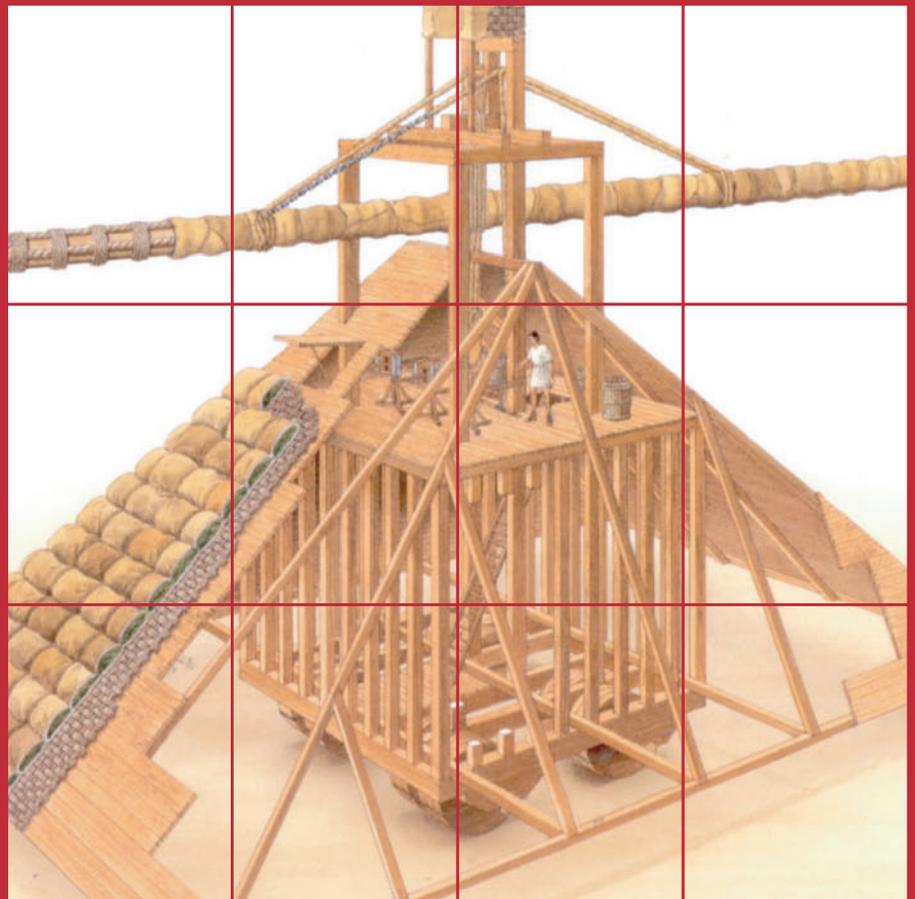


# MECÁNICA BÁSICA

## Fuerza y Movimiento

Lic. Lorenzo Iparraguirre



Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

---

Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

# MECÁNICA BÁSICA

## Fuerza y Movimiento

Lic. Lorenzo Iparraguirre

### ADVERTENCIA

La habilitación de las direcciones electrónicas y dominios de la web asociados, citados en este libro, debe ser considerada vigente para su acceso, a la fecha de edición de la presente publicación. Los eventuales cambios, en razón de la caducidad, transferencia de dominio, modificaciones y/o alteraciones de contenidos y su uso para otros propósitos, queda fuera de las previsiones de la presente edición -Por lo tanto, las direcciones electrónicas mencionadas en este libro, deben ser descartadas o consideradas, en este contexto-.

---

Distribución de carácter gratuito.

---

a u t o r i d a d e s

PRESIDENTE DE LA NACIÓN

**Dra. Cristina Fernández de Kirchner**

MINISTRO DE EDUCACIÓN

**Dr. Alberto E. Sileoni**

SECRETARIA DE EDUCACIÓN

**Prof. María Inés Abrile de Vollmer**

DIRECTORA EJECUTIVA DEL INSTITUTO NACIONAL DE  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA

**Lic. María Rosa Almandoz**

DIRECTOR NACIONAL DEL CENTRO NACIONAL DE  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA

**Lic. Juan Manuel Kirschenbaum**

DIRECTOR NACIONAL DE EDUCACIÓN TÉCNICO PROFESIONAL Y  
OCUPACIONAL

**Ing. Roberto Díaz**

Ministerio de Educación.  
Instituto Nacional de Educación Tecnológica.  
Saavedra 789. C1229ACE.  
Ciudad Autónoma de Buenos Aires.  
República Argentina.  
2009

---

# MECÁNICA BÁSICA

## Fuerza y Movimiento

Lic. Lorenzo Iparraguirre



Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

Colección "Las Ciencias Naturales y la Matemática".  
Director de la Colección: Juan Manuel Kirschenbaum  
Coordinadora general de la Colección: Haydeé Noceti.

Queda hecho el depósito que previene la ley N° 11.723. © Todos los derechos reservados por el Ministerio de Educación - Instituto Nacional de Educación Tecnológica.

La reproducción total o parcial, en forma idéntica o modificada por cualquier medio mecánico o electrónico incluyendo fotocopia, grabación o cualquier sistema de almacenamiento y recuperación de información no autorizada en forma expresa por el editor, viola derechos reservados.

Industria Argentina

ISBN 978-950-00-0706-1

**Director de la Colección:**  
Lic. Juan Manuel Kirschenbaum  
**Coordinadora general y académica de la Colección:**  
Prof. Ing. Haydeé Noceti  
**Diseño didáctico y corrección de estilo:**  
Lic. María Inés Narvaja  
Ing. Alejandra Santos  
**Coordinación y producción gráfica:**  
Tomás Ahumada  
**Diseño gráfico:**  
María Victoria Bardini  
Augusto Bastons  
**Ilustraciones:**  
Diego Gonzalo Ferreyro  
Federico Timerman  
**Diseño de tapa:**  
Tomás Ahumada  
**Administración:**  
Cristina Caratozzolo  
Néstor Hergenrether

**Iparraguirre, Lorenzo**  
Mecánica básica: fuerza y movimiento / Lorenzo Iparraguirre; dirigido por Juan Manuel Kirschenbaum.  
- 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2009.  
244 p.: il.; 24x19 cm. (Las ciencias naturales y la matemática / Juan Manuel Kirschenbaum.)

ISBN 978-950-00-0706-1

1. Física.
  2. Enseñanza Media.
- I. Kirschenbaum, Juan Manuel, dir.  
II. Título

CDD 530.712

Fecha de catalogación: 06/07/2009

Nuestro agradecimiento al personal del Centro Nacional de Educación Tecnológica por su colaboración.

Impreso en Anselmo L. Morvillo S. A., Av. Francisco Pienovi 317 (B1868DRG), Avellaneda, Pcia. de Buenos Aires, Argentina.

Tirada de esta edición: 100.000 ejemplares



***Lic. Lorenzo Marcos  
Iparraguirre***

---

### ***El Autor***

Lorenzo Marcos Iparraguirre es Licenciado en Física recibido en el Instituto (actualmente Facultad) de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF), de la Universidad Nacional de Córdoba.

Luego de formarse en el Grupo de Resonancia Magnética Nuclear, y tener algunas participaciones en el de Relatividad General y Gravitación, se ha desempeñado esencialmente en el Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología, desarrollando investigaciones sobre las dificultades de comprensión de los conceptos de física e innovaciones en metodologías y procesos de enseñanza de la física para alumnos de otras carreras.

Actualmente se desempeña como Profesor Asociado de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF) a cargo de la enseñanza de física para alumnos de primer año de la Facultad de Ciencias Químicas, y cursa su doctorado en un tema de electrodinámica cuántica.

# ÍNDICE

## Capítulo 1

<b>Introducción al estudio de la física</b>	8
• 1.1. Ideas acerca de la ciencia	8
• 1.2. Materia, espacio y tiempo	13
• 1.3. Estados de la materia	19
• 1.4. Unidades, dimensiones y notación	24
Ejercicios	28

## Capítulo 2

<b>Posiciones, movimientos y vectores</b>	29
• 2.1. Ideas fundamentales acerca del movimiento y las fuerzas	29
• 2.2. Vectores	36
Ejercicios	49

## Capítulo 3

<b>Fuerzas y tensiones mecánicas</b>	53
• 3.1. Ideas básicas sobre las fuerzas	53
• 3.2. Fuerzas de contacto	68
• 3.3. Fuerzas de gravedad	72
Ejercicios	80

## Capítulo 4

<b>Principios de la dinámica</b>	85
• 4.1. Movimiento lineal	85
• 4.2. Los principios de la dinámica	91
• 4.3. Interpretación	98
Ejercicios	106

## Capítulo 5

<b>Movimientos lineales básicos</b>	111
• 5.1. Discusión general básica	111
• 5.2. Movimientos rectilíneos	114
Ejercicios	127

## Capítulo 6

<b>Trabajo y energía</b>	133
• 6.1. Trabajo mecánico	133
• 6.2. Teorema del trabajo y la energía cinética	136
• 6.3. Sistemas con fuerzas conservativas	140
• 6.4. Movimiento de presencia de fuerzas conservativas y no conservativas	146
• 6.5. Conservación de la energía y primer principio de la termodinámica	153

---

• 6.6. Potencia mecánica	155
Ejercicios	159
<b>Capítulo 7</b>	
<b>Dinámica de las rotaciones</b>	165
• 7.1. Generalidades sobre el movimiento de rotación	165
• 7.2. Movimiento de una fuerza con respecto a un eje	167
• 7.3. Leyes de la dinámica de la rotación pura	170
• 7.4. Rotación más traslación	180
Ejercicios	183
<b>Apéndice 1</b>	
Notación exponencial y cifras significativas	186
<b>Apéndice 2</b>	
Tipos de esfuerzo y tensiones	188
<b>Apéndice 3</b>	
Centro de masa	191
<b>Apéndice 4</b>	
Movimiento oscilatorio armónico	193
<b>Apéndice 5</b>	
El trabajo de las fuerzas interiores	197
<b>Apéndice 6</b>	
Principio de conservación de la energía	199
• A6.1. Algunas ideas fundamentales acerca de la energía	199
• A6.2. La revolución industrial y las máquinas de trabajar	201
• A6.3. Ideas acerca del calor	202
• A6.4. La conservación de la energía	204
<b>Apéndice 7</b>	
Vectores axiales	206
<b>Apéndice 8</b>	
Movimiento orbital	209
Resoluciones, desarrollos y comentarios	211

---

# Introducción al estudio de la física

En este capítulo presentaremos algunas ideas fundamentales sobre la forma en que trabaja la Ciencia, revisando especialmente las que se refieren a la física para sugerir una postura con la que abordar su estudio.

Luego pasaremos a una descripción de la materia como primer paso en el estudio del mundo que nos rodea. Desarrollaremos aquí una definición de masa con la que podremos comenzar a trabajar, y una reflexión sobre aspectos macroscópicos y microscópicos de los estados sólido, líquido y gaseoso.

Finalmente, presentaremos el Sistema Internacional de Unidades (SI), y trataremos detalles prácticos relacionados con las unidades, la notación y la escritura de cifras, necesarios para iniciar cualquier tarea que requiera la utilización de cálculos.

## ■ 1.1. Ideas acerca de la ciencia

A lo largo de este libro de física estudiaremos y revisaremos las ideas fundamentales sobre el movimiento de los cuerpos, un tema que ha sido clave en el desarrollo de la ciencia.

Actualmente, muchas ramas de muchas ciencias están intrincadamente mezcladas e interrelacionadas. Es difícil decir dónde terminan ahora las incumbencias de una ciencia, en particular de la física. Además sería empobrecedor considerar que su principal objeto de estudio es el movimiento de las cosas.

Pero es útil tener en cuenta que muchos de los conceptos que veremos en estas páginas, como los de vector, de trabajo, o de energía, fueron elaborados para resolver problemas, o explicar aspectos de movimientos, y son fundamentales en cualquier rama de la física actual.

Los conceptos fueron *elaborados*, dice el párrafo anterior, y eso es una característica básica de la ciencia: los conceptos *no están en la naturaleza*, no pueden ser hallados observando los fenómenos, sino que son ideas que elaboramos para *interpretar* lo que observamos.

El ser humano tiende por su propia naturaleza a interpretar los sucesos del mundo tratando de entenderlos. Para ello, su mente genera ideas que organiza como *modelos* y *teorías* que le permitan explicar los hechos observados.

Cuando una persona observa un *hecho* de la realidad, es decir cualquier tipo de cosa que suceda, a través de sus sentidos capta *datos*, que constituyen *información*. Luego incorpora esta información a un modelo de una situación que, de manera más o menos consciente, construye. Los modelos son construcciones mentales que se refieren a una parte de la realidad, que se aísla (imaginariamente) del resto, para entenderla.

Podría decirse que frente a un fenómeno observado, la persona sólo puede organizar y manejar sus ideas haciendo una especie de recorte de la realidad, selecciona *todos los elementos que considera relevantes* para entender o explicar ese fenómeno, y descarta el resto.

Al decidir qué es lo que interesa y qué es lo que no, el observador está construyendo un modelo, al que además le impone (consciente o inconscientemente) *leyes y reglas de funcionamiento*, de la manera que él considera que representan mejor a la realidad. Todo este sistema de leyes y reglas que regulan la relación entre las ideas o los conceptos, constituye una teoría (no siempre explícita) que el observador posee y utiliza.

Puede considerarse que cada modelo conforma una teoría particular y que el conjunto de muchos modelos constituye una gran teoría. Generalmente aparecen contradicciones internas en una gran teoría cuando se trata de armonizar modelos de muchas situaciones o hechos particulares. Cada persona busca *coherencia* en su forma pensar las diferentes situaciones, pero la coherencia total es un *ideal* inalcanzable, al que algunos logran aproximarse más y otros menos.

De todos modos, con sus aciertos y contradicciones, son las teorías y los modelos los que permiten organizar los datos que el ser humano recibe continuamente del mundo exterior por vía de sus diferentes sistemas de percepción. Así, los datos no se almacenan de manera caótica o desordenada, sino que se organizan en un *cuero de conocimientos* donde poseen significados.

Cada persona organiza continuamente sus percepciones por medio de la modelización y teorización, para disponer de su propio conocimiento y decidir sobre su propia conducta, sin ser necesariamente consciente de gran parte del proceso.

Una parte fundamental de la resolución de cualquier problema, y de la comprensión de cualquier tema, consiste en saber modelizarlo, recortándolo adecuadamente del resto, decidiendo qué es lo relevante y qué no lo es para él. Este libro propondrá mucha ejercitación con ese tipo de actividades.

## Conocimiento común y conocimiento científico

Así, las personas en su vida cotidiana construyen lo que se denomina *conocimiento común*, o *conocimiento de sentido común*. Este conocimiento aspira a ser racional y objetivo, pero está limitado en sus posibilidades, esencialmente porque en la vida cotidiana es importante la economía de esfuerzos, por lo que el conocimiento común busca *certezas*, y se detiene cuando juzga que las alcanzó en grado suficiente. No se pueden evitar totalmente las incoherencias entre ámbitos muy diferentes en los que deba aplicarse, porque no bastaría toda la vida (ni muchas vidas) para organizar a tal punto el sistema de ideas de cualquier ser humano.

El conocimiento que logra superar estas limitaciones del pensamiento individual cotidiano es el conocimiento *científico*, que se construye *colectivamente* con los llamados procedimientos científicos.

Allí donde el conocimiento común se detiene (porque ha logrado una imagen o modelo suficientemente satisfactorio de algo observado) se inicia el conocimiento científico.

Los enunciados científicos son públicos e independientes de quien los produce. Una parte importante del sistema científico actual es el sistema de comunicación y circulación del conocimiento.

En él, muchas personas cuestionarán cualquier imagen o modelo de manera cada vez más profunda e insistente, hasta encontrar discrepancias que impulsarán la generación de ideas para mejorar la teoría.

Mientras que el conocimiento común trata de que no aparezcan contradicciones o incoherencias, el conocimiento científico provoca por todos los medios posibles que aparezcan para lograr que el cuerpo teórico mejore y avance.

Así, el cuerpo teórico es el *núcleo central de la ciencia*, pero no es independiente de la realidad, sino que sus consecuencias (en cada modelo particular) deben someterse a *contrastación experimental*, es decir, compararse con resultados de experimentos.

La ciencia crece a partir del conocimiento común, pero lo supera y llega a ser una forma diferente de conocimiento. Logra un grado superior de objetividad porque sus enunciados son *impersonales*, y se someten a contrastación experimental: todo enunciado científico debe ser *verificable con independencia del agente*. Los resultados obtenidos por un científico se publican y pasan a ser patrimonio de toda la comunidad.

El conocimiento común se contenta cuando puede explicar los datos que se posee, en cambio, cuando el conocimiento científico ha logrado explicar los datos conocidos, considera que es el momento de predecir los datos que corresponderán a nuevas situaciones que aún no han ocurrido, que habrá que imaginar, y habrá que producir, en experimentos que pongan a prueba las teorías para que avancen.

Así, una teoría nunca estará definitivamente terminada, pero se irá ajustando de manera de dar cuenta de los hechos de un modo cada vez más adecuado.

