

Alfred Böge

Formeln und Tabellen zur Technischen Mechanik

22. Auflage

STUDIUM



**VIEWEG+
TEUBNER**

Alfred Böge

Formeln und Tabellen zur Technischen Mechanik

Lehr- und Lernsystem Technische Mechanik

- **Technische Mechanik (Lehrbuch)**
von A. Böge
- **Aufgabensammlung Technische Mechanik**
von A. Böge und W. Schlemmer
- **Lösungen zur Aufgabensammlung Technische Mechanik**
von A. Böge und W. Schlemmer
- **Formeln und Tabellen zur Technischen Mechanik**
von A. Böge

Alfred Böge

Formeln und Tabellen zur Technischen Mechanik

22., erweiterte Auflage

unter Mitarbeit von Walter Schlemmer,
Gert Böge und Wolfgang Böge

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

1. Auflage 1960
- 2., verbesserte und erweiterte Auflage 1963
- 3., überarbeitete Auflage 1966
- 4., überarbeitete Auflage 1968
- 5., überarbeitete Auflage 1970, 2 Nachdrucke
- 6., vollständig neu bearbeitete und erweiterte Auflage 1974, 1 Nachdruck
- 7., durchgesehene Auflage 1976
- 8., überarbeitete Auflage 1979
- 9., überarbeitete und ergänzte Auflage 1980
- 10., überarbeitete Auflage 1981, 2 Nachdrucke
- 11., überarbeitete Auflage 1983
- 12., überarbeitete Auflage 1984, 1 Nachdruck
- 13., verbesserte Auflage 1986, 3 Nachdrucke
- 14., überarbeitete Auflage 1991
- 15., erweiterte Auflage 1992
- 16., überarbeitete Auflage 1995
- 17., überarbeitete Auflage 1999
- 18., überarbeitete und erweiterte Auflage 2000
- 19., überarbeitete und erweiterte Auflage 2002, 1 Nachdruck
- 20., überarbeitete Auflage 2006
- 21., korrigierte Auflage 2009
- 22., erweiterte Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Thomas Zipsner | Imke Zander

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Technische Redaktion: Stefan Kreickenbaum, Wiesbaden

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Stürtz GmbH, Würzburg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1445-6

Vorwort zur 22. Auflage

Diese Formelsammlung ist Teil des vierbändigen Lehr- und Lernsystems Technische Mechanik von *A. Böge* für Studierende an Fach- und Fachhochschulen Technik. Sie enthält die physikalischen, mathematischen und technischen Daten (Gleichungen, Tabellen, Diagramme) zum Lösen der Aufgaben aus der Aufgabensammlung und beruflicher Arbeit.

Die vier Bücher sind in jeder Auflage inhaltlich aufeinander abgestimmt. Im Lehrbuch sind nach jedem größeren Bearbeitungsschritt die Nummern der zugehörigen Aufgaben angegeben. Entsprechend der Bearbeitung des Kapitels Hydrodynamik wurden neu die Formeln zu den drei Erhaltungssätzen für Masse, Energie, Impuls aufgenommen.

Die aktuellen Auflagen des Lehr- und Lernsystems sind

- Lehrbuch 29. Auflage
- Aufgabensammlung 20. Auflage
- Lösungsbuch 15. Auflage
- Formelsammlung 22. Auflage.

Das Lehr- und Lernsystem Technische Mechanik hat sich auch an Fachgymnasien, Fachoberschulen, Bundeswehrfachschulen und in Bachelor-Studiengängen bewährt. In Österreich wird damit an den Höheren Technischen Lehranstalten gearbeitet.

Bedanken möchte ich mich beim Lektorat Maschinenbau des Vieweg+Teubner Verlags, insbesondere bei Frau Imke Zander und den Herren Thomas Zipsner und Stefan Kreickenbaum für ihre engagierte und immer förderliche Zusammenarbeit bei der Realisierung der vorliegenden Auflage.

Für Zuschriften steht die E-Mail-Adresse aboege@t-online.de zur Verfügung.

Braunschweig, Januar 2011

Alfred Böge

Inhalt

1 Statik

1.1	Zentrales Kräftesystem	1
1.2	Momentensatz, rechnerisch und zeichnerisch.....	2
1.3	3-Kräfte-Verfahren	2
1.4	4-Kräfte-Verfahren	3
1.5	Schlusslinienverfahren.....	3
1.6	Rechnerische Gleichgewichtsbedingungen	3
1.7	Cremonaplan	4
1.8	Culmann'sches Schnittverfahren	4
1.9	Ritter'sches Schnittverfahren.....	4
1.10	Schwerpunktsbestimmung	5
1.11	Flächenschwerpunkt	5
1.12	Linienschwerpunkt	6
1.13	Guldin'sche Regel.....	6
1.14	Reibung, allgemein	7
1.15	Reibung auf der schiefen Ebene	7
1.16	Zylinderführung.....	9
1.17	Prismenführung.....	9
1.18	Reibung an der Schraube	10
1.19	Seilreibung	10
1.20	Reibung am Tragzapfen (Querlager)	10
1.21	Reibung am Spurzapfen (Längslager)	10
1.22	Bremsen	11
1.23	Rollreibung	12
1.24	Fahrwiderstand	12
1.25	Feste Rolle	12
1.26	Lose Rolle.....	12
1.27	Rollenzug (Flaschenzug)	12

2 Dynamik

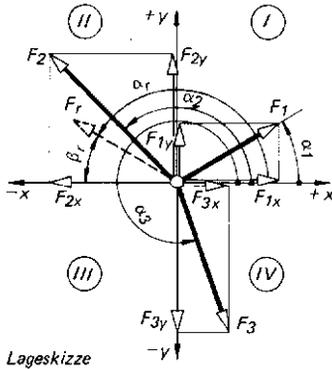
2.1	Gleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung.....	13
2.2	Gleichmäßig verzögerte geradlinige Bewegung.....	13
2.3	Gleichförmige Kreisbewegung	14
2.4	Gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung.....	14
2.5	Gleichmäßig verzögerte Kreisbewegung.....	14
2.6	Waagerechter Wurf.....	15
2.7	Schräger Wurf.....	15
2.8	Schnittgeschwindigkeit.....	15
2.9	Übersetzung	15
2.10	Kreuzschubkurbelgetriebe (Kreuzschleife)	16

2.11	Schubkurbelgetriebe	16
2.12	Dynamisches Grundgesetz für Translation	17
2.13	Dichte	17
2.14	Gewichtskraft	17
2.15	Impuls	17
2.16	Mechanische Arbeit und Leistung bei Translation	17
2.17	Wirkungsgrad	17
2.18	Dynamisches Grundgesetz für Rotation	18
2.19	Gleichungen für Trägheitsmomente (Massenmomente 2. Grades)	18
2.20	Mechanische Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad bei Rotation	19
2.21	Energie bei Translation	19
2.22	Gerader zentrischer Stoß	19
2.23	Energie bei Rotation	20
2.24	Zentripetalbeschleunigung und Zentripetalkraft	20
2.25	Gegenüberstellung der translatorischen und rotatorischen Größen	20
2.26	Harmonische Schwingung	21
2.27	Pendelgleichungen	22
2.28	Harmonische Welle	23
3	Fluidmechanik (Hydraulik)	24
3.1	Hydrostatik	24
3.2	Hydrodynamik	25
4	Festigkeitslehre	
4.1	Zug- und Druckbeanspruchung	28
4.2	Abscherbeanspruchung	28
4.3	Flächenpressung und Lochleibungsdruck	28
4.4	Flächenmoment 2. Grades zusammengesetzter Flächen	29
4.5	Verdrehbeanspruchung (Torsion)	29
4.6	Biegebeanspruchung	29
4.7	Knickbeanspruchung	30
4.8	Knickung im Stahlbau (DIN 18 800)	30
4.9	Zusammengesetzte Beanspruchung	33
4.10	Kerbspannung	33
4.11	Dauerbruchsicherheit im Maschinenbau	33
4.12	Stützkräfte, Biegemomente und Durchbiegungen bei Biegeträgern von gleich bleibendem Querschnitt	34
4.13	Axiale Flächenmomente 2. Grades I , Widerstandsmomente W und Trägheitsradius i für Biegung und Knickung	35
4.14	Polare Flächenmomente 2. Grades I_p und Widerstandsmomente W_p für Torsion	37
4.15	Träger gleicher Biegebeanspruchung	38
4.16	Festigkeitswerte für Walzstahl	39
4.17	Festigkeitswerte für verschiedene Stahlsorten	39
4.18	Festigkeitswerte für verschiedene Gusseisen-Sorten	39
4.19	Richtwerte für die Kerbwirkungszahl β_k	40

4.20	Oberflächenbeiwert b_1 und Größenbeiwert b_2 für Kreisquerschnitte	40
4.21	Stahlbezeichnungen	40
4.22	Zulässige Spannungen im Stahlhochbau	41
4.23	Zulässige Spannungen im Kranbau für Stahlbauteile und ihre Verbindungsmittel	41
4.24	Warmgewalzter gleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl	42
4.25	Warmgewalzter ungleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl	43
4.26	Warmgewalzte schmale \mathbf{I} -Träger	44
4.27	Warmgewalzte T-Träger	44
4.28	Warmgewalzte \mathbf{I} -Träger, \mathbf{IPE} -Reihe	45
4.29	Mechanische Eigenschaften von Schrauben	45
4.30	Warmgewalzter rundkantiger U-Stahl	46
4.31	Niete und zugehörige Schrauben für Stahl- und Kesselbau	46
5	Gewindetabellen	
5.1	Metrisches ISO-Gewinde.....	47
5.2	Metrisches ISO-Trapezgewinde.....	48
6	Allgemeine Tabellen	
6.1	Werte für $e^{\mu\alpha}$ in Abhängigkeit vom Umschlingungswinkel α und von der Reibungszahl μ	49
6.2	Vorsatzzeichen zur Bildung von dezimalen Vielfachen und Teilen	49
6.3	Bevorzugte Maße in Festigkeitsrechnungen	49
6.4	Umrechnungsbeziehungen für die gesetzlichen Einheiten	50
6.5	Das griechische Alphabet	51
7	Mathematische Hilfen	52
	Sachwortverzeichnis	56

1.1 Zentrales Kräftesystem

Wie wird *rechnerisch* die Resultierende F_r ermittelt?



Lageskizze mit den Komponenten der gegebenen Kräfte zeichnen:

mit folgender Tabelle die Komponenten F_x , F_y für jede Kraft berechnen:

n	F_n	α_n	$F_{nx} = F_n \cos \alpha_n$	$F_{ny} = F_n \sin \alpha_n$
1	8 N	30°	6,928 N	4 N

Für α_n ist immer der Winkel einzusetzen, den die Kraft F_n mit der positiven x-Achse einschließt (Richtungswinkel). Die Teilresultierenden F_{rx} und F_{ry} ergeben sich durch algebraische Addition:

$$F_{rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} \quad F_{ry} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}$$

Die Resultierende $F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2}$ und deren Neigungswinkel β_r zur x-Achse berechnen:

$$\beta_r = \arctan \frac{|F_{ry}|}{|F_{rx}|}$$

Quadrantenlage und Richtungswinkel von F_{rx} und F_{ry} bestimmen.

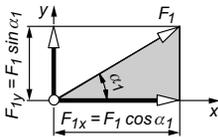
Wie werden *rechnerisch* unbekannte Kräfte ermittelt?

Es muss sein:

$$\text{I. } \sum F_x = 0$$

$$\text{II. } \sum F_y = 0$$

(Vorzeichen beachten)



Lageskizze mit den Komponenten aller Kräfte zeichnen, auch der noch unbekanntes; für diese zunächst den Richtungssinn annehmen; die Komponenten F_{nx} und F_{ny} der gegebenen Kräfte berechnen:

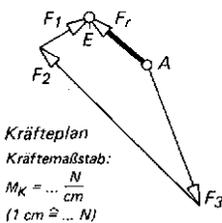
$$F_{nx} = F_n \cos \alpha_n \quad \alpha_n = \text{spitzer Winkel zur x-Achse}$$

$$F_{ny} = F_n \sin \alpha_n \quad \text{Vorzeichen (+) oder (-) aus der Lageskizze;}$$

Gleichgewichtsbedingungen mit Hilfe der Lageskizze ansetzen (Vorzeichen beachten);

Gleichungen auflösen (bei negativem Vorzeichen war der angenommene Richtungssinn falsch; Gegensinn); gefundene Kräfte in den Lageplan übertragen.

Wie wird *zeichnerisch* die Resultierende F_r ermittelt?



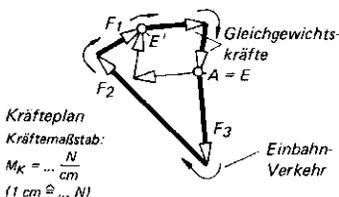
Lageplan des frei gemachten Körpers mit den Wirklinien der gegebenen Kräfte zeichnen;

Kräfteplan der gegebenen Kräfte F_1 , F_2 , F_3 zeichnen durch Parallelverschiebung der Wirklinien aus dem Lageplan in den Kräfteplan;

Kräfte F_1 , F_2 , F_3 in beliebiger Reihenfolge maßstabgerecht aneinander reihen, sodass sich ein fortlaufender Kräftezug ergibt;

Resultierende F_r zeichnen als Verbindungslinie vom Anfangspunkt A der zuerst gezeichneten zum Endpunkt E der zuletzt gezeichneten Kraft.

Wie werden *zeichnerisch* unbekannte Kräfte ermittelt?



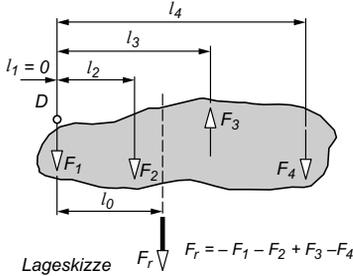
Lageplan des frei gemachten Körpers mit den Wirklinien aller Kräfte zeichnen, auch der noch unbekanntes; Kräfteplan der gegebenen Kräfte zeichnen durch Parallelverschiebung der Wirklinien aus dem Lageplan in den Kräfteplan;

Kräfteplan mit den Wirklinien der gesuchten Gleichgewichtskräfte „schließen“ (Einbahnverkehr); Richtungssinn der gefundenen Kräfte im Kräfteplan ablesen und in den Lageplan übertragen.

1 Statik

1.2 Momentensatz, rechnerisch und zeichnerisch

Wie wird *rechnerisch* die Resultierende F_r ermittelt?



Betrag und *Richtungssinn* der Resultierenden F_r ebenso bestimmen wie beim zentralen Kräftesystem;

Lage der Resultierenden berechnen nach dem *Momentensatz*:

$$F_r l_0 = F_1 l_1 + F_2 l_2 + \dots + F_n l_n$$

darin sind

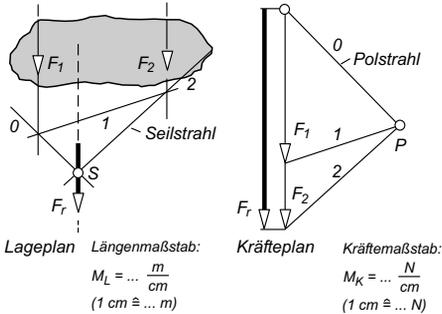
F_1, F_2, \dots, F_n die gegebenen Kräfte oder deren Komponenten F_x und F_y

l_1, l_2, \dots, l_n deren Wirkabstände vom gewählten (beliebigen) Bezugspunkt D

l_0 der Wirkabstand der Resultierenden vom gewählten Bezugspunkt

$F_1 l_1, F_2 l_2, \dots, F_n l_n$ die Momente der gegebenen Kräfte für den gewählten Bezugspunkt (Vorzeichen beachten).

Wie wird *zeichnerisch* die Resultierende F_r ermittelt? (*Seileckverfahren*)



Lageplan des frei gemachten Körpers mit den Wirklinien der gegebenen Kräfte zeichnen;

Kräfteplan der gegebenen Kräfte F_1, F_2 zeichnen durch Parallelverschiebung der Wirklinien aus dem Lageplan in den Kräfteplan;

Resultierende F_r zeichnen als Verbindungslinie vom Anfangspunkt *zum* Endpunkt des Kräftezugs; damit liegen Betrag und Richtungssinn von F_r fest;

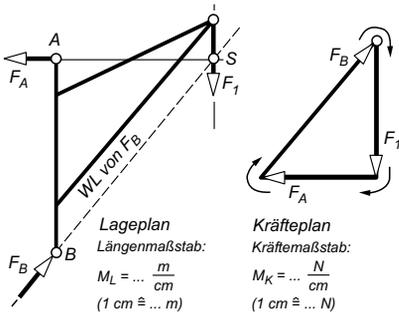
Polpunkt P beliebig wählen und Polstrahlen zeichnen; Seilstrahlen im Lageplan zeichnen durch Parallelverschiebung aus dem Kräfteplan, dabei ist der Anfangspunkt beliebig;

Anfangs- und Endseilstrahl zum Schnitt S bringen;

Schnittpunkt der Seilzugenden ergibt Lage von F_r im Lageplan, *Betrag* und *Richtungssinn* aus dem Kräfteplan.

1.3 3-Kräfte-Verfahren

Drei nichtparallele Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn das Kräfteck geschlossen ist und die Wirklinien sich in einem Punkt schneiden.



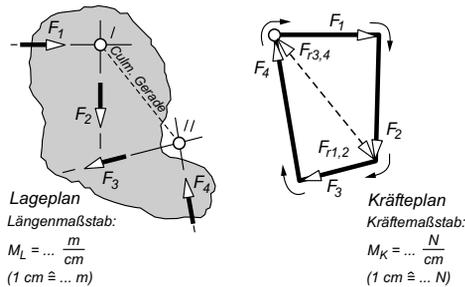
Lageplan des frei gemachten Körpers zeichnen und damit die Wirklinien der Belastungen und der einwertigen Lagerkraft F_1 festlegen; bekannte Wirklinien zum Schnitt S bringen;

Schnittpunkt S mit zweiwertigem Lagerpunkt B verbinden, womit alle Wirklinien bekannt sein müssen; Kräfteck mit nach Betrag, Lage und Richtungssinn bekannter Kraft F_1 beginnen; Kräfteck zeichnen (schließen);

Richtungssinn der gefundenen Kräfte in den Lageplan übertragen.

1.4 4-Kräfte-Verfahren

Vier nichtparallele Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die Resultierenden je zweier Kräfte ein geschlossenes Kräfteck bilden und eine gemeinsame Wirklinie (die Culmann'sche Gerade) haben.



Lageplan des frei gemachten Körpers zeichnen und damit die Wirklinien der Belastungen und Lagerkräfte festlegen;

Wirklinien je zweier Kräfte zum Schnitt I und II bringen; gefundene Schnittpunkte zur Wirklinie der beiden Resultierenden verbinden (der Culmann'schen Geraden);

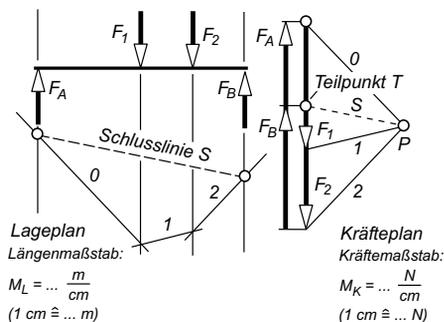
Kräfteplan mit der nach Betrag, Lage und Richtungssinn bekannten Kraft beginnen;

Die Kräfte eines Schnittpunkts im Lageplan ergeben ein Teildreieck im Kräfteplan.

1.5 Schlusslinienverfahren

ist universell anwendbar, insbesondere für parallele Kräfte bzw. solche, die sich nicht auf dem Zeichenblatt zum Schnitt bringen lassen.

Seileck und Kräfteck müssen sich schließen.



Lageplan des frei gemachten Körpers mit Wirklinien aller Kräfte zeichnen;

Kräfteck aus den gegebenen Belastungskräften zeichnen;

Pol P beliebig wählen;

Polstrahlen zeichnen;

Seilstrahlen im Lageplan zeichnen, Anfangspunkt bei parallelen Kräften beliebig, sonst Anfangsseilstrahl durch Lagerpunkt des zweiwertigen Lagers legen;

Anfangs- und Endseilstrahl mit den Wirklinien der Stützkräfte zum Schnitt bringen;

Verbindungsline der gefundenen Schnittpunkte als „Schlusslinie“ im Seileck zeichnen;

Schlusslinie S in den Kräfteplan übertragen und damit Teilpunkt T festlegen;

Stützkräfte nach zugehörigen Seilstrahlen in das Kräfteck einzeichnen.

1.6 Rechnerische Gleichgewichtsbedingungen

Wie werden *rechnerisch* unbekannte Kräfte ermittelt?

Es muss sein:

I. $\sum F_x = 0$	oder	$\sum M_{(I)} = 0$
II. $\sum F_y = 0$		$\sum M_{(II)} = 0$
III. $\sum M = 0$		$\sum M_{(III)} = 0$

Die Momentengleichgewichtsbedingungen können für jeden beliebigen Punkt (auch außerhalb des Körpers) angesetzt werden.

Lageskizze des frei gemachten Körpers zeichnen; rechtwinkliges Achsenkreuz so legen, dass möglichst wenig Kräfte zerlegt werden müssen;

alle Kräfte – auch die noch unbekannt – in ihre Komponenten zerlegen;

Gleichgewichtsbedingungen ansetzen;

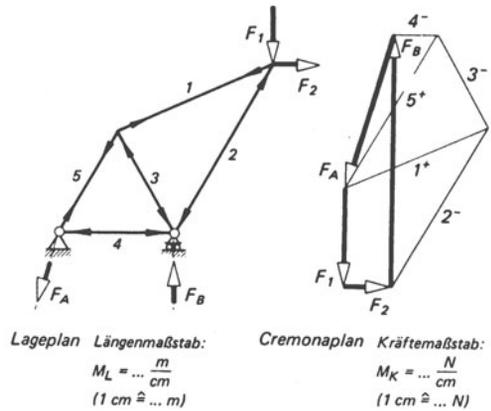
Meist enthält Gleichung III nur eine Unbekannte; damit beginnen.

Auch der dreimalige Ansatz der Momentengleichgewichtsbedingung führt zum Ziel. Aber: Die drei Punkte I, II, III dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

1 Statik

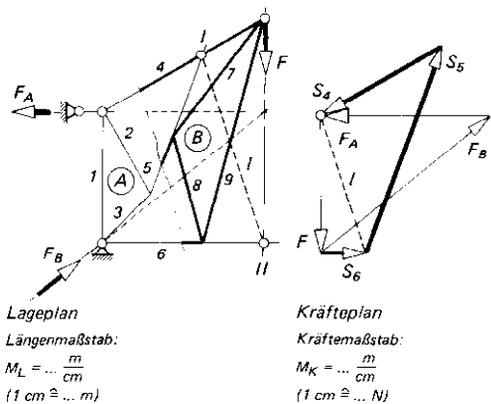
1.7 Cremonaplan (zeichnerische Bestimmung der Stabkräfte)

Lageplan des Fachwerks zeichnen; Stützkräfte zeichnerisch oder rechnerisch bestimmen; Krafteck der äußeren Kräfte zeichnen; Kraftecke der Stäbe anbauen, für jeden Knoten eins; mit dem Knoten beginnen, an dem nicht mehr als zwei unbekannte Kräfte und mindestens eine bekannte Kraft angreifen, dabei an jedem Knoten den gewählten Kraftfolgesinn beibehalten; Reihenfolge der Knoten beliebig; nach jeder Krafteckzeichnung sofort Richtungssinn der Stabkräfte durch Pfeile im Lageplan kennzeichnen (in Bezug auf den Knoten). Im Kräfteplan Stabkräfte durch (+) oder (-) als Zug- oder Druckkräfte kennzeichnen.



1.8 Culmann'sches Schnittverfahren (zeichnerische Bestimmung einzelner Stabkräfte)

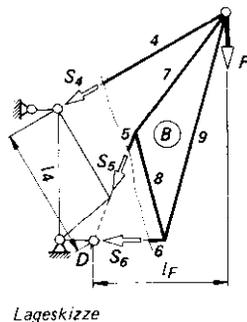
Lageplan des Fachwerks zeichnen; Stützkräfte bestimmen; Fachwerk durch Schnitt in zwei Teile (A) und (B) zerlegen: Schnitt darf höchstens drei Stäbe treffen (4, 5, 6), die nicht zum selben Knoten gehören; für einen Schnittteil (B) die Resultierende (F) der äußeren Kräfte (einschließlich der Stützkräfte) bestimmen; Resultierende (F) mit einer der gesuchten Stabkräfte zum Schnitt (II) bringen; Verbindungslinie zwischen diesem und dem Schnittpunkt (I) der beiden anderen gesuchten Stabkräfte ist die Culmann'sche Gerade l , nach „4-Kräfte-Verfahren“ das Krafteck zeichnen.



1.9 Ritter'sches Schnittverfahren (zeichnerische Bestimmung einzelner Stabkräfte)

Lageskizze des Fachwerks zeichnen; Stützkräfte bestimmen; Fachwerk wie bei „Culmann“ zerlegen und die drei unbekanntes Stabkräfte als Zugkräfte annehmen; Stäbe, für die die Rechnung *negative* Beträge ergibt, sind *Druckstäbe*. Wirkabstände, $l_1, l_2 \dots$ berechnen oder aus dem Lageplan abgreifen: Momentengleichgewichtsbedingungen für ein Schnittteil (B) ansetzen (mit den gesuchten drei Stabkräften und den äußeren Kräften am Schnittteil), z.B. um Drehpunkt D für Fachwerkteil B:

$$\sum M_{(D)} = + F l_F - S_4 l_4 \quad \text{und daraus} \quad S_4 = \frac{F l_F}{l_4}$$



1.10 Schwerpunktsbestimmung

Die Lage des Schwerpunkts einer beliebigen Linie oder Fläche wird

rechnerisch mit dem darauf zugeschnittenen *Momentensatz* (1.2) bestimmt,
zeichnerisch mit dem *Seileckverfahren* (1.2).

Dabei fasst man die Einzellinien oder Einzelflächen als parallele Kräfte auf und bestimmt den Wirkabstand der Resultierenden von einer beliebigen Bezugsachse. Das ist dann der gesuchte Schwerpunktsabstand.

