(Linearität von } h_1 \text{)} \\ &= h_2(h_1(\mathbf{v})) + h_2(h_1(\mathbf{w})) && \text{(Linearität von } h_2 \text{)} \\ &= (h_2 \circ h_1)(\mathbf{v}) + (h_2 \circ h_1)(\mathbf{w}) && \text{(Def. v. } \circ \text{)} \\ (h_2 \circ h_1)(\lambda \mathbf{v}) &= \lambda(h_2 \circ h_1)(\mathbf{v}) && \text{(analog).}\end{aligned}$$

5. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) Konstante Abbildungen;

Lösung: Nein (außer wenn die Konstante der Nullvektor ist), nicht verträglich mit Skalierung.

(b) Die Länge eines Vektors;

Lösung: Nein, nicht verträglich mit Summe von Vektoren verschiedener Richtungen. Auch nicht mit der Skalierung durch negative Skalare.

(c) Die Abbildung $x \mapsto -x$;

Lösung: Ja, ist eine Skalierung.

(d) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$;

Lösung: Nein, weil z.B. das Paar $(0, 0)$ nicht auf $(0, 0, 0)$ abgebildet wird.

(e) Die Betragsfunktion;

Lösung: Nein, eindimensionaler Spezialfall der Länge eines Vektors; nicht verträglich mit Skalierung mit negativen Zahlen; außerdem: $|-3 + 3| \neq |-3| + |3|$.

(f) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (y, x)$;

Lösung: Ja, einfache Rechnung.

(g) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y - 4x)$;

Lösung: Ja, einfache Rechnung.

(h) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$;

Lösung: Ja, ist fast die Identität; die dritte Komponente ist die Konstante 0.

(i) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$;

Lösung: Nein. Hier ist die dritte Komponente konstant, und nicht 0.

- (j) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x)$;
 Lösung: Ja; einfache Rechnung. Projektion sind immer linear.
- (k) Eine Drehung um 50° ;
 Lösung: Eine Drehung ist dann und nur dann linear, wenn die Drehachse durch den Nullpunkt führt; eine Zeichnung erklärt das sofort.
- (l) Die Varianz einer Zufallsvariablen;
 Lösung: Nein, die Varianz einer Summe ist nur dann die Summe der Varianzen, wenn diese unkorreliert sind. Außerdem $\text{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{Var}(X) \neq \lambda \text{Var}(X)$ (für $\lambda \neq 0$).
- (m) Die Standardabweichung einer Zufallsvariablen;
 Lösung: Nein, dasselbe Problem wie bei der Länge eines Vektors.
- (n) Die Abbildung, die jeder Funktion den Funktionswert an einer bestimmten Stelle zuordnet;
 Lösung: Ja; einfache Rechnung bzw. Definition der Summe von Funktionen.
- (o) Die zweite Ableitung;
 Lösung: Ja; dies ist die zweimalige Hintereinanderausführung der ersten Ableitung, also die Hintereinanderausführung zweier linearer Abbildungen.
- (p) Die Umrechnung zwischen Celsius und Fahrenheit.
 Lösung: Nein; $0^\circ C \neq 0^\circ F$.

6. Bestimmen Sie den Kern des Differentialoperators.

Lösung: Von genau den konstanten Funktionen ist die Ableitung 0. Daher besteht dieser Kern genau aus den konstanten Funktionen.

7. Eine Abbildung ist *affin*, wenn sie mit allen Affinkombinationen verträglich ist. Zeigen Sie, daß sich jede affine Abbildung als Summe einer linearen Abbildung und einer konstanten Abbildung darstellen läßt.

Lösung: Wir bemerken, daß konstante Abbildungen immer affin sind (einfache Rechnung).

Jede Linearkombination läßt sich als Affinkombination auffassen, wenn der Nullvektor künstlich hinzugefügt wird, d.h.: Sei $\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{v}_k$ eine Linearkombination, dann ist $\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{v}_k + (1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k) \cdot \mathbf{o}$ eine Affinkombination. Ist

nun h affin, so gilt

$$\begin{aligned} h\left(\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{v}_k\right) &= h\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{v}_k + \left(1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k\right) \mathbf{o}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k h(\mathbf{v}_k) + \left(1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k\right) h(\mathbf{o}). \end{aligned}$$

Die Abbildung $\mathbf{v} \mapsto h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{o})$ ist somit linear, und h selbst ist die Summe dieser Abbildung und der Konstanten $h(\mathbf{o})$.

8. Ein affiner Unterraum, ist eine Teilmenge, welche gegenüber allen Affinkombinationen abgeschlossen ist. Wie ist hier der Zusammenhang mit den linearen Unterräumen?

Lösung: Ein affiner Unterraum ist genau dann linear wenn er den Nullpunkt enthält.

Sei A ein affiner Unterraum und $\mathbf{v}_0 \in A$, dann ist $L := A - \mathbf{v}_0$ ein linearer Unterraum und $A = \mathbf{v}_0 + L$ (und L ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt).

Anschaulich: In der Ebene sind die Gerade typische affine Unterräume. Sie sind nur dann lineare Unterräume, wenn sie durch den Nullpunkt führen. Außerdem ist jeder Punkt ein affiner Unterraum, aber nur der Nullpunkt ein linearer.