El conocimiento científico no avanza siempre de manera suave y uniforme. De vez en cuando, muy rara vez pero sucede, todo comienza a andar mal: el cuerpo teórico resulta incapaz de explicar una cantidad cada vez mayor de fenómenos nuevos, y fracasan los intentos de mejorar las teorías. Después de andar un tiempo a los tropezos se produce una especie de *revolución científica*, y se llega a la necesidad de cambiar radicalmente las nociones más básicas, las que se consideraban más seguras y de las que nadie hubiese dudado.

Si bien esto sucede alguna vez (en las notas 1: idealismo y realismo, y 2: ciencia en crisis y ciencia normal, citamos algunos casos), no es la forma normal en que marcha la ciencia. En los períodos de *ciencia normal*, que constituyen la mayor parte, los científicos no trabajan tratando de destruir la teoría, ni de descubrirle grandes falencias, ni tratando inventar o descubrir grandes leyes y principios nuevos; sino que cada uno trabaja en su campo de interés, a veces un campo reducido, aplicando la teoría que está en marcha y que se considera aceptada por la comunidad científica. Es cierto que continuamente se superan escollos que surgen, pero que no se considera que pongan en peligro el núcleo central. Lo normal es que el trabajo de los científicos consista en aplicar la ciencia conocida y aceptada a los *problemas que deben resolver*. En ese proceso la ciencia avanza enriqueciéndose con los aportes de toda la comunidad científica.

Tanto en la ciencia como en el conocimiento común, gran parte de lo que se descubre depende de las preguntas que se formulen. Aunque todo lo que consideremos válido hoy podrá ser modificado mañana, aún en las etapas de cambios catastróficos necesitamos tener claras las ideas de hoy, para poder hacer preguntas, y entender lo que surja mañana. El conjunto de ideas que la ciencia deseche, *será cuestionado y desechado con las herramientas mismas de la ciencia.*

En este sentido, digamos que la ciencia afirma sobre sí misma que es más verdadera que cualquier modelo no científico del mundo, porque *tiene incorporados los mecanismos para:*

- probar su pretensión de verdad, sometiéndola a contrastación empírica;
- descubrir sus propios errores y deficiencias, y
- corregir sus propios errores y deficiencias.

Por otra parte, no podemos terminar estos comentarios sin aclarar que todo lo dicho se refiere especialmente a las ciencias llamadas *fácticas*, o *factuales* (de *facto*, que significa *hecho*).

Lo factual o empírico, es lo que nuestras percepciones o aparatos registran como datos o información. Es lo observado y lo medido. Las ciencias factuales son las que se refieren a los hechos, ya sean teóricas o experimentales, ya sean naturales, o sociales, estas ciencias *construyen teorías que se refieren a cosas del mundo*, a hechos. Todos sus enunciados pueden y deben ser contrastados empíricamente para verificarlas. Verificación que, por lo que ya hemos dicho, siempre es provisoria.

Existen también las ciencias formales, como la lógica o la matemática. Éstas son autosuficientes, y no dependen del resultado de experimentos. Podría decirse que estudian *la forma de las ideas*.

Para que se entienda, a modo de ejemplo, un enunciado de una ciencia formal podría ser: “Si todos los elementos A son azules, y todos los B no lo son, entonces ningún B puede ser A”.

Otro enunciado, un poco menos elemental sería (suponiendo que ya se ha definido lo que significa número natural, número par, y el signo  $\times$ ):

“Si a es un número par, y b es cualquier número natural, entonces  $a \times b$  es un número par”.

Estos ejemplos muestran afirmaciones que no pueden ser contradichas por ningún experimento, y aclaran el papel que puede jugar la matemática en la física. Cuando se elaboran razonamientos para tratar algún tema de física (y de cualquier ciencia factual), se manejan con las reglas de la ciencia formal.

Las ciencias factuales necesitan de las ciencias formales para manipular su núcleo teórico.

En este libro requeriremos de numerosas herramientas de la matemática. Los elementos matemáticos, que son el objeto de conocimiento para los estudiosos de esa ciencia, serán herramientas de uso obligatorio para nosotros, en el estudio de nuestros propios objetos de conocimiento, los conceptos de la física.

La ciencia esencialmente resuelve problemas, gran parte del conocimiento surge en respuesta a preguntas y problemas.

Galileo GALILEI (1564-1642), considerado padre del método experimental, o sea, de la ciencia moderna, escribió:

... La Filosofía está escrita en ese gran libro del universo, que está continuamente abierto ante nosotros para que lo observemos. Pero el libro no puede comprenderse sin que antes aprendamos el lenguaje y alfabeto en que está compuesto. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras. Sin ese lenguaje, navegamos en un oscuro laberinto.

## Nota 1. Idealismo y realismo

*El punto de vista idealista extremo sostiene que sólo podemos conocer nuestro mundo interior y que la existencia del mundo exterior, independiente del sujeto que conoce, no es una verdad demostrable. El pensamiento platónico (de PLATÓN, 427-347aC) sostiene que el mundo real es el mundo de las ideas, mientras que el mundo exterior es una apariencia no demostrable.*

*Esto no significa que los antiguos griegos fuesen delirantes, sino que eran grandes pensadores, capaces de llevar los refinamientos del razonamiento hasta los extremos, aún en contra del sentido común (que también conocían a la perfección). SÓCRATES (469-399aC), de quien PLATÓN fue discípulo, sostenía ideas más parecidas a las de este libro: reconocía que no podía demostrarse la existencia de una realidad exterior al sujeto, pero apelaba al sentido común para justificar su creencia en dicha existencia.*

*Dentro del pensamiento científico hay muchas corrientes filosóficas, aunque puede decirse que se acepta mayoritariamente el punto de vista racionalista, según el cual si existe una realidad exterior al sujeto, es posible llegar a conocer aspectos de esa realidad, y es posible mejorar dicho conocimiento por medio de la investigación científica.*

## Nota 2. Ciencia en crisis y ciencia normal

*La tarea científica es una aventura apasionante y creativa, con sorpresas esperando en cada recodo del camino.*

*En ciertas ocasiones, el cuerpo teórico resulta incapaz de explicar una cantidad cada vez mayor de fenómenos nuevos y, aunque fracasen todos los intentos por mejorarlo, no se puede abandonar una teoría hasta tener otra que la reemplace. Así es que, por un tiempo, todo anda mal. El edificio de la ciencia entra en crisis. Se ensayan ideas nuevas, y puede ocurrir que se tengan que cambiar las nociones más básicas, y que se deban pensar nuevas formas de interpretar las cosas.*

*El filósofo de la ciencia Thomas KHUN (1922-1996) bautizó a esos periodos como de “revolución científica”.*

*Uno de esos periodos, la “revolución copernicana”, tuvo mucho que ver con el surgimiento de las teorías que estudiaremos. En esa ocasión, se tuvo que abandonar el modelo geocéntrico (geos: Tierra, centro del universo), adoptado desde hacía más de 15 siglos por la ciencia europea, y reemplazarlo por el heliocéntrico (helios: Sol, centro del universo) de Nicolás COPÉRNICO (1473-1543). Ahora bien, la idea de que la Tierra estaba inmóvil en el centro del universo, era la base de toda una gran teoría según la cual todo el universo había sido creado para la contemplación del hombre, que vivía en un planeta lleno de males e imperfecciones, rodeado de un cielo con cuerpos celestes de naturaleza perfecta, inmutables e incorruptibles. Había una teoría física para lo que sucedía en la Tierra y otra, absolutamente diferente, para los cuerpos celestes.*

*Las nuevas ideas heliocéntricas obligaron a cambiar todo lo que se consideraba importante. El hombre dejó de verse como el centro de la creación, y se vio arrastrado por el espacio en un cuerpo de la misma naturaleza que los demás astros, que por lo tanto, no debían considerarse diferentes ni perfectos, y estarían sujetos a las mismas leyes y contingencias que los objetos terrestres. No fue fácil esa época para muchos científicos o pensadores. Hoy cuesta comprender la dimensión de las conmociones que producían estas ideas, pero más de uno fue a la hoguera por sostenerlas.*

*Otra revolución notable tuvo lugar a comienzos del siglo XX. Hubo que cambiar las nociones de espacio y tiempo (“Teoría de la Relatividad”) y, a la vez, entender que había átomos, explicar cómo eran, y asumir que los objetos del mundo subatómico no se podían pensar de la misma manera que los macroscópicos (“Teoría Cuántica”). Nadie fue incinerado esta vez, pero los físicos sintieron que todo lo que entendían se había quemado en una hoguera.*

*Valga como anécdota mencionar que en cierta ocasión el físico alemán Wilhelm WIEN (aprovechando para alardear que Albert EINSTEIN, creador de la teoría de la relatividad, también era alemán) le dijo a Ernest RUTHERFORD (neozelandés que había logrado explicar cómo era el átomo): “lo que sucede es que ustedes, los anglosajones, no pueden comprender la relatividad”. A lo que éste respondió: “realmente no, somos demasiado sensatos”.*

## ■ 1.2. Materia, espacio y tiempo

Vivimos en un mundo de materia que llamamos *mundo físico*. En el mundo físico *existe la materia*. En él nosotros, que somos de materia, existimos, nos movemos, pensamos y sentimos.

Cuando pensamos elaboramos conceptos, ideas e interpretaciones. Consideramos que las ideas existen, aunque no físicamente. Decimos que existen en un mundo especial, no físico, *el mundo de las ideas*. En ese mundo se encuentran los valores, los conceptos y las teorías, que no tienen existencia física porque carecen de materia.

Podemos imaginar ideas que existan fuera del tiempo, aunque éste transcurre mientras las imaginamos porque somos de materia. Como todo lo material, estamos sujetos al transcurso del tiempo.

La física no intenta definir qué es el tiempo, pero sí medir como transcurre, y definir unidades y métodos para hacerlo correctamente. En cada situación física que analicemos deberemos considerar el tiempo, aunque no nos interesaremos en las especulaciones filosóficas sobre su naturaleza. En general, deberemos distinguir cuando hablamos de un *instante de tiempo*, que indica cuándo ocurrió un suceso, de cuando hablamos de un *intervalo de tiempo* transcurrido desde un instante que se considera inicial, hasta otro que se considera final.

En el nivel en que desarrollaremos los temas de este libro, nos será útil y suficiente, la idea más simple, según la cual el espacio se concibe como un escenario en el cual transcurre el tiempo de manera uniforme, mientras la materia evoluciona, se mueve, o se transforma de muy diversas maneras.

Proponemos recorrer algunas ideas acerca de cómo está constituida la materia para entender, un poco, el origen de tanta diversidad en las formas que adopta.

### La materia está formada por átomos

Los filósofos de la Grecia antigua, en un plano meramente especulativo, enunciaron que la materia estaba formada por partículas indivisibles: *átomos* (en griego). Esta concepción, debida esencialmente a DEMÓCRITO (siglo V aC.), posteriormente fue abandonada y reemplazada por las ideas de ARISTÓTELES (384-322 aC.), según las cuales el mundo material se explicaba por la existencia de *cuatro elementos* fundamentales: *tierra, aire, fuego y agua*, capaces por sí solos de dar cuenta de todo lo existente. Estos elementos estaban sometidos a la acción de dos *fuerzas*: la *gravedad*: “tendencia de la tierra y del agua a hundirse”, y la *ligereza*: “tendencia del aire y el fuego a ascender”. La materia era considerada de naturaleza continua, y por lo tanto no existía un límite físico que impidiera dividir un trozo de cualquier material en porciones cada vez menores hasta el infinito.

Muchos siglos después, los iniciadores de la química moderna llegaron a conclusiones

“El tiempo sólo es tardanza de lo que está por venir.”

Martín Fierro

similares a las de los primitivos filósofos griegos, pero sobre la base de una serie de observaciones experimentales. Robert BOYLE (1626-1691) supo aprovechar la información acumulada por los alquimistas e interpretarla fuera del contexto mágico de la Alquimia. Mediante experimentos hábilmente diagramados, que interpretó muy cuidadosamente, pudo desarrollar un cuerpo conceptual lo suficientemente poderoso para oponerse a las ideas aristotélicas ampliamente difundidas en su época y aceptadas oficialmente como la expresión definitiva de una única verdad.

Luego de los trabajos de BOYLE, y gracias a un cúmulo de investigaciones (algunas realizadas por él y muchas por otros científicos, entre ellos LAVOISIER) John DALTON (1766-1844) enunció en 1808 su famosa *teoría atómica*, piedra fundamental de la química moderna. Se inició entonces la gran aventura de descifrar los enigmas atómicos, aventura que está lejos de haber concluido.

## ● Ideas elementales actuales sobre el átomo

En una descripción elemental podemos decir que el átomo está constituido por protones y neutrones agrupados apretadamente en un núcleo, y electrones que por su rápido movimiento alrededor del mismo configuran una *nube* (o *corteza*) electrónica. Esta nube constituye lo que, de alguna manera, se considera su “cuerpo”.

Los protones son partículas con carga eléctrica positiva, que agrupados con los neutrones, denominados así precisamente por ser neutros, hacen que en el núcleo del átomo esté la carga positiva. Los electrones son las partículas negativas del átomo, retenidas por la atracción eléctrica del núcleo.

La carga eléctrica es una propiedad fundamental de electrones y protones, y aquí nos interesaremos sólo en una de sus leyes básicas: las partículas con carga de signo opuesto se atraen y las del mismo signo se repelen. Esta propiedad no basta para entender el funcionamiento de cualquier aparato eléctrico moderno, pero sí para entender que el núcleo del átomo atrae y mantiene “cautivos” a sus electrones, y que ésa es la razón primera que fundamenta la existencia de los átomos y de la materia tal como la conocemos.

Cada electrón tiene exactamente tanta carga como un protón, pero de signo opuesto. De manera que el átomo logra la neutralidad eléctrica rodeándose de tantos electrones en la nube o corteza negativa, como protones haya en el núcleo.<sup>1</sup>

El núcleo condensa en una región inimaginablemente pequeña (un punto, comparado con el átomo) casi toda la masa de éste, distribuida entre neutrones y protones, ambos de

---

<sup>1</sup>De la misma manera que lo hace cada átomo, los grupos de átomos, ya sean moléculas o cuerpos macroscópicos, logran la neutralidad eléctrica cuando el número total de sus electrones iguala al número total de los protones de sus núcleos. Mientras un átomo o grupo de átomos no ha logrado la neutralidad, tiene carga eléctrica de algún signo, y se denomina ion (negativo si hay electrones de más, y positivo en caso contrario). La carga de un ion se manifiesta con fuerzas eléctricas atractivas para las partículas de signo contrario, y repulsivas para las del mismo signo. Éste es el mecanismo por el cual la materia tiende a la electroneutralidad.

masas casi iguales. La carga positiva de este núcleo mantiene un cuerpo negativo constituido por los livianos electrones a su alrededor en un movimiento rapidísimo, también inimaginable. Las nubes electrónicas de los átomos vecinos son las partes que entran en “contacto”, por llamarlo de alguna manera, cuando los átomos vecinos se aproximan, y tienen cierto grado de estructura que determina las uniones químicas que pueden ocurrir entre ellos.

Los electrones, protones y neutrones de un átomo son iguales a los correspondientes electrones, protones y neutrones de otro. Las diferentes propiedades químicas de los elementos se deben a las diferentes estructuras de sus nubes electrónicas, y no a que sus partículas constituyentes difieran en algo.

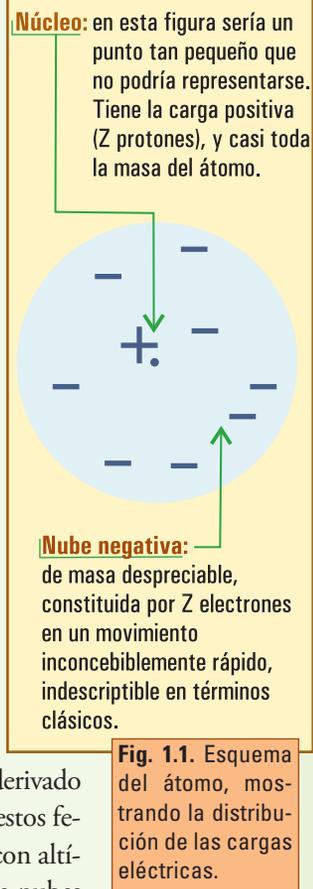
Los neutrones son necesarios en el núcleo para mantener unidos los protones entre sí, por medio de la llamada “fuerza nuclear”, a pesar de las fuerzas eléctricas repulsivas entre ellos, que a tan cortas distancias se hacen intensísimas. Contribuyen a la masa del núcleo pero no a las fuerzas eléctricas, y en consecuencia no influyen sobre la nube electrónica, ni sobre las propiedades químicas del átomo.