Momentensatz für zusammengesetzte Flächen (Bohrungen haben entgegengesetzten Drehsinn)

$$A x_0 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n$$

$$A y_0 = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n$$

$A_1, A_2 \dots$ die bekannten Teilflächen in mm^2 oder cm^2

$x_1, x_2 \dots$ } die bekannten Schwerpunktsabstände der Teilflächen von den Bezugsachsen in mm oder cm
 $y_1, y_2 \dots$ }

A die Gesamtfläche ($A_1 + A_2 + \dots + A_n$) in mm^2 oder cm^2

x_0, y_0 die Schwerpunktsabstände der Gesamtfläche von den Bezugsachsen in mm oder cm

n	A_n	x_n	y_n	$A_n x_n$	$A_n y_n$
1					
2					
3					
$A = \Sigma A_n$				$\Sigma A_n x_n =$	$\Sigma A_n y_n =$

Momentensatz für zusammengesetzte Linienzüge

$$l x_0 = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n$$

$$l y_0 = l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_n y_n$$

$l_1, l_2 \dots$ die bekannten Teillängen in mm oder cm

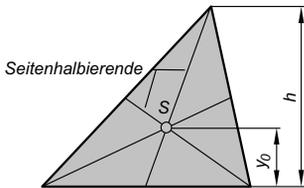
$x_1, x_2 \dots$ } die bekannten Schwerpunktsabstände der Teillinien von den Bezugsachsen in mm oder cm
 $y_1, y_2 \dots$ }

l die Gesamtlänge ($l_1 + l_2 + \dots + l_n$) des Linienzugs in mm oder cm

x_0, y_0 die Schwerpunktsabstände des Linienzugs von den Bezugsachsen in mm oder cm

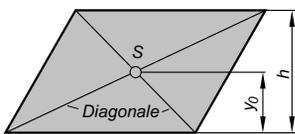
n	l_n	x_n	y_n	$l_n x_n$	$l_n y_n$
1					
2					
3					
$l = \Sigma l_n$				$\Sigma l_n x_n =$	$\Sigma l_n y_n =$

1.11 Flächenschwerpunkt



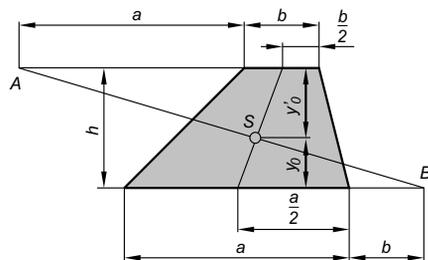
$$y_0 = \frac{h}{3}$$

Dreiecksschwerpunkt



$$y_0 = \frac{h}{2}$$

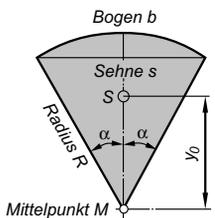
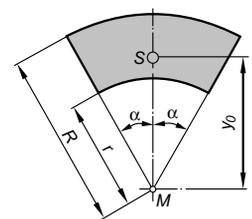
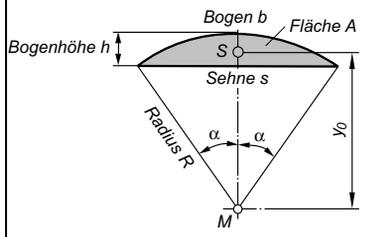
Parallelogrammschwerpunkt



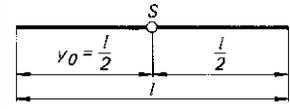
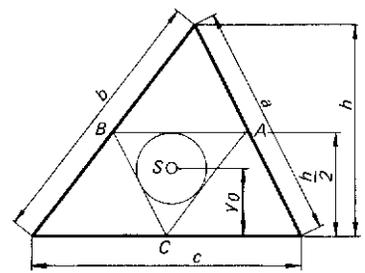
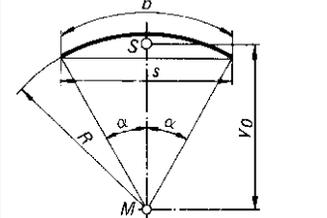
Trapezschwerpunkt

$$y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} \quad ; \quad y'_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$$

1 Statik

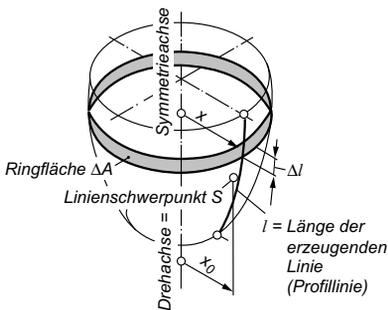
 <p>Kreisausschnitt-Schwerpunkt</p> $y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{R s}{b}$ $b = \frac{2R \alpha^\circ \pi}{180^\circ}$ $s = 2R \sin \alpha$ <p>$y_0 = 0,4244 R$ für Halbkreisfläche $y_0 = 0,6002 R$ für Viertelkreisfläche $y_0 = 0,6366 R$ für Sechstelkreisfläche</p>	 <p>Kreisringstück-Schwerpunkt</p> $y_0 = 38,197 \cdot \frac{(R^3 - r^3) \sin \alpha}{(R^2 - r^2) \alpha^\circ}$	 <p>Kreisabschnitt-Schwerpunkt</p> $y_0 = \frac{s^3}{12A}$ $A = \frac{R(b - s) + sh}{2}$ $h = 2R \sin^2(\alpha/2)$
--	--	---

1.12 Linienschwerpunkt

 <p>Strecke</p> $x_0 = \frac{l}{2}$	 <p>Dreiecksumfang</p> $y_0 = \frac{h}{2} \cdot \frac{a + b}{a + b + c}$	 <p>Kreisbogen</p> $y_0 = \frac{R s}{b}$ $b = \frac{2R \alpha^\circ \pi}{180^\circ}$ $s = 2R \sin \alpha$ <p>$y_0 = 0,6366 R$ für Halbkreisbogen $y_0 = 0,9003 R$ für Viertelkreisbogen $y_0 = 0,9549 R$ für Sechstelkreisbogen</p>
--	---	---

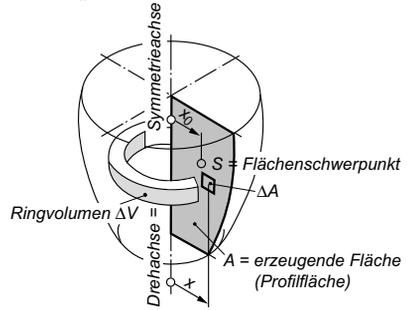
1.13 Guldin'sche Regel

für Mantelfläche (Oberfläche) A



$$\text{Mantelfläche } A = 2\pi l x_0 = 2\pi \sum \Delta l x$$

für Körperinhalt (Volumen) V



$$\text{Volumen } V = 2\pi A x_0 = 2\pi \sum \Delta A x$$

Beachte:

Die Produkte $l x_0$ und $A x_0$ werden mit dem Momentensatz (Seite 5) berechnet.

1.14 Reibung, allgemein

Reibungskraft $F_R = \text{Normalkraft } F_N \cdot \text{Reibungszahl } \mu$

$$F_R = F_N \mu$$

Reibungszahl $\mu = \tan \varrho$

ϱ Reibungswinkel

maximale Haftreibungskraft $F_{R0 \max} = \text{Normalkraft } F_N \cdot \text{Haftreibungszahl } \mu_0$

$$F_{R0 \max} = F_N \mu_0$$

Haftreibungszahl $\mu_0 = \tan \varrho_0$

ϱ_0 Haftreibungswinkel

Reibungszahlen μ_0 und μ

(Klammerwerte sind die Gradzahlen für die Winkel ϱ_0 und ϱ)

Werkstoff	Haftreibungszahl μ_0		Gleitreibungszahl μ	
	trocken	gefettet	trocken	gefettet
Stahl auf Stahl	0,15 (8,5)	0,1 (5,7)	0,15 (8,5)	0,01 (0,6)
Stahl auf Grauguss oder Bronze	0,19 (10,8)	0,1 (5,7)	0,18 (10,2)	0,01 (0,6)
Grauguss auf Grauguss		0,16 (9,1)		0,1 (5,7)
Holz auf Holz	0,5 (26,6)	0,16 (9,1)	0,3 (16,7)	0,08 (4,6)
Holz auf Metall	0,7 (35)	0,11 (6,3)	0,5 (26,6)	0,1 (5,7)
Lederriemen auf Gusseisen		0,3 (16,7)		
Gummiriemen auf Gusseisen			0,4 (21,8)	
Textilriemen auf Gusseisen			0,4 (21,8)	
Bremsbelag auf Stahl			0,5 (26,6)	0,4 (21,8)
Lederdichtungen auf Metall	0,6 (31)	0,2 (11,3)	0,2 (11,3)	0,12 (6,8)

Beachte:

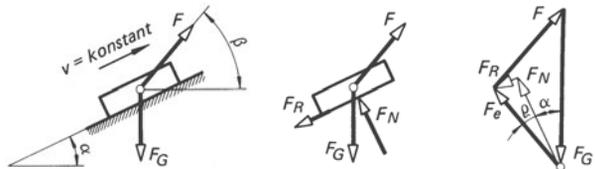
$$\varrho = \arctan \mu$$

1.15 Reibung auf der schiefen Ebene

1.15.1 Allgemeine Fälle

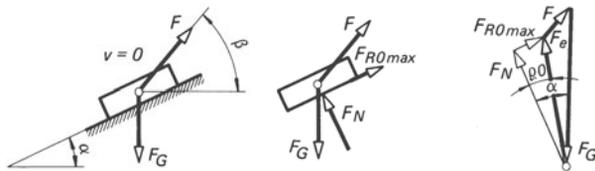
Verschieben nach oben

$$F = F_G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos(\beta - \alpha) + \mu \sin(\beta - \alpha)}$$



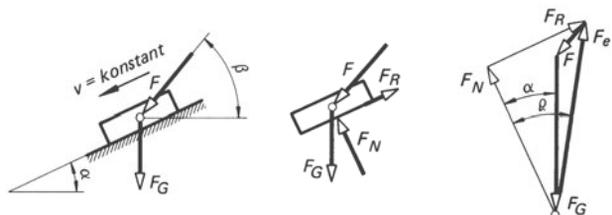
Halten auf der Ebene

$$F = F_G \frac{\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha}{\cos(\beta - \alpha) - \mu_0 \sin(\beta - \alpha)}$$



Verschieben nach unten

$$F = F_G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\mu \sin(\beta - \alpha) - \cos(\beta - \alpha)}$$



1 Statik

1.15.2 Spezielle Fälle

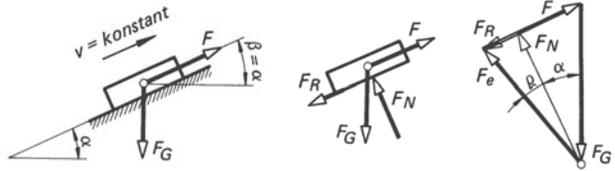
(Beachte: $\varrho = \arctan \mu$ und $\varrho_0 = \arctan \mu_0$)

Kraft F wirkt parallel zur schiefen Ebene

Verschieben nach oben

$$F = F_G \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho}$$

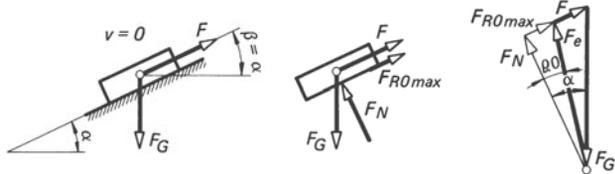
$$F = F_G (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$



Halten auf der Ebene

$$F = F_G \frac{\sin(\alpha - \varrho_0)}{\cos \varrho_0}$$

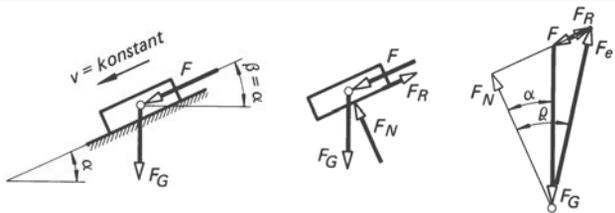
$$F = F_G (\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha)$$



Verschieben nach unten

$$F = F_G \frac{\sin(\varrho - \alpha)}{\cos \varrho}$$

$$F = F_G (\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$$

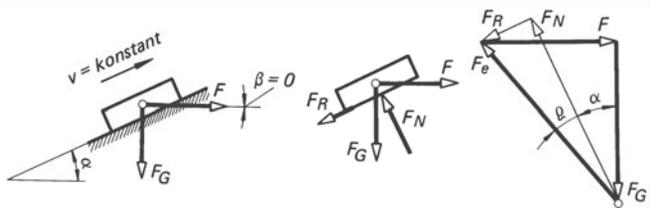


Kraft F wirkt waagrecht

Verschieben nach oben

$$F = F_G \tan(\alpha + \varrho)$$

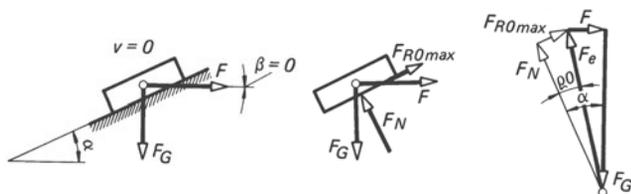
$$F = F_G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$



Halten auf der Ebene

$$F = F_G \tan(\alpha - \varrho_0)$$

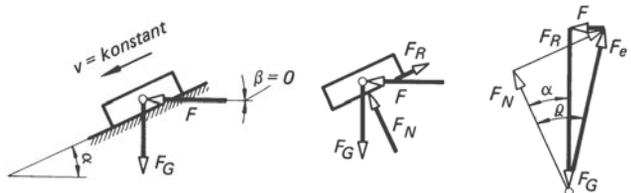
$$F = F_G \frac{\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha}$$



Verschieben nach unten

$$F = F_G \tan(\varrho - \alpha)$$

$$F = F_G \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$



1.16 Zylinderführung

Die Führungsbuchse klemmt sich fest, solange die Wirklinie der resultierenden Verschiebekraft F durch die Überdeckungsfläche der beiden Reibungskegel geht. Dann stehen die Stützkkräfte (= Ersatzkräfte aus Reibungskraft F_R und Normalkraft F_N) mit der Kraft F im Gleichgewicht; ihre Wirklinien schneiden sich in einem Punkt, der innerhalb der Überdeckungsfläche liegt.

Die drei Gleichgewichtsbedingungen ergeben:

$$\text{I. } \Sigma F_x = 0 = +F_{R1} + F_{R2} - F$$

$$\text{II. } \Sigma F_y = 0 = +F_{N1} - F_{N2}$$

also $F_{N1} = F_{N2}$ und damit auch $F_{R1} = F_{R2}$

$$\text{III. } \Sigma M_{(II)} = 0 = -F_{R1}d + F_{N1}l - F(l_a - d/2)$$

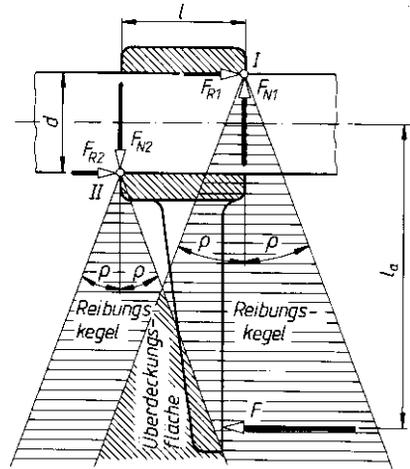
Mit $F_R = F_N \mu$ und $F = 2 F_R$ aus Gleichung I wird Gleichung III weiterentwickelt:

$$\text{III. } F_N \mu \cdot d - F_N l + 2F_N \mu \left(l_a - \frac{d}{2} \right) = 0$$

$$\mu d - l + 2\mu l_a - 2\mu \frac{d}{2} = 0$$

Daraus ergibt sich die *Führungslänge*

$$l = 2\mu l_a \quad \frac{l}{\text{mm}} \mid \frac{l_a}{\text{mm}} \mid \frac{\mu}{1}$$



Kräfte an der Zylinderführung

Bei $l < 2\mu l_a$ klemmt sich die Buchse fest, bei $l > 2\mu l_a$ gleitet sie. Festklemmen oder Gleiten ist unabhängig von der verschiebenden Kraft F .

1.17 Prismenführung

$F, F_V, F_{N1}, F_{N2}, F_R$	μ, μ'
N	1

Verschiebekraft $F_V = F \frac{\mu_1 \cos \alpha_2 + \mu_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$

Normalkräfte $F_{N1} = F \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$

$$F_{N2} = F_{N1} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}$$

Reibungskräfte $F_{R1} = F_{N1} \mu_1$ $F_{R2} = F_{N2} \mu_2$

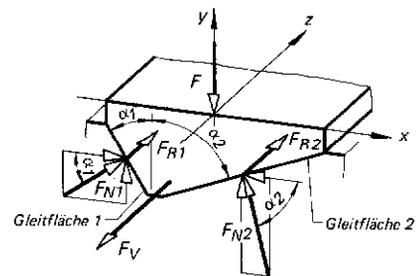
Für die *symmetrische* Prismenführung ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

Normalerweise sind auch die Reibungszahlen gleich groß: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$

Unter diesen Bedingungen wird:

Verschiebekraft (Reibungskraft F_R) $F_V = F_R = F \mu'$

Keilreibungszahl $\mu' = \frac{\mu}{\sin \alpha}$ α ist der halbe Keilwinkel



1 Statik

1.18 Reibung an der Schraube

Umfangskraft

$$F_u = F \tan(\alpha \pm \varrho')$$

Gewindereibungsmoment

$$M_{RG} = F \frac{d_2}{2} \tan(\alpha \pm \varrho')$$

Anzugsmoment

$$M_A = F \left[\frac{d_2}{2} \tan(\alpha \pm \varrho') + \mu_a r_a \right]$$

(+) für Anziehen, (-) für Lösen

Wirkungsgrad für Schraubgetriebe

$$\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varrho')}$$

Selbsthemmung des Schraubgetriebes bei $\eta \leq 0,5$

Größen am Gewinde siehe 5.1 und 5.2

d_2 Flankendurchmesser

α Steigungswinkel des Gewindes

μ_a Reibungszahl der Mutterauflage (1.14)

r_a Reibungsradius $\approx 0,7 d$ bei Sechskantmutter

$\alpha = \arctan \frac{P}{\pi d_2}$ P Steigung

ϱ' Reibungswinkel im Gewinde ($\approx 9^\circ$ für Stahl auf Stahl)

d Gewindenennendurchmesser, z.B. bei M10: $d = 10$ mm

$\tan \varrho' = \mu' = \frac{\mu}{\cos(\beta/2)}$

β Flankenwinkel des Gewindes

$\mu' \approx 0,16$ bei metrischem Regelgewinde und Stahl auf Stahl

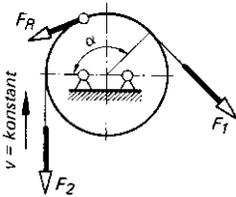
F_u, F	M_{RG}, M_A	d_2, r_a, P
N	Nmm	mm

F_u Umfangskraft am Gewinde
 F Schraubenlängskraft = Vorspannkraft

Beachte:

$$\varrho' = \arctan \mu' = \arctan \frac{\mu}{\cos(\beta/2)}$$

1.19 Seilreibung (Werte für $e^{\mu\alpha}$ siehe 6.1)



Seilzugkraft

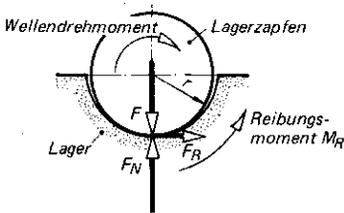
$$F_1 = F_2 e^{\mu\alpha}$$

Seilreibungskraft

$$F_R = F_1 - F_2 = F_2 (e^{\mu\alpha} - 1) = F_1 \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}}$$

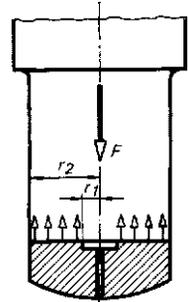
1.20 Reibung am Tragzapfen (Querlager)

1.21 Reibung am Spurzapfen (Längslager)



P_R	F_R	M_R	r	v	ω	μ
$W = \frac{Nm}{s}$	N	Nm	m	m/s	$\frac{rad}{s} = \frac{1}{s}$	1

μ Tragzapfenreibungszahl und Spurzapfenreibungszahl
 $\mu \approx 0,002 \dots 0,01$



Lagerreibungskraft

$$F_R = F \mu$$

Reibungsmoment

$$M_R = F_R r$$

$$M_R = F \mu r$$

Reibungsleistung

$$P_R = F_R v$$

$$P_R = M_R \omega$$

Reibungsmoment

$$M_R = F \mu r_m$$

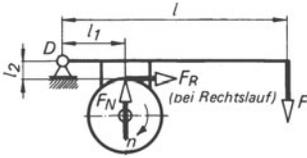
Reibungsleistung

$$P_R = M_R \omega$$

Wirkungsradius der Reibungskraft

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

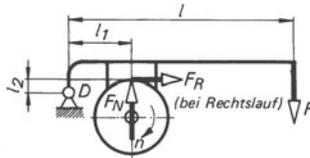
1.22 Bremsen



$$F = F_N \frac{(l_1 \pm \mu l_2)}{l}$$

(+) bei Rechtslauf, (-) bei Linkslauf

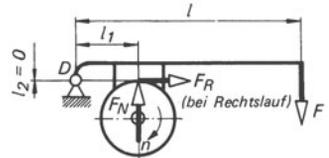
$l_1 \leq \mu l_2$ Selbsthemmungsbedingung



$$F = F_N \frac{(l_1 \mp \mu l_2)}{l}$$

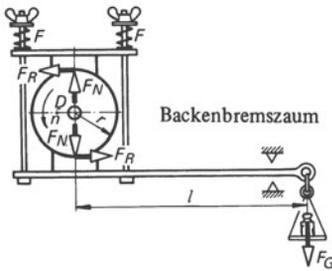
(-) bei Rechtslauf, (+) bei Linkslauf

$l_1 \leq \mu l_2$ Selbsthemmungsbedingung



$$F = F_N \frac{l_1}{l}$$

gleiche Hebelkraft F für Rechts- und Linkslauf
Selbsthemmung nicht möglich

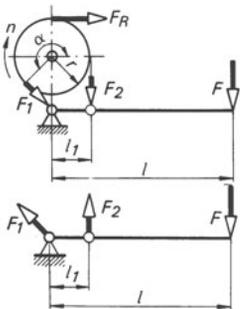


Wellendrehmoment $M = F_G l$

Wellenleistung $P = \frac{F_G l n}{9550}$

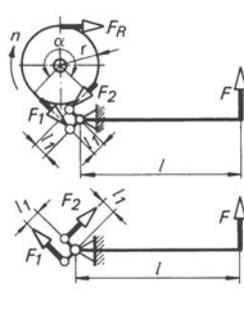
P	F_G	l	n
kW	N	m	min ⁻¹

Zahlenwertgleichung



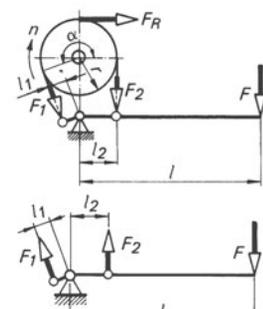
$$M = F_R r = F_r \frac{l}{l_1} (e^{\mu\alpha} - 1)$$

Bremsmoment
Selbsthemmung nicht möglich



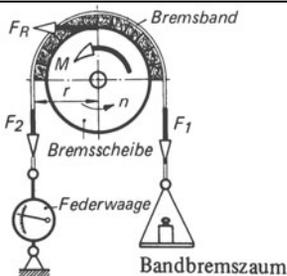
$$M = F_R r = F_r \frac{l}{l_1} \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha} + 1}$$

Bremsmoment
Selbsthemmung nicht möglich



$$M = F_R r = F_r l \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{l_2 - l_1 e^{\mu\alpha}}$$

Bremsmoment
 $l_2 = l_1 e^{\mu\alpha}$ Selbsthemmungsbedingung



Wellendrehmoment $M = (F_1 - F_2) r$

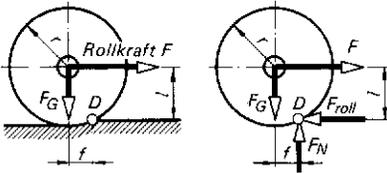
Wellenleistung $P = \frac{(F_1 - F_2) r n}{9550}$

P	F_1, F_2	r	n
kW	N	m	min ⁻¹

Zahlenwertgleichung

1 Statik

1.23 Rollreibung



Rollkraft $F = F_G \frac{f}{r}$

F, F_G	f	r
N	cm	cm

$f \approx 0,05$ cm für Gusseisen und Stahl auf Stahl

$f \approx 0,0005 \dots 0,001$ cm für Wälzlager

1.24 Fahrwiderstand

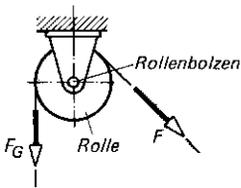
Fahrwiderstand $F_w = F_N \mu_f$

Rollbedingung $\mu_0 \geq \mu_f$

Erfahrungswerte für Fahrwiderstandszahl μ_f

Eisenbahn	0,0025
Straßenbahn mit Wälzlager	0,005
Straßenbahn mit Gleitlager	0,018
Kraftfahrzeug auf Asphalt	0,025
Drahtseilbahn	0,01

1.25 Feste Rolle

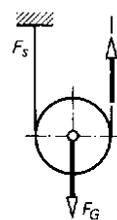


$$\eta_f = \frac{W_n}{W_a} = \frac{F_G s}{F_s} = \frac{F_G}{F}$$

Wirkungsgrad der festen Rolle

Erfahrungswert: $\eta_f \approx 0,95$
s Kraft- und Lastweg

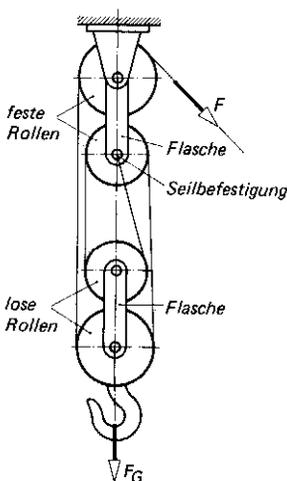
1.26 Lose Rolle



Wirkungsgrad der losen Rolle $\eta_f = \frac{F_G}{2F}$

Zugkraft $F = \frac{F_G}{1 + \eta_f}$

1.27 Rollenzug (Flaschenzug)



Kraftweg $s_1 = n s_2$

s_2 Lastweg
 n Anzahl der tragenden Seilstränge

Zugkraft $F = F_G \frac{1 - \eta}{\eta(1 - \eta^n)}$

Wirkungsgrad $\eta \approx 0,96$
für Seile

Wirkungsgrad des Rollenzugs $\eta_r = \frac{\eta(1 - \eta^n)}{n(1 - \eta)}$

Werte für den Wirkungsgrad η_r des Rollenzugs in Abhängigkeit von der Anzahl n der tragenden Seilstränge ($\eta = 0,96$)

n	1	2	3	4	5
η_r	0,960	0,941	0,922	0,904	0,886
n	6	7	8	9	10
η_r	0,869	0,852	0,836	0,820	0,804

2.1 Gleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung

Beachte: Erfolgt die Bewegung aus der Ruhelage heraus, ist in den Gleichungen die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ zu setzen. Die Fläche unter der v -Linie ist dann ein Dreieck.

Die Gleichungen gelten mit $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (Fallbeschleunigung) auch für den freien Fall.

Beschleunigung
$$a = \frac{v_t - v_0}{\Delta t} = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2 \Delta s}$$

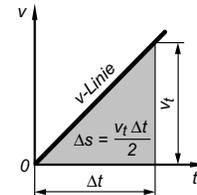
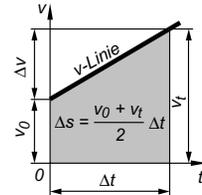
Endgeschwindigkeit
$$v_t = v_0 + \Delta v = v_0 + a \Delta t$$

$$v_t = \sqrt{v_0^2 + 2a \Delta s}$$

Wegabschnitt
$$\Delta s = \frac{v_0 + v_t}{2} \Delta t = v_0 \Delta t + \frac{a (\Delta t)^2}{2}$$

$$\Delta s = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2a}$$

Zeitabschnitt
$$\Delta t = \frac{v_t - v_0}{a} = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{2\Delta s}{a}}$$



2.2 Gleichmäßig verzögerte geradlinige Bewegung

Beachte: Wird die Bewegung bis zur Ruhelage verzögert, ist in den Gleichungen die Endgeschwindigkeit $v_t = 0$ zu setzen. Die Fläche unter der v -Linie ist dann ein Dreieck.

Die Gleichungen gelten mit $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (Fallbeschleunigung) auch für den senkrechten Wurf nach oben.