La estructura del núcleo no es afectada por fenómenos mecánicos, térmicos, ni químicos, ya que los golpes o vibraciones sólo producen leves tensiones o deformaciones de las nubes electrónicas que unen los átomos entre sí, las altas temperaturas corresponden, en lo microscópico, simplemente a vibraciones mecánicas de los átomos y moléculas, y las reacciones químicas implican modificaciones un poco más profundas de la estructura de las nubes electrónicas, pero de ninguna manera llegan al núcleo. Los fenómenos que afectan al núcleo se denominan “radiativos”, nombre derivado de la “actividad del radio”, primer elemento radiactivo que se aisló e identificó. En estos fenómenos, que no vamos a estudiar, núcleos inestables estallan lanzando partículas con altísima energía, que pueden viajar a través de la materia atravesando miles y miles de nubes electrónicas hasta chocar con algún núcleo, y afectarlo de muchas maneras.

Como la estructura del núcleo es absolutamente inalterable para todos los fenómenos usuales (mecánicos, térmicos, eléctricos, y químicos), también es inalterable el número de protones que contiene el núcleo. Dado que de ese número depende la nube electrónica, y de ella las uniones químicas, resulta un número fundamental para el átomo, que se designa como *número atómico*, y se representa con “Z” en todos los textos. Cuando en 1913 se lo pudo determinar para cada elemento químico, se encontró que era el número por el cual ya en 1869 Dimitri MENDELEEV había ordenado los elementos en la “Tabla de Propiedades Periódicas de los Elementos Químicos”, o “Tabla Periódica”.

Hasta ahora se han descrito 109 elementos químicos diferentes. Noventa y uno<sup>2</sup> de

<sup>2</sup>Si ordenamos a los elementos por su número atómico, podemos decir que en la naturaleza se encontraron desde el elemento 1 (hidrógeno), hasta el 92 (uranio). Los elementos tecnecio (43) y promecio (61) sólo se hallaron en el Sol. Hace muy poco se detectaron trazas del elemento número 94, plutonio, en rocas del sur de California, con lo que se llega al número de 91 elementos naturales en la Tierra. Por otra parte, artificialmente se logró producir los elementos “transuránicos”, desde el número atómico 93 hasta el 110, con excepción del 108 que aún no ha sido detectado. Esto hace el total de los 109 elementos químicos conocidos.



Una molécula es un grupo eléctricamente neutro de átomos ligados entre sí por fuerzas atractivas. Es la partícula más pequeña de sustancia que posee las propiedades químicas de dicha sustancia.

ellos se identificaron como constituyentes de la atmósfera, la corteza terrestre, los océanos y la biosfera, y tienen distribución *universal*. El resto se sintetizó en el laboratorio, aunque también se detectaron algunos de ellos en otras regiones del Universo. Protones, neutrones y electrones con las mismas características se unen según las mismas leyes aquí y en todas partes, para formar todo lo material que podemos observar a nuestro alrededor y hasta los confines del Cosmos, incluidos nosotros mismos.

En un intervalo restringido de temperaturas, limitado a algunos lugares relativamente tranquilos y fríos del Cosmos como las regiones planetarias de nuestro Sistema Solar, o las nubes gaseosas interestelares, los átomos son muy estables y pueden agruparse formando **moléculas**.

Para que exista una molécula, los átomos que la constituyen deben estar unidos por fuerzas más intensas que las que actúan entre ellos y los átomos de las moléculas vecinas. También se dan casos de moléculas de un solo átomo, y casos en los cuales el término molécula no tiene sentido.

La mayoría de las 109 clases de átomos disponibles en nuestro planeta se combinan entre sí dando lugar a la formación de varios millones de moléculas diferentes. Veamos algunos ejemplos:

- los gases nobles, como el helio y el argón, están formados por átomos no ligados, es decir moléculas *monoatómicas*;
- los *átomos de oxígeno* pueden agruparse de a dos, formando las *moléculas de gas oxígeno*  $O_2$ , imprescindible para las formas superiores de vida; o de a tres  $O_3$  formando el gas tóxico *ozono*;
- los átomos de oxígeno pueden unirse casi con todos los demás, formando una enorme variedad de sustancias minerales (inorgánicas) y orgánicas. Tal vez la más importante de todas sea el agua  $H_2O$ . Las moléculas más complejas pueden tener muchos átomos, miles de átomos, como en el caso de las proteínas y otras *macromoléculas*;
- otras veces los átomos tienden a ordenarse en redes tridimensionales donde todos están unidos entre sí, como ocurre en los metales. En estos casos no tiene lugar el término “molécula”.

Las moléculas pueden transformarse en otras moléculas a través de *reacciones* o *transformaciones químicas*. En estos procesos los átomos transitan de molécula en molécula sin “gastarse” nunca: son indivisibles e inmutables -al menos a las temperaturas relativamente bajas que encontramos en la Tierra y en cualquier ambiente planetario tranquilo.

Las transformaciones químicas se limitan simplemente a “desarmar” moléculas para “armar” otras nuevas. Los átomos se intercambian entre posiciones claves, y se conservan absolutamente inalterados los núcleos atómicos de los cuales, a través de su capacidad para actuar sobre la corteza electrónica, depende la identidad de cada elemento químico.

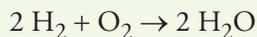
### Nota 3. Somos polvo de estrellas

Cada bocanada de aire que ingresa a nuestros pulmones contiene, además de otros gases, aproximadamente  $3 \times 10^{21}$  moléculas de oxígeno ( $O_2$ ), o sea  $6 \times 10^{21}$  átomos del elemento oxígeno. Esas moléculas se formaron por fotosíntesis en cualquier célula con clorofila: en las hojas de un árbol vecino, en el mar, en la Amazonia o en el césped del jardín, hace muchos años o recientemente. Pero los átomos que las forman son más antiguos que la Tierra misma, se encontraban ya presentes en la nube primigenia de gas y de polvo que dio origen a nuestro Sistema Solar. Combinados alternativamente con la mayoría de los otros elementos químicos, nuestros átomos de oxígeno formaron parte de minerales, del agua, de las sustancias de la vida. Estuvieron en el fondo del mar y en las erupciones volcánicas; en los helechos gigantes del período Carbonífero y en la sangre caliente de los dinosaurios. La "historia" de estos átomos sin duda ha sido muy variada. Tal vez de los bosques pasaron al humo de las chimeneas, y con el tiempo se incorporaron a los nuevos materiales sintetizados por el hombre, para continuar luego con sus ciclos naturales. Durante los miles de millones de años transcurridos nada cambió en el corazón de estos átomos de oxígeno, que ahora se aprontan a salir de nuestros pulmones en las moléculas de dióxido de carbono y vapor de agua, dispuestos a seguir su ronda planetaria hasta que se apague el Sol.

## Masa

Consideremos un sistema constituido por la mezcla de 4 gramos de gas hidrógeno (moléculas  $H_2$ ) y 32 gramos de gas oxígeno (moléculas  $O_2$ ). Este sistema está contenido en un recipiente cerrado adecuado (en este momento no interesa justificar estos números).

Si hacemos saltar una chispa, podemos provocar que estos gases reaccionen según:



Que significa que cada dos moléculas  $H_2$  se combinan con una  $O_2$  para dar dos moléculas  $H_2O$ . Es decir, luego de la explosión, que es precisamente lo que ocurre en este caso y, suponiendo que el recipiente resiste y que controlamos adecuadamente algunas condiciones, habrá aproximadamente 36 gramos de agua, y prácticamente nada de gas oxígeno ni de gas hidrógeno. Observamos que en el sistema no se han conservado las cantidades de ninguna sustancia, a pesar de lo cual, guiados por la idea fundamental de la *conservación de la materia*, consideramos que, si el recipiente estuvo adecuadamente cerrado, no debe haber cambiado la cantidad total de materia que contiene.

Consideramos que la materia que está en un sistema sólo puede desaparecer de él yéndose a través de la frontera que lo delimita, y necesariamente continuará existiendo en otro sistema. Mientras un sistema se mantenga *aislado*, en el sentido de que nada pueda ingresar ni salir a través de sus fronteras, su cantidad de materia debe permanecer constante.

Ahora bien, la balanza nos permite verificar que inicialmente había 36 gramos de ciertas sustancias y luego de la reacción química sigue habiendo 36 gramos de otras sustancias. Este resultado nos sugiere que lo que marca la balanza, es decir la cantidad de gramos

de cualquier sistema sin indicación de la sustancia, puede ser una adecuada indicación de la cantidad de materia. Esta cantidad es la denominada masa del sistema.

#### Nota 4. Persiguiendo la idea de masa

Isaac NEWTON (1642-1727), a quien mencionaremos a menudo por ser inspirador y prácticamente “padre” de gran parte de lo que hay en este libro, consideraba que la materialidad se asociaba con “aquello que mide la balanza: la masa”.

Pero había otras opiniones distintas: René DESCARTES (1596-1650) científico-filósofo inspirador de la filosofía “cartesiana”, célebre por su obra “El Discurso del Método” y por la frase “pienso, luego existo”, consideraba (erróneamente) que el volumen era la magnitud que mide la cantidad de materia. Jerarquizaba así, el valor de ciertos conceptos que se presentan como verdaderos a priori al entendimiento humano.

Este desacuerdo entre científicos de enorme prestigio desconcertaba a los químicos del siglo XVII, quienes hallaban diversos argumentos tanto en favor como en contra de ambas concepciones. Algunos experimentos que ahora parecen indicadores decisivos de la veracidad de tal o cual hipótesis o teoría, no lo eran en ese momento, ya que la masa podía no considerarse un indicador fundamental de cantidad de materia.

Antoine-Laurent de LAVOISIER (1743-1794), a través de una paciente y rigurosa investigación, pudo establecer que en cualquier reacción química la cantidad total en gramos de los ingredientes o reactivos es igual a la cantidad total en gramos de productos. En “Traite elementaire de chimie”, París, 1789, escribió:

«Podemos establecer como un incuestionable axioma que, en todas las operaciones del arte y la naturaleza, nada es creado; una cantidad igual de materia existe tanto antes como después del experimento.»

Este enunciado de LAVOISIER dio origen a la célebre frase “en la naturaleza nada se pierde ni se crea, todo se transforma”. Actualmente es una ley absolutamente universal que expresa la conservación de la masa en todo sistema aislado.

#### UNIDAD DE MASA

La unidad de masa en el Sistema Internacional de Unidades (SI) es el kilogramo. Un kilogramo se define como la masa de un decímetro cúbico de agua pura a 4°C de temperatura y 1 atmósfera de presión, o bien como la masa del cuerpo de platino-iridio construido a tal efecto, denominado “kilogramo patrón”.<sup>3</sup>

La definición completa del concepto de masa requiere del uso de conceptos de dinámica (lo desarrollaremos en el capítulo correspondiente), por ahora nos será útil la siguiente definición.

Para determinar de forma práctica la masa de un sistema se utiliza una balanza (en alguno de sus varios tipos), instrumento que permite determinaciones de mucha precisión. Se dice que la balanza es para pesar **los objetos** porque recurre al peso de los mismos, *tanto para determinar su masa como para determinar su peso*.

El peso expresa la acción del campo gravitatorio del planeta en el que vivimos sobre cada cuerpo. Al intentar sostener cualquier cuerpo, detectamos la acción hacia abajo de una fuerza llamada *fuerza peso* o *fuerza gravitatoria*. Es importante entender que la facultad “tener materia”, que es la que se cuantifica con la masa (en kg), *no es la misma* que la facultad de *pesar*, que requiere, para existir y tener sentido, de la acción del campo gravitatorio del planeta en el que estamos. Debemos tener en claro que *tiene que ser posible definir y medir la masa de un sistema sin recurrir al concepto de peso*; la masa tiene que ser concebible, por ejemplo, para todas las cosas que flotan en una cabina espacial sin ninguna sensación de peso.

<sup>3</sup>El “kilogramo patrón” se construyó para representar de manera lo más exacta posible la masa del kilogramo de agua en las condiciones establecidas. Actualmente se ha definido que, de registrarse alguna diferencia, se considera la unidad de masa representada exactamente por el kilogramo patrón.

### Nota 5. Masa y peso: conceptos distintos

El concepto de masa: cantidad de materia, y el de peso: fuerza con la que el cuerpo parece querer ir hacia abajo, son absolutamente distintos. Sin embargo, sus valores son estrictamente proporcionales y estamos profundamente habituados a esta proporcionalidad: siempre hemos podido saltar o tirar piedras operando en nuestra mente sin diferenciar peso y masa. Posiblemente por ello, es que fácilmente se confunden estos conceptos tan distintos. Tal vez el asunto de diferencia entre la masa y el peso no se aclarará en la primera oportunidad, habrá que hacer un considerable esfuerzo para interpretarlo mejor. Por ahora pensemos en un viaje espacial, muy lejos de cualquier planeta, en ausencia de gravedad, y tratemos de imaginar cómo sería o cómo se sentiría allí, tener masa, y no tener peso.

## 1.3. Estados de la materia

La clasificación más típica y simple de la materia está dada según tres estados: **sólido**, **líquido**, y **gaseoso**, de los que, desde el punto de vista *macroscópico*, y en forma simplificada, podemos decir:

- **estado sólido:** caracterizado por la *rigidez*. Condición de mantener forma y tamaño propios;
- **estado líquido:** caracterizado por la *fluidez*. Condición de mantener el volumen al cambiar de recipiente, es decir sólo volumen propio;
- **estado gaseoso:** caracterizado por la *tendencia a la expansión indefinida*. No tiene forma ni volumen propios, fluye y se expande hasta encontrar paredes que lo contengan.

Aunque no todas las transiciones de un estado a otro son posibles para todas las sustancias, *la mayoría de las sustancias puras* pueden pasar de uno de estos tres estados a cualquier otro si se varían adecuadamente la presión y la temperatura. Los nombres de las posibles transiciones son los que se indican en la figura 1.2.

Desde el punto de vista microscópico, describimos la materia a partir de un modelo en el que se la considera compuesta por partículas como átomos, moléculas, etc., con determinadas formas de interacción entre ellas que explican su comportamiento macroscópico. Todas las propiedades macroscópicas de la materia en sus diferentes estados deben tener explicación en el nivel microscópico.

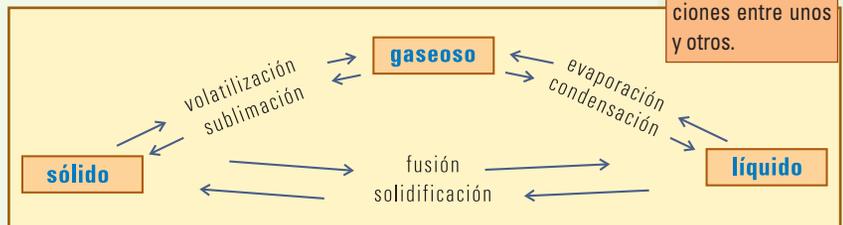


Fig. 1.2. Estados de la materia, y nombres de las transiciones entre unos y otros.

## Los sólidos

Desde el punto de vista del significado de las palabras, un cuerpo es sólido si es rígido, o sea si

todas sus dimensiones son fijas e inalterables (abreviadamente diremos que tiene forma fija).

No obstante, no existe el cuerpo totalmente rígido. Todo cuerpo se deforma en alguna medida bajo la acción de fuerzas, aunque lo haga imperceptiblemente. Un cuerpo se considera más sólido cuanto menos posible es deformarlo.

Hay que distinguir dos modalidades opuestas para una deformación: deformación elástica y deformación plástica.

- **Elasticidad:** propiedad por la cual un cuerpo, si es deformado por la acción de fuerzas, *recupera su forma original* cuando las fuerzas se suspenden.
- **Plasticidad:** propiedad en virtud de la cual los cuerpos, luego de ser deformados al suspenderse las fuerzas no recuperan su antigua forma, y adoptan la nueva total y definitivamente.

Aceptando que todo cuerpo es deformable en mayor o menor grado bajo la acción de fuerzas, la elasticidad sería la forma propia de deformarse de un “verdadero” sólido, mientras que la plasticidad, de manifestarse en alto grado, sería descalificativo para un sólido, puesto que conspiraría contra la propiedad de “tener forma propia”.

#### Nota 6. Elasticidad o deformidad

*La elasticidad perfecta es un ideal inalcanzable, a pesar de lo ello existen materiales que se comportan muy bien de manera elástica mientras la deformación no supere determinados límites.*

*Muchos mecanismos de uso cotidiano logran un comportamiento elástico recurriendo a resortes y láminas de acero templado. Ahora bien, el acero templado, como material, es elástico en alto grado (según la definición que hemos considerado) tanto en un resorte muy fácil de estirar, como en un bloque macizo muy rígido, porque en ambos casos recupera su forma luego de una deformación.*

*La goma (y los materiales parecidos), en cambio, aparentemente es muy elástica porque es blanda, fácilmente deformable, y parece volver siempre a su forma original. Pero si se mide con precisión se encuentra que la goma en general tiene una elasticidad pobre, en cuanto al grado en que puede recuperar su forma.*

*En la vida práctica se dice que el resorte y la bandita de goma son elásticos, pero el bloque rígido de acero no. Esto sólo refleja parcialmente el concepto de elasticidad, es aceptable en la vida cotidiana, pero no en un ámbito técnico.*

Desde el punto de vista microscópico, la elasticidad de los sólidos se relaciona con la elasticidad que tienen las uniones entre las partículas que los constituyen. Sin indagar en los detalles de tales uniones, es claro que debemos atribuir a cada partícula una cierta libertad de movimiento en torno de su posición “de equilibrio”. Por otra parte, el hecho de que (dentro de ciertas limitaciones) los cuerpos sólidos tienen una forma definida, a la cual vuelven luego de una deformación, se puede explicar suponiendo que los átomos o partículas elementales ocupan cada una un sitio determinado. Esto es estrictamente cierto en los **sólidos cristalinos**.

Según la forma de acomodarse los átomos o moléculas constituyentes, los sólidos se clasifican en **cristalinos y amorfos**.

En un **sólido cristalino** las partículas (átomos, moléculas o iones) se distribuyen según un

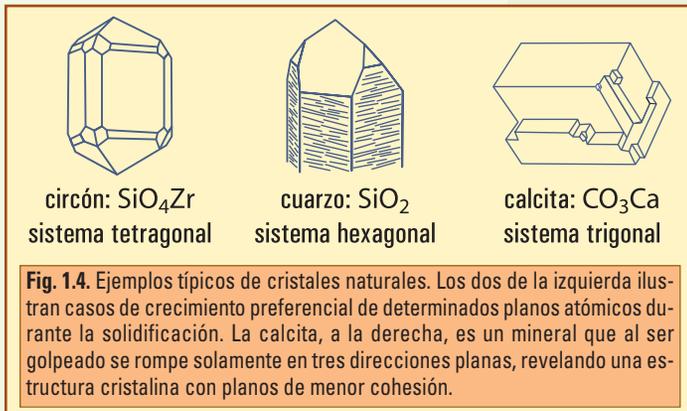
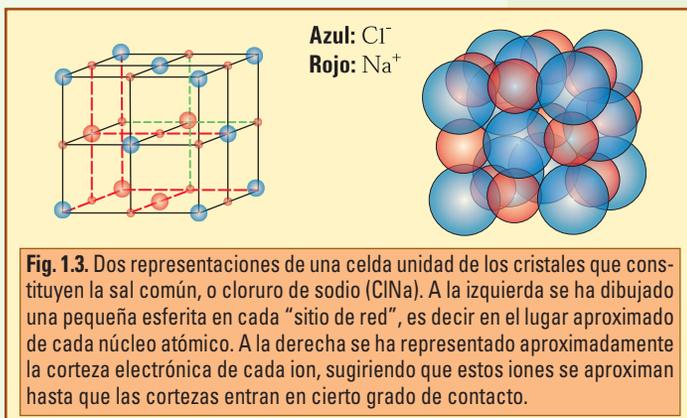
arreglo regular, periódico, al que llamamos red cristalina (Fig. 1.3). Se puede considerar al sólido como formado por una sucesión de celdas vecinas todas iguales que comparten caras, aristas o vértices repitiéndose indefinidamente en tres dimensiones. La **celda unitaria** es la estructura geométrica mínima que se repite para generar todo el cristal.

Son ejemplos de sólidos cristalinos metales como el cobre y la plata, el azúcar común, el cuarzo, la mica.

Cada partícula tiene la posibilidad de vibrar de diversas maneras en torno a su **posición de equilibrio**, que es el sitio que le corresponde en la red. Estas vibraciones tienen que ver con los fenómenos térmicos: se intensifican cuando aumenta la temperatura, y viceversa.

Algunos cristales, al ser golpeados o tensionados se rompen según determinadas direcciones de menor resistencia, resultando caras perfectamente planas, con ángulos bien definidos característicos de cada *sistema* de cristalización. La mica es el caso más notable: parece estar subdividida en láminas muy delgadas, pero en realidad se “exfolia”, subdividiéndose en láminas correspondientes a planos atómicos de poca cohesión.

A diferencia de lo que ocurre en los sólidos cristalinos, las moléculas en los **sólidos amorfos** están distribuidas al azar, y no es posible definir una **red**. Son sólidos amorfos los vidrios, la goma y muchos plásticos como el polietileno. Líquidos muy viscosos como la glicerina o el azufre líquido forman sólidos amorfos cuando son enfriados muy rápidamente.



### Nota 7. Los amorfos, ¿sólidos o líquidos?

*En un sólido amorfo no hay un punto de fusión, sino que cuando se lo calienta, la transición sólido-líquido se produce gradualmente, hay un intervalo de temperaturas en el que se ablanda gradualmente aumentando su fluidez.*

*Los materiales amorfos tienen la rigidez de los sólidos, pero desde ciertos puntos de vista se parecen a los líquidos. Por ejemplo: cuando se enfría un vidrio en estado líquido, éste se va endureciendo gradualmente hasta llegar aparentemente al estado sólido; pero al no haber punto de fusión definido, podemos pensar que en realidad nunca se llega al estado “verdaderamente” sólido, sino a un estado de líquido tan viscoso que parece sólido. Muestra de ello es que se ha encontrado que vitreaux de catedrales que datan de la Edad Media presentan un aumento de su espesor en su extremo inferior, atribuido, justamente, a la fluencia del vidrio ocurrida en cientos de años.*

*Para simplificar, digamos que en el rango de temperaturas en el que cada cuerpo mantenga una aceptable rigidez, lo seguiremos llamando sólido.*

Es importante notar, por otra parte, que no cualquier cuerpo que se comporta como sólido puede pasar al estado líquido. Ciertamente nadie esperaría ver derretirse a una madera.

Es claro que la materia puede organizarse en estructuras muy complejas, como por ejemplo en algunos productos animales o vegetales, con comportamientos muy variados. El pasaje sólido líquido, con la descripción típica que haremos, siempre tiene sentido para las sustancias puras, con todas moléculas iguales.

## Los líquidos

Los líquidos se caracterizan por su fluidez y su incompresibilidad. La fluidez es la capacidad de un sistema para deformarse continua e indefinidamente, que puede imaginarse como el deslizamiento de unas partes con respecto a otras. Por otra parte la incompresibilidad es la capacidad para resistir esfuerzos tendientes a disminuir el volumen del sistema, o la capacidad para mantener el volumen en general.

Por estas propiedades es que los líquidos *conservan el volumen* frente a operaciones simples tales como cambiarlos de recipiente. No tienen forma, pero sí volumen propios.

Desde el punto de vista microscópico todo esto se explica si las moléculas del líquido: **no están rígidamente unidas entre sí** (pueden desplazarse unas con respecto a otras), pero en promedio están **imposibilitadas** tanto de **acercarse** como de **alejarse** apreciablemente.

La *proximidad promedio entre las moléculas de los líquidos* es tal que:

- si se intenta aproximarlas más aparecen notables fuerzas repulsivas, que se traducen en la propiedad macroscópica de *incompresibilidad*;
- si se intenta alejarlas más se entra en la zona de predominio de las fuerzas atractivas, responsables de la *cohesión* o *adherencia* de las moléculas entre sí, y también de la *tensión superficial*.

De manera que, a diferencia de lo que sucede en los sólidos, las moléculas del líquido no ocupan posiciones fijas sino que **tienen movilidad**. Podemos pensar que la transición sólido líquido (fusión) ocurre cuando las vibraciones de cada átomo o molécula se hacen demasiado intensos como para que éste sea retenido en un lugar definido. *Cada átomo o molécula viaja caóticamente por el líquido sin que los demás lo puedan retener en ningún lugar fijo, y sin poder*

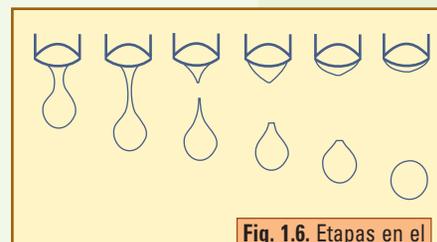
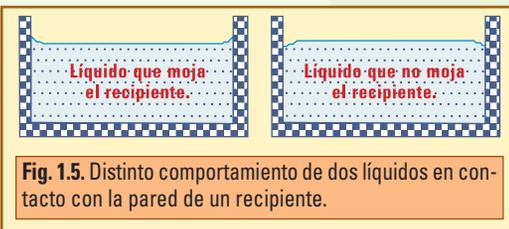
### Nota 8. Una idea equivocada sobre sólidos y líquidos

*En los líquidos las moléculas no están sensiblemente más separadas entre sí que en los sólidos, contrariamente a la difundida y errónea creencia de que en la fusión las moléculas se separan considerablemente. La experiencia muestra que cualquier cuerpo mantiene aproximadamente su volumen en el cambio sólido-líquido, lo que indica que la separación promedio entre moléculas no cambia apreciablemente cuando un sólido se funde (y además hay comportamientos anómalos, como el del hielo, cuyo el volumen disminuye levemente al fundirse).*

*alejarse de ellos: cambia continuamente de vecinos, pero siempre está rodeado de vecinos cercanos.*

La condición de fluido hace que, por acción de la gravedad, la superficie libre de los líquidos en recipientes estáticos sea perfectamente horizontal, excepto en las proximidades de las paredes del recipiente. Allí compite la atracción entre sí de las moléculas del líquido, con la atracción entre moléculas de líquido y moléculas de las paredes (**adherencia**). Como resultado de esta competencia, la superficie libre se redondea hacia arriba cuando el líquido moja el recipiente y hacia abajo si no lo moja (Fig. 1.5). Los líquidos generalmente mojan las paredes de los recipientes que los contienen, pero eso no siempre sucede: el agua no **moja** las plumas de los patos, el mercurio no moja al vidrio ni a muchas otras sustancias, etcétera.

La apariencia de la superficie libre del líquido es *como si hubiera una membrana* con una **tensión superficial** que tendiera siempre a alisar y **redondear** las formas: pequeñas cantidades de líquido forman gotas, y éstas tienden a la forma esférica. Por efecto de la misma tensión superficial, las gotas tienden a no fragmentarse, y si entran en contacto, tienden a reunirse en gotas mayores.



## Los gases

Los gases se caracterizan por su tendencia a la expansión y al enrarecimiento ilimitado. Como los líquidos, son fluidos pero, a diferencia de ellos, se expanden hasta donde algo se los impida. Si se abre el recipiente que contiene un gas éste escapa y continúa expandiéndose. Aún si en el exterior hay otro gas, continúa la expansión, mezclándose uno con el otro. Un gas en un recipiente puede ser comprimido hasta volúmenes muy inferiores al inicial, manifestando una **gran compresibilidad**.

El modelo más simple actualmente aceptado (el "**modelo cinético**" propuesto por Daniel BERNOULLI en 1738) supone al gas constituido por un gran número de partículas de dimensiones despreciables comparadas con la separación entre ellas. Estas partículas, que son las moléculas, se consideran esferas rígidas que no interactúan excepto cuando chocan entre sí y con las paredes del recipiente que las contiene.

La idea de que las partículas del gas están muy separadas en relación con sus dimensiones puede explicar la gran compresibilidad de los gases; y la idea de que viajan a gran velocidad y sin atracciones mutuas apreciables explica la tendencia a la expansión ilimitada (hubo modelos, luego desechados, que explicaban esta tendencia sobre la base de la idea de una **repulsión** entre las partículas).

## ■ 1.4. Unidades, dimensiones y notación

Como hemos dicho al comienzo, la física es una ciencia experimental. Todas sus teorías se apoyan en verificaciones experimentales. De manera que uno de los pilares de esta ciencia es el constituido por los procedimientos y teorías sobre la **medición** y aquí, para poder avanzar, debemos iniciarnos en las ideas más básicas.

Todas las cosas que se pueden medir (en general pensamos en propiedades de cuerpos) se denominan **magnitudes físicas**.

El valor de una magnitud física se determina mediante un proceso de medición, ya sea directamente, o bien por medio de cálculos a partir de otras magnitudes que a su vez se miden.

Medir una magnitud implica directa o indirectamente una **comparación con algún patrón de referencia**. Este patrón se denomina **unidad** de la magnitud. Como resultado de una medición obtenemos un número que se llama valor de la magnitud, que expresa el número de veces que la unidad está contenida en la magnitud medida. Como esta unidad es arbitraria, es necesario agregar un símbolo al valor numérico para indicar qué unidad se utilizó.

El tipo o naturaleza de la magnitud que se mide se denomina **dimensión**. Así por ejemplo, si se mide la distancia entre dos puntos y se encuentra que vale 5 metros, se dice que *es una longitud*, o equivalentemente, que su *dimensión* es longitud.

De la misma manera, si a las 11 horas se registró una presión atmosférica de 950 hPa, y una temperatura de 24 °C, se puede decir que: 11 horas tiene dimensión de tiempo, 950 hPa tiene dimensión de presión y 24 °C tiene dimensión de temperatura.

En todos los casos la unidad determina cuál es la dimensión, sin que ambos conceptos sean sinónimos, ya que para cada dimensión siempre hay muchas unidades. Así, hora, minuto, segundo, mes o año, son unidades para la dimensión tiempo, y metro, pie, pulgada, o legua, son unidades para la dimensión longitud, etcétera.

### Sistema Internacional de Unidades

Durante la Revolución Francesa, entre 1789 y 1799, el gobierno de Francia emprendió el diseño de un sistema de unidades con fundamentación científica, para unificar las unidades existentes, que eran arbitrarias en tamaño y diferentes de una ciudad a otra. Por ejemplo, mencionamos algunas variantes de la unidad de longitud denominada *pie*.

Estas unidades no eran decimales. Por ejemplo: 3 pies constituyen 1 yarda, el pie tiene 12 pulgadas, y la pulgada se subdivide en medios, cuartos, octavos, dieciséis avos, etc. (esto aún existe sin cambios, como puede comprobarse tratando de comprar tornillos en una ferretería). Otra complicación es que las unidades de superficie o volumen no son derivadas

pie inglés: **30,48 cm**  
pie romano: **29,5 cm**  
pie de Burgos: **27,61 cm**  
pie de París: **32,48 cm**  
pie de Madrid: **28,10 cm**  
pie de arquitecto (China): **32,28 cm**

de las de longitud. Por ejemplo: la unidad de volumen actual para líquidos en EEUU es el galón internacional (hay otros galones, como el imperial, y también hubo otros), que se define como el volumen contenido en un cilindro de 7 pulgadas de diámetro y 6 de alto, o sea 230,90706 (que se redondea a 231) pulgadas cúbicas. Es decir, no fue pensado como múltiplo ni de la pulgada cúbica, ni del pie cúbico, ni de nada: fue definido *arbitrariamente*.

Después de una ardua tarea se pudo elaborar el sistema métrico decimal: métrico por el nombre de la unidad de longitud, *metro*, que se definió sobre la base de un patrón absolutamente universal (el tamaño de la Tierra -que hubo que medir, como parte de la tarea-), y decimal porque todos los múltiplos y submúltiplos se definían con potencias de diez. Además, como unidades fundamentales se definió el kilogramo para la masa, y el segundo para el tiempo, por lo que durante mucho tiempo este sistema se conoció como “MKS” (por *metro-kilogramo-segundo*).

El sistema no se impuso de manera inmediata, ni siquiera en Francia, porque además de los inconvenientes propios de la tarea, había muchos intereses encontrados. En 1795 se adoptó oficialmente en Francia, pero luego hubo regresiones por diversos motivos, y convivió un tiempo con las viejas unidades. Se convirtió en obligatorio en toda Francia el 1 de enero de 1840. Luego, en 1875, delegados de 17 países, incluido Estados Unidos de América firmaron el Tratado del Metro en París (aunque actualmente en EEUU, en la vida práctica se siguen utilizando las viejas unidades). Con diversas contingencias el sistema métrico se fue imponiendo mientras las definiciones de sus unidades también evolucionaban hacia patrones más precisos y más fácilmente reproducibles en cualquier laboratorio.

En 1948 comenzó otra gran fase evolutiva del sistema métrico. Luego de estudios y consultas llevados a cabo por el Comité Internacional de Pesas y Medidas, se ultimaron detalles del Sistema Internacional de Unidades (SI), que a partir del año 1960 fue adoptado por la mayoría de los países. En nuestro país se instituyó en 1972 el Sistema Métrico Legal Argentino (SIMELA) que adoptó el SI.

El SI consta de 7 unidades fundamentales y 2 unidades suplementarias. A partir de ellas, a través de productos o cocientes se obtienen las magnitudes derivadas. La tabla 1.1 muestra las unidades fundamentales del SI.

El SI estableció algunas normas referidas a los nombre de unidades y la forma de escribirlas:

- toda unidad tiene un nombre y un símbolo. No se escribe punto al final del símbolo;
- el nombre de una unidad se escribe con minúscula, aunque sea un nombre de persona;
- para denotar múltiplos o submúltiplos, se escribe el símbolo del prefijo correspondiente delante de la unidad (ver Tabla 1.2);
- los símbolos de las unidades mantienen para el plural la misma forma del singular.