Verzögerung
$$a = \frac{v_0 - v_t}{\Delta t} = \frac{v_0^2 - v_t^2}{2 \Delta s}$$

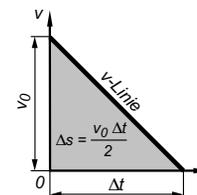
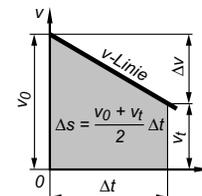
Endgeschwindigkeit
$$v_t = v_0 - \Delta v = v_0 - a \Delta t$$

$$v_t = \sqrt{v_0^2 - 2a \Delta s}$$

Wegabschnitt
$$\Delta s = \frac{v_0 + v_t}{2} \Delta t = v_0 \Delta t - \frac{a (\Delta t)^2}{2}$$

$$\Delta s = \frac{v_0^2 - v_t^2}{2a}$$

Zeitabschnitt
$$\Delta t = \frac{v_0 - v_t}{a} = \frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 - \frac{2\Delta s}{a}}$$



2 Dynamik

2.3 Gleichförmige Kreisbewegung

ω Winkelgeschwindigkeit, n Drehzahl, $\Delta\varphi$ Drehwinkel, v_u Umfangsgeschwindigkeit, r Radius, z Anzahl der Umdrehungen, Δt Zeitabschnitt

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi z}{\Delta t}$$

$$\omega = 2\pi n$$

Grundgleichung
der gleichförmigen
Drehbewegung

ω	$\Delta\varphi$	z	Δt	n	v_u
$\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$	rad	1	s	$\frac{1}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

ω	n
$\frac{1}{\text{s}}$	$\frac{1}{\text{min}}$

$$v_u = 2\pi r n = \omega r$$

$$1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$$

$$1^\circ \approx 0,0175 \text{ rad}$$

Zahlenwertgleichung

2.4 Gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung

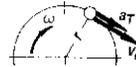
Beachte: Erfolgt die Bewegung aus der Ruhelage heraus, ist in den Gleichungen die Anfangswinkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 0$ zu setzen. Die Fläche unter der ω -Linie ist dann ein Dreieck.

Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{\omega_t - \omega_0}{\Delta t} = \frac{\omega_t^2 - \omega_0^2}{2\Delta\varphi}$$

Tangentialbeschleunigung

$$a_T = \alpha r = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} r = \frac{\Delta v_u}{\Delta t}$$



Endwinkelgeschwindigkeit

$$\omega_t = \omega_0 + \Delta\omega = \omega_0 + \alpha\Delta t$$

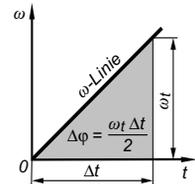
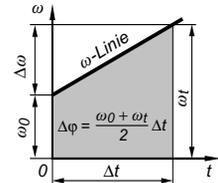
$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha\Delta\varphi}$$

Drehwinkel

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_0 + \omega_t}{2} \Delta t = \omega_0\Delta t + \frac{\alpha(\Delta t)^2}{2} = \frac{\omega_t^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$$

Zeitabschnitt

$$\Delta t = \frac{\omega_t - \omega_0}{\alpha} = -\frac{\omega_0}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right)^2 + \frac{2\Delta\varphi}{\alpha}}$$



2.5 Gleichmäßig verzögerte Kreisbewegung

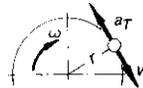
Beachte: Wird die Bewegung bis zur Ruhelage verzögert, ist in den Gleichungen die Endwinkelgeschwindigkeit $\omega_t = 0$ zu setzen. Die Fläche unter der ω -Linie ist dann ein Dreieck.

Winkelverzögerung

$$\alpha = \frac{\omega_0 - \omega_t}{\Delta t} = \frac{\omega_0^2 - \omega_t^2}{2\Delta\varphi}$$

Tangentialverzögerung

$$a_T = \alpha r = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} r = \frac{\Delta v_u}{\Delta t}$$



Endwinkelgeschwindigkeit

$$\omega_t = \omega_0 - \Delta\omega = \omega_0 - \alpha\Delta t$$

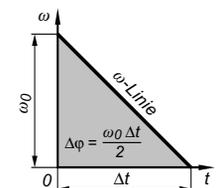
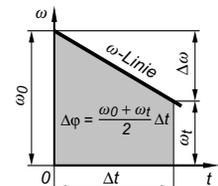
$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha\Delta\varphi}$$

Drehwinkel

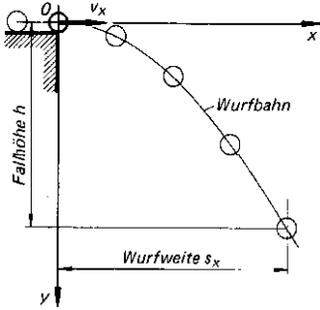
$$\Delta\varphi = \frac{\omega_0 + \omega_t}{2} \Delta t = \omega_0\Delta t - \frac{\alpha(\Delta t)^2}{2} = \frac{\omega_0^2 - \omega_t^2}{2\alpha}$$

Zeitabschnitt

$$\Delta t = \frac{\omega_0 - \omega_t}{\alpha} = \frac{\omega_0}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right)^2 - \frac{2\Delta\varphi}{\alpha}}$$



2.6 Waagerechter Wurf

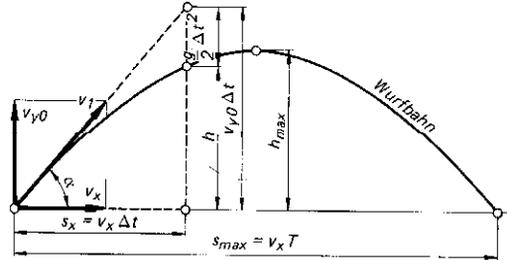


$$h = \frac{g}{2 v_x^2} s_x^2 = k s_x^2 \quad \text{Gleichung der Wurfbahn}$$

$$s_x = v_x \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{Wurfweite}$$

$$h = \frac{g}{2 v_x^2} s_x^2 \quad \text{Fallhöhe}$$

2.7 Schräger Wurf



$$h = s_x \tan \alpha - \frac{g}{2 v_i^2 \cos^2 \alpha} s_x^2 = k_1 s_x - k_2 s_x^2$$

Gleichung der Wurfbahn

$$s_{\max} = \frac{v_i^2 \sin 2\alpha}{g}$$

größte Wurfweite

$$T = \frac{2 v_i \sin \alpha}{g}$$

Wurfzeit

$$h_{\max} = \frac{v_i^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Scheitelhöhe

$$\Delta t_s = \frac{v_i \sin \alpha}{g}$$

Steigzeit

2.8 Schnittgeschwindigkeit

$$v = \frac{\pi d n}{1000}$$

Schnittgeschwindigkeit

an Drehmaschinen, Fräsmaschinen usw.

v	d	n
$\frac{m}{\min}$	mm	$\frac{U}{\min} = \min^{-1}$

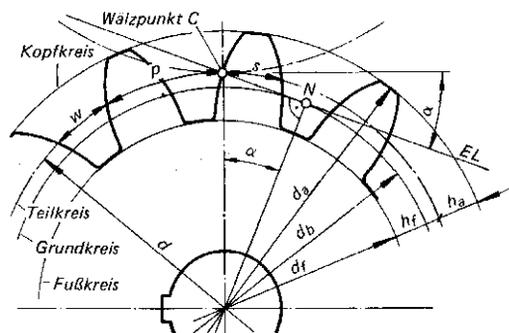
$$v = \frac{\pi d n}{60\,000}$$

Schnittgeschwindigkeit

für Schleifscheiben

v	d	n
$\frac{m}{s}$	mm	$\frac{U}{\min} = \min^{-1}$

2.9 Übersetzung



$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$i_{\text{ges}} = \frac{n_{\text{an}}}{n_{\text{ab}}} = i_1 i_2 i_3 \dots i_n$$

- d Teilkreis- $\emptyset = mz$
- d_b Grundkreis- $\emptyset = d \cos \alpha_n$
- d_a Kopfkreis- $\emptyset = d + 2m$
- d_f Fußkreis- $\emptyset = d - 2,5m$
- p Teilung = $s + w = \pi m$
- m Modul = p/π (genormt nach DIN 780 von 0,3 ... 75 mm)
- α Herstell-Eingriffswinkel (20°)
- s Zahndicke = $p/2$
- w Lückenweite = $p/2$
- h_a Zahnkopfhöhe = $1m$
- h_f Zahnfußhöhe = $1,25m$
- EL Eingriffslinie

$$n = \frac{\text{Anzahl Umdrehungen } z}{\text{Zeitabschnitt } \Delta t}$$

2 Dynamik

2.10 Kreuzschubkurbelgetriebe (Kreuzschleife)

φ	ω	Δt	s, r	v, v_u, v_{\max}	a, a_{\max}
rad	$\frac{1}{s}$	s	m	$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s^2}$

Drehwinkel φ im Zeitabschnitt Δt

$$\varphi = \omega \Delta t$$

Schieberweg s (Auslenkung)

$$s = r (1 - \cos \varphi)$$

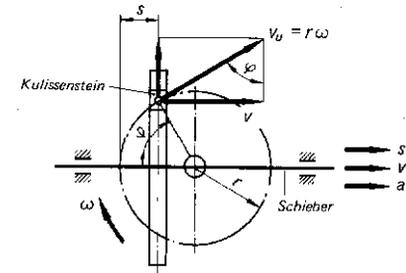
Geschwindigkeit v (Hin- und Rückweg)

$$v = v_u \sin \varphi = r \omega \sin \varphi$$

$$v_{\max} = v_u = r \omega$$

in Mittelstellung

$$a = \frac{v_u^2}{r} \cos \varphi = r \omega^2 \cos \varphi$$



$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

$$v_u = r \omega$$

ω	n	v_u	r
$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\text{min}}$	$\frac{m}{s}$	m

Beschleunigung a (Hin- und Rückweg)

$$a_{\max} = \frac{v_u^2}{r} = r \omega^2$$

2.11 Schubkurbelgetriebe

φ	ω	Δt	s, r	v, v_u, v_{\max}	a, a_{\max}
rad	$\frac{1}{s}$	s	m	$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s^2}$

Drehwinkel φ im Zeitabschnitt Δt

$$\varphi = \omega \Delta t$$

Schubstangenverhältnis λ

$$\lambda = \frac{\text{Kurbelradius } r}{\text{Schubstangenlänge } l} = \frac{r}{l}$$

Kolbenweg s

$$s = r (1 - \cos \varphi \pm 0,5 \cdot \lambda \sin^2 \varphi)$$

(+) für Hingang, (-) für Rückgang

Kolbengeschwindigkeit v

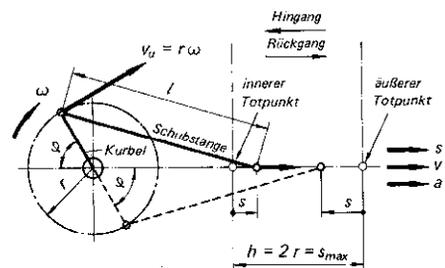
$$v = r \omega (\sin \varphi \pm 0,5 \cdot \lambda \sin 2\varphi)$$

$$v_{\max} = r \omega (1 + 0,5 \cdot \lambda^2)$$

Beschleunigung a

$$a = r \omega^2 (\cos \varphi \pm \lambda \cos 2\varphi)$$

$$a_{\max} = r \omega^2 (1 + \lambda)$$



$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

$$v_u = r \omega$$

ω	n	v_u	r
$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\text{min}}$	$\frac{m}{s}$	m

2 Dynamik

2.12 Dynamisches Grundgesetz für Translation

resultierende Kraft F_{res} = Masse m · Beschleunigung a

Gewichtskraft F_G = Masse m · Fallbeschleunigung g

$$F_{\text{res}} = ma$$

F_{res}	m	a
$\text{N} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Dynamisches Grundgesetz

$$F_G = mg$$

$$F_{G_n} = m g_n$$

Dynamisches Grundgesetz für Gewichtskräfte

Normgewichtskraft
 $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$
 Normfallbeschleunigung

2.13 Dichte

Dichte $\rho = \frac{\text{Masse } m}{\text{Volumen } V}$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

2.14 Gewichtskraft

$$F_G = mg = V \rho g = A l \rho g$$

ρ	m	V	A	l	g	F_G
$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	kg	m^3	m^2	m	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	N

1 N = 1 kgm / s²

2.15 Impuls

$$F_{\text{res}} \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\Delta t} = m \underbrace{(v_2 - v_1)}_{\Delta v}$$

Kraftstoß = Impulsänderung

$$m v_2 = m v_1 = \text{konstant}$$

Impulserhaltungssatz

2.16 Mechanische Arbeit und Leistung bei Translation

$W = F s$	$W_h = F_G h = mgh$	$W_R = F_R s_R$ $W_R = F_N \mu s_R$	$W_f = \frac{R}{2} (s_2^2 - s_1^2)$	$R = \frac{\text{Federkraft } F}{\text{Federweg } s}$
<i>Arbeit</i>	<i>Hubarbeit</i>	<i>Reibungsarbeit</i>	<i>Federarbeit</i>	<i>Federhärte</i>

$P = F v$	$P = \frac{W}{t}$	$1 \text{ Joule (J)} = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2}$
<i>Momentanleistung</i>	<i>Mittlere Leistung während der Zeit t</i>	$1 \text{ Watt (W)} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-3}$

W	P	F, F_G	s, h	v	m	g	R	t	η
$\text{J} = \text{Nm}$	$\text{W} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$	N	m	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	s	1

2.17 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\text{Nutzarbeit } W_n}{\text{aufgewendete Arbeit } W_a} < 1$$

$$\eta_{\text{ges}} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{an}}} = \frac{P_2}{P_1} < 1$$

$$\eta = \frac{W_n}{W_a} = \frac{P_n}{P_a} = \frac{P_2}{P_1} < 1$$

Gesamtwirkungsgrad

Beispiele für Wirkungsgrade:

Wirkungsgrad

Gleitlager	$\eta = 0,98$	(98 %)
Verzahnung	$\eta = 0,98$	(98 %)
E-Motor	$\eta = 0,9$	(90 %)
Ottomotor	$\eta = 0,25$	(25 %)

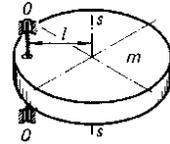
2 Dynamik

2.18 Dynamisches Grundgesetz für Rotation

resultierendes Drehmoment M_{res} = Trägheitsmoment \cdot Winkelbeschleunigung α

$$J_0 = J_s + ml^2$$

Verschiebesatz



$M_{\text{res}} = J \alpha$	M_{res}	J, J_0, J_s	α	m	l	ω	t
	$\text{Nm} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$	kg m^2	$\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	kg	m	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	s

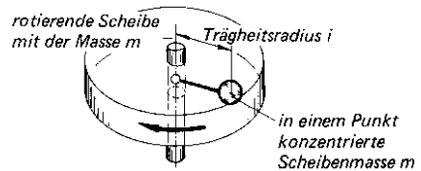
$$m_{\text{red}} = \frac{J_s}{r^2}$$

m_{red} Ersatzmasse (reduzierte Masse)

$$M_{\text{res}} \frac{(t_2 - t_1)}{\Delta t} = J \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{\Delta \omega}$$

gilt für $M_{\text{res}} = \text{konstant}$

Momentenstoß = Drehimpulsänderung



$$J_s = m i^2$$

$$i = \sqrt{\frac{J_s}{m}}$$

J_s auf die Schwerachse bezogenes Trägheitsmoment
 m Masse

$$J \omega_2 = J \omega_1 = \text{konstant}$$

Impulserhaltungssatz für Drehung

Trägheitsradius

2.19 Gleichungen für Trägheitsmomente (Massenmomente 2. Grades)

Körperform	Trägheitsmoment J (J_x um die x-Achse; J_z um die z-Achse)
Kreiszyylinder 	$J_x = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{8} m d^2 = \frac{1}{32} \rho \pi d^4 h = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 h$ $J_z = \frac{1}{16} m \left(d^2 + \frac{4}{3} h^2 \right) = \frac{1}{64} \rho \pi d^2 h \left(d^2 + \frac{4}{3} h^2 \right)$
Hohlzylinder 	$J_x = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) = \frac{1}{8} m (D^2 + d^2) = \frac{1}{32} \rho \pi h (D^4 - d^4)$ $J_x = \frac{1}{2} \rho \pi h (R^4 - r^4)$ $J_z = \frac{1}{4} m \left(R^2 + r^2 + \frac{1}{3} h^2 \right) = \frac{1}{16} m \left(D^2 + d^2 + \frac{4}{3} h^2 \right)$
Kugel und Halbkugel 	$J_x = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{1}{10} m d^2 = \frac{1}{60} \rho \pi d^5 = \frac{8}{15} \rho \pi r^5$
Ring 	$J_z = m \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right) = \frac{1}{4} m \left(D^2 + \frac{3}{4} d^2 \right)$ $J_z = \frac{1}{16} \rho \pi^2 D d^2 \left(D^2 + \frac{3}{4} d^2 \right) = \frac{1}{4} m D^2 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]$

2.20 Mechanische Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad bei Rotation

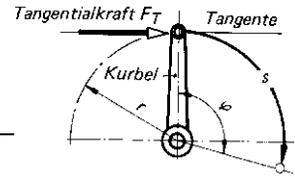
$$W_{\text{rot}} = F_T s = M \varphi$$

$$P_{\text{rot}} = F_T v_u \quad \text{Rotationsleistung}$$

Rotationsarbeit

$$P_{\text{rot}} = M \omega = M 2\pi n$$

W_{rot}	P_{rot}	F_T	M	s, r	φ	v_u	ω	n
$J = \text{Nm}$	$W = \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$	N	Nm	m	rad	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$\frac{U}{s} = \frac{1}{s} = s^{-1}$



$$P_{\text{rot}} = \frac{M n}{9550}$$

$$M = 9550 \frac{P_{\text{rot}}}{n}$$

$$\frac{M}{\text{Nm}} \left| \frac{P_{\text{rot}}}{\text{kW}} \right| \frac{n}{\frac{U}{\text{min}} = \text{min}^{-1}}$$

$$\eta = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{1}{i} \quad \begin{matrix} M_2 \text{ Abtriebsmoment} \\ M_1 \text{ Antriebsmoment} \end{matrix}$$

Zahlenwertgleichungen

Wirkungsgrad

2.21 Energie bei Translation

potenzielle Energie $E_{\text{pot}} = \text{Hubarbeit } W_h$

$$E_{\text{pot}} = F_G h = m g h \quad \begin{matrix} \text{potenzielle Energie} \\ \text{(Höhenenergie)} \end{matrix}$$

$$W_h = m g (h_2 - h_1) = \Delta E_{\text{pot}}$$

Änderung der potenziellen Energie

Spannungsenergie $E_s = \text{Federarbeit } W_f$

$$E_s = \frac{F s}{2} = \frac{R}{2} s^2 \quad \text{Spannungsenergie}$$

$$W_f = \frac{F_1 + F_2}{2} \Delta s = \frac{R}{2} (s_2^2 - s_1^2) = \Delta E_s$$

Änderung der Spannungsenergie

kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \text{Beschleunigungsarbeit } W_a$

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 \quad \begin{matrix} \text{kinetische Energie} \\ \text{(Bewegungsenergie)} \end{matrix}$$

$$W_a = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \Delta E_{\text{kin}}$$

Änderung der kinetischen Energie

$$E_E = E_A + W_{\text{zu}} - W_{\text{ab}}$$

Energieerhaltungssatz

2.22 Gerader zentrischer Stoß

elastischer Stoß:

$$c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \begin{matrix} \text{Geschwindigkeit beider Körper} \\ \text{am Ende des ersten Stoßab-} \\ \text{schnitts} \end{matrix}$$

$$c_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$c_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeiten
beider Körper nach
dem Stoß

unelastischer Stoß:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2}$$

Energieabnahme beim
unelastischen Stoß

$$\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

Wirkungsgrad beim
Schmieden

Wirkungsgrad beim
Rammen

wirklicher Stoß:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2)}{m_1 + m_2}$$

Energieverlust
beim wirklichen
Stoß

$k = 1$	elastischer Stoß
$k = 0$	unelastischer Stoß
$k = 0,35$	Stahl bei 1100 °C
$k = 0,7$	Stahl bei 20 °C

$$c_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2}$$

$$c_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2}$$

Geschwindig-
keiten nach dem
wirklichen Stoß

2 Dynamik

2.23 Energie bei Rotation

Rotationsenergie E_{rot} = Beschleunigungsarbeit W_{α}

$$E_{\text{rot}} = \frac{J}{2} \omega^2$$

Rotationsenergie

$$W_{\alpha} = \frac{J}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \Delta E_{\text{rot}}$$

Änderung der Rotationsenergie

$E_{\text{rot}}, W_{\alpha}$	J	ω
$J = \text{Nm}$	kgm^2	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

2.24 Zentripetalbeschleunigung und Zentripetalkraft

$$a_z = \frac{v_u^2}{r_s} = r_s \omega^2 \quad \text{Zentripetalbeschleunigung}$$

$$F_z = m a_z = m r_s \omega^2 = m \frac{v_u^2}{r_s} \quad \text{Zentripetalkraft}$$

F_z	m	a_z	r_s	ω	v_u
$\text{N} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	m	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Beachte: Der Radius r_s ist der Abstand des Körperschwerpunkts von der Drehachse.

2.25 Gegenüberstellung der translatorischen und rotatorischen Größen

Geradlinige (translatorische) Bewegung

Drehende (rotatorische) Bewegung

Größe	Definitionsgleichung	Einheit	Größe	Definitionsgleichung	Einheit
Zeit t	Basisgröße	s	Zeit t	Basisgröße	s
Verschiebung s	Basisgröße	m	Drehwinkel φ	$\varphi = \frac{b}{r}$ <small>b ist der Bogen des Winkels φ, s. S. 53</small>	rad
Masse m	Basisgröße	kg	Trägheitsmoment J	$J = \sum \Delta m r^2$	kgm^2
Geschwindigkeit v ($v = \text{konstant}$)	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Winkelgeschwindigkeit ω	$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
Arbeit W	$W = F s$	J	Drehearbeit W_{rot}	$W_{\text{rot}} = M \varphi = F_T r \varphi$	J
Leistung P	$P = \frac{W}{t} = F v$	W	Drehleistung P_{rot}	$P_{\text{rot}} = \frac{W_{\text{rot}}}{t} = M \omega$	W
Beschleunigung a	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Winkelbeschleunigung α	$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$
Beschleunigungskraft F_{res}	$F_{\text{res}} = m a$	N	Beschleunigungsmoment M_{res}	$M_{\text{res}} = J \alpha$	Nm
kinetische Energie E_{kin}	$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2$	J	Rotationsenergie E_{rot}	$E_{\text{rot}} = \frac{J}{2} \omega^2$	J
$F_{\text{res}} (t_2 - t_1) = m (v_2 - v_1)$ Kraftstoß = Impulsänderung			$M_{\text{res}} (t_2 - t_1) = J (\omega_2 - \omega_1)$ Momentenstoß = Drehimpulsänderung		

2.26 Harmonische Schwingung

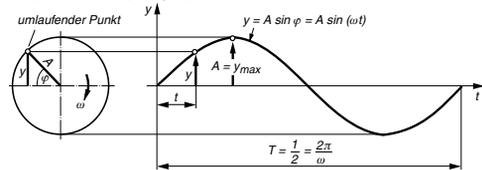
T, t	z	f	ω	$\Delta\varphi$	y, l	v_y	a_y, g	F_R	M_R	D, R	R_d	m	J
s	1	Hz = $\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s}$	rad	m	$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s^2}$	N	Nm	$\frac{N}{m}$	$\frac{Nm}{rad}$	kg	kgm ²

Periodendauer T $T = \frac{\text{Zeitabschnitt } \Delta t}{\text{Anzahl der Perioden } z} = \frac{\Delta t}{z} = \frac{1}{f}$

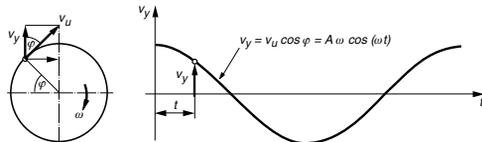
Frequenz f $f = \frac{\text{Anzahl der Perioden } z}{\text{Zeitabschnitt } \Delta t} = \frac{z}{\Delta t} = \frac{1}{T}$

Phasenwinkel $\Delta\varphi$ und Kreisfrequenz ω $\Delta\varphi = 2\pi z = \omega \Delta t = 2\pi f \Delta t$ $\omega = 2\pi \frac{z}{\Delta t} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

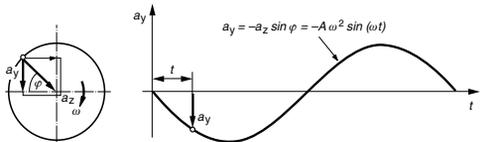
Auslenkung y (A Amplitude = y_{\max}) $y = A \sin \Delta\varphi = A \sin(\omega t) = A \sin(2\pi f t) = A \sin \frac{2\pi t}{T}$



Momentangeschwindigkeit v_y $v_y = A \omega \cos \Delta\varphi = A \omega \cos(\omega t) = A \omega \cos(2\pi f t) = A \omega \cos \frac{2\pi t}{T}$



Momentanbeschleunigung a_y $a_y = -A \omega^2 \sin \Delta\varphi = -A \omega^2 \sin(\omega t) = -A \omega^2 \sin(2\pi f t) = -A \omega^2 \sin \frac{2\pi t}{T}$
 $a_y = -y \omega^2$



Schwingungsbeginn bei Phasenwinkel $\Delta\varphi_0$ $y = A \sin(\varphi + \Delta\varphi_0) = A \sin(\omega t + \Delta\varphi_0)$

Rückstellkraft F_R $F_R = D v = R v$ D Richtgröße (Federrate R)

und Rückstellmoment M_R $M_R = R_d \Delta\varphi$ R_d Federrate der Torsionsfeder

Periodendauer T $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{R}}$ $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{R_d}}$ $R = m \frac{4\pi^2}{T^2} = D$

(Schraubenfeder) (Torsionsfeder) J Trägheitsmoment

Periodendauer T $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$ R_d Federrate der Torsionsfeder

(Schwependel) (Flüssigkeitssäule) l Pendellänge und Länge der Flüssigkeitssäule

Überlagerung bei $f_1 = f_2$ und $A_1 \neq A_2$ $y_{\text{res}} = A_1 \sin \Delta\varphi_1 + A_2$ ergibt wieder eine harmonische Schwingung

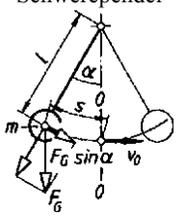
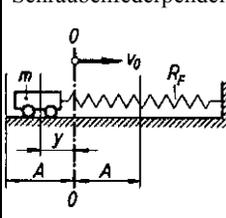
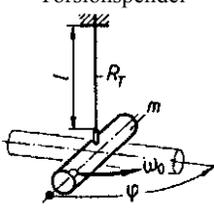
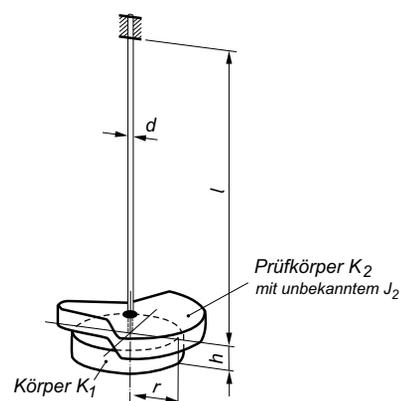
Überlagerung bei $f_1 \neq f_2$ und $A_1 \neq A_2$ $y_{\text{res}} = A_1 \sin \Delta\varphi_1 + A_2 \sin \Delta\varphi_2$ ergibt keine harmonische Schwingung

Schwebungsfrequenz f $f = f_1 - f_2$

2 Dynamik

2.27 Pendelgleichungen

F_R, F_G	M_R	m	g	l, s, y, A	R_F	R_T	φ	T	ω	J	v_0	ω_0
N	$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	m	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	rad	s	$\frac{1}{\text{s}}$	kgm^2	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\frac{1}{\text{s}}$