**TABLA 1.1.**  
UNIDADES  
FUNDAMENTALES  
DEL SISTEMA  
INTERNACIONAL

DIMENSIÓN O CANTIDAD FÍSICA	NOMBRE DE LA UNIDAD	SÍMBOLO
longitud (L)	metro	m
tiempo (T)	segundo	s
masa (M)	kilogramo	kg
temperatura	kelvin	K
intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

- entre los símbolos de las unidades que se multiplican, puede o no colocarse punto. Por ejemplo:  $A \times s$  , o bien  $As$ ;
- para indicar la división de una unidad por otra se puede utilizar la barra de división, oblicua u horizontal, o bien exponentes negativos. Por ejemplo:

$$A/s, \text{ o bien } \frac{A}{s}, \text{ o bien } A \times s^{-1}$$

### Nota 9. Aunque usted no lo crea

*Estados Unidos de América, la gran potencia científica, signataria del Tratado de Metro en 1875, sigue utilizando las antiguas unidades inglesas.*

*Así es que el 23 de septiembre de 1999, el “Mars Climate Orbiter” se perdió durante una maniobra de entrada en órbita controlada desde el Jet Propulsion Laboratory (JPL) en la Tierra, y se supone que terminó estrellándose contra la superficie de Marte. Según la explicación oficial, la causa fue que el software en el JPL calculaba el impulso en unidades SI (newton  $\times$  segundo), mientras que la Lockheed Martin Astronautics, que construyó el Orbiter, lo hacía con unidades inglesas (libras  $\times$  segundo)!*

## • Prefijos para múltiplos y submúltiplos

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades del SI con sus correspondientes símbolos son los que figuran en la tabla 1.2.

Algunas reglas del empleo de los prefijos en el SI son las siguientes:

- el símbolo del prefijo se escribe sin dejar espacio entre él y el símbolo de la unidad;
- el conjunto constituido por el símbolo de un prefijo agregado al símbolo de una unidad, es un nuevo símbolo inseparable (símbolo de un múltiplo o submúltiplo de esa unidad);
- no deben usarse prefijos compuestos, es decir formados por la yuxtaposición de varios prefijos. Por ejemplo: 1 Gs y no 1 Mks.

El caso de la unidad de masa, kilogramo, es especial, pues ya contiene un prefijo, y para él también vale esta regla: no se admite el uso de doble prefijo, y por lo tanto los prefijos de la tabla 1.2, en el caso de la masa, deben ser utilizados con el

gramo (símbolo g) y no con el kilogramo. Ejemplos:  $10^6$  kg es 1 Gg, y no 1 Mkg .

- Nunca se emplea un prefijo solo que no esté aplicado a alguna unidad.

El Comité Internacional de

**TABLA 1.2.**  
NOTACIÓN - PREFIJOS Y SUS SÍMBOLOS

FRACCIÓN	PREFIJO	SÍMBOLO	MÚLTIPLO	PREFIJO	SÍMBOLO
$10^{-1}$	deci	d	$10^1$	deca	da
$10^{-2}$	centi	c	$10^2$	hecto	h
$10^{-3}$	mili	m	$10^3$	kilo	k
$10^{-6}$	micro	$\mu$	$10^6$	mega	M
$10^{-9}$	nano	n	$10^9$	giga	G
$10^{-12}$	pico	p	$10^{12}$	tera	T
$10^{-15}$	femto	f	$10^{15}$	peta	P
$10^{-18}$	atto	a	$10^{18}$	exa	E

Pesas y Medidas acepta que se sigan usando ciertas unidades aunque no pertenecen al SI, como por ejemplo, el minuto (1 min = 60 s), el litro (1 L = 1 dm<sup>3</sup> = 10<sup>-3</sup> m<sup>3</sup>), la tonelada métrica (1 t<sub>m</sub> = 10<sup>3</sup> kg); mientras que desaconseja el uso de otras, como por ejemplo, el micrón (1 μ = 1 μm), el kilogramo fuerza (1 kgf = 9,8 kg × m × s<sup>-2</sup>).

Se aconseja ampliar las nociones referidas al manejo de las potencias de 10 y la escritura de cantidades de acuerdo con los procedimientos científicos, con la lectura del **Apéndice 1**.

## ● Análisis dimensional

Muchas veces surgen dudas sobre la corrección de una expresión, que pueden disiparse rápidamente procediendo al análisis dimensional. Éste consiste en el análisis de las dimensiones de todos los factores intervinientes en una expresión y, de las operaciones entre ellos. La noción fundamental que se aplica es:

El análisis dimensional no requiere trabajar con las unidades (aunque puede hacerse con ellas), sino con símbolos para las dimensiones. En particular para los temas de mecánica es suficiente con las dimensiones longitud (L), masa (M), y tiempo (T).

En una expresión matemática no pueden sumarse ni igualarse términos de distintas dimensiones.

### ● Ejemplo

Supongamos que necesitamos responder la siguiente pregunta: ¿es dimensionalmente correcta la expresión  $distancia = v_0 t + Ft^2/m^2$ , para calcular la distancia recorrida por un cuerpo de masa  $m$ , luego de que se le aplique una fuerza  $F$  durante un tiempo  $t$ , siendo que el cuerpo inicialmente viajaba con velocidad  $v_0$ ?

### ● Desarrollo

La pregunta también podría estar hecha con valores y unidades concretos de  $m$ ,  $t$ ,  $F$ , y  $v_0$ . No obstante, para el análisis dimensional no es necesario conocer valores ni unidades, sino sólo las dimensiones de cada factor. En este caso, tomaremos como dato la siguiente indicación de las dimensiones intervinientes en este ejemplo, expresadas en función de las dimensiones de las cantidades fundamentales del SI:

VARIABLE MENCIONADA EN LA EXPRESIÓN QUE SE ANALIZA	NOMBRE DE LA DIMENSIÓN	EXPRESIÓN EN SÍMBOLOS DE DIMENSIONES FUNDAMENTALES
distancia	longitud	L
t	tiempo	T
$v_0$	velocidad	L/T = L · T <sup>-1</sup>
m	masa	M
F	fuerza	L · M/T <sup>2</sup> = L · M · T <sup>-2</sup>

### ● Procedamos ahora al análisis dimensional:

$$distancia = v_0 t + \frac{Ft^2}{m^2}$$

$$L = \frac{L}{T} T + \frac{LM}{T^2} T^2$$

$$L = L + L/M$$

Surge claramente que la expresión **no puede ser correcta** -más precisamente- el segundo término del miembro derecho es dimensionalmente incorrecto.

## EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 1.

### ▲ Ejercicio 1.1.

Alguien debe calcular la velocidad con que se propaga una onda transversal en una cuerda tensa de masa  $m$  y longitud  $L$ , y recuerda que sólo depende de la densidad lineal de masa  $\mu$  ( $\mu=m/L$ = masa por unidad de longitud) de la cuerda y de la fuerza  $F$  que la mantiene tensa. Además recuerda aproximadamente el aspecto de la expresión correspondiente, y como no ha estudiado de una manera muy reflexiva, no puede decidirse entre las posibilidades siguientes:

$$v = \sqrt{\mu F} \quad v = \sqrt{\frac{F + \mu}{m}} \quad v = \sqrt{\frac{\mu}{F}} \quad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad v = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Teniendo en cuenta que en el SI la fuerza se mide en newton (N), la cual es una unidad derivada que se expresa en unidades fundamentales como:  $1\text{N} = 1 \text{ kg} \times \text{m} \times \text{s}^{-2}$ , efectúe un análisis dimensional para determinar cuál o cuáles de las expresiones podrían ser correctas.

### ▲ Ejercicio 1.2

Un recipiente abierto contiene aire a presión ambiente, presión cuyo valor, según el servicio meteorológico, es 934 hPa (Pa es el símbolo del *pascal*, unidad SI de presión). El recipiente se tapa y luego se calienta hasta que la presión aumenta 1.000 veces. Eligiendo el prefijo adecuado, exprese correctamente el valor de la presión final, con tres cifras significativas y sin potencias de diez, de dos maneras diferentes.

# Posiciones, movimientos y vectores

La teoría actual que trata las fuerzas y los movimientos en la escala concerniente a la vida diaria es la *Dinámica Clásica*, cuyos tres principios fundamentales:

- **Principio de Inercia,**
- **Principio de Masa,**
- **Principio de Acción y Reacción,**

fueron enunciados en 1687 por Isaac NEWTON en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (“Principios Matemáticos de Filosofía Natural”). Antes de esa teoría no era posible explicar completamente de manera satisfactoria detalles finos de ningún movimiento. Después de ella el estudio de los movimientos y la física en general, se desarrollaron vertiginosamente.

Esos tres principios definen el concepto de fuerza, el de masa, y *a la vez toda la dinámica*, y la comprensión completa de uno de ellos *no es posible sin la de los otros*, y obviamente la de todo junto sólo es posible para un experto. Pero el experto, antes de ser experto es aprendiz, y no puede aprehender todos los conceptos juntos, sino que debe construirlos gradualmente en su mente. Para lograr eso estamos planteando la elaboración gradual de los conceptos en un proceso cualitativo que no pretende, ni podría, ser riguroso desde el comienzo.

En este capítulo trataremos de motivarnos con planteos que sirvieron de motivación a NEWTON y a sus precursores, y en este proceso cualitativo llegaremos a enunciar el Principio de Inercia, desprendido de los otros, con la intención de preparar el terreno para la construcción conceptual de principiantes que sólo llegarán a expertos avanzando gradualmente en los capítulos.

Aprovecharemos además para presentar el concepto físico-matemático de **vector**, concepto que no existía en la época de NEWTON pero que se desarrolló para aplicar su teoría, y que ahora es la base imprescindible para cualquier estudio de movimientos (y para muchos otros campos de la física).

## ■ 2.1. Ideas fundamentales acerca del movimiento y las fuerzas

### Introducción a un problema milenario

En la figura 2.1 se reproduce un grabado tomado de la correspondencia de René DESCAR-

TES –célebre pensador del siglo XVII que ya hemos mencionado; en él se ilustra un experimento propuesto por el padre Marin MERSENNE (1588-1648), estudioso de la época: « **Retomberatil?** » pregunta la leyenda de la parte superior, es decir: **¿volverá la bala (a la boca del cañón, al caer)?**

El sentido fundamental de la pregunta tenía que ver con las discusiones de la época acerca de la movilidad o inmovilidad de la Tierra, y podríamos decir que era el siguiente:

*Suponiendo que el cañón pudiera alinearse verticalmente con toda exactitud, y que la bala luego de su ascenso cayera exactamente en la boca del cañón, (en ausencia de viento y haciendo todas las consideraciones simplificadoras que fuesen necesarias): ¿probaría eso la inmovilidad de la Tierra? ¿Por qué? ¿O acaso deberíamos esperar su caída exactamente en la boca del cañón, tanto si la Tierra se moviera como si estuviera inmóvil?*

O bien dicho de otra manera:

*Suponiendo que la Tierra se estuviese moviendo, viajando a gran velocidad por el espacio, por ejemplo hacia la derecha, ¿deberíamos esperar que la bala caiga exactamente (o al menos casi exactamente) en el punto de partida? ¿O acaso debemos esperar que se adelante o que se atrase en el sentido del movimiento de la Tierra? Si ese fuera el caso, ¿dónde deberíamos esperar su caída, adelante o atrás del punto de partida? ¿Por qué?*



**Fig. 2.1.** Un cañón disparado verticalmente y queda planteada una duda que puede considerarse clásica: suponiendo que la Tierra viaja a gran velocidad, ¿dónde debe esperarse que caiga un proyectil que se dispara en dirección exactamente vertical?

Ni DESCARTES ni MERSENNE (ni nadie antes de la obra de NEWTON en 1687) disponían de los elementos conceptuales necesarios para tratar este problema en forma completa.

Nosotros aquí no intentaremos desarrollar la cuestión en forma completa, sino sólo tratar de que nos sirva de motivación y guía para plantear algunas nociones fundamentales.

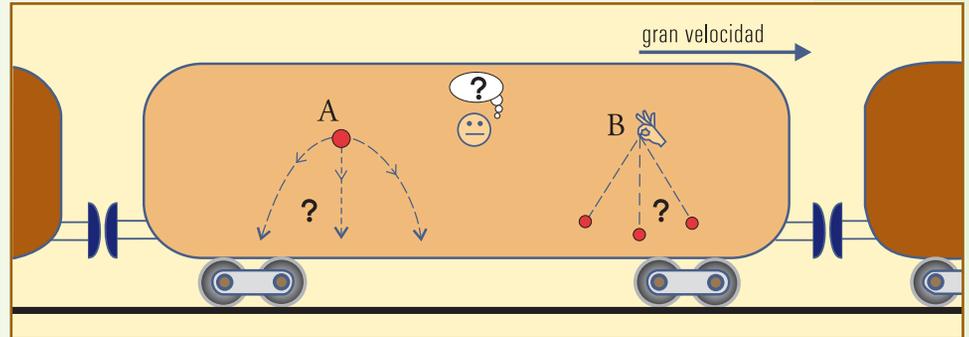
Nos interesa por ejemplo que el lector se pregunte en qué se parece este problema al que se plantea para responder las siguientes cuestiones:

- si un pasajero de un tren que viaja suavemente a gran velocidad deja caer una naranja, ¿Dónde cae ésta? ¿Influye en ello el movimiento del tren? ¿Cae justo debajo del punto en el que fue soltada? ¿O cae más adelante? ¿O más atrás?;
- ¿y si este pasajero saca la mano por la ventanilla y suelta la naranja fuera del tren? ¿Es lo mismo que dentro? ¿Qué diferencias hay?;
- una plomada (del tipo de albañil) utilizada dentro de este rápido tren, ¿debería indicar exactamente la vertical? ¿o debería colgar hacia atrás de la vertical? ¿o quizás hacia adelante?

La comparación con lo que sucedería fuera del tren tiene la intención de obligar a considerar los efectos de la presencia del aire, y a distinguirlos de los efectos del movimiento. Si no se logra

separar conceptualmente el efecto del aire no se puede llegar a una comprensión clara de estos fenómenos.

**Fig. 2.2.** Imaginemos el interior de un vagón de tren viajando muy rápida y suavemente. ¿Según cuál de las trayectorias mostradas caería una naranja que un pasajero soltase en A? ¿Cómo colgaría en B un péndulo en reposo?



### Nota 1. Imaginar la Tierra viajando en el vacío

*El asunto del aire fue uno de los problemas que debió superar la ciencia medieval: si no es posible imaginar el vacío, si no se tiene la idea de que la Tierra tiene una delgada cubierta de aire que viaja con ella, y de que más allá no hay nada, entonces es necesario imaginar que los planetas se mueven dentro de un medio material, aire digamos, y en este caso -y éste era el caso de la ciencia medieval- estar en un planeta en movimiento se debía parecer mucho a sacar la cabeza por una ventanilla de un tren en movimiento.*

*Decir que el aire pudiera estar pegado a la Tierra y por encima de él no haber nada, contradecía abiertamente todas las ideas de la época acerca de las propiedades del aire (y también contradice las ideas intuitivas actuales, a menos que hagamos intervenir una compleja serie de conceptos e informaciones acerca de la gravedad, de las dimensiones de los cuerpos celestes etc.).*

Ahora vamos a ensayar una respuesta a la cuestión para poder elaborar algunas ideas fundamentales.

### Ensayo de respuesta

Como somos personas del siglo XXI, acostumbrados a los transportes veloces y más o menos suaves, y también a la idea de que viajamos velozmente por el espacio llevados por nuestro planeta sin sentir absolutamente nada por ello, podemos sin mucha dificultad situarnos mentalmente dentro del tren, con mucha información que no tenían en la Edad Media.

Podemos pensar: si viajo en un tren ideal, tan suave en su marcha que no puedo sentir ni el más mínimo ruido ni vibración, ¿cómo puedo darme cuenta de que estamos viajando? ¿Podré darme cuenta haciendo experimentos, tratando de caminar o de pararme en un solo pie, o necesariamente deberé mirar por la ventanilla?

Si miro por la ventanilla veo pasar el paisaje hacia atrás, pero haciendo cualquier cosa, haga lo que haga, no siento nada diferente de cuando hago lo mismo en una habitación sobre tierra firme.

Eso es lo que ocurre en la Tierra cuando veo todos los días salir y ponerse el Sol, la Luna,

las estrellas, etc. La vista nos dice que, o todo el Universo gira en torno nuestro hacia el oeste, o nosotros estamos girando hacia el este. Pero nosotros nos sentimos quietos. Las sensaciones tienen que ver con el movimiento, con la fuerza que debemos hacer para mantenernos en una posición u otra, con el equilibrio. Sobre esta cuestión las sensaciones nos pueden decir lo mismo que los experimentos con proyectiles, péndulos y cuerpos que caen: esto es, NADA.

Inmediatamente podemos elaborar un razonamiento de sentido común: “esto es como estar quietos, por lo tanto, estamos quietos”.

En este punto el conocimiento común se detiene, ha llegado a una conclusión, y pone fin al asunto. Y en este punto comienza a trabajar el conocimiento científico, diciendo: “ah sí, ¿y todo el universo gira alrededor nuestro? ¿qué cosa tan especial tiene este planeta que no tienen los otros?” – Ahora es mucho más fácil hacer este razonamiento que en la época de Galileo o COPÉRNICO, por supuesto.

Y entonces la ciencia, en este caso la física, elabora una idea básica: el movimiento es relativo. El pasajero del tren que se siente en reposo, ESTÁ EN REPOSO, con respecto al tren, mientras el paisaje viaja hacia atrás, con respecto al tren. Y el que está en el camino viéndolo pasar, TAMBIÉN ESTÁ EN REPOSO, con respecto al paisaje, mientras el tren viaja hacia delante (con respecto al paisaje).

Y aquí el trabajo de la ciencia COMIENZA. A continuación la física debe elaborar toda la teoría capaz de explicar cómo cada experimento tiene sentido independientemente de que los actores se consideren en reposo o en movimiento.

Y ese es el tema de este libro. Ahora vamos a capitalizar estas ideas básicas.

## Tres ideas fundamentales

---

### ● 1.- El movimiento es relativo

Desde el punto de vista de la física, el movimiento de un cuerpo es algo que no adquiere pleno sentido en sí mismo, sino que debe describirse necesariamente en relación con otros cuerpos.

En física diremos que **un cuerpo se mueve cuando cambia de posición.**

La **posición** de un cuerpo se define con respecto a otros cuerpos, o con respecto a un **sistema de referencia.**

El sistema de referencia puede ser un conjunto de cuerpos de referencia, o una construcción abstracta definida con respecto a algún conjunto determinado de cuerpos.

Cuando hablamos de cómo se mueve un cuerpo sin mencionar con respecto a qué referencia, es claro que tenemos en mente, implícitamente, algún “fondo fijo” con respecto al cual decimos que el cuerpo en cuestión se mueve. Ese fondo fijo constituye el sistema de referencia con respecto al cual la idea de movimiento adquiere sentido. Saber

explicitar este sistema de referencia permite evitar muchas confusiones.

QUIÉN SE MUEVE, CÓMO SE MUEVE, ES UNA CUESTIÓN DE PUNTOS DE REFERENCIA.

Puede ilustrarse esta afirmación con infinidad de ejemplos:

- un cuerpo puede estar inmóvil en el interior de un vehículo, mientras el vehículo viaja. En este caso el cuerpo está inmóvil con respecto al vehículo, y en movimiento con respecto a los objetos del exterior;
- cualquier cuerpo que veamos inmóvil, en el mejor sentido de la palabra inmóvil, está compartiendo el movimiento de nuestro planeta con respecto a los demás astros;
- cualquier cuerpo que veamos moverse podría ser considerado inmóvil con respecto a otro cuerpo que acompañase adecuadamente su movimiento;
- etcétera.

De manera que la física no dictamina que la Tierra está realmente inmóvil, ni que está realmente en movimiento.

Pero dictamina que la afirmación de que la Tierra está inmóvil, y que lo que contradiga eso es falso, carece de sentido.

Y dictamina que la Tierra no es distinta de los demás planetas en cuanto a las características de su movimiento.

También dictamina que para entender los movimientos no es lo mismo elegir cualquier sistema de referencia: los movimientos de los planetas no se entienden si se toma la Tierra como referencia inmóvil, y se entienden muy bien si se toma al Sol como referencia (aproximadamente) inmóvil.

## ● 2.- Las **fuerzas** expresan acciones mecánicas entre cuerpos

Las **fuerzas** son los entes que expresan **cómo, con qué intensidad y qué orientación, un cuerpo empuja o tira de otro**, es decir que aparecen como resultado de interacciones entre cuerpos. Se da el nombre de *interacciones mecánicas* a las interacciones que se manifiestan por medio de fuerzas de un cuerpo sobre otro, y hablaremos extensamente de ellas en los próximos capítulos.

Es claro que los conceptos movimiento y fuerza, según como han sido presentados, son *absolutamente distintos*:

- las fuerzas son acciones sobre un cuerpo que resultan de su interacción con otros, que pueden producir su deformación, y que influyen sobre su movimiento.
- el hecho de moverse un cuerpo, como ya dijimos, es relativo, **depende de lo que se toma de referencia**, de manera que **no puede implicar por sí solo la existencia o no de fuerzas**.

No obstante estos conceptos se confunden fácilmente en la práctica, ya que estamos acostumbrados a que siempre es necesaria la aplicación de una fuerza para iniciar un movimiento. Pero debe recordarse que la aplicación de una fuerza también puede ser necesaria para detener un cuerpo en movimiento.

### ● 3.- Los cuerpos tienen Inercia

¿Por qué podría esperar Galileo que la bala no caiga detrás del cañón si la Tierra avanza (pensando, para simplificar, en un avance horizontal)? ¿Y por qué podríamos esperar nosotros que la naranja que cae dentro del tren acompañe exactamente al pasajero, y choque contra el piso en el punto justo debajo del punto donde inició su caída? ¿O que el hilo de la plomada dentro del rápido tren no necesite inclinarse absolutamente nada hacia delante para arrastrar al plomo con la gran velocidad de aquél?

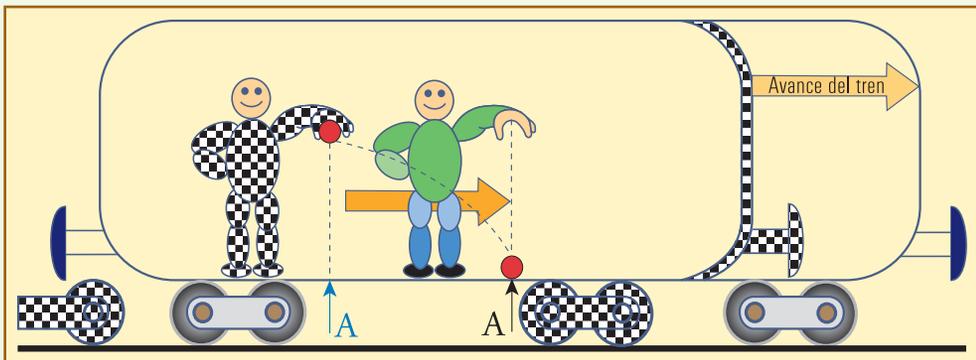
Entre 1600 y 1610, Galileo GALILEI había establecido la **conservación de la velocidad en el sentido horizontal** de los proyectiles, y esto sirvió de base para que DESCARTES enunciara en 1629 dos axiomas que se consideran válidos aún hoy. Estos axiomas de DESCARTES son:

1. un cuerpo mantiene su estado de reposo o de movimiento;
2. el movimiento natural es rectilíneo.

Alrededor de cincuenta años después NEWTON enunció el **Principio de Inercia** (según el diccionario, se llama **inercia** a la **incapacidad** de los cuerpos para cambiar por sí mismos su estado de movimiento) reuniendo estos dos axiomas. Este principio es básico para la física actual, y estos enunciados también lo fueron en su época. Cada uno proponía nuevas formas de ver el mundo. El primer enunciado permitió imaginar que un movimiento no necesitaba esencialmente de fuerzas aplicadas para mantenerse, y el segundo permitió escapar de la idea aristotélica vigente por muchos siglos, de que el movimiento natural era el circular (que aparentemente se mantenía inalterable en los cuerpos celestes), dictaminando que el movimiento natural, **con respecto al cual se decide si han debido o no actuar agentes modificadores (fuerzas)**, es el **rectilíneo**.

Si aplicamos estos enunciados a las preguntas hechas al comienzo, encontramos las mismas respuestas que Galileo dio al problema en su época, según las cuales los experimentos consistentes en lanzar proyectiles y observar su movimiento no sirven para mostrar si la Tierra *se mueve o no*.

**Fig. 2.3.** Si el tren avanza uniformemente, la naranja que se suelta exactamente sobre A cae exactamente sobre A, ya que por inercia, mientras cae, la naranja conserva la velocidad en sentido horizontal del tren y avanza tanto como él. **Respecto del ambiente interior del tren** todo sucede como si éste estuviese en reposo; esa es la única forma de que todos los objetos estén animados, en lo que a la dirección horizontal se refiere, de la misma velocidad del tren.



Según las ideas de Galileo el proyectil antes de ser lanzado por el cañón ya participa del movimiento horizontal de la Tierra, y en ausencia de perturbaciones horizontales debe conservar este movimiento, acompañando así exactamente al cañón en todo el trayecto (mientras independientemente, en la dirección vertical la gravedad realiza su acción de atraer al proyectil hacia el suelo). Y nosotros lo único que le agregamos a esto es la denominación *inercia* (horizontal) del proyectil.

Lo mismo decimos para la plomada dentro del tren: la masa de la plomada *no necesita ser empujada* una vez que está viajando, ya que por inercia mantiene su velocidad. Sólo es necesario sostenerla para contrarrestar la acción de la gravedad (peso).

Para la naranja que se deja caer dentro del tren vale el mismo análisis que para el proyectil: en la figura 2.3 la naranja es soltada en un punto de la línea vertical que pasa por A, de manera que allí exactamente (en A) debería caer si el tren estuviese en reposo. Y lo que se ilustra es que la naranja también cae allí si el tren viaja uniformemente, pues *mientras cae avanza tanto como el tren*.

Cerraremos estas ideas básicas con el enunciado formal del Principio de Inercia, mostrando cómo simplemente se limita a formalizar las ideas enunciadas antes.

## Principio de Inercia

---

***Todo cuerpo sobre el cual no actúan fuerzas, se mantiene en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta.***

## Principio de Independencia de los Movimientos

---

La idea de que la ausencia de perturbaciones horizontales permite aplicar “la conservación de la velocidad de los proyectiles en sentido horizontal”, aunque en sentido vertical actúe la gravedad haciendo caer al proyectil, básica en todas las explicaciones anteriores, es sólo un caso particular de una idea fundamental conocida como **Principio de Independencia de los Movimientos**.

Este principio dice que lo que sucede con el movimiento en cada dirección del espacio puede tratarse exclusivamente en función de las fuerzas en esa dirección, independientemente de las fuerzas en las otras direcciones.

En los años posteriores a NEWTON esa idea se transformó en la concepción **vectorial** del movimiento, imprescindible para la forma actual de tratar estos temas (y muchos otros). Como veremos en el próximo punto, los **vectores** son entes definidos sobre la base de la idea de la **independencia de las distintas direcciones del espacio**.

## ■ 2.2. Vectores

### ● Sistema de referencia y ejes cartesianos

Para hablar de un movimiento es fundamental establecer claramente (aunque sea de manera tácita) un sistema de referencia, con respecto al cual se describen las posiciones.

Los elementos del sistema de referencia que se utilizan casi universalmente para especificar la orientación y los demás elementos de los vectores son los  *ejes cartesianos*, o *de coordenadas cartesianas* (nombrados así en memoria de DESCARTES, su inventor). Estos ejes son líneas rectas elegidas arbitrariamente según las distintas direcciones del espacio, a las cuales se designa con las letras  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Generalmente se trabaja en dos dimensiones, es decir en el plano, con sólo los ejes  $x$ ,  $y$ .

Aunque los ejes cartesianos pueden ser definidos con el grado arbitrario de oblicuidad entre ellos que se desee, todo es más sencillo si se los elige perpendiculares entre sí, y en este caso se habla de  *ejes cartesianos ortogonales*.

### ● Vectores y escalares: el vector posición

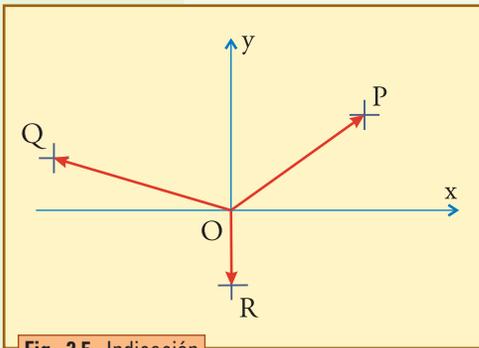
A cada entidad vectorial le asignaremos un **vector**, representado gráficamente con una **flecha**, la cual además de orientarse en el espacio con la dirección y sentido del ente que representa, se puede dibujar con una *longitud* que, *a través de una escala establecida*, representa la intensidad o magnitud correspondiente, a la cual se denomina “módulo” del vector.

Por otra parte, para los entes que no son susceptibles de tener orientación en el espacio, reservamos el nombre de “escalares”, que son simplemente números con la unidad de la magnitud física correspondiente. Por ejemplo son escalares la temperatura, la masa, el tiempo, etc.

El vector por excelencia, a partir del cual se establecen las propiedades de todos los vectores, es el **vector posición**, que nos servirá para ejemplificar y guiar esta presentación.

El vector posición sirve para indicar la posición de cualquier punto con respecto a un punto  $O$  elegido como origen, de la manera que se ilustra en las figuras siguientes: 2.5; ó 2.6.

Para mantener cierta tradición muy arraigada en física, utilizaremos “ $\vec{r}$ ” (la letra  $r$  minúscula, con una flechita indicativa del carácter vectorial), para designar cualquier vector posición.



**Fig. 2.5.** Indicación de la posición de tres puntos arbitrarios con respecto al punto  $O$ , por medio de los correspondientes “vectores posición”.

Las características fundamentales del vector posición están dadas por los siguientes enunciados y figuras, los cuales, una vez dejados de lado los detalles particulares, deben interpretarse como válidos para todas las demás magnitudes vectoriales en general.

- El segmento OP, *orientado desde O hacia P*, es lo que se denomina *vector posición de P respecto de O*. Lo podemos designar equivalentemente con  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}_P$ ,  $\overrightarrow{OP}$ , o de alguna otra manera que resulte clara en el planteo que se esté tratando.
- La recta definida por O y por P indica la *dirección* del vector, pudiéndose decir que dicha recta es la dirección del vector. Sobre esta recta hay *dos sentidos posibles*: desde O hacia P, que es el que le corresponde a nuestro vector, y el contrario, desde P hacia O.
- La longitud del segmento OP, es decir la *distancia entre O y P*, se denomina “módulo” del vector y es un número (con su unidad) siempre positivo. Para cualquier vector la *intensidad* o *módulo* es un **escalar**, y se simboliza con el mismo nombre del vector sin flechita encima, o con las barras de valor absoluto (para este caso  $r$ , o  $|\vec{r}|$ ).
- Cualquiera de los elementos intervinientes se calcula aplicando las definiciones trigonométricas elementales (o los conceptos geométricos que correspondan en cada caso):

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \text{sen} \alpha$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

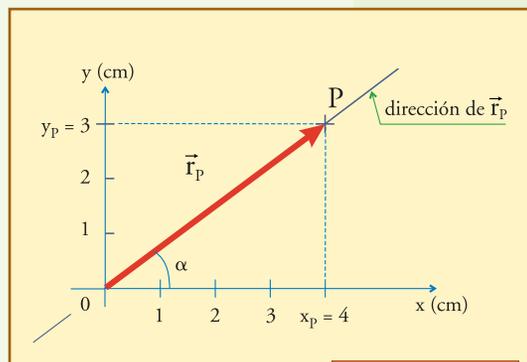
Para el ejemplo de la figura 2.6.:

$$\text{tg} \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{tg} \alpha = 0,75$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = 0,80$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{sen} \alpha = 0,60$$

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$$



**Fig. 2.6.** Elementos que corresponden al vector indicativo de la posición de P.

Existe una gran variedad de modalidades en la notación para designar vectores. En este texto mantendremos siempre la costumbre de colocar una flechita horizontal encima de la o las letras que constituyan el nombre, para indicar el carácter vectorial de una magnitud.

Por otra parte, como ya se dijo, reservaremos la letra  $r$  (abreviatura de “radio”, o “radio vector”, denominación que a veces se usa) para el nombre del vector posición, a veces con índices o subíndices. Aunque como se verá inmediatamente, a veces recurriremos a otras letras y modalidades para este mismo vector.

- Las coordenadas cartesianas  $(x_p ; y_p)$  del punto P , se denominan, desde el punto de vista vectorial, “*componentes cartesianas*” del vector :

$$x_p = \text{componente de } \vec{r} \text{ según el eje x}$$

$$y_p = \text{componente de } \vec{r} \text{ según el eje y}$$

Con las coordenadas cartesianas se acostumbra también a expresar el vector como “par ordenado (de componentes)”:

$$\vec{r} = (x_p ; y_p)$$

Esto permite distinguir claramente cuándo se ha escrito un vector y cuándo un escalar. Para el ejemplo de fig. 2.6 :

$$\vec{r} = (4 \text{ cm} ; 3 \text{ cm}) \quad \text{vector, es decir, par ordenado de componentes.}$$

$$r = 5 \text{ cm} \quad \text{módulo del vector, es decir, número o escalar.}$$

## • El vector posición interpretado como desplazamiento

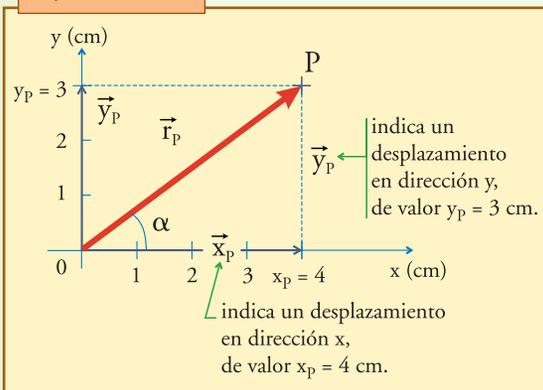
Se gana cierta claridad en la interpretación de las operaciones vectoriales que veremos inmediatamente, si se identifica al vector  $\vec{OP}$  (que es el mismo  $\vec{r}$ , o  $\vec{r}_p$  del punto anterior) con el *desplazamiento* que debería sufrir el punto O para ser llevado a coincidir con el P. Este desplazamiento no tiene porqué ocurrir en realidad, no estamos hablando de que algo se esté moviendo, sólo hablamos de un desplazamiento imaginado, totalmente ideal, que utilizamos para elaborar razonamientos.