Pendelart	Schwerependel	Schraubenfederpendel	Torsionspendel
			
Rückstellkraft F_R Rückstellmoment M_R	$F_R = F_G \sin \alpha = m g \sin \alpha$ $F_R = \frac{m g}{l} s = D s$	$F_R = R_F y = m \frac{4 \pi^2}{T^2} y$	$M_R = R_T \varphi$
Richtgröße D Federrate R_F, R_T	$D = \frac{m g}{l}$	$R_F = m \frac{4 \pi^2}{T^2}$	$R_T = \frac{M_R}{\Delta \varphi} = \frac{I_p G}{l}$ (G Schubmodul, I_p polares Flächenmoment 2. Grades)
Periodendauer D	$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$	$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{R_F}}$	$T = 2 \pi \sqrt{\frac{J}{R_T}}$ J Trägheitsmoment
maximale Geschwindigkeit v_0 maximale Winkel- geschwindigkeit ω_0	$v_0 = \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha_{\max})}$ gilt bis $\alpha_{\max} < 14^\circ$	$v_0 = A \sqrt{\frac{R_F}{m}}$	$\omega_0 = \varphi \sqrt{\frac{R_T}{J}}$ J Trägheitsmoment
experimentelle Bestimmung des Trägheitsmoments J_2 eines Körpers	$J_2 = J_1 \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2}$ T_1 gemessene Schwingung bei Körper 1 allein T_2 bei Körper 1 und 2 zusammen	J_1 bekanntes Trägheitsmoment J_2 unbekanntes Trägheitsmoment	

2.28 Harmonische Welle

Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

λ Wellenlänge

Gleichung der harmonischen Welle

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta x}{\lambda} \right) \right]$$

c, v_B, v_E	$\lambda, A, y, l, \Delta x, x_0$
$\frac{m}{s}$	m

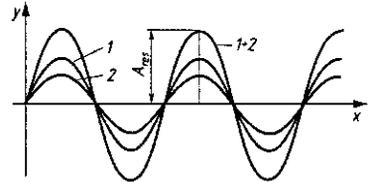
Momentanbild der Welle zur Zeit t_0

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t_0}{T} - \frac{\Delta x}{\lambda} \right) \right]$$

T, t, t_0	f, f_0, f_1
s	$\frac{1}{s}$

Auslenkung eines Oszillators der Welle zur beliebigen Zeit t

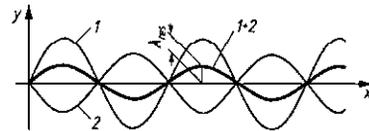
$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda} \right) \right]$$



Bedingung für die größtmögliche Verstärkung der Welle

$$\Delta x = \pm 2n \frac{\lambda}{2}$$

n natürliche Zahl



Bedingung für die größtmögliche Schwächung der Welle

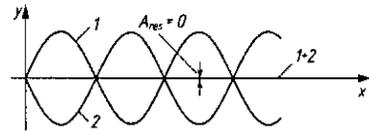
$$\Delta x = \pm (2n - 1) \frac{\lambda}{2}$$

n natürliche Zahl

Bedingung für die Auslöschung der Welle, wenn zugleich $A_1 = A_2$ ist.

$$\Delta x = \pm (2n - 1) \frac{\lambda}{2}$$

n natürliche Zahl



Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

α Einfallswinkel
 β Brechungswinkel

Doppler-Effekt bei still stehendem Erreger und bewegtem Beobachter (v_B)

$$f_1 = f_0 \left(1 \pm \frac{v_B}{c} \right)$$

+ Beobachter bewegt sich auf den Erreger zu
- Beobachter entfernt sich vom Erreger

Doppler-Effekt bei bewegtem Erreger (v_E) und still stehendem Beobachter

$$f_1 = f_0 \frac{1}{1 \mp \frac{v_E}{c}}$$

- Erreger bewegt sich auf den Beobachter zu
+ Erreger entfernt sich vom Beobachter

Grundfrequenz f_0 (stehende Welle auf einem Träger der Länge l)

$$f_0 = \frac{c}{2l}$$

Träger mit zwei festen Enden

$$f_0 = \frac{c}{4l}$$

Träger mit einem festen und einem losen Ende

Überlagerung stehender Wellen ($f_1 = f_2$ $A_1 = A_2$)

$$y_{\text{res}} = 2A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right)$$

3 Fluidmechanik (Hydraulik)

3.1 Hydrostatik

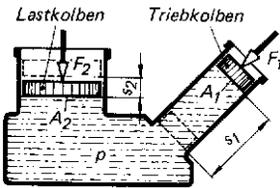
$$p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A} \quad \frac{p}{\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \quad \frac{F}{\text{N}} \quad \frac{A}{\text{m}^2}$$

hydrostatischer Druck

$$p = \rho g h$$

Druck infolge der Schwerkraft

$$\frac{p}{\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \quad \frac{\rho}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \quad \frac{g}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \quad \frac{h}{\text{m}}$$



Hydraulischer Hebebock

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

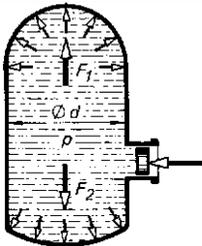
Die Kolbenkräfte verhalten sich zueinander wie die Kolbenflächen.

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Die Kolbenwege verhalten sich umgekehrt zueinander wie die Kolbenflächen.

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

Die Kolbenwege verhalten sich umgekehrt zueinander wie die Quadrate der Kolbendurchmesser.



Druckkraft auf gewölbte Böden

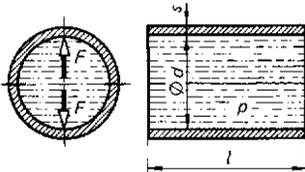
$$F_1 = F_2 = p \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\frac{F_1, F_2}{\text{N}} \quad \frac{p}{\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \quad \frac{d}{\text{m}}$$

$$F_1 = F_2 = 0,1 p \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\frac{F_1, F_2}{\text{N}} \quad \frac{p}{\text{bar}} \quad \frac{d}{\text{mm}}$$

Zahlenwertgleichung



Beanspruchung einer Kessel- oder Rohrlängsnaht

$$F = p d l$$

$$\frac{F}{\text{N}} \quad \frac{p}{\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \quad \frac{d, l}{\text{m}}$$

$$F = 0,1 p d l$$

Zahlenwertgleichung

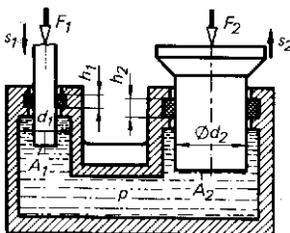
$$\frac{F}{\text{N}} \quad \frac{p}{\text{bar}} \quad \frac{d, l}{\text{mm}}$$

$$s = \frac{p d}{2 \sigma_{\text{zul}}} \quad \text{Wanddicke}$$

$$\frac{s}{\text{m}} \quad \frac{p}{\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \quad \frac{d}{\text{m}} \quad \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}$$

$$s = \frac{p d}{20 \sigma_{\text{zul}}} \quad \text{Zahlenwertgleichung}$$

$$\frac{s}{\text{mm}} \quad \frac{p}{\text{bar}} \quad \frac{d}{\text{mm}} \quad \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$



Hydraulische Presse

$$F_2 = F_1 \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

Presskraft bei reibungsfreiem Betrieb

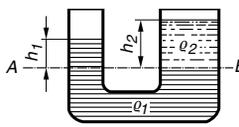
$$F_2' = F_1 \frac{d_2^2}{d_1^2} \eta$$

Presskraft bei Berücksichtigung der Reibung

$$\eta = \frac{1 - 4\mu \frac{h_2}{d_2}}{1 + 4\mu \frac{h_1}{d_1}}$$

Wirkungsgrad

3 Fluidmechanik (Hydraulik)

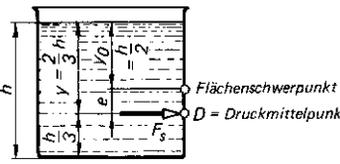


$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

kommunizierende Röhren

$F_b = p A = \rho g h A$ Bodenkraft

F_b	p	ρ	g	h	A
N	$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	m	m^2



$F_s = \rho g A y_0$ Seitenkraft

y_0 Schwerpunktsabstand der belasteten Seitenfläche vom Flüssigkeitsspiegel

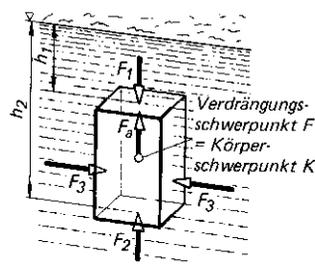
Flächenschwerpunkt

$D = \text{Druckmittelpunkt}$

$y = y_0 + e$ Abstand des Druckmittelpunkts vom Flüssigkeitsspiegel

F_s	ρ	g	I	A	y_0, y, e
N	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	m^4	m^2	m

$e = \frac{I}{A y_0}$ Abstand des Druckmittelpunkts vom Schwerpunkt



Ganz eingetauchter Körper:
Verdrängungsschwerpunkt F fällt mit Körperschwerpunkt K zusammen.

$F = \text{Verdrängungsschwerpunkt}$

$K = \text{Körperschwerpunkt}$

V verdrängtes Flüssigkeitsvolumen

ρ Dichte der Flüssigkeit

g Fallbeschleunigung

Schwimmender Körper:
Verdrängungsschwerpunkt F liegt unter dem Körperschwerpunkt K .

F_a	V	ρ	g
N	m^3	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$F_a = V \rho g$ Auftriebskraft

3.2 Hydrodynamik

3.2.1 Strömungsgrößen

Massenstrom \dot{m}

$$\dot{m} = \frac{A \cdot \Delta s \cdot \rho}{\Delta t} = A \cdot v \cdot \rho$$

Volumenstrom \dot{V}

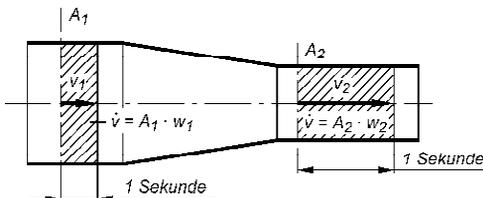
$$\dot{V} = \frac{V}{\Delta t} = A v$$

\dot{m}	\dot{V}	A	ρ	Δs	Δt	v
$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	m^2	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	m	s	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

- \dot{m} Masse
- \dot{V} Volumenstrom
- A Rohrquerschnittsfläche
- ρ Dichte des Fluids
- Δs Strömungsweg
- Δt Zeitabschnitt
- v Strömungsgeschwindigkeit

3.2.2 Die drei Erhaltungssätze der Hydrodynamik

1. Massenerhaltungssatz

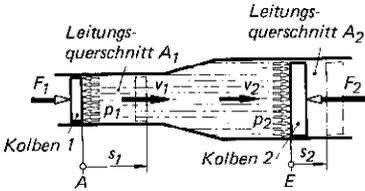


\dot{V}	A	v
$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	m^2	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

3 Fluidmechanik (Hydraulik)

2. Energieerhaltungssatz

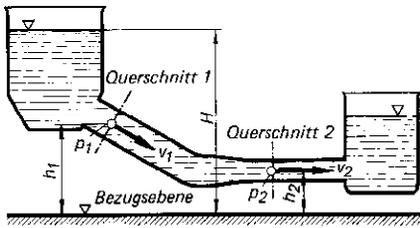
Wie für feste Körper gilt auch für reibungsfrei strömende Flüssigkeiten: Die Energie am Ende eines Vorgangs (Querschnitt A_2) ist gleich der Energie am Anfang (A_1). Das beschreibt auch die Bernoulli'sche Gleichung.



$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

Bernoulli'sche Druckgleichung für horizontale Strömung

p	ρ	v
$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$



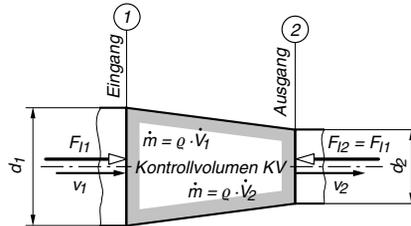
$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

Bernoulli'sche Druckgleichung für nichthorizontale Strömung

p	ρ	g	h	v
$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	m	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

3. Impulserhaltungssatz

Wie für feste Körper gilt auch für reibungsfrei strömende Flüssigkeiten: Der Impuls am Ende eines Vorgangs (Querschnitt A_2) ist gleich dem Impuls am Anfang (A_1).



Impulsstrom

$$\dot{I} = \dot{m} \cdot v = \rho \cdot \dot{V} \cdot v$$

\dot{I}	\dot{m}	v	ρ	\dot{V}
N	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

Impulserhaltungssatz für Fluide

$$\dot{m}_2 \cdot v_2 = \dot{m}_1 \cdot v_1$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 = \dot{I}$$

Impulskraft

$$F_I = \dot{I} = \dot{m} \cdot v$$

$$F_I = \rho \cdot \dot{V} \cdot v = \rho \cdot A \cdot v^2$$

F_I, \dot{I}	\dot{m}	v	ρ	\dot{V}	A
N	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	m^2

Hydrostatische Druckkraft

$$F_D = p \cdot A$$

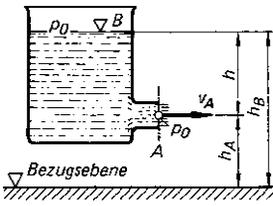
F_D	p	A
N	$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	m^2

Gesamtdruckkraft

$$F = F_I + F_D$$

3 Fluidmechanik (Hydraulik)

Ausfluss aus Gefäßen



$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{theoretische Ausflussgeschwindigkeit}$$

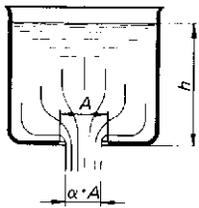
$$v_e = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$$

$$h = \frac{w^2}{2g} \quad \text{Geschwindigkeitshöhe}$$

wirkliche Ausflussgeschwindigkeit

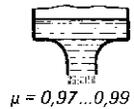
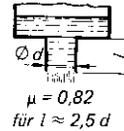
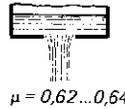
φ ist abhängig von der Zähigkeit des Fluids und beträgt für Wasser 0,97 ... 0,99

$$\dot{V} = Av = A\sqrt{2gh} \quad \text{theoretischer Volumenstrom}$$



$$\dot{V} = \mu \dot{V} = \mu A \sqrt{2gh}$$

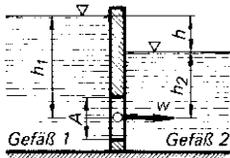
wirklicher Volumenstrom



v	g	h	\dot{V}	A	p	rho	phi mu
$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s^2}$	m	$\frac{m^3}{s}$	m ²	Pa = $\frac{N}{m^2}$	$\frac{kg}{m^3}$	1

Ausflusszahlen für Wasser

Strahlkontraktion



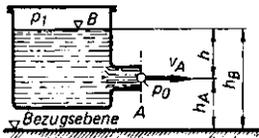
Ausfluss unter dem Flüssigkeitsspiegel

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

theoretische Ausflussgeschwindigkeit

$$\dot{V}_e = \mu A \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

wirklicher Volumenstrom



Ausfluss bei Überdruck p_1 im Gefäß

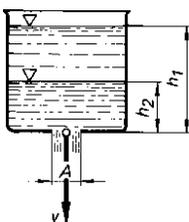
$$v = \sqrt{2g \left(h + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} \right)}$$

theoretische Ausflussgeschwindigkeit

$$\dot{V}_e = \mu Av = \mu A \sqrt{2g \left(h + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} \right)}$$

$$\dot{V}_e = \mu A \sqrt{2g \left(h + \frac{p_u}{\rho g} \right)}$$

wirklicher Volumenstrom



bei teilweiser Entleerung:

$$v_m = v_1 - v_2 = \frac{\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}}{2}$$

bei völliger Entleerung:

$$v_m = \frac{\sqrt{2gh_1}}{2}$$

mittlere theoretische Ausflussgeschwindigkeit

$$\dot{V}_{em} = \mu A \frac{\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}}{2}$$

$$\dot{V}_{em} = \mu A \frac{\sqrt{2gh_1}}{2}$$

mittlerer wirklicher Volumenstrom

Ausfluss bei sinkendem Flüssigkeitsspiegel

$$t = \frac{V_e}{\dot{V}_{em}} = \frac{2V_e}{\mu A (\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2})}$$

$$t = \frac{2V_e}{\mu A \sqrt{2gh_1}}$$

wirkliche Ausflusszeit

4 Festigkeitslehre

4.1 Zug- und Druckbeanspruchung

Die Gleichungen gelten mit den entsprechenden Bezeichnungen auch für die Druckbeanspruchung.

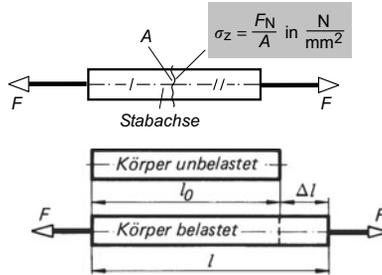
erforderlicher Querschnitt $A_{\text{erf}} = \frac{F_N}{\sigma_{\text{zzul}}}$

vorhandene Spannung $\sigma_{\text{z vorh}} = \frac{F_N}{A} \leq \sigma_{\text{zzul}}$

maximale Belastung $F_{N \text{ max}} = \sigma_{\text{zzul}} A$

Dehnung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$

Hooke'sches Gesetz $\sigma = \epsilon E = \frac{\Delta l}{l_0} E$



σ	F	A	$\Delta l, l, l_0$	ϵ	E
$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	N	mm^2	mm	1	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

E Elastizitätsmodul (4.19 und 4.20)

Reißlänge $l_r = \frac{R_m}{\rho g}$ R_m Zugfestigkeit $l_r = 10^3 \frac{R_m}{\rho g}$
 ρ Dichte ρg Fallbeschleunigung

l_r	$R_m (\sigma_{\text{zB}})$	ρ	g
km	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Wärmespannung $\sigma_{\vartheta} = \alpha_l \Delta T E$ ΔT Temperaturdifferenz
 α_l Längenausdehnungskoeffizient für Stahl ist $\alpha_l = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$

σ_{ϑ}, E	α_l	ΔT	$\Delta l, l_0$
$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\frac{1}{\text{K}}$	K	mm

Verlängerung $\Delta l = l_0 \alpha_l \Delta T$ K Kelvin ist die SI-Basiseinheit der Temperatur (1 K $\hat{=}$ 1° C)

4.2 Abscherbeanspruchung

erforderlicher Querschnitt $A_{\text{erf}} = \frac{F_q}{\tau_{\text{azul}}}$

$\tau = \gamma G = \frac{\Delta l}{l_0} G$

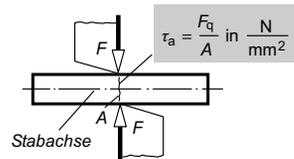
Hooke'sches Gesetz für Schub

vorhandene Spannung $\tau_{\text{a vorh}} = \frac{F_q}{A} \leq \tau_{\text{azul}}$

maximale Belastung $F_{q \text{ max}} = A \tau_{\text{azul}}$

$\tau_{\text{aB}} = 0,85 R_m$ für Stahl
 $\tau_{\text{aB}} = 1,1 R_m$ für Gusseisen

G Schubmodul



τ, R_m	F	A	$\Delta l, l_0$	γ	G
$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	N	mm^2	mm	1	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

4.3 Flächenpressung und Lochleibungsdruck

Flächenpressung in Gleitlagern und Bolzenverbindungen $p = \frac{F}{A_{\text{proj}}} = \frac{F}{d l} \leq p_{\text{zul}}$

Flächenpressung im Gewinde $p = \frac{F}{A_{\text{proj}}} = \frac{F P}{\pi d_2 H_1 m}$

Lochleibungsdruck $\sigma_l = \frac{F}{A_{\text{proj}}} = \frac{F}{n d_1 s} \leq \sigma_{l \text{ zul}}$

d_1 Durchmesser des geschlagenen Niets
 n Anzahl der Niets

P Gewindesteigung
 H_1 Tragtiefe
 d_2 Flankendurchmesser
 m Mutterhöhe
 s kleinste Blechdickensumme in einer Krafrichtung

Tabellen 5.1 und 5.2

4 Festigkeitslehre

4.4 Flächenmoment 2. Grades zusammengesetzter Flächen

Verschiebesatz von Steiner

$$I = I_1 + A_1 l_1^2 + I_2 + A_2 l_2^2 + \dots + I_n + A_n l_n^2$$

Beachte: Fallen Teilschwerachsen und Bezugsachsen zusammen, dann sind die Abstände $l_1, l_2 \dots$ gleich null und es wird $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, d.h. die Teilflächenmomente 2. Grades werden einfach addiert.

4.5 Verdrehbeanspruchung (Torsion)

erforderliches Widerstandsmoment

$$W_{\text{perf}} = \frac{M_T}{\tau_{\text{tzul}}}$$

$$M = M_T = 9550 \frac{P}{n}$$

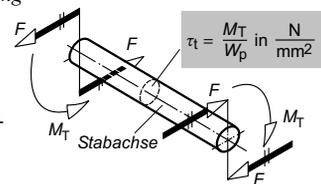
M, M_T	P	n
Nm	kW	min ⁻¹

Zahlenwertgleichung

vorhandene Spannung

$$\tau_{\text{tvorh}} = \frac{M_T}{W_p} \leq \tau_{\text{tzul}}$$

Beachte: Das (äußere) Drehmoment M ist gleich dem (inneren) Torsionsmoment M_T ($M = M_T$)



maximales Torsionsmoment

$$M_{T\text{max}} = W_p \tau_{\text{tzul}}$$

τ_t, G	M_T	W_p	I_p	l, r	φ
$\frac{N}{\text{mm}^2}$	Nmm	mm ³	mm ⁴	mm	°

erforderlicher Durchmesser für Kreisquerschnitt

$$d_{\text{erf}} = \sqrt[3]{\frac{16 M_T}{\pi \tau_{\text{tzul}}}}$$

Verdrehwinkel in Grad

$$\varphi = \frac{\tau_t l}{G r} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\varphi = \frac{M_T l}{W_p r G} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\varphi = \frac{M_T l}{I_p G} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

G Schubmodul (4.18)

W_p, I_p (4.14)

4.6 Biegebeanspruchung

erforderliches Widerstandsmoment

$$W_{\text{erf}} = \frac{M_{b\text{max}}}{\sigma_{b\text{zul}}}$$

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} \text{ in } \frac{N}{\text{mm}^2}$$

vorhandene Spannung

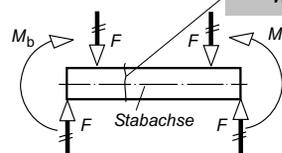
$$\sigma_{b\text{vorh}} = \frac{M_{b\text{max}}}{W} \leq \sigma_{b\text{zul}}$$

maximales Biegemoment

$$M_{b\text{max}} = W \sigma_{b\text{zul}}$$

erforderlicher Durchmesser für Kreisquerschnitt

$$d_{\text{erf}} = \sqrt[3]{\frac{32 M_b}{\pi \sigma_{b\text{zul}}}}$$



σ_b	M_b	W	I	e_1, e_2, d
$\frac{N}{\text{mm}^2}$	Nmm	mm ³	mm ⁴	mm

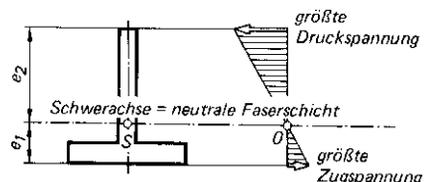
Spannungsverteilung im unsymmetrischen Querschnitt

größte Zugspannung

$$\sigma_{z\text{max}} = \frac{M_b e_1}{I} = \frac{M_b}{W_1}$$

größte Druckspannung

$$\sigma_{d\text{max}} = \frac{M_b e_2}{I} = \frac{M_b}{W_2}$$



4 Festigkeitslehre

4.7 Knickbeanspruchung

Knickkraft nach Euler

$$F_K = \frac{E I_{\min} \pi^2}{s^2}$$

s freie Knicklänge

erforderliches Flächenmoment 2. Grades nach Euler

$$I_{\text{erf}} = \frac{\nu F s^2}{E \pi^2}$$

$\lambda_{\text{vorh}} > \lambda_0$
Eulerbedingung

Knickschpannung nach Euler

$$\sigma_K = \frac{E \pi^2}{\lambda^2}$$

Sicherheit gegen Knicken

$$\nu = \frac{F_K}{F} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{d\text{vorh}}}$$

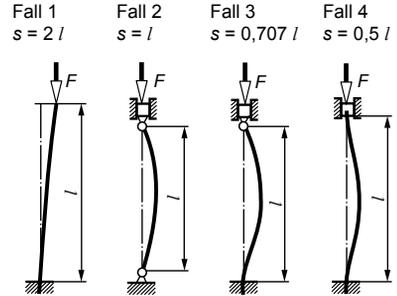
$\nu \approx 3 \dots 10$
im Maschinenbau

Schlankheitsgrad

$$\lambda = \frac{s}{i}$$

Trägheitsradius

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$



σ_K, E	I	F_K, F	A	i, d, s, l	λ
$\frac{N}{\text{mm}^2}$	mm^4	N	mm^2	mm	1

Grenzschlankheitsgrad λ_0 für Euler'sche Knickung und Tetmajergleichungen

Werkstoff	E-Modul in $\frac{N}{\text{mm}^2}$	Grenzschlankheitsgrad λ_0	Tetmajergleichungen für σ_K in $\frac{N}{\text{mm}^2}$
Nadelholz	10 000	100	$\sigma_K = 29,3 - 0,194 \cdot \lambda$
Gusseisen	100 000	80	$\sigma_K = 776 - 12 \cdot \lambda + 0,053 \cdot \lambda^2$
S235JR	210 000	105	$\sigma_K = 310 - 1,14 \cdot \lambda$
E295 und E335	210 000	89	$\sigma_K = 335 - 0,62 \cdot \lambda$
Al Cu Mg	70 000	66	Die Tetmajergleichungen sind Zahlenwertgleichungen mit σ_K in N/mm^2 .
Al Mg3	70 000	110	

4.8 Knickung im Stahlbau

Druckstäbe (Stützen) werden im Stahlbau nach DIN 18 800 auf Tragsicherheit berechnet.

Tragsicherheit besteht dann, wenn in der Ausweichrichtung des Stabs bei planmäßig mittigem Druck die Tragsicherheits-Hauptgleichung erfüllt ist.

$$\frac{F}{\kappa F_{\text{pl}}} \leq 1$$

F	F_{pl}	κ
N	N	1

F Belastung (Normalkraft) in Richtung der Stabachse, F_{pl} Normalkraft im vollplastischen Zustand (Tabelle 4.18), κ Abminderungsfaktor (Arbeitsplan, Seite 30, Nr. 8).

Eine Bemessung der Stabquerschnitte ist über den Tragsicherheitsnachweis nicht möglich, weil die Tragsicherheits-Hauptgleichung keine direkte Bezugsgröße für einen Stabquerschnitt enthält. Man nimmt daher versuchsweise einen Stabquerschnitt an und ermittelt damit der Reihe nach die im folgenden Arbeitsplan aufgeführten Größen. Ist am Ende die Bedingung $F/(\kappa F_{\text{pl}}) \leq 1$ nicht erfüllt, muss die Rechnung mit geänderten Annahmen wiederholt werden.

4 Festigkeitslehre

Arbeitsplan zum Tragsicherheitsnachweis für einteilige Knickstäbe

Gegeben: Querschnittsabmessungen (Profil), Werkstoff, Belastung F des Druckstabs

Gesucht: Tragsicherheitsnachweis

- | | | |
|---|--|---|
| 1. Knicklänge s_K | $s_K = \beta l$ | $\frac{s_K}{\text{mm}} \mid \frac{\beta}{1} \mid \frac{l}{\text{mm}}$ |
| 2. Knicklängenbeiwert β und Systemlänge l nach Bild in 4.7 | $\frac{\text{Fall 1}}{\beta=2} \mid \frac{\text{Fall 2}}{\beta=1} \mid \frac{\text{Fall 3}}{\beta=0,7} \mid \frac{\text{Fall 4}}{\beta=0,5}$ | |
| 3. Trägheitsradius i | $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ | $\frac{i}{\text{mm}} \mid \frac{I}{\text{mm}^4} \mid \frac{A}{\text{mm}^2}$ |
| 4. Schlankheitsgrad λ_K | $\lambda_K = \frac{s_K}{i}$ | |
| i Trägheitsradius, I Flächenmoment 2. Grades
A Querschnittsfläche, (i , I und A in den Tabellen 4.13 – 4.15). | | |
| 5. bezogener Schlankheitsgrad | $\bar{\lambda}_K = \frac{\lambda_K}{\lambda_a}$ | $\frac{\bar{\lambda}_K}{1} \mid \frac{\lambda_K}{1} \mid \frac{\lambda_a}{1}$ |
| λ_K Schlankheitsgrad, λ_a Bezugsschlankheitsgrad | | |
| 6. Bezugsschlankheitsgrad λ_a | $\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{E}{R_e}}$ | $\frac{\lambda_a}{1} \mid \frac{E}{\frac{N}{\text{mm}^2}} \mid \frac{R_e}{\frac{N}{\text{mm}^2}}$ |

E Elastizitätsmodul = 210 000 N/mm², R_e Streckgrenze nach Tabelle 4.16.

Danach ergibt sich λ_a für die im Stahlbau verwendeten Werkstoffe:

S235JR mit $R_e = 240$ N/mm² und einer Erzeugnisdicke $t \leq 40$ mm zu $\lambda_a = 92,9$,

S335J2G3 mit $R_e = 360$ N/mm² und einer Erzeugnisdicke $t \leq 40$ mm zu $\lambda_a = 75,9$.

Stahlbezeichnungen siehe Tabelle 4.21.

7. Festlegen einer Knickspannungslinie in Abhängigkeit von der gewählten Stab-Querschnittsform ¹⁾

Querschnittsformen		Ausknicken rechtwinklig zur Achse	Knick- spannungs- linie
Gewalzte Doppel-T-Profile (siehe Tabelle 4.26, 4.27)	$h/b > 1,2$ und $t \leq 40$ mm	x	a
	$h/b > 1,2$ und $40 < t \leq 80$ mm	y	b
	$h/b \leq 1,2$ und $t \leq 80$ mm	x	b
	$h/b \leq 1,2$ und $t \leq 80$ mm	y	c
$t \leq 80$ mm		x und y	d
U-, L-, T-Querschnitte (siehe Tabelle 4.24, 4.25)		x und y	c

¹⁾ nach DIN 18 800, Teil 2, Tabelle 5

4 Festigkeitslehre

8. Abminderungsfaktor κ

Der Abminderungsfaktor κ für die Knickspannungslinien a, b, c und d wird mit den folgenden Formeln berechnet:

Bereich $\bar{\lambda}_K \leq 0,2$	Bereich $\bar{\lambda}_K > 0,2$	Bereich $\bar{\lambda}_K > 0,3$
$\kappa = 1$	$\kappa = \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \bar{\lambda}_K^2}}$ mit $k = 0,5 [1 + \alpha(\bar{\lambda}_K - 0,2) + \bar{\lambda}_K^2]$	$\kappa = \frac{1}{[\bar{\lambda}_K \cdot (\bar{\lambda}_K + \alpha)]}$

9. Der Parameter α ist abhängig von den Knickspannungslinien:

Knickspannungslinie	a	b	c	d
α	0,21	0,34	0,49	0,76

10. Normalkraft F_{pl}

$$F_{pl} = R_e A$$

F_{pl}	R_e	A
N	$\frac{N}{mm^2}$	mm^2

F_{pl} ist diejenige Druckkraft, bei der im Werkstoff des Stabs vom Querschnitt A vollplastischer Zustand erreicht wird. Als Widerstandsgröße kann die Streckgrenze R_e oder die obere Streckgrenze R_{eH} eingesetzt werden.

Normalkraft $F_{pl} = R_e A$ in kN für verschiedene Walzprofile:

Profil	A mm ²	$F_{pl}^{1)}$ kN	$F_{pl}^{2)}$ kN	Profil	A mm ²	$F_{pl}^{1)}$ kN	$F_{pl}^{2)}$ kN	Profil	A mm ²	$F_{pl}^{1)}$ kN	$F_{pl}^{2)}$ kN
L40×6	448	96	105	IPE 80	764	164	180	U50	712	153	167
L50×6	569	122	134	IPE 100	1000	215	235	U80	1100	237	259
L60×6	691	149	162	IPE 120	1320	284	310	U100	1350	290	317
L70×7	940	202	221	IPE 140	1640	353	385	U140	2040	439	479
L80×8	1230	264	289	IPE 160	2010	432	472	U160	2400	516	564
L80×10	1510	325	355	IPE 180	2390	514	562	U180	2800	602	658
L90×9	1550	333	364	IPE 200	2850	613	670	U200	3220	692	757
L100×10	1920	413	451	IPE 220	3340	718	785	U220	3740	804	879
L120×13	2970	639	698	IPE 240	3910	841	919	U240	4230	909	994
L140×15	4000	860	940	IPE 270	4590	987	1079	U260	4830	1038	1135
L150×16	4570	983	1074	IPE 300	5380	1157	1264	U280	5330	1146	1253
L160×19	5750	1236	1351	IPE 360	7270	1563	1708	U300	5880	1264	1382
L180×18	6190	1331	1455	IPE 400	8450	1817	1986	U350	7730	1662	1817
L200×20	7640	1643	1795	IPE 500	11600	2494	2726	U400	9150	1967	2150

1) mit $R_e = 215 \text{ N/mm}^2$ gerechnet, 2) mit $R_e = 235 \text{ N/mm}^2$ gerechnet

11. Tragsicherheitsnachweis

Zum Abschluss der Rechnung ist mit der Tragsicherheits-Hauptgleichung $F/(\kappa F_{pl}) \leq 1$ die zulässige Querschnittswahl nachzuweisen oder mit einem anderen Profil oder mit einem anderen Stabquerschnitt die Prüfung zu wiederholen.

4 Festigkeitslehre

4.9 Zusammengesetzte Beanspruchung

Biegung und Zug

$$\sigma_{\text{res Zug}} = \frac{M_b}{W} + \frac{F}{A} = \sigma_{\text{bz}} + \sigma_z$$

resultierende

Zug(Druck-)Spannung

$$\sigma_{\text{res Druck}} = \frac{M_b}{W} - \frac{F}{A} = \sigma_{\text{bd}} - \sigma_z$$

σ	F	A	M_b	W
$\frac{N}{\text{mm}^2}$	N	mm^2	Nmm	mm^3

Biegung und Torsion

(bei Wellen mit Kreisquerschnitt)

$$\alpha_0 = \text{Anstrengungsverhältnis} = \frac{\sigma_{\text{bzul}}}{1,73 \tau_{\text{tzul}}}$$

Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3(\alpha_0 \tau_t)^2}$$

$\alpha_0 \approx 1$ – wenn σ_b und τ_t im gleichen Belastungsfall

Vergleichsmoment

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75(\alpha_0 M_T)^2}$$

$\alpha_0 \approx 0,7$ – wenn σ_b wechselnd (III) und τ_t schwellend (II) oder ruhend (I)

erforderlicher

Wellendurchmesser

$$d_{\text{erf}} = \sqrt[3]{\frac{32 M_v}{\pi \sigma_{\text{bzul}}}}$$

σ	α_0	M_v, M_b, M_T	d
$\frac{N}{\text{mm}^2}$	1	Nmm	mm

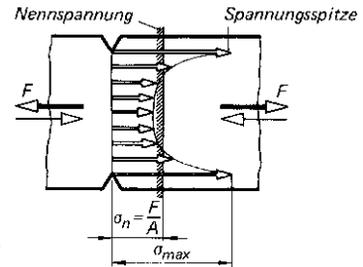
4.10 Kerbspannung

Spannungsspitze

infolge Kerbwirkung

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_n \beta_k$$

σ_{max} Spannungsspitze im Kerbgrund
 σ_n rechnerische (Nenn-)spannung



Kerbwirkungszahl

$$\beta_k = 1 + (\alpha_k - 1) \eta_k$$

β_k -Werte siehe 4.19

α_k Kerbformzahl

η_k Kerbempfindlichkeitszahl

4.11 Dauerbruchsicherheit im Maschinenbau

4.11.1 Sicherheit S_D bei ruhender Belastung

Zugehöriger Festigkeitswert ist für Baustahl die Streckgrenze R_e des verwendeten Werkstoffs und der vorliegenden Beanspruchungsart (Zug, Druck, Biegung, Torsion). Bei festeren Stahlsorten wie Vergütungsstahl tritt an die Stelle der Streckgrenze die 0,2%-Dehngrenze $R_{p0,2}$ (siehe Tabelle 4.17). σ_n ist die Nennspannung.

Bei Werkstoffen ohne ausgeprägte Fließgrenze wie Gusseisen werden die Zugfestigkeit R_m und die Bruchfestigkeiten σ_{dB} , σ_{BB} aus Tabelle 4.18 verwendet.

$$S_D = \frac{R_e}{\sigma_n} = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_n} \geq S_{\text{min}} = 1,5$$

gilt für Stahl (σ_n Nennspannung)

$$S_D = \frac{R_m}{\sigma_n} \geq S_{\text{min}} = 2,0$$

(gilt für Gusseisen)

4.11.2 Sicherheit S_D bei dynamischer Belastung

Der zugehörige Festigkeitswert ist die Dauerfestigkeit σ_D des verwendeten Werkstoffs bei der vorliegenden Beanspruchungsart (Zug/Druck, Biegung, Torsion). Bei festeren Stahlsorten wie Vergütungsstahl tritt an die Stelle der Streckgrenze die 0,2%-Dehngrenze $R_{p0,2}$ (siehe Tabelle 4.17). σ_n ist die Nennspannung. Die Dauerfestigkeit σ_D des Probestabs wird durch die Faktoren b_1 , b_2 , β_k verringert.

$$S_D = \frac{\sigma_D b_1 b_2}{\beta_k \sigma_n} \geq S_{\text{min}} = 1,2$$

(für Bauteile mit Kerbwirkung)

σ_n Nennspannung

b_1 Oberflächenbeiwert, siehe Diagramm 4.20

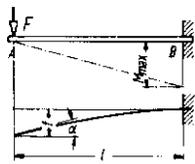
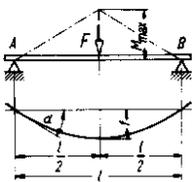
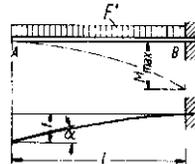
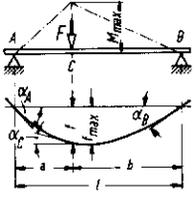
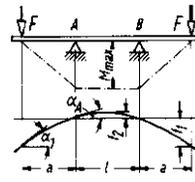
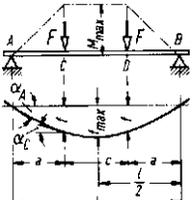
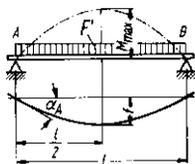
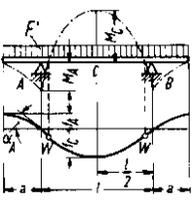
b_2 Größenbeiwert, siehe Diagramm 4.20

β_k Kerbwirkungszahl siehe Tabelle 4.19

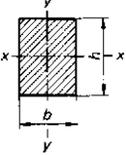
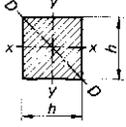
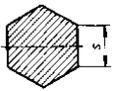
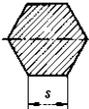
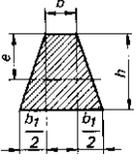
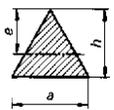
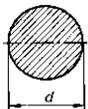
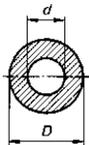
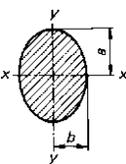
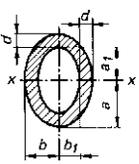
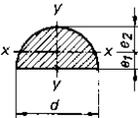
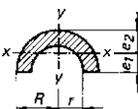
Dauerfestigkeitswerte σ_D in 4.17 und 4.18. Kerbwirkungszahlen β_k sowie Oberflächenbeiwert b_1 und Größenbeiwert b_2 in 4.19 und 4.20.

4 Festigkeitslehre

4.12 Stützkräfte, Biegemomente und Durchbiegungen bei Biegeträgern von gleichbleibendem Querschnitt

 $F_B = F$ $M_{\max} = F l$ $f = \frac{F l^3}{3 E I}$ $\tan \alpha = \frac{F l^2}{2 E I} = \frac{3 f}{2 l}$	 $F_A = F_B = \frac{F}{2}$ $M_{\max} = \frac{F l}{4}$ $f = \frac{F l^3}{48 E I}$ $\tan \alpha = \frac{F l^2}{16 E I} = \frac{3 f}{l}$
 $F_B = F = F' l$ $M_{\max} = \frac{F l}{2}$ $f = \frac{F l^3}{8 E I}$ $\tan \alpha = \frac{F l^2}{6 E I} = \frac{4 f}{3 l}$	 $M_{\max} = F \frac{a b}{l}$ $f = \frac{F a^2 b^2}{3 E I l}$ $f_{\max} = f \frac{l+a}{3 a} \sqrt{\frac{l+a}{3 b}}$ $\tan \alpha_A = f \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2 b} \right) \quad \tan \alpha_B = f \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2 a} \right)$
 $F_A = F_B = F$ $M_{\max} = F a$ $f_1 = \frac{F a^2}{E I} \left(\frac{a}{3} + \frac{l}{2} \right)$ $f_2 = \frac{F a l^2}{8 E I}$ $\tan \alpha_A = \frac{F a (l+a)}{2 E I} \quad \tan \alpha_B = \frac{F a l}{2 E I}$	 $F_A = F_B = F$ $M_{\max} = F a$ $f = \frac{F l^3 a^2}{2 E I l^2} \left(1 - \frac{4 a}{3 l} \right)$ $f_{\max} = \frac{F l^3 a}{8 E I l} \left(1 - \frac{4 a^2}{3 l^2} \right)$ $\tan \alpha_A = \frac{F a (a+c)}{2 E I} \quad \tan \alpha_C = \tan \alpha_D = \frac{F a c}{2 E I}$
 $F_A = F_B = \frac{F' l}{2}$ $M_{\max} = 0,125 F l$ $f \approx 0,013 \frac{F l^3}{E I}$ $\tan \alpha_A = \frac{F l^2}{24 E I} = \frac{16 f}{5 l}$	 $F_A = F_B = F' \left(\frac{l}{2} + a \right)$ $M_A = \frac{F' a^2}{2}$ $M_C = \frac{F' l^2}{2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]$ $f_A = \frac{F' l^4}{4 E I} \left[\frac{a}{6 l} - \left(\frac{a}{l} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{l} \right)^4 \right]$ $\tan \alpha_A = \frac{F' l^3}{4 E I} \left[\frac{1}{6} - \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right] \quad f_C = \frac{F' l^4}{16 E I} \left[\frac{5}{24} - \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]$

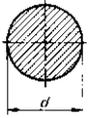
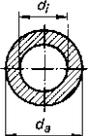
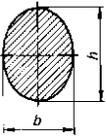
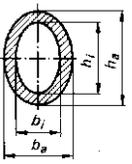
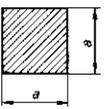
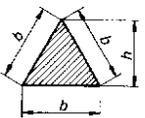
4 Festigkeitslehre

4.13 Axiale Flächenmomente 2. Grades I, Widerstandsmomente W und Trägheitsradius i für Biegung und Knickung			
	$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$ $W_x = \frac{bh^2}{6} \quad W_y = \frac{hb^2}{6}$ $i_x = 0,289 h \quad i_y = 0,289 b$		$I_x = I_y = I_D = \frac{h^4}{12}$ $W_x = W_y = \frac{h^3}{6} \quad W_D = \sqrt{2} \frac{h^3}{12}$ $i = 0,289 h$
	$I = \frac{5\sqrt{3}}{16} s^4 = 0,5413 s^4$ $W = 0,5413 s^3$ $i = 0,456 s$		$I = \frac{5\sqrt{3}}{16} s^4 = 0,5413 s^4$ $W = \frac{5}{8} s^3 = 0,625 s^3$ $i = 0,456 s$
	$I = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36(2b + b_1)} h^3$ $W = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12(3b + 2b_1)} h^2$ $e = \frac{1}{3} \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1} h$		$I = \frac{ah^3}{36} \quad e = \frac{2}{3} h$ $W = \frac{ah^2}{24} \quad i = 0,236 h$
	$I = \frac{\pi d^4}{64} \approx \frac{d^4}{20}$ $W = \frac{\pi d^3}{32} \approx \frac{d^3}{10}$ $i = \frac{d}{4}$		$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$ $W = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D}$ $i = 0,25 \sqrt{D^2 + d^2}$
	$I_x = \frac{\pi a^3 b}{4} \quad I_y = \frac{\pi b^3 a}{4}$ $W_x = \frac{\pi a^2 b}{4} \quad W_y = \frac{\pi b^2 a}{4}$ $i_x = \frac{a}{2} \quad i_y = \frac{b}{2}$		$I_x = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a_1^3 b_1)$ $I_y \approx \frac{\pi}{4} a^2 d (a + 3b)$ $W = \frac{I_x}{a} \approx \frac{\pi}{4} a d (a + 3b)$
	$I_x = 0,0068 d^4 \quad I_y = 0,0245 d^4$ $W_{x1} = 0,0238 d^3 \quad W_{x2} = 0,0323 d^3$ $W_y = 0,049 d^3 \quad i_x = 0,132 d$	$e_1 = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244 r$	
	$I_x = 0,1098 (R^4 - r^4) - 0,283 R^2 r^2 \frac{R-r}{R+r}$ $I_y = \pi \frac{R^4 - r^4}{8} \quad W_y = \pi \frac{(R^4 - r^4)}{8R}$	$W_{x1} = \frac{I_x}{e_1}$ $W_{x2} = \frac{I_x}{e_2}$	$e_1 = \frac{2(D^3 - d^3)}{3\pi(D^2 - d^2)}$

4 Festigkeitslehre

	$I_x = \frac{b}{12}(H^3 - h^3)$ $I_y = \frac{b^3}{12}(H - h)$ $W_x = \frac{b}{6H}(H^3 - h^3)$ $W_y = \frac{b^2}{6}(H - h)$ $i_x = \sqrt{\frac{H^3 - h^3}{12(H - h)}}$ $i_y = 0,289 b$
	$I = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{12}$ $W = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{6h}$
	$I = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$ $W = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$
	$I = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
	$I = \frac{1}{3}(Be_1^3 - bh^3 + ae_2^3)$ $e_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{aH^2 + bd^2}{aH + bd}$ $e_2 = H - e_1$
	$I = \frac{1}{3}(Be_1^3 - bh^3 + B_1e_2^3 - b_1h_1^3)$ $e_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{aH^2 + bd^2 + b_1d_1(2H - d_1)}{aH + bd + b_1d_1}$ $e_2 = H - e_1$

4 Festigkeitslehre

4.14 Polare Flächenmomente 2. Grades I_p und Widerstandsmomente W_p für Torsion			
Querschnitt	Widerstandsmoment W_p	Flächenmoment I_p	Bemerkung
	$W_p = \frac{\pi}{16} d^3 \approx \frac{d^3}{5}$	$I_p = \frac{\pi}{32} d^4 \approx \frac{d^4}{10}$	größte Spannung in allen Punkten des Umfangs
	$W_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}$	$I_p = \frac{\pi}{32} (d_a^4 - d_i^4)$	größte Spannung in allen Punkten des Umfangs
	$W_p = \frac{\pi}{16} n b^3$ $\frac{h}{b} = n > 1$	$I_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3 b^4}{n^2 + 1}$	in den Endpunkten der kleinen Achse: $\tau_{t \max} = \frac{M_T}{W_p}$ in den Endpunkten der großen Achse: $\tau_t = \frac{\tau_{t \max}}{n}$
	$\frac{h_a}{b_a} = \frac{h_i}{b_i} = n > 1$ $\frac{h_i}{h_a} = \frac{b_i}{b_a} = \alpha < 1$ $W_p = \frac{\pi}{16} n b_a^3 (1 - \alpha^4)$	$I_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3}{n^2 + 1} \cdot b_a^4 (1 - \alpha^4)$	in den Endpunkten der kleinen Achse: $\tau_{t \max}$ in den Endpunkten der großen Achse: $\tau_t = \frac{\tau_{t \max}}{n}$
	$W_p = 0,208 a^3$	$I_p = 0,14 a^4 = \frac{a^4}{7,1}$	in der Mitte der Seite: $\tau_{t \max}$ in den Ecken: $\tau_t = 0$
	$W_p = 0,05 b^3 = \frac{h^3}{7,5 \sqrt{3}}$ $W_p = \frac{h^3}{13} = \frac{2 I_t}{h}$	$I_p = \frac{h^4}{15 \sqrt{3}}$ $I_p = \frac{b^4}{46,2}$	in der Mitte der Seite: $\tau_{t \max}$ in den Ecken: $\tau_t = 0$

4 Festigkeitslehre

4.15 Träger gleicher Biegebeanspruchung		
Längs- und Querschnitt des Trägers	Begrenzung des Längsschnitts	Gleichungen zur Berechnung der Querschnitts-Abmessungen
Die Last F greift am Ende des Trägers an:		
	obere Begrenzung: Gerade untere Begrenzung: Quadratische Parabel	$y = \sqrt{\frac{6F}{b\sigma_{zul}}}x \quad h = \sqrt{\frac{6Fl}{b\sigma_{zul}}} \quad y = h\sqrt{\frac{x}{l}}$ $\text{Durchbiegung in A: } f = \frac{8F}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$
	Gerade	$y = \frac{6F}{h^2\sigma_{zul}}x \quad b = \frac{6Fl}{h^2\sigma_{zul}} \quad y = \frac{bx}{l}$ $\text{Durchbiegung in A: } f = \frac{6F}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$
	Kubische Parabel	$y = \sqrt[3]{\frac{32F}{\pi\sigma_{zul}}}x \quad d = \sqrt[3]{\frac{32Fl}{\pi\sigma_{zul}}} \quad y = d\sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ $\text{Durchbiegung in A: } f = \frac{3}{5} \cdot \frac{Fl^3}{EI} \quad I = \frac{\pi d^4}{64}$
Die Last F ist gleichmäßig über den Träger verteilt:		
	Gerade	$y = x\sqrt{\frac{3F}{bl\sigma_{zul}}} \quad h = \sqrt{\frac{3Fl}{b\sigma_{zul}}} \quad y = \frac{hx}{l}$ $F = F'l$
	Quadratische Parabel	$y = \frac{3F}{l\sigma_{zul}} \left(\frac{x}{h}\right)^2 \quad b = \frac{3Fl}{h^2\sigma_{zul}} \quad y = \frac{bx^2}{l^2}$ $\text{Durchbiegung in A: } f = \frac{3F}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$

4 Festigkeitslehre

4.16 Festigkeitswerte für Walzstahl (Bau- und Feinkornbaustahl)

Werkstoff	Bezeichnung	Erzeugnisdicke t mm	Streckgrenze R_e N/mm ²	Zugfestigkeit R_m N/mm ²
Baustahl ¹⁾	S235JR	$t \leq 40$	240	360
	S235JRG1 S235JRG2 S235JO	$40 < t \leq 80$	215	
Baustahl ¹⁾	E295	$t \leq 40$	360	510
		$40 < t \leq 80$	325	
Feinkornbaustahl ¹⁾	E355	$t \leq 40$	360	700
		$40 < t \leq 80$	325	

Hinweis: Weitere Festigkeitswerte in DIN 18 800 Teil 1, Tabelle 1. Der Elastizitätsmodul E beträgt für alle Baustähle $E = 210\,000\text{ N/mm}^2$.

¹⁾ Bezeichnungen für Baustähle siehe Tabelle 4.21

4.17 Festigkeitswerte in N/mm² für verschiedene Stahlsorten¹⁾

Werkstoff	Elastizitätsmodul E	R_m	R_e $R_{p\,0,2}$	$\sigma_{zd\text{ Sch}}$	$\sigma_{zd\text{ W}}$	$\sigma_{b\text{ Sch}}$ ⁵⁾	$\sigma_{b\text{ W}}$	τ_{Sch} ⁶⁾	τ_{W}	Schubmodul G
S235JR	210 000	360	235	158	160	270	180	115	105	80 000
S275JO	210 000	430	275	185	195	320	215	140	125	80 000
E295	210 000	490	295	205	220	370	245	160	145	80 000
S355JO	210 000	510	355	215	230	380	255	165	150	80 000
E335	210 000	590	335	240	265	435	290	200	170	80 000
E360	210 000	690	360	270	310	500	340	220	200	80 000
50CrMo4 ²⁾	210 000	1100	900	385	495	785	525	350	315	80 000
20MnCr5 ³⁾	210 000	1200	850	365	480	765	510	335	305	80 000
34CrAlNi7 ⁴⁾	210 000	900	680	335	405	650	435	300	260	80 000

¹⁾ Richtwerte für $d_B < 16\text{ mm}$,

⁵⁾ berechnet mit $1,5 \cdot \sigma_{b\text{ W}}$

²⁾ Vergütungsstahl

⁶⁾ berechnet mit $1,1 \cdot \tau_{\text{W}}$

³⁾ Einsatzstahl

⁴⁾ Nitrierstahl

4.18 Festigkeitswerte in N/mm² für verschiedene Gusseisen-Sorten¹⁾

Werkstoff	Elastizitätsmodul E	R_m	R_e $R_{p\,0,2}$	σ_{dB}	σ_{bB}	$\sigma_{zd\text{ W}}$	$\sigma_{b\text{ W}}$	τ_{W}	Schubmodul G
GJL-150	82 000	150	90	600	250	40	70	60	35 000
GJL-200	100 000	200	130	720	290	50	90	75	40 000
GJL-250	110 000	250	165	840	340	60	120	100	43 000
GJL-300	120 000	300	195	960	390	75	140	120	49 000
GJL-350	130 000	350	228	1 080	490	85	145	125	52 000
GJMW-400-5	175 000	400	220	1 000	800	120	140	115	67 000
GJMB-350-10	175 000	350	200	1 200	700	1 000	120	100	67 000

¹⁾ Richtwerte für 15 bis 30 mm Wanddicke; für 8 mm bis 15 mm 10 % höher, für > 30 mm 10 % niedriger, Dauerfestigkeitswerte im bearbeiteten Zustand; für Gusshaut 20 % Abzug.