Pensando de esta manera, resulta que las componentes  $x_p$  e  $y_p$  de este vector también pueden ser pensadas como otros tantos vectores,  $\vec{x}_p$  e  $\vec{y}_p$ , indicativos de “*desplazamientos componentes*”, tales que efectuados en sucesión, uno a continuación del otro, en cualquier orden, llevarían también el punto O al lugar ocupado por P, como se ilustra en la figura 2.7.

De esta manera tiene sentido interpretar que cualquier vector desplazamiento es el resultado de “componer sus desplazamientos componentes”. Debe quedar claro que en el concepto de desplazamiento que estamos utilizando no interesa el camino, sino el punto final: decimos que el desplazamiento indicado por  $\vec{r}_p$  es el mismo que el indicado por  $\vec{x}_p + \vec{y}_p$ , sólo porque ambos llevan el mismo punto inicial al mismo punto final, independientemente de lo hacen por distintos caminos.

Esta interpretación sugiere naturalmente denominar suma vectorial de desplazamientos, a la composición de los mismos, es decir a la ejecución sucesiva de los despla-

**Fig. 2.7.** Las coordenadas del punto P interpretadas como vectores desplazamiento que “componen” al desplazamiento  $\vec{OP}$ .



mientos indicados por los vectores que se suman, independientemente de que éstos se orienten o no según los ejes cartesianos. Esto es lo que formalizamos en el próximo punto.

## Composición o suma vectorial

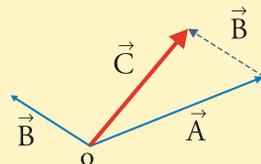
Esta definición, expresada con *ayuda* de la idea de desplazamiento, es directamente aplicable a cualquier vector aunque no represente desplazamientos, ya que siempre será aplicable a los **dibujos representativos** de cualquier vector.

Podemos establecer una definición analítica a partir de estos conceptos esencialmente geométricos, razonando como se muestra a continuación.

Primero realizamos el desplazamiento indicado por  $\vec{A}$ , desplazando según  $\vec{A}_x$  y luego según  $\vec{A}_y$ , y luego, de la misma manera realizamos el desplazamiento posterior, indicado por  $\vec{B}$  (fig. 2.8). Ahora bien, dado que el orden de los desplazamientos no influye en el punto final al que se llega, es fácil advertir que podemos efectuar primero todos los desplazamientos a lo largo de un eje, el x por ejemplo, y luego a lo largo del otro.

Así encontramos que el desplazamiento resultante en cada eje debe valer  $C_x = A_x + B_x$ , y  $C_y = A_y + B_y$ , es decir que la suma vectorial equivale a una suma por separado de las componentes según cada eje (CUIDADO CON LOS SIGNOS: la operación indicada es una suma, en la cual cada término tiene su signo particular, es decir, lo que se denomina “suma algebraica”).

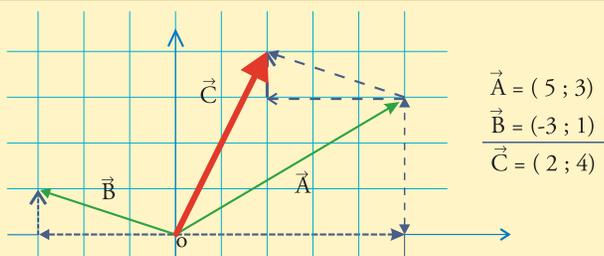
Se define como **composición**, o suma, de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , a la operación que da por resultado un vector  $\vec{C}$  tal que cumple con las relaciones propuestas por la figura:



Esta figura se interpreta diciendo:

El vector  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ , es el vector que indica el desplazamiento que se obtiene realizando el desplazamiento  $\vec{A}$ , y a continuación el  $\vec{B}$ .

**Fig.2.8.** Ejemplo de suma vectorial construida con desplazamientos sucesivos a lo largo de las direcciones de los ejes coordenados: Si  $\vec{A} = (5$  hacia la derecha, 3 hacia arriba), y  $\vec{B} = (3$  hacia la izquierda, 1 hacia arriba), entonces:  $\vec{A} = 5$  hacia la derecha, luego 3 hacia arriba, luego 3 hacia la izquierda, y luego 1 hacia arriba = 5 hacia la derecha y 3 hacia la izquierda, es decir, 2 hacia la derecha, y luego 3 hacia arriba y 1 hacia arriba, es decir, 4 hacia arriba =  $(2; 4) = \vec{C}$



$$\begin{aligned} \vec{A} &= (5; 3) \\ \vec{B} &= (-3; 1) \\ \vec{C} &= (2; 4) \end{aligned}$$

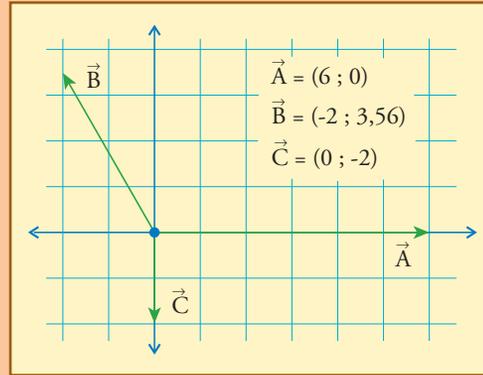
Si  $\vec{A} = (5$  hacia la derecha, 3 hacia arriba), y  $\vec{B} = (3$  hacia la izquierda, 1 hacia arriba), entonces  $\vec{A} + \vec{B} = 5$  hacia la derecha, luego 3 hacia arriba, luego 3 hacia la izquierda, y luego 1 hacia arriba  
 $\vec{A} + \vec{B} = 5$  hacia la derecha y 3 hacia la izquierda, es decir, **2 hacia la derecha**, y luego 3 hacia arriba y 1 hacia arriba, es decir; **4 hacia arriba**  
 $\vec{A} + \vec{B} = (2; 4) \Rightarrow \vec{C} = (2; 4)$

Esto constituye una definición analítica de la suma vectorial, totalmente equivalente a la anterior:

$$\text{Suma Vectorial (definición analítica)} \quad \vec{C} = \vec{A} + \vec{B}, \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ y \\ C_y = A_y + B_y \end{cases}$$

• **Ejemplo**

Sumar los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ , y  $\vec{C}$ , definidos de las siguientes maneras:  $\vec{A}$  es un vector de módulo  $A = 6$ , orientado a lo largo del eje  $x$ , hacia la derecha.  $\vec{B}$  tiene módulo  $B = 4$ , y está orientado a  $120^\circ$  hacia la izquierda de  $\vec{A}$ .  $\vec{C}$  tiene módulo 2, orientado como el eje  $y$ , hacia abajo.



• **Desarrollo**

Aunque no es imprescindible, para tener una imagen clara en la mente de lo que sucede, hay que comenzar con un dibujo de la situación. Nótese que estos vectores no tienen unidad, es decir que podrían representar una entidad vectorial de cualquier naturaleza, como fuerzas, velocidades, o campos eléctricos, y no necesariamente posiciones o desplazamientos. Pero el procedimiento para sumarlos es independiente de ello.

Primero encontremos las componentes de cada vector. Las componentes de  $A$  y  $C$  prácticamente están dadas por el enunciado:

$$A_x = 6,$$

$$A_y = 0, C_x = 0, C_y = -2; \text{ para } \vec{B} \text{ aplicamos}$$

$$B_x = B \cos 120^\circ$$

$$B_x = B \cos 60^\circ$$

$$B_x = -2, B$$

$$B_y = B \sin 120^\circ$$

$$B_y = 3,56$$

A partir de la expresión de cada vector en componentes, es fácil escribir el resultado efectuando la suma componente a componente:

$$\vec{R} = (6; 0) + (-2; 3,56) + (0; -2)$$

$$\vec{R} = (4; 1,56)$$

Lo que nos interesa más es mostrar las posibilidades gráficamente.

Lo vamos a hacer agregando los vectores a continuación en órdenes diferentes:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C},$$

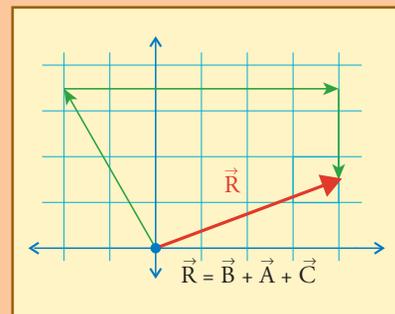
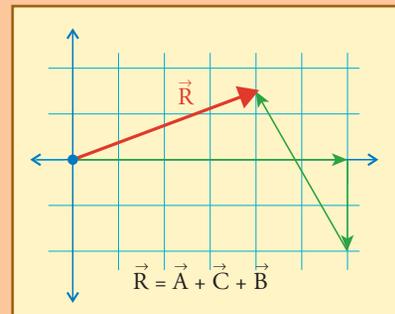
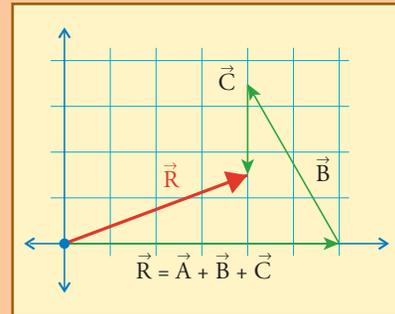
$$\vec{A} + \vec{C} + \vec{B},$$

$$\vec{B} + \vec{A} + \vec{C} \text{ y}$$

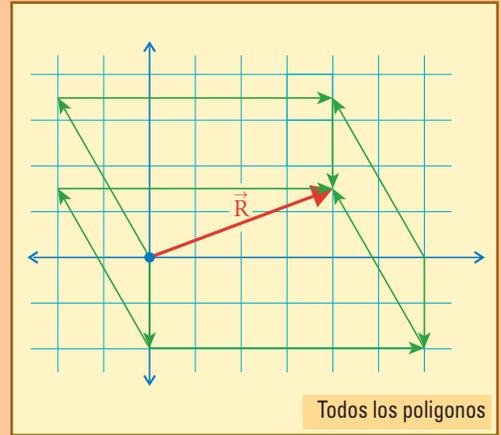
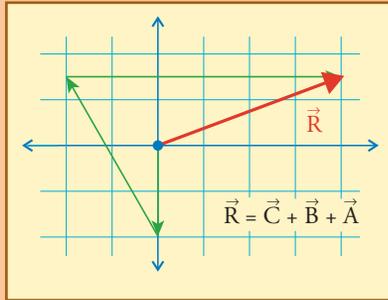
$$\vec{C} + \vec{B} + \vec{A}.$$

Hay más posibilidades, y por supuesto todas llevan al mismo vector como resultado. En cada caso queda dibujado un polígono diferente, siempre con los mismos cuatro lados, que son los tres vectores que se suman, y  $\vec{R}$ , como se muestra en la figura. Esta forma de sumar vectores suele denominarse método del polígono vectorial.

Es interesante notar que en la suma vectorial sólo intervienen las componentes de los vectores, y da lo mismo ubicarlos en cualquier parte, con tal de respetar las componentes de cada uno. Por otra parte, al imaginar que



cada vector se compone de un desplazamiento o contribución en un eje, seguido del correspondiente desplazamiento o contribución en el otro eje, se entiende muy claramente por qué el orden de la suma no afecta al resultado. En los distintos problemas de física en los que intervengan vectores tendremos ocasión de interpretar para qué aspectos de los fenómenos sólo interesan las componentes de determinado vector, y qué se hace cuando además interesan otras cosas.

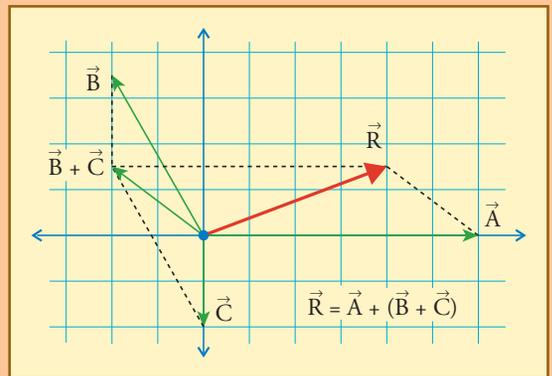
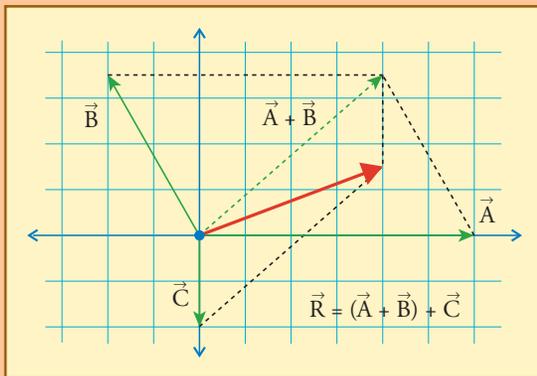
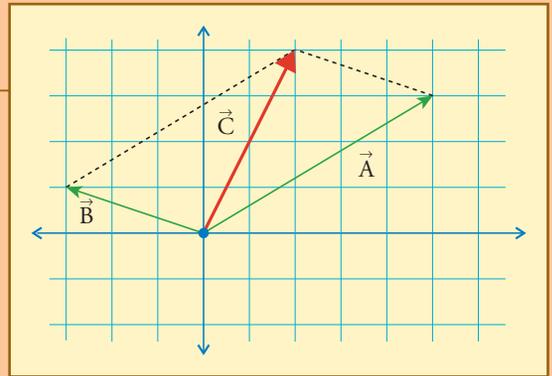


### Nota 2. El paralelogramo de vectores

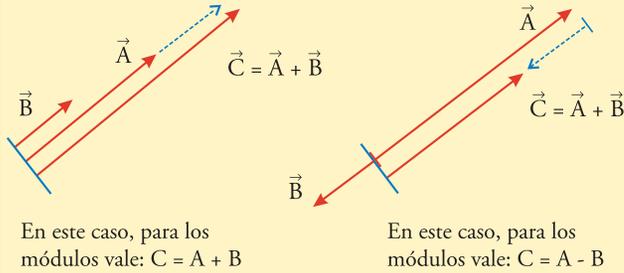
Cuando se efectúa la suma de dos vectores, el polígono se reduce a un triángulo. Y si se juntan los dos triángulos que resultan de sumar los vectores en un orden y en el otro, se obtiene un paralelogramo, con el vector resultante en la diagonal. A veces se denomina “Método del Paralelogramo”, al procedimiento de dibujar esta figura, que obviamente es totalmente equivalente al anterior.

Aquí mostramos cómo quedaría la suma de la figura 2.8, con el método del paralelogramo.

El método del paralelogramo sirve para sumar dos vectores. Para más vectores es incómodo porque se requiere ir agrupando de a dos sucesivamente. Y aquí vemos cómo quedaría la suma del ejemplo desarrollado antes, si se dibujaran los paralelogramos para dos maneras de agrupar las sumas.



**Fig. 2.9.** Ilustración de la suma de vectores de igual dirección, con igual sentido (izquierda), o con sentido opuesto (derecha).



A partir las definiciones dadas resulta una serie de propiedades de la suma vectorial que interesan en la práctica. Las enumeramos a continuación, algunas con títulos propios:

1. la suma vectorial es **conmutativa**: el orden en que se sumen los vectores no afecta al resultado.
2. la suma vectorial es **asociativa**: en una suma de muchos vectores se pueden efectuar sumas parciales, y luego sumar entre sí estos resultados parciales para obtener el resultado final.

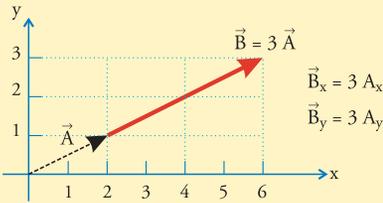
3. sumar vectores de la misma dirección da por resultado un vector de la misma dirección, con un módulo que se obtiene avanzando y retrocediendo a lo largo de esa dirección según sea el sentido de los vectores componentes.

En particular, si se suman dos vectores de igual sentido, el módulo del vector resultante se obtiene sumando los módulos de los vectores componentes; y si se suman dos vectores de sentido contrario, el módulo del vector resultante se obtiene restando los módulos de los vectores componentes (el módulo mayor menos el menor).

### Multiplicación de un vector por un número

4. multiplicar un vector  $\vec{A}$  por un número natural  $n$  debe interpretarse como sumar  $n$  vectores iguales a  $\vec{A}$ , es decir agregar sucesivamente estos  $n$  vectores. El resultado es otro vector de la misma dirección y el mismo sentido que  $\vec{A}$ , cuyo módulo será  $n$  veces el módulo de  $\vec{A}$ , y que además tendrá cada componente igual a  $n$  veces la correspondiente componente de  $\vec{A}$ .