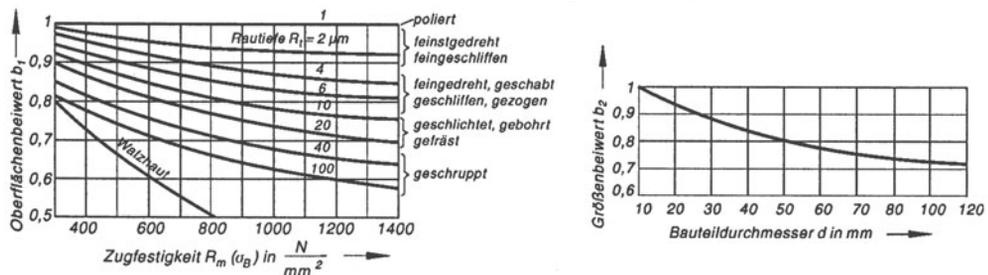
4 Festigkeitslehre

4.19 Richtwerte für die Kerbwirkungszahl β_k ¹⁾

Kerbform	Beanspruchung	R_m ²⁾	β_k
Hinterdrehung in Welle (Rundkerbe)	Biegung	600	2,2
Hinterdrehung in Welle (Rundkerbe)	Torsion	600	1,8
Eindrehung für Axial-Sicherungsring in Welle	Biegung	1000	3,5
	Torsion		2,5
abgesetzte Welle (Lagerzapfen)	Biegung	600	2,2
abgesetzte Welle (Lagerzapfen)	Torsion	600	1,4
Passfedernut in Welle	Biegung	600	2,5
Passfedernut in Welle	Biegung	1000	3,0
Passfedernut in Welle	Torsion	600	1,5
Passfedernut in Welle	Torsion	1000	1,8
Querbohrung in Achse (Schmierloch)	Biegung und Torsion	600	1,6
Flachstab mit Bohrung	Zug	360	1,7
Flachstab mit Bohrung	Biegung	360	1,4
Welle an Übergangsstelle zu fest sitzender Nabe	Biegung	1000	2,7
	Torsion		1,8

¹⁾ genauere und umfangreichere Werte in DIN 743-2 ²⁾ Zugfestigkeit in R_m in N/mm²

4.20 Oberflächenbeiwert b_1 und Größenbeiwert b_2 für Kreisquerschnitte



Für andere Querschnittsformen kann etwa gesetzt werden:
 bei Biegung für Quadrat: Kantenlänge = d ; für Rechteck: in Biegeebene liegende Kantenlänge = d
 bei Verdrehung für Quadrat und Rechteck: Flächendiagonale = d

4.21 Stahlbezeichnungen ¹⁾

EN10027-1 und ECISS IC 10 (1993)	frühere Bezeichnungen nach DIN 17100		EN 10027-1 und ECISS IC 10 (1993)	frühere Bezeichnungen nach DIN 17100	
	EN 10025 (1990)	DIN 17100		EN 10025 (1990)	DIN 17100
S235JR	Fe 360 B	St 37-2	S275J2G3	Fe 430 C	St 44-3 U
S235JRG1	Fe 360 FBU	U St 37-2	S355J2G3	Fe 430 D1	St 44-3 N
S235JRG2	Fe 360 FBN	R St 37-2	E295	Fe 510 D1	St 52-3 N
S235JO	Fe 360 C	St 37-3 U	E335	Fe 490-2	St 50-2
S235J2G3	Fe 360 D1	St 37-3 U	E360	Fe 590-2	St 60-2
S275JR	Fe 430 B	St 44-2	S275JO	Fe 690-2	St 70-2

¹⁾ Auszug aus der Deutschen Fassung der Europäischen Norm EN 10025 (März 1990) mit Anhang C (1993)

Erläuterung der Bezeichnungen (Beispiel):

S235JRG2 S → Kennbuchstabe für mechanische Eigenschaft „Streckgrenze R_{eH} “ (H = obere Streckgrenze, von *high*)

235 → Kennzahl für den Mindestwert der (oberen) Streckgrenze in N/mm² für Probe-Dicken $s \leq 16$ mm:

$R_{eH} = 235$ N/mm² (mit zunehmender Dicke wird R_{eH} kleiner,

z.B. für $s > 150$ mm < 200 mm wird $R_{eH} = 185$ N/mm²)

J → Kennbuchstabe für Gütegruppe bezüglich Schweißbeignung und Kerbschlagarbeit

RG2 → Kennbuchstabe und -zahl für Gütegruppen z. B. bezüglich Lieferzustand, Erschmelzungsverfahren, chemische Zusammensetzung

4 Festigkeitslehre

4.22 Zulässige Spannungen im Stahlhochbau

a) Zulässige Spannungen in N/mm^2 für Stahlbauteile ¹⁾

Spannungsart	Werkstoff					
	S235JR		S355JO		E360	
	Lastausfall					
	H	HZ	H	HZ	H	HZ
Druck und Biegedruck, wenn Stabilitätsnachweis nach DIN 18 800 erforderlich ist Zug und Biegezug, Biegedruck, wenn Stabilitätsnachweis nach DIN 18 800 erforderlich ist	140	160	210	240	410	460
	160	180	240	270	410	460
Schub	92	104	139	156	240	270

¹⁾ Lastfall H: alle Hauptlasten, Lastfall HZ: alle Haupt- und Zusatzlasten

b) Zulässige Spannungen in N/mm^2 für Verbindungsmittel ¹⁾

Spannungsart	Niete (DIN 124 und DIN 302)				Passschrauben (DIN 7968)				Rohe Schrauben (DIN 7990)	
	für Bauteile aus S235JR		für Bauteile aus S355JO		4.6 für Bauteile aus S235JR		5.6 für Bauteile aus S355JO		4.6	
	Lastfall									
	H	HZ	H	HZ	H	HZ	H	HZ	H	HZ
Abscheren $\tau_{a,zul}$	140	160	210	240	140	160	210	240	112	126
Lochleibungsdruck $\sigma_{l,zul}$	280	320	420	480	280	320	420	480	240	270
Zug $\sigma_{z,zul}$	48	54	72	81	112	112	150	150	112	112

¹⁾ Lastfall H: alle Hauptlasten, Lastfall HZ: alle Haupt- und Zusatzlasten

4.23 Zulässige Spannungen im Kranbau für Stahlbauteile und ihre Verbindungsmittel

a) Zulässige Spannungen in N/mm^2 für Bauteile

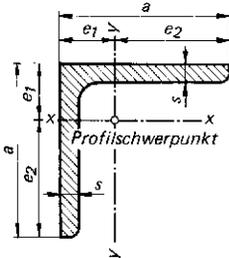
Spannungsart	Werkstoff				Außer dem Allgemeinen Spannungsnachweis auf Sicherheit gegen Erreichen der Fließgrenze ist für Krane mit mehr als 20 000 Spannungsspielen noch ein <i>Betriebsfestigkeitsnachweis</i> auf Sicherheit gegen Bruch bei zeitlich veränderlichen, häufig wiederholten Spannungen für die Lastfälle H zu führen. Zulässige Spannungen beim Betriebsfestigkeitsnachweis siehe Normblatt.
	S235JR		S355JO		
	H	HZ	H	HZ	
Zug- und Vergleichsspannung	160	180	240	270	
Druckspannung, Nachweis auf Knicken	140	160	210	240	
Schubspannung	92	104	138	156	

b) Zulässige Spannungen in N/mm^2 für Verbindungsmittel

Spannungsart	Niete (DIN 124 und DIN 302)				Passschrauben (DIN 7968)				Schrauben (DIN 7880)				
	USt36 für Bauteile aus S235JR		USt44 für Bauteile aus S355JO		4.6 USt36 für Bauteile aus S235JR		5.6 USt44 für Bauteile aus S355JO		4.6 USt36 für Bauteile aus S235JR		5.6 USt44 für Bauteile aus S355JO		
	Lastfall												
	H	HZ	H	HZ	H	HZ	H	HZ	H	HZ	H	HZ	
Abscheren	einschnittig	84	96	126	144	84	96	126	144	70	80	70	80
	zweischnittig	112	128	168	192	112	128	168	192				
Lochleibungsdruck	einschnittig	210	240	315	360	210	240	315	360	160	180	160	180
	zweischnittig	280	320	420	480	280	320	420	480				
Zug	einschnittig	30	30	45	45	100	110	140	154	100	110	140	154
	zweischnittig	30	30	45	45	100	110	140	154				

4 Festigkeitslehre

4.24 Warmgewalzter gleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl (Auswahl)



Beispiel für die Bezeichnung eines gleichschenkligen Winkelstahls und für das Auswerten der Tabelle:

L 40 × 6 – S235JRG1

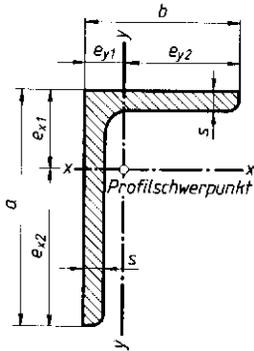
- Schenkelbreite $a = 40 \text{ mm}$
- Schenkeldicke $s = 6 \text{ mm}$
- Flächenmoment 2. Grades $I_x = 6,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
- Widerstandsmoment $W_{x1} = 5,28 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
 $W_{x2} = 2,26 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
- Oberfläche je Meter Länge $A'_0 = 0,16 \text{ m}^2/\text{m}$
- Profilumfang $U = 0,16 \text{ m}$
- Trägheitsradius $i_x = \sqrt{I_x/A} = 11,9 \text{ mm}$

Kurzzeichen	a/s mm	Querschnitt A mm ²	e ₁ /e ₂ mm	I _x = I _y · 10 ⁴ mm ⁴	W _{x1} = W _{y1} · 10 ³ mm ³	W _{x2} = W _{y2} · 10 ³ mm ³	Oberfläche je Meter Länge	Gewichtskraft je Meter Länge
							A' ₀ m ² /m ¹⁾	F' _G N/m
20 × 4	20/ 4	145	6,4 / 13,6	0,48	0,75	0,35	0,08	11,2
25 × 5	25/ 5	226	8 / 17	1,18	1,48	0,69	0,10	17,4
30 × 5	30/ 5	278	9,2 / 20,8	2,16	2,35	1,04	0,12	21,4
35 × 5	35/ 5	328	10,4/ 24,6	3,56	3,42	1,45	0,14	25,3
40 × 6	40/ 6	448	12 / 28	6,33	5,28	2,26	0,16	34,5
45 × 6	45/ 6	509	13,2/ 31,8	9,16	6,94	2,88	0,17	39,2
50 × 6	50/ 6	569	14,5/ 35,5	12,8	8,83	3,61	0,19	43,8
50 × 8	50/ 8	741	15,2/ 34,8	16,3	10,7	4,68	0,19	57,1
55 × 8	55/ 8	823	16,4/ 38,6	22,1	13,5	5,73	0,21	63,4
60 × 6	60/ 6	691	16,9/ 43,1	22,8	13,5	5,29	0,23	53,2
60 × 10	60/10	1110	18,5/ 41,5	34,9	18,9	8,41	0,23	85,2
65 × 8	65/ 8	985	18,9/ 46,1	37,5	19,8	8,13	0,25	75,9
70 × 7	70/ 7	940	19,7/ 50,3	42,4	21,5	8,43	0,27	72,4
70 × 9	70/ 9	1190	20,5/ 49,5	52,6	25,7	10,6	0,27	91,6
70 × 11	70/11	1430	21,3/ 48,7	61,8	29,0	12,7	0,27	110,1
75 × 8	75/ 8	1150	21,3/ 53,7	58,9	27,7	11,0	0,29	88,6
80 × 8	80/ 8	1230	22,6/ 57,4	72,3	32,0	12,6	0,31	94,7
80 × 10	80/10	1510	23,4/ 56,6	87,5	37,4	15,5	0,31	116,7
80 × 12	80/12	1790	24,1/ 55,9	102	42,3	18,2	0,31	138,3
90 × 9	90/ 9	1550	25,4/ 64,6	116	45,7	18,0	0,35	119,4
90 × 11	90/11	1870	26,2/ 63,8	138	52,7	21,6	0,36	144,0
100 × 10	100/10	1920	28,2/ 71,8	177	62,8	24,7	0,39	147,9
100 × 14	100/14	2620	29,8/ 70,2	235	78,9	33,5	0,39	201,8
110 × 12	110/12	2510	31,5/ 78,5	280	88,9	35,7	0,43	193,3
120 × 13	120/13	2970	34,4/ 85,6	394	115	46,0	0,47	228,7
130 × 12	130/12	3000	36,4/ 93,6	472	130	50,4	0,51	231,0
130 × 16	130/16	3930	38,0/ 92	605	159	65,8	0,51	302,6
140 × 13	140/13	3500	39,2/100,8	638	163	63,3	0,55	269,5
140 × 15	140/15	4000	40,0/100,0	723	181	72,3	0,55	308,0
150 × 12	150/12	3480	41,2/108,8	737	179	67,7	0,59	268,0
150 × 16	150/16	4570	42,9/107,1	949	221	88,7	0,59	351,9
150 × 20	150/20	5630	44,4/105,6	1150	259	109	0,59	433,6
160 × 15	160/15	4610	44,9/115,1	1100	245	95,6	0,63	355,0
160 × 19	160/19	5750	46,5/113,5	1350	290	119	0,63	442,8
180 × 18	180/18	6190	51,0/129,0	1870	367	145	0,71	476,7
180 × 22	180/22	7470	52,6/127,4	2210	420	174	0,71	575,3
200 × 16	200/16	6180	55,2/144,8	2340	424	162	0,79	475,9
200 × 20	200/20	7640	56,8/143,2	2850	502	199	0,79	588,3
200 × 24	200/24	9060	58,4/141,6	3330	570	235	0,79	697,7
200 × 28	200/28	10500	59,9/140,1	3780	631	270	0,79	808,6

1) Die Zahlenwerte geben zu gleich den Profilumfang U in m an.

4 Festigkeitslehre

4.25 Warmgewalzter ungleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl (Auswahl)



Beispiel für die Bezeichnung eines ungleichschenkligen Winkelstahls und für das Auswerten der Tabelle:

L 30 × 20 × 4 – S235JRG1

Schenkelbreite $a = 30 \text{ mm}, b = 20 \text{ mm}$
 Schenkeldicke $s = 4 \text{ mm}$
 Flächenmoment 2. Grades $I_x = 1,59 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
 Widerstandsmoment $W_{x1} = 1,54 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
 Widerstandsmoment $W_{x2} = 0,81 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
 Oberfläche je Meter Länge $A'_0 = 0,097 \text{ m}^2/\text{m}$
 Profilmfang $U = 0,097 \text{ m}$
 Trägheitsradius $i_x = \sqrt{I_x/A} = 9,27 \text{ mm}$

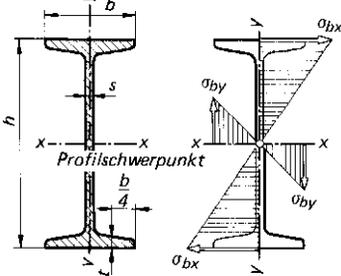
Kurzzeichen	a mm	b mm	s mm	Quer- schnitt A mm ²	ex1/ey1 mm	Ix ·10 ⁴ mm ⁴	Wx1 ·10 ³ mm ³	Wx2 ·10 ³ mm ³	Iy ·10 ⁴ mm ⁴	Wy1 ·10 ³ mm ³	Wy2 ·10 ³ mm ³	Oberfläche je Meter Länge A' ₀ m ² /m ¹	Gewichtskraft je Meter Länge F' _G N/m
30× 20× 4	30	20	4	185	10,3/5,4	1,59	1,54	0,81	0,55	1,02	0,38	0,097	14,2
40× 20× 4	40	20	4	225	14,7/4,8	3,59	2,44	1,42	0,60	1,25	0,39	0,117	17,4
45× 30× 5	45	30	5	353	15,2/7,8	6,99	4,60	2,35	2,47	3,17	1,11	0,146	27,2
50× 40× 5	50	40	5	427	15,6/10,7	10,4	6,67	3,02	5,89	5,50	2,01	0,177	32,9
60× 30× 7	60	30	7	585	22,4/7,6	20,7	9,24	5,50	3,41	4,49	1,52	0,175	45,0
60× 40× 6	60	40	6	568	20,0/10,1	20,1	10,1	5,03	7,12	7,05	2,38	0,195	43,7
65× 50× 5	65	50	5	554	19,9/12,5	23,1	11,6	5,11	11,9	9,52	3,18	0,224	42,7
65× 50× 9	65	50	9	958	21,5/14,1	38,2	17,8	8,77	19,4	13,8	5,39	0,224	73,7
75× 50× 7	75	50	7	830	24,8/12,5	46,4	18,7	9,24	16,5	13,2	4,39	0,244	63,8
75× 55× 9	75	55	9	1090	24,7/14,8	59,4	24,0	11,8	26,8	18,1	6,66	0,254	84,2
80× 40× 6	80	40	6	689	28,5/8,8	44,9	15,8	8,73	7,59	8,63	2,44	0,234	53,1
80× 40× 8	80	40	8	901	29,4/9,5	57,6	19,6	11,4	9,68	10,2	3,18	0,234	69,3
80× 65× 8	80	65	8	1100	24,7/17,3	68,1	27,6	12,3	40,1	23,2	8,41	0,283	84,9
90× 60× 6	90	60	6	869	28,9/14,1	71,7	24,8	11,7	25,8	18,3	5,61	0,294	66,9
90× 60× 8	90	60	8	1140	29,7/14,9	92,5	31,1	15,4	33,0	22,0	7,31	0,294	87,9
100× 50× 6	100	50	6	873	34,9/10,4	87,7	25,1	13,8	15,3	14,7	3,86	0,292	67,2
100× 50× 8	100	50	8	1150	35,9/11,3	116	32,3	18,0	19,5	17,3	5,04	0,292	88,2
100× 50× 10	100	50	10	1410	36,7/12,0	141	38,4	22,2	23,4	19,5	6,17	0,292	108,9
100× 65× 9	100	65	9	1420	33,2/15,9	141	42,5	21,0	46,7	29,4	9,52	0,321	108,9
100× 75× 9	100	75	9	1510	31,5/19,1	148	47,0	21,5	71,0	37,0	12,7	0,341	115,7
120× 80× 8	120	80	8	1550	38,3/18,7	226	59,0	27,6	80,8	43,2	13,2	0,391	119,6
120× 80× 10	120	80	10	1910	39,2/19,5	276	70,4	34,1	98,1	50,3	16,2	0,391	147,1
120× 80× 12	120	80	12	2270	40,0/20,3	323	80,8	40,4	114	56,0	19,1	0,391	174,6
130× 65× 10	130	65	10	1860	46,5/14,5	321	69,0	38,4	54,2	37,4	10,7	0,381	143,2
130× 75× 10	130	75	10	1960	44,5/17,3	337	75,7	39,4	82,9	47,9	14,4	0,401	151,0
130× 75× 12	130	75	12	2330	45,3/18,1	395	87,2	46,6	96,5	53,3	17,0	0,401	179,5
130× 90× 10	130	90	10	2120	41,5/21,8	358	86,3	40,5	141	65,0	20,6	0,430	162,8
130× 90× 12	130	90	12	2510	42,4/22,6	420	99,1	48,0	165	73,0	24,4	0,430	193,2
150× 75× 9	150	75	9	1950	52,8/15,7	455	86,2	46,8	78,3	49,9	13,2	0,441	150,0
150× 75× 11	150	75	11	2360	53,7/16,5	545	101	56,6	93,0	56,0	15,9	0,441	182,4
150× 90× 10	150	90	10	2320	49,9/20,3	532	107	53,1	145	71,0	20,9	0,469	178,5
150× 90× 12	150	90	12	2750	50,8/21,1	626	123	63,1	170	81,0	24,7	0,469	211,8
150× 100× 10	150	100	10	2420	48,0/23,4	552	115	54,1	198	85,0	25,8	0,489	186,3
150× 100× 12	150	100	12	2870	48,9/24,2	650	133	64,2	232	96,0	30,6	0,489	221,6
150× 100× 14	150	100	14	3320	49,7/25,0	744	150	74,1	264	106	35,2	0,489	255,9
160× 80× 12	160	80	12	2750	57,2/17,7	720	126	70,0	122	69,0	19,6	0,469	211,8
200× 100× 10	200	100	10	2920	69,3/20,1	1220	176	93,2	210	104	26,3	0,587	225,6
200× 100× 14	200	100	14	4030	71,2/21,8	1650	232	128	282	129	36,1	0,587	309,9
250× 90× 10	250	90	10	3320	94,5/15,6	2170	230	140	161	103	21,7	0,667	255,9
250× 90× 14	250	90	14	4590	96,5/17,3	2960	307	192	216	125	29,7	0,667	353,0

1) Die Zahlenwerte geben zugleich den Profilmfang U in m an.

4 Festigkeitslehre

4.26 Warmgewalzte schmale I-Träger (Auswahl)

Spannungsverteilung bei Biegebeanspruchung



Beispiel für die Bezeichnung eines schmalen I-Trägers mit geeigneten inneren Flanschflächen und für das Auswerten der Tabelle:

I 80 DIN 1025 – S235JRG1

- Höhe $h = 80 \text{ mm}$
- Breite $b = 42 \text{ mm}$
- Flächenmoment 2. Grades $I_x = 77 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
- Widerstandsmoment $W_x = 19,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
- Oberfläche je Meter Länge $A_0' = 0,304 \text{ m}^2/\text{m}$
- Profilumfang $U = 0,304 \text{ m}$
- Trägheitsradius $i_x = \sqrt{I_x/A} = 32 \text{ mm}$

Kurzzeichen	h	b	s	t	Querschnitt A	I _x	W _x	I _y	W _y	Oberfläche je Meter Länge		Gewichtskraft je Meter Länge	
										A ₀	F _G '		
I	mm	mm	mm	mm	mm ²	·10 ⁴ mm ⁴	·10 ³ mm ³	·10 ⁴ mm ⁴	·10 ³ mm ³	m ² /m ¹	N/m		
80	80	42	3,9	5,9	758	77,8	19,5	6,29	3,00	0,304	58,4		
100	100	50	4,5	6,8	1060	171	34,2	12,2	4,88	0,370	81,6		
120	120	58	5,1	7,7	1420	328	54,7	21,5	7,41	0,439	110		
140	140	66	5,7	8,6	1830	573	81,9	35,2	10,7	0,502	141		
160	160	74	6,3	9,5	2280	935	117	54,7	14,8	0,575	176		
180	180	82	6,9	10,4	2790	1450	161	81,3	19,8	0,640	215		
200	200	90	7,5	11,3	3350	2140	214	117	26,0	0,709	258		
220	220	98	8,1	12,2	3960	3060	278	162	33,1	0,775	305		
240	240	106	8,7	13,1	4610	4250	354	221	41,7	0,844	355		
280	280	119	10,1	15,2	6110	7590	542	364	61,2	0,966	471		
320	320	131	11,5	17,3	7780	12510	782	555	84,7	1,09	599		
360	360	143	13,0	19,5	9710	19610	1090	818	114	1,21	746		
380	380	149	13,7	20,5	10700	24010	1260	975	131	1,27	824		
425	425	163	15,3	23,0	13200	36970	1740	1440	176	1,41	1020		
475	475	178	17,1	25,6	16300	56480	2380	2090	235	1,55	1256		
550	550	200	19,0	30,0	21300	99180	3610	3490	349	1,80	1638		

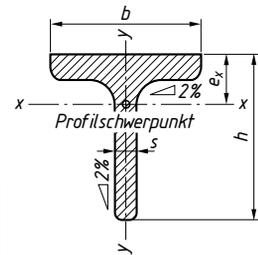
1) Die Zahlenwerte geben zugleich den Profilumfang U in m an.

4.27 Warmgewalzte T-Träger (Auswahl)

Beispiel für die Bezeichnung eines T-Trägers und für das Auswerten der Tabelle:

T 80 DIN 10025 – S235JR

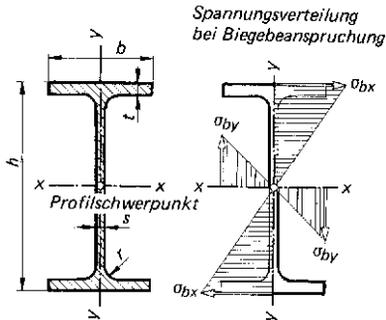
- Höhe $h = b = 80 \text{ mm}$
- Breite $b = h$
- Flächenmoment 2. Grades $I_x = 73,7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
- Widerstandsmoment $W_x = 12,8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$



Kurzzeichen	b = h	s	Querschnitt A	I _x	W _x	I _y	W _y	Gewichtskraft je Meter Länge	
								F _G '	N/m
T	mm	mm	mm ²	·10 ⁴ mm ⁴	·10 ³ mm ³	·10 ⁴ mm ⁴	·10 ³ mm ³	N/m	
30	30	4,00	2,26	1,72	0,80	0,87	0,58	17,35	
35	35	4,50	2,97	3,10	1,23	1,57	0,90	22,84	
40	40	5,00	3,77	5,28	1,84	2,58	1,29	29,01	
50	50	6,00	5,66	12,10	3,36	6,60	2,42	43,51	
60	60	7,00	7,94	23,80	5,48	12,20	4,07	61,06	
70	70	8,00	10,60	44,50	8,79	22,10	6,32	81,54	
80	80	9,00	13,60	73,70	12,80	37,00	9,25	104,87	
100	100	11,00	20,90	179,00	24,60	88,30	17,70	160,73	
120	120	13,00	29,60	366,00	42,00	178,00	29,70	227,38	
140	140	15,00	39,90	660,00	64,70	330,00	47,20	306,76	

4 Festigkeitslehre

4.28 Warmgewalzte I-Träger, IPE-Reihe (Auswahl)



Beispiel für die Bezeichnung eines mittelbreiten I-Trägers mit parallelen Flanschflächen und für das Auswerten der Tabelle:

IPE 80 DIN 1025 – S235JRG1

Höhe	$h = 80$ mm
Breite	$b = 46$ mm
Flächenmoment 2. Grades	$I_x = 80,1 \cdot 10^4$ mm ⁴
Widerstandsmoment	$W_x = 20,0 \cdot 10^3$ mm ³
Oberfläche je Meter Länge	$A_0 = 0,328$ m ² /m
Profilumfang	$U = 0,328$ m
Trägheitsradius	$i_x = \sqrt{I_x/A} = 32,4$ mm

Kurzzeichen IPE	b mm	t mm	h mm	s mm	r mm	Querschnitt A mm ²	I_x ·10 ⁴ mm ⁴	W_x ·10 ³ mm ³	I_y ·10 ⁴ mm ⁴	W_y ·10 ³ mm ³	Oberfläche je Meter Länge	Gewichtskraft je Meter Länge
											A_0 m ² /m ¹	F_G N/m
80	46	5,2	80	3,8	5	764	80,1	20,0	8,49	3,69	0,328	59
100	55	5,7	100	4,1	7	1030	171	34,2	15,9	5,79	0,400	79
120	64	6,3	120	4,4	7	1320	318	53,0	27,7	8,65	0,475	102
140	73	6,9	140	4,7	7	1640	541	77,3	44,9	12,3	0,551	126
160	82	7,4	160	5,0	9	2010	869	109	68,3	16,7	0,623	155
180	91	8,0	180	5,3	9	2390	1320	146	101	22,2	0,698	184
200	100	8,5	200	5,6	12	2850	1940	194	142	28,5	0,768	220
220	110	9,2	220	5,9	12	3340	2770	252	205	37,3	0,848	257
240	120	9,8	240	6,2	15	3910	3890	324	284	47,3	0,922	301
270	135	10,2	270	6,6	15	4590	5790	429	420	62,2	1,041	353
300	150	10,7	300	7,1	15	5380	8360	557	604	80,5	1,155	414
330	160	11,5	330	7,5	18	6260	11770	713	788	98,5	1,254	482
360	170	12,7	360	8,0	18	7270	16270	904	1040	123	1,348	560
400	180	13,5	400	8,6	21	8450	23130	1160	1320	146	1,467	651
450	190	14,6	450	9,4	21	9880	33740	1500	1680	176	1,605	761
500	200	16,0	500	10,2	21	11600	48200	1930	2140	214	1,738	893
550	210	17,2	550	11,1	24	13400	67120	2440	2670	254	1,877	1032
600	220	19,0	600	12,0	24	15600	92080	3070	3390	308	2,014	1200

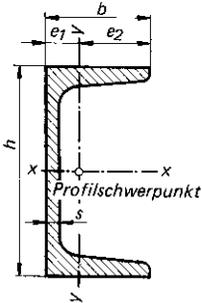
¹⁾ Die Zahlenwerte geben zugleich den Profilumfang U in m an.

4.29 Mechanische Eigenschaften von Schrauben

Kennzeichen	4.6	4.8	5.6	5.8	6.6	6.8	6.9	8.8	10.9	12.9
Mindest-Zugfestigkeit R_m in N/mm ²	400		500		600			800	1000	1200
Mindest-Streckgrenze R_e oder R_p 0,2-Dehngrenze in N/mm ²	240	320	300	400	360	480	540	640	900	1080
Bruchdehnung A_5 in %	25	14	20	10	16	8	12	12	9	8

4 Festigkeitslehre

4.30 Warmgewalzter rundkantiger U-Stahl (Auswahl)



Beispiel für die Bezeichnung eines U-Stahls und für das Auswerten der Tabelle:

U 100 DIN 1026 – S235JRG1

Höhe	$h = 100 \text{ mm}$
Breite	$b = 50 \text{ mm}$
Flächenmoment 2. Grades	$I_x = 206 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
Widerstandsmoment	$W_x = 41,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
Flächenmoment 2. Grades	$I_y = 29,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
Widerstandsmoment	$W_{y1} = 18,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
	$W_{y2} = 8,49 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
Oberfläche je Meter Länge	$A'_0 = 0,372 \text{ m}^2/\text{m}$
Profilumfang	$U = 0,372 \text{ m}$
Trägheitsradius	$i_x = \sqrt{I_x/A} = 39,1 \text{ mm}$

Kurzzeichen	h	b	s	Querschnitt	e_1/e_2	I_x	W_x	I_y	W_{y1}	W_{y2}	Oberfläche je Meter Länge	Gewichtskraft je Meter Länge
U	mm	mm	mm	A	mm	$\cdot 10^4 \text{ mm}^4$	$\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	$\cdot 10^4 \text{ mm}^4$	$\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	$\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	A'_0	F'_G
				mm ²							m ² /m ¹	N/m
30 × 15	30	15	4	221	5,2/ 9,8	2,53	1,69	0,38	0,73	0,39	0,103	17,0
30	30	33	5	544	13,1/19,9	6,39	4,26	5,33	4,07	2,68	0,174	41,9
40 × 20	40	20	5	366	6,7/13,3	7,58	3,79	1,14	1,70	0,86	0,142	28,2
40	40	35	5	621	13,3/21,7	14,1	7,05	6,68	5,02	3,08	0,200	47,8
50 × 25	50	25	5	492	8,1/16,9	16,8	6,73	2,49	3,07	1,47	0,181	37,9
50	50	38	5	712	13,7/24,3	26,4	10,6	9,12	6,66	3,75	0,232	54,8
60	60	30	6	646	9,1/20,9	31,6	10,5	4,51	4,98	2,16	0,215	49,7
65	65	42	5,5	903	14,2/27,8	57,5	17,7	14,1	9,93	5,07	0,273	69,5
80	80	45	6	1100	14,5/30,5	106	26,5	19,4	13,4	6,36	0,312	84,7
100	100	50	6	1350	15,5/34,5	206	41,2	29,3	18,9	8,49	0,372	104,0
120	120	55	7	1700	16,0/39,0	364	60,7	43,2	27,0	11,1	0,434	130,9
140	140	60	7	2040	17,5/42,5	605	86,4	62,7	35,8	14,8	0,489	157,1
160	160	65	7,5	2400	18,4/46,6	925	116	85,3	46,4	18,3	0,546	184,8
180	180	70	8	2800	19,2/50,8	1350	150	114	59,4	22,4	0,611	215,6
200	200	75	8,5	3220	20,1/54,9	1910	191	148	73,6	27,0	0,661	248,0
220	220	80	9	3740	21,4/58,6	2690	245	197	92,1	33,6	0,718	288,0
240	240	85	9,5	4230	22,3/62,7	3600	300	248	111	39,6	0,775	325,7
260	260	90	10	4830	23,6/66,4	4820	371	317	134	47,7	0,834	372
280	280	95	10	5330	25,3/69,7	6280	448	399	158	57,3	0,890	410,5
300	300	100	10	5880	27,0/73,0	8030	535	495	183	67,8	0,950	452,8
320	320	100	14	7580	26,0/74,0	10870	679	597	230	80,7	0,982	583,7
350	350	100	14	7730	24,0/76,0	12840	734	570	238	75,0	1,05	595,3
380	380	102	13,5	8040	23,8/78,2	15760	829	615	258	78,6	1,11	619,1
400	400	110	14	9150	26,5/83,5	20350	1020	846	355	101	1,18	704,6

1) Die Zahlenwerte geben zugleich den Profilumfang U in m an.

4.31 Niete und zugehörige Schrauben für Stahl- und Kesselbau

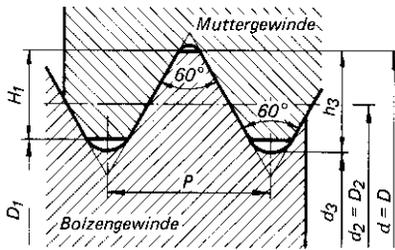
d_1 in mm	11	13	(15)	17	(19)	21	23	25	28	31	(34)	37
A_1 in mm ² = $\frac{\pi}{4} d_1^2$	95	133	177	227	284	346	415	491	616	755	908	1075
d in mm (Rohnietdurchmesser)	10	12	(14)	16	(18)	20	22	24	27	30	(33)	36
Sechskantschraube	M10	M12	–	M16	–	M20	M22	M24	M27	M30	M33	M36

d_1 Durchmesser des geschlagenen Nietes = Nietlochdurchmesser

Größen in () möglichst vermeiden

5 Gewindetabellen

5.1 Metrisches ISO-Gewinde



Bezeichnung des Metrischen Regelgewindes z.B.

M 12 Gewinde-Nenndurchmesser
 $d = D = 12 \text{ mm}$

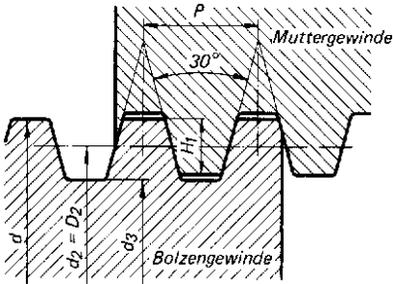
Maße in mm

Gewinde-Nenndurchmesser $d = D$		Steigung P	Steigungswinkel α in Grad	Flankendurchmesser $d_2 = D_2$	Kerndurchmesser		Gewindetiefe ¹⁾		Spannungsquerschnitt A_s mm^2	polares Widerstandsmoment W_{ps} mm^3
Reihe 1	Reihe 2				d_3	D_1	h_3	H_1		
3		0,5	3,40	2,675	2,387	2,459	0,307	0,271	5,03	3,18
	3,5	0,6	3,51	3,110	2,764	2,850	0,368	0,325	6,78	4,98
4		0,7	3,60	3,545	3,141	3,242	0,429	0,379	8,73	7,28
	4,5	0,75	3,40	4,013	3,580	3,688	0,460	0,406	11,3	10,72
5		0,8	3,25	4,480	4,019	4,134	0,491	0,433	14,2	15,09
6		1	3,40	5,350	4,773	4,917	0,613	0,541	20,1	25,42
8		1,25	3,17	7,188	6,466	6,647	0,767	0,677	36,6	62,46
10		1,5	3,03	9,026	8,160	8,376	0,920	0,812	58,0	124,6
12		1,75	2,94	10,863	9,853	10,106	1,074	0,947	84,3	218,3
	14	2	2,87	12,701	11,546	11,835	1,227	1,083	115	347,9
16		2	2,48	14,701	13,546	13,835	1,227	1,083	157	554,9
	18	2,5	2,78	16,376	14,933	15,294	1,534	1,353	192	750,5
20		2,5	2,48	18,376	16,933	17,294	1,534	1,353	245	1082
	22	2,5	2,24	20,376	18,933	19,294	1,534	1,353	303	1488
24		3	2,48	22,051	20,319	20,752	1,840	1,624	353	1871
	27	3	2,18	25,051	23,319	23,752	1,840	1,624	459	2774
30		3,5	2,30	27,727	25,706	26,211	2,147	1,894	561	3748
	33	3,5	2,08	30,727	28,706	29,211	2,147	1,894	694	5157
36		4	2,18	33,402	31,093	31,670	2,454	2,165	817	6588
	39	4	2,00	36,402	34,093	34,670	2,454	2,165	976	8601
42		4,5	2,10	39,077	36,479	37,129	2,760	2,436	1120	10574
	45	4,5	1,95	42,077	39,479	40,129	2,760	2,436	1300	13222
48		5	2,04	44,752	41,866	42,587	3,067	2,706	1470	15899
	52	5	1,87	48,752	45,866	46,587	3,067	2,706	1760	20829
56		5,5	1,91	52,428	49,252	50,046	3,374	2,977	2030	25801
	60	5,5	1,78	56,428	53,252	54,046	3,374	2,977	2360	32342
64		6	1,82	60,103	56,639	57,505	3,681	3,248	2680	39138
	68	6	1,71	64,103	60,639	61,505	3,681	3,248	3060	47750

¹⁾ H_1 ist die Tragtiefe (siehe Festigkeitslehre: Flächenpressung im Gewinde)

5 Gewindetabellen

5.2 Metrisches ISO-Trapezgewinde



Bezeichnung für

a) eingängiges Gewinde z.B.

Tr 75×10

Gewindedurchmesser

$d = 75 \text{ mm}$

Steigung $P = 10 \text{ mm} = \text{Teilung}$

b) zweigängiges Gewinde z.B.

Tr 75×20 P10

Gewindedurchmesser

$d = 75 \text{ mm}$

Steigung $P_h = 20 \text{ mm}$

Teilung $P = 10 \text{ mm}$

$$\text{Gangzahl } z = \frac{\text{Steigung } P_h}{\text{Teilung } P} = \frac{20 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 2$$

Maße in mm

Gewinde- durchmesser d	Steigung P	Steigungs- winkel α in Grad	Tragtiefe H_1 $H_1 = 0,5 P$	Flanken- durchmesser $D_2 = d_2$ $D_2 = d - H_1$	Kern- durchmesser d_3	Kern- querschnitt $A_3 = \frac{\pi}{4} d_3^2$ mm^2	polares Wider- standsmoment $W_p = \frac{\pi}{16} d_3^3$ mm^3
8	1,5	3,77	0,75	7,25	6,2	30,2	46,8
10	2	4,05	1	9	7,5	44,2	82,8
12	3	5,20	1,5	10,5	9	63,6	143
16	4	5,20	2	14	11,5	104	299
20	4	4,05	2	18	15,5	189	731
24	5	4,23	2,5	21,5	18,5	269	1243
28	5	3,57	2,5	25,5	22,5	398	2237
32	6	3,77	3	29	25	491	3068
36	6	3,31	3	33	29	661	4789
40	7	3,49	3,5	36,5	32	804	6434
44	7	3,15	3,5	40,5	36	1018	9161
48	8	3,31	4	44	39	1195	11647
52	8	3,04	4	48	43	1452	15611
60	9	2,95	4,5	55,5	50	1963	24544
65	10	3,04	5	60	54	2290	30918
70	10	2,80	5	65	59	2734	40326
75	10	2,60	5	70	64	3217	51472
80	10	2,43	5	75	69	3739	64503
85	12	2,77	6	79	72	4071	73287
90	12	2,60	6	84	77	4656	89640
95	12	2,46	6	89	82	5281	108261
100	12	2,33	6	94	87	5945	129297
110	12	2,10	6	104	97	7390	179203
120	14	2,26	7	113	104	8495	220867

6 Allgemeine Tabellen

6.1 Werte für $e^{\mu\alpha}$ in Abhängigkeit vom Umschlingungswinkel α und von der Reibungszahl μ

α°	α	Reibungszahlen									
		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
36	$0,2\pi$	1,032	1,065	1,099	1,134	1,170	1,207	1,246	1,286	1,327	1,369
72	$0,4\pi$	1,065	1,134	1,207	1,286	1,369	1,458	1,552	1,653	1,760	1,874
108	$0,6\pi$	1,099	1,207	1,327	1,458	1,602	1,760	1,934	2,125	2,336	2,566
144	$0,8\pi$	1,134	1,286	1,458	1,653	1,874	2,125	2,410	2,733	3,099	3,514
180	$1,0\pi$	1,170	1,369	1,602	1,874	2,193	2,566	3,003	3,514	4,111	4,810
216	$1,2\pi$	1,207	1,458	1,760	2,125	2,566	3,099	3,741	4,518	5,455	6,586
252	$1,4\pi$	1,246	1,552	1,934	2,410	3,003	3,741	4,662	5,808	7,237	9,017
288	$1,6\pi$	1,286	1,653	2,125	2,733	3,514	4,518	5,808	7,468	9,602	12,35
324	$1,8\pi$	1,327	1,760	2,336	3,099	4,111	5,455	7,237	9,602	12,74	16,90
360	$2,0\pi$	1,369	1,874	2,566	3,514	4,810	6,586	9,017	12,35	16,90	23,14
540	3π	1,602	2,566	4,111	6,586	10,55	16,90	27,08	43,38	69,49	111,3
720	4π	1,874	3,514	6,586	12,35	23,14	43,38	81,31	152,1	285,7	535,5
900	5π	2,193	4,810	10,55	23,14	50,75	111,3	244,2	535,5	1174	2576
1080	6π	2,566	6,586	16,90	43,38	111,3	285,7	733,1	1881	4829	12 990
1260	7π	3,003	9,017	27,08	81,31	244,2	733,1	2202	6611	19850	59 610
1440	8π	3,514	12,35	43,38	152,4	535,5	1881	6611	23 230	81 610	286 800
1620	9π	4,111	16,90	69,49	285,7	1174	4829	19 850	81 610	335 500	1 379 000
1800	10π	4,810	23,14	111,3	535,5	1 576	12 390	59 610	286 800	1 379 000	6 636 000

Die Tabelle gibt einen Überblick über den Verlauf der $e^{\mu\alpha}$ -Werte. Zur Berechnung beliebiger Werte benutzt man die \ln^x - oder e^x -Taste des Taschenrechners. Dabei ist α im Bogenmaß einzusetzen: $\alpha = \alpha^\circ \pi / 180^\circ$.

6.2 Vorsatzzeichen zur Bildung von dezimalen Vielfachen und Teilen von Basiseinheiten oder abgeleiteten Einheiten mit selbständigem Namen

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung	Beispiel
Tera	T	10^{12} Einheiten	1 Terameter (Tm) = 10^{12} m
Giga	G	10^9 Einheiten	1 Gigagramm (Gg) = 10^9 g = 10^6 kg = 10^3 t = 1000 t
Mega	M	10^6 Einheiten	1 Megagramm (Mg) = 10^6 g = 10^3 kg = 1 t
Kilo	k	10^3 Einheiten	1 Kilogramm (kg) = 10^3 g = 1000 g
Hekto	h	10^2 Einheiten	1 Hektoliter (hl) = 10^2 l = 100 l
Deka	da	10^1 Einheiten	1 Dekameter (dam) = 10 m
Dezi	d	10^{-1} Einheiten	1 Deziliter (dl) = 0,1 l
Zenti	c	10^{-2} Einheiten	1 Zentimeter (cm) = 0,01 m = 10^{-2} m
Milli	m	10^{-3} Einheiten	1 Millisekunde (ms) = 0,001 s = 10^{-3} s
Mikro	μ	10^{-6} Einheiten	1 Mikrometer (μ m) = 0,000 001 m = 10^{-6} m
Nano	n	10^{-9} Einheiten	1 Nanosekunde (ns) = 10^{-9} s
Pico	P	10^{-12} Einheiten	1 Picofarad (pF) = 10^{-12} F

6.3 Bevorzugte Maße in Festigkeitsrechnungen

Beispiel: Die Wellenberechnung ergibt als erforderlichen Durchmesser $d_{\text{erf}} = 20,4$ mm. Als Ergebnis wird $d = 21$ mm festgelegt.

0,1	0,12	0,16	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8					
1	1,1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2	2,2	2,5	2,8	3	3,2	3,5	
4	4,5	5	5,5	6	7	8	9							
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
24	25	26	28	30	32	34	35	36	38	40	42	44	45	
46	48	50	52	53	55	56	58	60	62	63	65	67	68	
70	71	72	75	78	80	82	85	88	90	92	95	98		
100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	
170	175	180	185	190	195	200	210	220	230	240	250	260	270	
280	290	300	310	315	320	330	340	350	355	360	370	375	380	
390	400	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500	520	530	
550	560	580	600	630	650	670	700	710	750	800	850	900	950	

6 Allgemeine Tabellen

6.4 Umrechnungsbeziehungen für gesetzliche Einheiten			
Größe	Gesetzliche Einheit		Früher gebräuchliche Einheit (nicht mehr zulässig) und Umrechnungsbeziehung
	Name und Einheitenzeichen	ausgedrückt als Potenzprodukt der Basiseinheiten	
Kraft F	Newton N	$1 \text{ N} = 1 \text{ m kg s}^{-2}$	Kilopond kp $1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$ $1 \text{ kp} \approx 1 \text{ daN}$
Druck p	$\frac{\text{Newton}}{\text{Quadratmeter}} \quad \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$	Meter Wassersäule mWS $1 \text{ mWS} = 9,80665 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ $1 \text{ mWS} \approx 0,1 \text{ bar}$ Millimeter Wassersäule mm WS
	$1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pascal Pa}$ $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$		$1 \text{ mm WS} \approx 9,80665 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 10 \text{ Pa}$ Millimeter Quecksilbersäule mmHg $1 \text{ mmHg} = 133,3224 \text{ Pa}$ Torr $1 \text{ Torr} = 133,3224 \text{ Pa}$ Technische Atmosphäre at $1 \text{ at} = 1 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 9,80665 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ $1 \text{ at} \approx 1 \text{ bar}$ Physikalische Atmosphäre atm $1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 1,01 \text{ bar}$
Die gebräuchlichsten Vorsätze und deren Kurzzeichen	für das Millionenfache (10^6 fache) der Einheit:	Mega M	
	für das Tausendfache (10^3 fache) der Einheit:	Kilo k	
	für das Zehnfache (10 fache) der Einheit:	Deka da	
	für das Hundertstel (10^{-2} fache) der Einheit:	Zenti c	
	für das Tausendstel (10^{-3} fache) der Einheit:	Milli m	
	für das Millionstel (10^{-6} fache) der Einheit:	Mikro μ	
Mechanische Spannung σ , τ , ebenso Festigkeit, Flächenpressung, Lochleibungsdruck	$\frac{\text{Newton}}{\text{Quadratmillimeter}} \quad \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ $1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^6 \text{ Pa}$ $= 1 \text{ MPa} = 10 \text{ bar}$	$1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 10^6 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$	$\frac{\text{kp}}{\text{mm}^2}$ und $\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ $1 \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2} = 9,80665 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \approx 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ $1 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 0,0980665 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \approx 0,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Drehmoment M Biegemoment M_b Torsionsmoment M_T	Newtonmeter Nm	$1 \text{ Nm} = 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2}$	Kilopondmeter kpm $1 \text{ kpm} = 9,80665 \text{ Nm} \approx 10 \text{ Nm}$ Kilopondzentimeter kpcm $1 \text{ kpcm} = 0,0980665 \text{ Nm} \approx 0,1 \text{ Nm}$
Arbeit W Energie E	Joule J $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws}$	$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2}$	Kilopondmeter kpm $1 \text{ kpm} = 9,80665 \text{ J} \approx 10 \text{ J}$
Leistung P	Watt W $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$	$1 \text{ W} = 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-3}$	$\frac{\text{Kilopondmeter kpm}}{\text{Sekunde s}}$ $1 \frac{\text{kpm}}{\text{s}} = 9,80665 \text{ W} \approx 10 \text{ W}$ Pferdestärke PS $1 \text{ PS} = 75 \frac{\text{kpm}}{\text{s}} = 735,49875 \text{ W}$

6 Allgemeine Tabellen

Größe	Gesetzliche Einheit		Früher gebräuchliche Einheit (nicht mehr zulässig) und Umrechnungsbeziehung
	Name und Einheitenzeichen	ausgedrückt als Potenzprodukt der Basiseinheiten	
Impuls $F\Delta t$	Newtonsekunde Ns $1 \text{ Ns} = 1 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$	$1 \text{ Ns} = 1 \text{ m kg s}^{-1}$	Kilopondsekunde kps $1 \text{ kps} = 9,80665 \text{ Ns} \approx 10 \text{ Ns}$
Drehimpuls $M\Delta t$	Newtonmetersekunde Nms $1 \text{ Nms} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$	$1 \text{ Nms} = 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$	Kilopondmetersekunde kpms $1 \text{ kpms} = 9,80665 \text{ Nms} \approx 10 \text{ Nms}$
Trägheitsmoment J	Kilogramm-meterquadrat kgm^2	$1 \text{ m}^2 \text{ kg}$	Kilopondmetersekundequadrat kpms^2 $1 \text{ kpms}^2 = 9,80665 \text{ kgm}^2 \approx 10 \text{ kgm}^2$
Wärme, Wärmemenge Q	Joule J $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws}$	$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2}$	Kalorie cal $1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$ Kilokalorie kcal $1 \text{ kcal} = 4186,8 \text{ J}$
Temperatur T	Kelvin K	Basiseinheit Kelvin K	Grad Kelvin °K $1 \text{ °K} = 1 \text{ K}$
Temperaturintervall ΔT	Kelvin K und Grad Celsius °C	Basiseinheit Kelvin K	Grad grd $1 \text{ grd} = 1 \text{ K} = 1 \text{ °C}$
Celsius-Temperatur t, ϑ	Grad Celsius °C	Basiseinheit °C	
Längenausdehnungskoeffizient α_l	Eins durch Kelvin $\frac{1}{\text{K}}$	$\frac{1}{\text{K}} = \text{K}^{-1}$	$\frac{1}{\text{grd}}, \frac{1}{\text{°C}}$ $\frac{1}{\text{grd}} = \frac{1}{\text{°C}} = \frac{1}{\text{K}}$

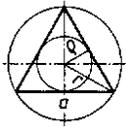
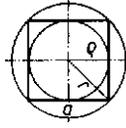
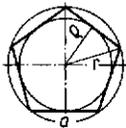
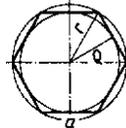
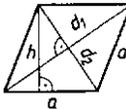
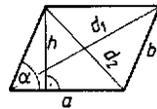
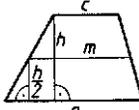
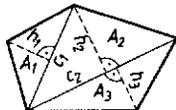
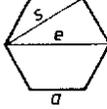
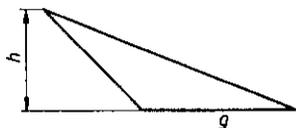
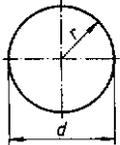
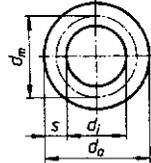
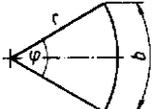
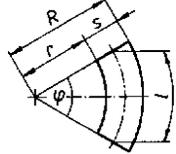
6.5 Das griechische Alphabet

Alpha	A	α	Jota	I	ι	Rho	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	My	M	μ	Ypsilon	Y	υ
Epsilon	E	ϵ	Ny	N	ν	Phi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omikron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	ϑ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

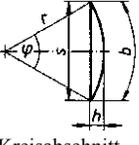
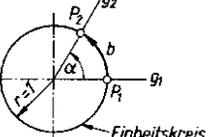
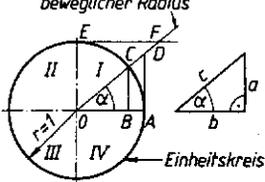
7 Mathematische Hilfen

1	Rechnen mit null	$a \cdot b = 0$ heißt $a = 0$ oder $b = 0$ $0 \cdot a = 0$ $0 : a = 0$
2	Quotient	$a = \frac{b}{n} = b : n$ $n \neq 0$ b Dividend n Divisor Division durch null gibt es nicht.
3	Binomische Formel, Polygon	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $(a + b + c)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
4	arithmetisches Mittel	$x_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ <i>Beispiel:</i> $x_a = \frac{2 + 3 + 6}{3} = 3,67$
5	geometrisches Mittel	$x_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ <i>Beispiel:</i> $x_g = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt[3]{36} = 3,3$
6	erste und nullte Potenz	$a^1 = a$ $a^0 = 1$ <i>Beispiel:</i> $7^1 = 7$ $7^0 = 1$
7	negativer Exponent	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ <i>Beispiel:</i> $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$ $7^{-1} = \frac{1}{7}$
8	Zehnerpotenzen	$10^0 = 1$ $10^6 = 1$ Million $10^{-1} = 0,1$ $10^1 = 10$ $10^9 = 1$ Milliarde $10^{-2} = 0,01$ $10^2 = 100$ $10^{12} = 1$ Billion $10^{-3} = 0,001$ $10^3 = 1000$ $10^{15} = 1$ Billiarde usw. $10^{-4} = 0,0001$ usw.
9	Wurzel-Definition	$\sqrt[n]{c} = a \rightarrow a^n = c$ $a \geq 0$ und $c \geq 0$ <i>Beispiel:</i> $\sqrt[4]{81} = 3 \rightarrow 3^4 = 81$ $\sqrt{\quad}$ immer positiv
10	Wurzeln sind Potenzen mit gebrochenen Exponenten, es gelten die Regeln der Potenzrechnung	$\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$ $-\sqrt[n]{c} = c^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{c^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \sqrt[n]{c^{-1}}$ <i>Beispiel:</i> $\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}} = 3$
11	Quadratische Gleichung (allgemeine Form)	$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_2 \neq 0$)
12	Quadratische Gleichung (Normalform)	$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = x^2 + p x + q = 0$
13	Quadratische Gleichung (Lösungsformel mit Beispiel)	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ <i>Beispiel:</i> $\left. \begin{aligned} 25x^2 - 70x + 13 = 0 \\ x^2 - \frac{70}{25}x + \frac{13}{25} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_{1,2} &= +\frac{70}{50} \pm \sqrt{\left(\frac{70}{50}\right)^2 - \frac{13}{25}} \\ x_1 &= +\frac{7}{5} + \sqrt{\frac{49}{25} - \frac{13}{25}} = \frac{13}{5}; x_2 = \frac{1}{5} \end{aligned}$ Die Lösungen x_1 und x_2 sind a) beide verschieden und reell, wenn der Wurzelwert positiv ist b) beide gleich und reell, wenn der Wurzelwert null ist c) beide konjugiert komplex, wenn der Wurzelwert negativ ist.
14	Kontrolle der Lösungen (Viëta)	$x_1 + x_2 = -p$ <i>Im Beispiel ist $p = -\frac{70}{25}$ und $q = \frac{13}{25}$ also</i> $x_1 \cdot x_2 = q$ $x_1 + x_2 = \frac{13}{5} + \frac{1}{5} = \frac{14}{5} = \frac{70}{25} = -p$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{13}{25} = q$

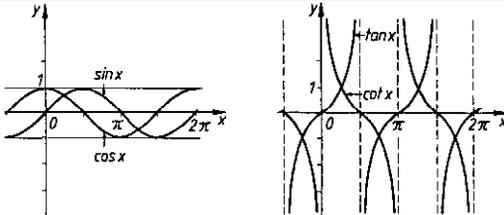
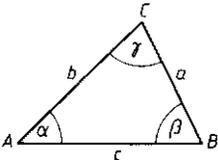
7 Mathematische Hilfen

15		$A = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$ $r = \frac{a}{3} \sqrt{3}$ $q = \frac{a}{6} \sqrt{3}$		$A = a^2$ $r = \frac{a}{2} \sqrt{2}$ $q = \frac{a}{2}$
16		$A = \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ $r = \frac{a}{10} \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$ $q = \frac{a}{10} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$		$A = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$ $r = a$ $q = \frac{a}{2} \sqrt{3}$
17		$A = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ $U = 4a$		$A = ah = ab \sin \alpha$ $U = 2(a + b)$ $d_1 = \sqrt{(a + h \cot \alpha)^2 + h^2}$ $d_2 = \sqrt{(a - h \cot \alpha)^2 + h^2}$
18		$A = \frac{a + c}{2} h$ $A = mh$ $m = \frac{a + c}{2}$		$A = A_1 + A_2 + A_3$ $A = \frac{c_1 h_1 + c_2 h_2 + c_3 h_3}{2}$
19		$A = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$ <p>Schlüsselweite: $S = a \sqrt{3}$ Eckenmaß: $e = 2a$</p>		$A = \frac{gh}{2}$
20		$A = r^2 \pi = \frac{d^2 \pi}{4}$ $U = 2r\pi = d\pi$ $\pi = 3,141592$		$A = \pi(r_a^2 - r_i^2)$ $= \frac{\pi}{4}(d_a^2 - d_i^2)$ $= d_m \pi s$ $s = \frac{d_a - d_i}{2}$ $d_m = \frac{d_a + d_i}{2}$
21		$A = \frac{br}{2} = \frac{\varphi^\circ}{360^\circ} \pi r^2$ $= \frac{\varphi r^2}{2}$ <p>Bogenlänge b:</p> $b = \varphi r = \frac{\varphi^\circ \pi r}{180^\circ}$		$A = \frac{\varphi^\circ \cdot \pi}{360^\circ} (R^2 - r^2) = ls$ <p>mittlere Bogenlänge l:</p> $l = \frac{R + r}{2} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \varphi^\circ$ <p>Ringbreite s:</p> $s = R - r$

7 Mathematische Hilfen

<p>22</p>	 <p>Kreisabschnitt</p>	$A = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\varphi^\circ \pi}{180^\circ} - \sin \varphi \right)$ $A = \frac{1}{2} [r (b - s) + s h]$ $A \approx \frac{2}{3} s h$ <p>Sehnenlänge s:</p> $s = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$	<p>Kreisradius r:</p> $r = \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2}{2h}$ <p>Bogenhöhe h:</p> $h = r \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)$ $h = \frac{s}{2} \tan \frac{\varphi}{4}$	<p>Bogenhöhe b:</p> $b = \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^2}$ $b = \frac{\varphi^\circ \pi r}{180^\circ} = \varphi r$
<p>23</p>	<p>Begriff des ebenen Winkels</p>	<p>Der ebene Winkel α (kurz: Winkel α, im Gegensatz zum Raumwinkel) zwischen den beiden Strahlen g_1, g_2 ist die Länge des Kreisbogens b auf dem Einheitskreis, der im Gegenuhrzeigersinn von Punkt P_1 zum Punkt P_2 führt.</p>	 <p>Einheitskreis</p>	
<p>24</p>	<p>Bogenmaß des ebenen Winkels</p>	<p>Die Länge des Bogens b auf dem Einheitskreis ist das Bogenmaß des Winkels.</p>		
<p>25</p>	<p>kohärente Einheit des ebenen Winkels</p>	<p>Die kohärente Einheit (SI-Einheit) des ebenen Winkels ist der Radian (rad). Der Radian ist der ebene Winkel, für den das Verhältnis der Länge des Kreisbogens b zu seinem Radius r gleich eins ist. $1 \text{ rad} = \frac{b}{r} = 1$</p>		
<p>26</p>	<p>Vollwinkel und rechter Winkel</p>	<p>Für den Vollwinkel α beträgt der Kreisbogen $b = 2\pi r$. Es ist demnach:</p> $\alpha = \frac{b}{r} = \frac{2\pi r}{r} \text{ rad} = 2\pi \text{ rad} \quad \text{Vollwinkel} = 2\pi \text{ rad}$ <p>Ebenso ist für den rechten Winkel (1°):</p> $\alpha = 1^\circ = \frac{b}{r} = \frac{2\pi r}{4r} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{rechter Winkel } 1^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$		
<p>27</p>	<p>Umrechnung von Winkeleinheiten</p>	<p>Ein Grad (1°) ist der 360ste Teil des Vollwinkels (360°). Folglich gilt:</p> $1^\circ = \frac{b}{r} = \frac{2\pi r}{360r} \text{ rad} = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad} \quad \text{oder durch Umstellen: } 1 \text{ rad} = \frac{1^\circ \cdot 180}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$ <p>Beispiel:</p> <p>a) $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} 90^\circ \text{ rad} = \frac{\pi}{2}$</p> <p>b) $\alpha = \pi \text{ rad} = \pi \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ$</p>		
<p>28</p>	<p>Sinus = $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\sin \alpha = BC = \frac{a}{c}$</p> <p>Kosinus = $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos \alpha = OB = \frac{b}{c}$</p> <p>Tangens = $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ $\tan \alpha = AD = \frac{a}{b}$</p> <p>Kotangens = $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$ $\cot \alpha = EF = \frac{b}{a}$</p> <p>Sekans = $\frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}}$ $\sec \alpha = OD = \frac{c}{b}$</p> <p>Kosekans = $\frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}}$ $\text{cosec } \alpha = OF = \frac{c}{a}$</p>		<p>beweglicher Radius</p>  <p>Einheitskreis</p> <p>Beachte: Winkel werden vom festen Radius OA aus linksdrehend gemessen.</p>	

7 Mathematische Hilfen

29	<p>Trigonometrische Funktionen:</p> $y = \sin x \quad y = \cos x$ $y = \tan x \quad y = \cot x$																																									
30	<p>Vorzeichen der Funktion (richtet sich nach dem Quadranten, in dem der bewegliche Radius liegt)</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Quadrant</th> <th>Größe des Winkels</th> <th>sin</th> <th>cos</th> <th>tan</th> <th>cot</th> <th>sec</th> <th>cosec</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>I</td> <td>von 0° bis 90°</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>II</td> <td>von 90° bis 180°</td> <td>+</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>III</td> <td>von 180° bis 270°</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>-</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>IV</td> <td>von 270° bis 360°</td> <td>-</td> <td>+</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>+</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table>	Quadrant	Größe des Winkels	sin	cos	tan	cot	sec	cosec	I	von 0° bis 90°	+	+	+	+	+	+	II	von 90° bis 180°	+	-	-	-	-	+	III	von 180° bis 270°	-	-	+	+	-	-	IV	von 270° bis 360°	-	+	-	-	+	-
Quadrant	Größe des Winkels	sin	cos	tan	cot	sec	cosec																																			
I	von 0° bis 90°	+	+	+	+	+	+																																			
II	von 90° bis 180°	+	-	-	-	-	+																																			
III	von 180° bis 270°	-	-	+	+	-	-																																			
IV	von 270° bis 360°	-	+	-	-	+	-																																			
31	<p>Funktionen für Winkel zwischen 90° ... 360°</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Funktion</th> <th>$\beta = 90^\circ \pm \alpha$</th> <th>$\beta = 180^\circ \pm \alpha$</th> <th>$\beta = 210^\circ \pm \alpha$</th> <th>$\beta = 360^\circ - \alpha$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>sin β</td> <td>$+\cos \alpha$</td> <td>$\mp \sin \alpha$</td> <td>$-\cos \alpha$</td> <td>$-\sin \alpha$</td> </tr> <tr> <td>cos β</td> <td>$\mp \sin \alpha$</td> <td>$-\cos \alpha$</td> <td>$\pm \sin \alpha$</td> <td>$+\cos \alpha$</td> </tr> <tr> <td>tan β</td> <td>$\mp \cot \alpha$</td> <td>$\pm \tan \alpha$</td> <td>$\mp \cot \alpha$</td> <td>$-\tan \alpha$</td> </tr> <tr> <td>cot β</td> <td>$\mp \tan \alpha$</td> <td>$\pm \cot \alpha$</td> <td>$\mp \tan \alpha$</td> <td>$-\cot \alpha$</td> </tr> </tbody> </table> <p>Beispiel¹⁾: $\sin 205^\circ = \sin (180 + 25^\circ) = -(\sin 25^\circ) = -0,4226$</p>	Funktion	$\beta = 90^\circ \pm \alpha$	$\beta = 180^\circ \pm \alpha$	$\beta = 210^\circ \pm \alpha$	$\beta = 360^\circ - \alpha$	sin β	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	cos β	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$	tan β	$\mp \cot \alpha$	$\pm \tan \alpha$	$\mp \cot \alpha$	$-\tan \alpha$	cot β	$\mp \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$	$\mp \tan \alpha$	$-\cot \alpha$															
Funktion	$\beta = 90^\circ \pm \alpha$	$\beta = 180^\circ \pm \alpha$	$\beta = 210^\circ \pm \alpha$	$\beta = 360^\circ - \alpha$																																						
sin β	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$																																						
cos β	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$																																						
tan β	$\mp \cot \alpha$	$\pm \tan \alpha$	$\mp \cot \alpha$	$-\tan \alpha$																																						
cot β	$\mp \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$	$\mp \tan \alpha$	$-\cot \alpha$																																						
32	<p>Sinussatz</p> $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} ; \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} ; \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$ <p>Kosinussatz (bei stumpfem Winkel α wird $\cos \alpha$ negativ)</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha ; \dots$ $a^2 = (b + c)^2 - 4bc \cos^2(\alpha/2) ; \dots$ $a^2 = (b - c)^2 + 4bc \sin^2(\alpha/2) ; \dots$	 <p>Die Punkte weisen darauf hin, dass sich durch zyklisches Vertauschen von a, b, c und α, β, γ zwei weitere Gleichungen ergeben.</p>																																								
33	<p>Funktionen für negative Winkel werden auf solche für positive Winkel zurückgeführt:</p> $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ <p>Beispiel¹⁾: $\sin(-205^\circ) = -\sin 205^\circ$</p>																																									
34	<p>Funktionen für Winkel über 360° werden auf solche von Winkeln zwischen 0° ... 360° zurückgeführt (bzw. zwischen 0° ... 180°); „n“ ist ganzzahlig:</p> $\sin(360^\circ \cdot n + \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(360^\circ \cdot n + \alpha) = \cos \alpha$ $\tan(180^\circ \cdot n + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(180^\circ \cdot n + \alpha) = \cot \alpha$ <p>Beispiel¹⁾:</p> $\sin(-660^\circ) = -\sin 660^\circ = -\sin(360^\circ \cdot 1 + 300^\circ) = -\sin 300^\circ = -\sin(270^\circ + 30^\circ) = +\cos 30^\circ = 0,8660$																																									
35	<p>Grundformeln</p> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$																																									
36	<p>Umrechnung zwischen Funktionen desselben Winkels (die Wurzel erhält das Vorzeichen des Quadranten, in dem der Winkel α liegt)</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td>$\sin \alpha$</td> <td>$\cos \alpha$</td> <td>$\tan \alpha$</td> <td>$\cot \alpha$</td> </tr> <tr> <td>$\sin \alpha =$</td> <td>$\sin \alpha$</td> <td>$\sin \alpha$</td> <td>$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$</td> <td>$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$</td> <td>$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$</td> </tr> <tr> <td>$\cos \alpha =$</td> <td>$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$</td> <td>$\cos \alpha$</td> <td>$\cos \alpha$</td> <td>$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$</td> <td>$\frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$</td> </tr> <tr> <td>$\tan \alpha =$</td> <td>$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$</td> <td>$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$</td> <td>$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$</td> <td>$\tan \alpha$</td> <td>$\frac{1}{\cot \alpha}$</td> </tr> <tr> <td>$\cot \alpha =$</td> <td>$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$</td> <td>$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$</td> <td>$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$</td> <td>$\frac{1}{\tan \alpha}$</td> <td>$\cot \alpha$</td> </tr> </tbody> </table>			$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$\sin \alpha =$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$	$\cos \alpha =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$	$\tan \alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\tan \alpha$	$\frac{1}{\cot \alpha}$	$\cot \alpha =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$\cot \alpha$											
		$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$																																					
$\sin \alpha =$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$																																					
$\cos \alpha =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$																																					
$\tan \alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\tan \alpha$	$\frac{1}{\cot \alpha}$																																					
$\cot \alpha =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$\cot \alpha$																																					

¹⁾ Der Rechner liefert die Funktionswerte direkt, z.B. ist $\sin(-660^\circ) = 0,866\ 025\ 403\ 8$

7 Mathematische Hilfen

37	Additions- Theoreme	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta;$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta;$ $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$ $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$ $\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$
38	Summen- formeln	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$ $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$ $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$ $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \sin\beta$ $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)$ $= \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha)$ $\frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \tan(45^\circ + \alpha)$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$ $\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$ $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cos\beta$ $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \sin\beta$ $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ + \alpha)$ $= \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha)$ $\frac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1} = \cot(45^\circ - \alpha)$

Sachwortverzeichnis

3-Kräfte-Verfahren 2
4-Kräfte-Verfahren 3

A

Abminderungsfaktor 30, 32
Abscherbeanspruchung 28
Abtriebsmoment 19
Additions-Theoreme 56
Amplitude 21
Antriebsmoment 19
Anzugsmoment 10
Arbeit 17, 50
–, mechanische 17
Arbeitsplan zum
Tragsicherheitsnachweis 31
arithmetisches Mittel 52
Auftriebskraft 25
Ausbreitungsgeschwindigkeit 23
Ausfluss 27
– aus Gefäßen 27
Ausflussgeschwindigkeit 27
Ausflusszahl 27

Ausflusszeit 27
Auslenkung 21, 23

B

Backenbremszaum 11
Bandbremszaum 11
Basiseinheiten 49 f.
Baustahl 39
Bernoulli'sche Druckgleichung 26
Beschleunigung 13, 16
Beschleunigungsarbeit 19 f.
Bewegung, gleichmäßig
beschleunigte geradlinige 13
– – verzögerte geradlinige 13
Bezugspunkt 2
Bezugsschlankeitsgrad 31
Biegebeanspruchung 29
–, Träger gleicher 38
Biegemoment 29, 34, 50
Biegeträger 34
Biegung 35
– und Torsion 33

– und Zug 33
Binomische Formel 52
Boden, gewölbter 24
Bodenkraft 25
Bogen 6, 54
Bogenhöhe 6, 54
Bogenlänge 53
Bogenmaß 49
– des ebenen Winkels 54
Bolzenverbindung 28
Brechungsgesetz 23
Brechungswinkel 23
Bremsband 11
Bremsen 11
Bremsmoment 11
Brems Scheibe 11

C
Celsius-Temperatur 51
Cremonaplan 4
Culmann'sche Gerade 4
Culmann'sches Schnittverfahren 4

D

Dauerbruchsicherheit im
 Maschinenbau 33
Dauerfestigkeitswert 33, 39
Dehnung 28
Dichte 17
– der Flüssigkeit 25
Division 52
Doppler-Effekt 23
Drehimpuls 51
Drehmoment 50
Drehwinkel 14, 16
Dreieck 53
Dreiecksschwerpunkt 5
Dreiecksumfang 6
Druck 24, 50
–, hydrostatischer 24
Druckbeanspruchung 28
Druckmittelpunkt 25
Druckstab 30
Durchbiegung 34, 38
Durchmesser, erforderlicher 29
Dynamisches Grundgesetz für
 Rotation 18
Dynamisches Grundgesetz für
 Translation 17

E

Eckenmaß 53
Einbahnverkehr 1
Einfallswinkel 23
Eingriffslinie 15
Eingriffswinkel 15
Einheit, abgeleitete 49
Einheitenzeichen 50
Einheitskreis 54
Einsatzstahl 39
elastischer Stoß 19
Elastizitätsmodul 39
Endgeschwindigkeit 13
Energie 50
– bei Rotation 20
Energieerhaltungssatz 19, 26
Erreger 23
Euler'sche Knickung 30
Eulerbedingung 30
Exponent 52

F

Fachwerk 4
Fahrwiderstand 12
Fahrwiderstandszahl 12
Fallhöhe 15
Faserschicht, neutrale 29
Federarbeit 17, 19
Federkraft 17
Federrate 17, 21, 22
Federweg 17
Feinkornbaustahl 39
feste Rolle 12

Festigkeitsrechnung, bevorzugte
 Maße 49
Festigkeitswerte für verschiedene
 Graugussorten 39
– – – Stahlsorten 39
– – – Walzstahl 39
Flächenmoment 29, 35
– 2. Grades 42
–, polarer 37
Flächenpressung 28, 50
Flächenpressung im Gewinde 28, 47
Flächenschwerpunkt 5
Flankendurchmesser 10, 28, 47, 48
Flankenwinkel des Gewindes 10
Fluidmechanik, Hydraulik 24
Flüssigkeitssäule 21
Flüssigkeitsvolumen 25
freier Fall 13
Frequenz 21
Führungslänge 9
Fünfeck 53
Fußkreisdurchmesser 15

G

Ganzzahl 48
geometrisches Mittel 52
Gesamtwirkungsgrad 17
Geschwindigkeitshöhe 27
gesetzliche Einheiten,
 Umrechnungsbeziehungen 50
Gewichtskraft 17
Gewindedurchmesser 48
Gewinde-Nenndurchmesser 47
Gewindereibungsmoment 10
Gewindesteigung 28
Gewindetiefe 47
Gleichgewichtsbedingung 3
Gleichgewichtskraft 1
Gleichung, quadratische 52
Gleitreibungszahl 7
Grenzschlankheitsgrad 30
griechisches Alphabet 51
Größe, translatorische und
 rotatorische 20
Größenbeiwert 33, 40
Grundfrequenz 23
Grundkreisdurchmesser 15
Guldin'sche Regel 6

H

Haftreibungskraft 7
Haftreibungswinkel 7
Haftreibungszahl 7
Halbkreisfläche 6
harmonische Schwingung 21
harmonische Welle 23
Hebebock, hydraulischer 24
Höhenenergie 19
Hooke'sches Gesetz 28
Hubarbeit 17

I

Impuls 17, 51
Impulserhaltungssatz 26
Impulserhaltungssatz für Drehung
 18
Impulskraft 26
I-Träger 44
IPE-Reihe 45

J

Joule 50

K

Keilreibungszahl 9
Keilwinkel 9
Kelvin 51
Kerbwirkung 33
Kerbwirkungszahl 33, 40
Kerndurchmesser 47, 48
Kernquerschnitt 48
Kessellängsnaht 24
Kilopond 50
kinetische Energie 19
–, Bewegungsenergie 19
Knickbeanspruchung 30
Knickkraft, Euler 30
Knicklänge 30, 31
Knicklängenbeiwert 31
Knickspannung 30
Knickspannungslinie 31, 32
Knickstab 31
Knickung 35
– im Stahlbau 30
Knoten 4
Kolbendurchmesser 24
Kolbenfläche 24
Kolbengeschwindigkeit 16
Kolbenkraft 24
Kolbenweg 16, 24
kommunizierende Röhren 25
Komponente 1
Kopfkreisdurchmesser 15
Körper, schwimmender 25
Körperinhalt (Volumen) 6
Kosekans 54
Kosinus 54
Kotangens 54
Kraft 50
Krafteck 3
Kräfteplan 1 ff.
Kräftesystem, zentrales 1
Kräftezug 2
Kraftweg 12
Kreis 53
Kreisabschnitt 54
– -Schwerpunkt 6
Kreisausschnitt-Schwerpunkt 6
Kreisbewegung, gleichförmige 14
–, gleichmäßig beschleunigte 14
–, gleichmäßig verzögerte 14

Kreisbogen 6
Kreisfrequenz 21
Kreisradius 54
Kreisring 53
Kreisringstück-Schwerpunkt 6
Kreissektor 53
Kreuzschubkurbelgetriebe,
Kreuzschleife 16
Kulissenstein 16
Kurbelradius 16
Kurzzeichen 50

L

Lageplan 1, 2, 3, 4
Lagerkraft 2
Lagerreibungskraft 10
Lageskizze 1, 2, 4
Längenausdehnungskoeffizient 51
Lastkolben 24
Lastweg 12
Leistung 50
Linien­schwerpunkt 6
Linienzug 5
Lochleibungsdruck 28, 41, 50
Lose Rolle 12
Lückenweite 15

M

Mantelfläche, (Oberfläche) 6
Massenmoment 18
Massenstrom 25
Mechanische Arbeit 17
– –, Leistung und Wirkungsgrad bei
Rotation 19
Metrisches ISO-Gewinde 47
Metrisches ISO-Trapezgewinde 48
Modul 15
Momentanbeschleunigung 21
Momentangeschwindigkeit 21
Momentengleichgewichtsbedingung
3
Momentensatz 2, 5
Mutterauflage 10
Mutterhöhe 28

N

Neigungswinkel 1
Newton 50
Newtonmeter 50
Niete 41, 46
Nietlochdurchmesser 46
Nitrierstahl 39
Normalkraft 9
– für verschiedene Walzprofile 32
Normfallbeschleunigung 17
Normgewichtskraft 17
Nutzarbeit 17

O

Oberfläche für Winkelstahl 42

Oberflächenbeiwert 33, 40
Oszillator 23

P

parallele Kraft 3
Parallelogramm 53
Parallelogrammschwerpunkt 5
Parallelverschiebung 1
Passschrauben 41
Pendelart 22
Pendelgleichung 22
Pendellänge 21
Periodendauer 21, 22
Phasenwinkel 21
Polpunkt 2
Polstrahl 2, 3
Polygon 52
Potenzen mit gebrochenen
Exponenten 52
potenzielle Energie, Höhenenergie
19
Presse, hydraulische 24
Presskraft 24
Prismenführung 9
–, symmetrische 9
Profilfläche 6
Profilschwerpunkt 42
Profilumfang 42

Q

Quadrantenlage 1
quadratische Gleichung 52
Querschnitt, erforderlicher 28
Querschnittswahl 32
Quotient 52

R

Radiant 54
rechter Winkel 54
Regelgewinde 47
Reibradius 10
Reibung, allgemein 7
– am Spurzapfen 10
– am Tragzapfen 10
– an der Schraube 10
– auf der schiefen Ebene 7
Reibungsarbeit 17
Reibungskraft 7, 9
Reibungsleistung 10
Reibungsmoment 10
Reibungswinkel 7
– im Gewinde 10
Reibungszahl 7, 49
Reißlänge 28
Resultierende 2
Rhombus 53
Richtgröße 21, 22
Richtungssinn 2
Richtungswinkel 1
Ringbreite 53

Ringvolumen 6
Ritter'sches Schnittverfahren 4
Rohr­durchmesser 46
Rohrlängsnaht 24
Rollbedingung 12
Rollenzug, Flaschenzug 12
Rollkraft 12
Rollreibung 12
Rotationsarbeit 19
Rotationsenergie 20
Rotationsleistung 19
Rückstellkraft 21, 22
Rückstellmoment 21, 22

S

Scheitelhöhe 15
Schenkelbreite 42
Schenkel­dicke 42
Schieber 16
Schieberweg, Auslenkung 16
Schlankheitsgrad 30, 31
Schlüsselweite 53
Schlusslinie 3
Schlusslinienverfahren 3
Schnittgeschwindigkeit 15
Schräger Wurf 15
Schraube 41, 45
Schrauben für Stahl- und Kesselbau
46
Schraubenfeder 21
Schraubenfederpendel 22
Schrauben­längskraft 10
Schubkurbelgetriebe 16
Schubmodul 28, 29, 39
Schubstangenlänge 16
Schubstangenverhältnis 16
Schwebungs­frequenz 21
Schwependel 21, 22
Schwer­punkt­abstand 5
Schwer­punkt­bestimmung 5
Sechseck 53
–, regelmäßiges 53
Sechstelkreisfläche 6
Sehnenlänge 54
Seileck 3
Seileckverfahren 2, 5
Seilreibung 10
Seilreibungskraft 10
Seilstrahl 2, 3
Seilzugkraft 10
Seitenkraft 25
Sekans 54
Selbsthemmung des
Schraub­getriebes 10
Selbsthemmungsbedingung 11
senkrechter Wurf 13
Sicherheit gegen Knicken 30
Sinus 54
Spannung, vorhandene 28
Spannungsenergie 19

Spannungsquerschnitt 47
 Spannungsverteilung 29
 Spurzapfenreibungszahl 10
 Stabkraft 4
 Stahlbau 30
 Stahlbauteile, zulässige Spannungen
 41
 Stahlbezeichnung 40
 Steigung 47, 48
 Steigungswinkel 47, 48
 Steigzeit 15
 Stoß 19
 Streckgrenze 32, 39
 Strömung, horizontale 26
 Stütze 30
 Stützkraft 34
 Stützkraftberechnung,
 programmierte 9
 Summenformel 56
 Systemlänge 31

T
 T-Träger 44
 Tangens 54
 Tangentialbeschleunigung 14
 Tangentialkraft 19
 Tangentialverzögerung 14
 Teilkreisdurchmesser 15
 Teilschwerachse 29
 Teilung 15
 Temperatur 51
 Temperaturintervall 51
 Tetmajergleichung 30
 Torsionsfeder 21
 Torsionsmoment 29, 50
 Torsionspendel 22
 Träger gleicher Biegebeanspruchung
 38
 Trägheitsmoment 18, 21, 22, 51
 Trägheitsradius 31, 35, 42
 Tragsicherheit 30
 –, Arbeitsplan 31
 – Hauptgleichung 30
 – Nachweis 30, 32
 Tragtiefe 28, 48
 Tragzapfenreibungszahl 10
 Translation 19
 –, Leistung 17

Trapez 53
 Trapezscherpunkt 5
 Triebkolben 24
 trigonometrische Funktion 55

U
 Überdruck 27
 Überlagerung 21
 – stehender Wellen 23
 Übersetzung 15
 Umfangskraft 10
 – am Gewinde 10
 Umrechnung zwischen Funktionen
 55
 Umschlingungswinkel 49
 U-Stahl 46

V
 Verdrängungsschwerpunkt 25
 Verdrehbeanspruchung, Torsion 29
 Verdrehwinkel 29
 Vergleichsmoment 33
 Vergleichsspannung 33
 Vergütungsstahl 39
 Verlängerung 28
 Verschiebekraft 9
 Verschiebesatz 18
 – von Steiner 29
 Verzögerung 13
 Vieleck 53
 Viereck 53
 Viertelkreisfläche 6
 Vollwinkel 54
 Volumenstrom 27
 Vorsatz 50
 Vorsatzzeichen 49
 Vorspannkraft 10

W
 waagerechter Wurf 15
 Wärme 51
 Wärmemenge 51
 Wärmespannung 28
 Wassersäule 50
 Wegabschnitt 13
 Welle, Auslöschung 23
 –, Schwächung 23
 –, Verstärkung 23

Wellendurchmesser 33
 Werte für $e^{\mu\alpha}$ 49
 Widerstandsmoment 29, 35, 42
 – für Torsion 37
 –, erforderliches 29
 –, polares 47, 48
 Winkel 54
 –, ebener 54
 –, negativer 55
 –, rechter 54
 Winkelbeschleunigung 14, 18
 Winkeleinheit 54
 Winkelstahl 42
 –, gleichschenkliger 42
 –, Oberfläche 42
 –, ungleichschenkliger 43
 Winkelverzögerung 14
 Wirkabstand 2
 Wirklinie 1
 Wirkungsgrad 17, 19, 24
 – der losen Rolle 12
 – des Rollenzugs 12
 –, Schraubgetriebe 10
 Wurf, schräger 15
 Wurfbahn 15
 Wurfweite 15
 Wurfzeit 15
 Wurzel-Definition 52

Z
 Zahndicke 15
 Zahnfußhöhe 15
 Zahnkopfhöhe 15
 Zapfenreibungszahl 10
 Zehnerpotenz 52
 Zeitabschnitt 13
 Zentrales Kräftesystem 1
 Zentripetalbeschleunigung 20
 Zentripetalkraft 20
 Zugbeanspruchung 28
 Zugfestigkeit 39
 zulässige Spannungen für
 Stahlbauteile 41
 – – – Verbindungsmittel 41
 – – im Kranbau 41
 – – im Stahlhochbau 41