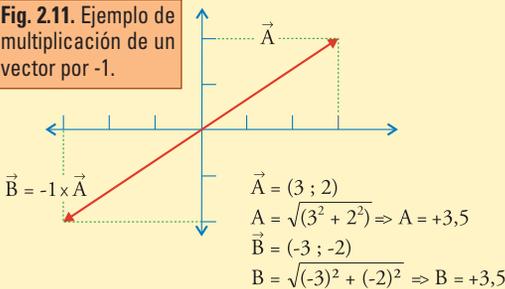
**Fig. 2.10.** Ejemplo de multiplicación de un vector por un número entero.



Es decir:  $\vec{B} = n \vec{A}$  si  $\vec{B} = \vec{A} + \vec{A} + \dots (n \text{ veces}) \dots + \vec{A}$ ;

por lo cual,  $B_x = n A_x$ , y  $B_y = n A_y$ .

**Fig. 2.11.** Ejemplo de multiplicación de un vector por -1.



5. multiplicar un vector por un número real o escalar cualquiera  $u$ , se interpreta de la misma manera explicada en el punto anterior:  $B = uA$  significa  $B_x = u A_x$ , y  $B_y = u A_y$ .

Si  $u$  es negativo, al multiplicarlo por un vector le invierte el sentido.

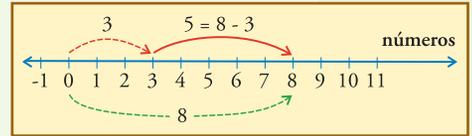
6. si multiplicamos un vector por  $u = -1$ , obtenemos un vector  $\vec{B}$  opuesto a  $\vec{A}$ :  $\vec{B} = -\vec{A}$ . En este caso:  $B_x = -A_x$ ,

$B_y = -A_y$ , es decir:  $\vec{B} = (-A_x ; -A_y)$ . Nótese que ambos vectores tienen el mismo módulo, positivo en ambos, ya que el módulo, que es la longitud en el dibujo, se define como positivo ( $\vec{B} = -\vec{A}$ , pero  $B = A$ ). Se ilustra en la figura 2.11.

## Diferencia de vectores

La diferencia o resta de vectores se define a partir de la suma, de la misma manera que se procede con los números. Es decir, para fijar ideas revisemos con un ejemplo lo que hacemos para restar números: el número 8 menos el número 3 es el número que hay que agregarle al 3 para llegar al 8, o sea, 5.

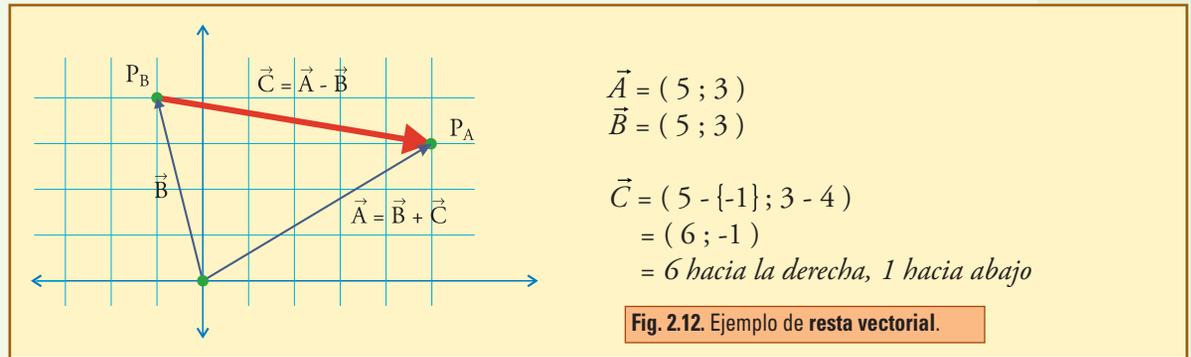
Si interpretamos cada número como un desplazamiento de la longitud correspondiente, podemos representar gráficamente la resta anterior como sigue:



Con el mismo esquema de pensamiento definimos la diferencia o resta de vectores  $A - B$  de la manera natural a partir de la suma:

**LA DIFERENCIA  $\vec{A} - \vec{B}$  ES UN VECTOR  $\vec{C}$ , TAL QUE SUMADO A  $\vec{B}$  DA EL VECTOR  $\vec{A}$**

Esto, gráficamente, significa que el vector C debe ir desde la punta del vector B hasta la punta del vector A.

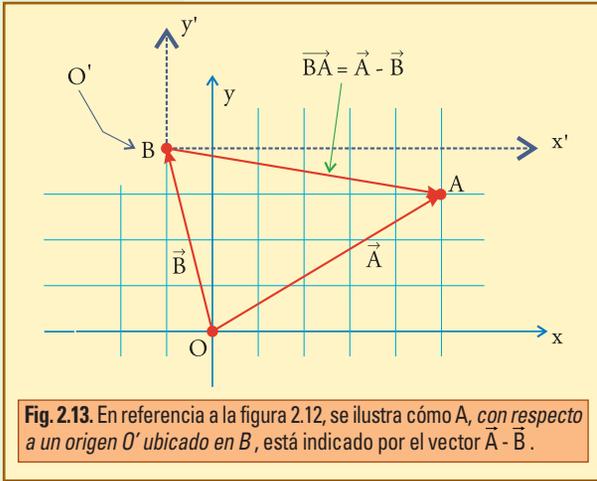


**Fig. 2.12.** Ejemplo de resta vectorial.

Y también significa, como se advierte fácilmente en esta figura 2.12, que la resta vectorial se efectúa componente a componente, de la misma manera que la suma.

### Otra interpretación: diferencia de vectores como cambio de origen.

Consideremos nuevamente la misma resta vectorial de la figura 2.12, reproducida aquí como 2.13, cambiando un poco algunas letras:

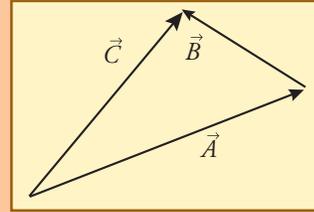


Vemos en esta figura que, si los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  indican respectivamente las posiciones de los puntos A y B con respecto al origen O, entonces  $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$  es el vector  $\vec{BA}$ , que señala la ubicación del punto A respecto del B.

Es decir, cambiando un poco las denominaciones: si tenemos un punto A cuya posición en el sistema  $x, y$  está dada por el vector  $\vec{A}$ , y queremos escribir su posición con respecto al punto O', cuya posición en el mismo sistema  $x, y$  está dada por el vector  $\vec{OO'}$ , entonces la operación que debemos hacer es la resta vectorial  $\vec{A} - \vec{OO'}$  (donde  $\vec{OO'}$  es el mismo vector  $\vec{B}$  anterior).

• **Ejemplo**

- 1) ¿cómo podría leerse e interpretarse el siguiente diagrama vectorial?
- 2) ¿cómo se transforma la figura si le agregamos los vectores representativos del desplazamiento  $\vec{B}$  seguido del  $\vec{A}$ ?



• **Desarrollo**

1) podemos dar varias respuestas. Por ejemplo:

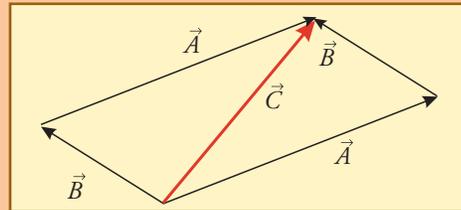
1.a) podemos decir que expresa la suma  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ , porque  $\vec{B}$  a continuación de  $\vec{A}$ , señala el mismo punto que señala  $\vec{C}$ .

Esta suma puede tener más de una interpretación. Por ejemplo si  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  fuesen desplazamientos sucesivos de un cuerpo, al sumarlos de esta manera habríamos encontrado el desplazamiento resultante  $\vec{C}$ . O bien si  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  fuesen fuerzas aplicadas sobre un cuerpo, al sumarlas de esta manera habríamos encontrado la fuerza  $\vec{C}$ , que denominaríamos resultante (tema que trataremos detalladamente en el próximo capítulo).

1.b) también podemos decir que expresa la resta  $\vec{B} - \vec{C} = \vec{A}$ , porque B va desde el extremo de A hasta el extremo de C.

En este libro utilizaremos mucho la resta vectorial para indicar desplazamientos de cuerpos que se mueven: si A y C representasen posiciones sucesivas de un cuerpo, entonces  $\vec{B}$  indicaría el desplazamiento correspondiente.

2) obtenemos la figura correspondiente al método del paralelogramo. En la diagonal correspondiente se halla el vector  $\vec{C}$ , resultado de la suma  $\vec{A} + \vec{B}$ :



• **Proyección o descomposición de un vector**

Teniendo definido el procedimiento para componer vectores, cabe preguntarse si dado

un vector es posible expresarlo como suma de vectores “componentes” actuantes en distintas direcciones dadas.

La idea básica es la siguiente:

Dadas dos direcciones no paralelas siempre es posible expresar de manera única un vector cualquiera del plano definido por ellas, como suma de componentes a lo largo de dichas direcciones. Para ello basta con trazar

por la punta del vector, en una representación gráfica adecuada, rectas paralelas a las direcciones dadas. Entre estas rectas y las dadas se formará un paralelogramo cuyos lados representarán a los vectores componentes buscados.

Por supuesto que esto se generaliza inmediatamente a tres direcciones, en el espacio tri-dimensional, cuando el vector no está contenido en el plano definido por las dos direcciones dadas, aunque aquí no nos ocuparemos de esos casos.

Los procedimientos geométricos o trigonométricos habituales, se podrán utilizar, *sobre la base del dibujo correspondiente*, para expresar estos lados en función de los datos.

Observando la figura 2.14 vemos que también cabe decir que cada componente se obtiene *proyectando* el vector, *sobre esa dirección, según la otra dirección*.

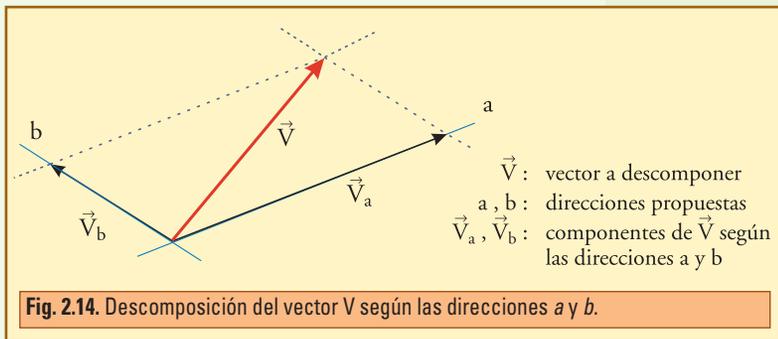


Fig. 2.14. Descomposición del vector  $V$  según las direcciones  $a$  y  $b$ .

## Proyección ortogonal y proyección oblicua

En el caso particular en que las rectas  $a$  y  $b$  son perpendiculares entre sí, tenemos la descomposición *ortogonal* del vector (ortogonal es sinónimo de perpendicular, en el lenguaje matemático). Con este tipo de proyección hemos presentado casi todo el tema vectores: las rectas han sido los ejes cartesianos  $x$ ,  $y$ , y cada componente se ha obtenido proyectando ortogonalmente el vector sobre el eje correspondiente.

En esta figura 2.14 hemos ejemplificado una *proyección oblicua*.

### • Ejemplo

Cuando un cuerpo se apoya en un plano inclinado, interesa descomponer la fuerza peso, que actúa verticalmente, en dos direcciones: una es la dirección del plano, denominada “tangencial”, y otra es la perpendicular al mismo, denominada “normal”. Éste es un ejemplo de descomposición ortogonal.

Atención a la denominación “NORMAL” que aparecerá muchas veces, y significa PERPENDICULAR. Es una denominación de origen matemático que utilizaremos a cada paso, y para evitar confusiones remarcamos desde ya, que *siempre* que hablemos de vectores o direcciones “normales”, debe leerse directamente como *perpendicular*, sin caer en la tentación de tratar de imaginar otro significado a este término.

El interés de este procedimiento, que tendremos que realizar muchas veces, es que como veremos oportunamente, el plano se encarga de equilibrar a la componente normal del peso, que denominaremos  $P_N$ , y sólo queda

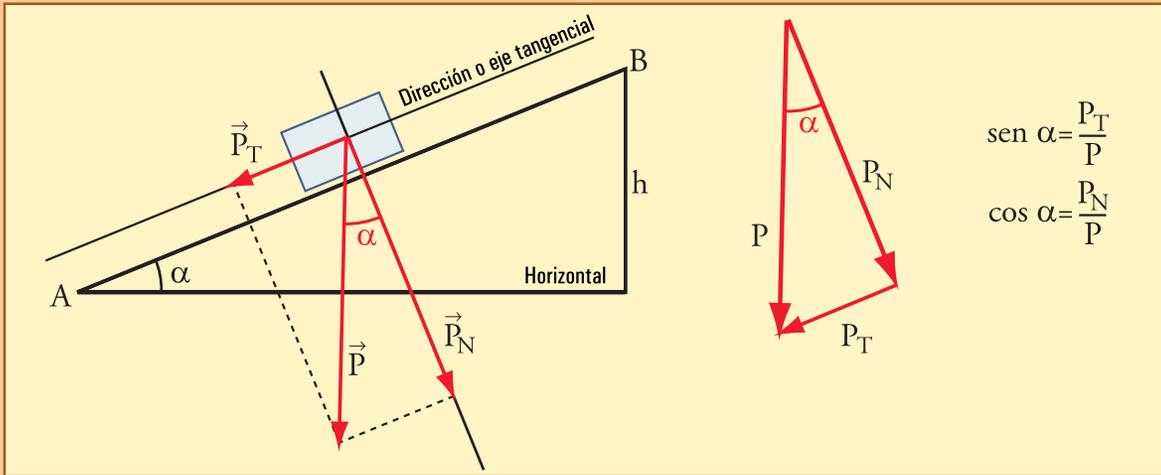
como esfuerzo para una máquina u operario, enfrentar (equilibrar, superar, o lo que sea) a la componente tangencial del peso,  $P_T$ .

Como ejercicio aquí consideremos un cuerpo cuyo peso es 800 N, que se desea arrastrar hacia arriba por un tablón de 3 m de largo, cuyo extremo derecho está levantado 60 cm (ya hemos mencionado que N es el símbolo para la unidad de fuerza que utilizaremos, y por ahora no interesa decir más – 800 N puede ser el peso de una heladera).

Se pide mostrar las componentes normal y tangencial del peso en un diagrama, y calcular los valores de cada una.

• **Desarrollo**

Dibujamos  $\vec{P}$  verticalmente hacia abajo, y desde su extremo trazamos una línea paralela al plano hasta cortar al eje normal, y una perpendicular hasta cortar al eje tangencial.



A la derecha hemos separado el triángulo que sirve para establecer las relaciones. Este triángulo es rectángulo, P es la hipotenusa,  $P_T$  es el cateto opuesto al ángulo  $\alpha$ , y  $P_N$  es el adyacente al mismo ángulo. Como puede verse, este ángulo formado entre la vertical y la normal al plano, es el mismo entre el plano y la horizontal, de manera que en nuestro ejemplo,

$$\text{sen} \alpha = \frac{h}{AB} \Rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{0,60 \text{ m}}{3 \text{ m}} \Rightarrow \text{sen} \alpha = 0,20$$

$$\alpha = \text{arcosen} (0,20) \Rightarrow \alpha \cong 11,54^\circ$$

Así es que tenemos las relaciones que aparecerán siempre en el plano inclinado:

$$\begin{aligned} P_T &= P \text{ sen} \alpha \\ P_N &= P \text{ cos} \alpha \end{aligned}$$

Y para nuestro caso:  $P_T = 160 \text{ N}$ , y  $P_N \cong 784 \text{ N}$ . Decimos que este peso proyecta sólo 160 N en la dirección del plano, y que esa fuerza es la que debe ejercer una máquina o persona para equilibrar esta situación, ya que el tablón soporta lo que proyecta el peso perpendicularmente a él (784 N).

## • El vector velocidad

El primer elemento importante que podemos tratar aplicando directamente lo que hemos definido en estas páginas es el vector velocidad, que sirve para indicar cómo y con qué rapidez se mueve un cuerpo.

### Velocidad en movimientos rectilíneos uniformes

La rapidez con la cual ocurre el desplazamiento de un punto respecto del sistema de referencia correspondiente, también llamada velocidad, puede definirse, al menos en los casos más simples, de movimiento rectilíneo y uniforme, como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado}} \quad (2.1)$$

Ahora bien, el movimiento ocurre con determinada orientación, y deseamos definir un **vector velocidad** que lo indique adecuadamente. Para ello recurriremos a las propiedades del vector desplazamiento.

El movimiento rectilíneo desde un punto a otro ocurre exactamente a lo largo del vector desplazamiento, de manera que este vector tiene la misma dirección y sentido que el movimiento, y un módulo igual a la distancia recorrida.

Con esta idea definimos el **vector velocidad** dividiendo el vector desplazamiento por el tiempo empleado:

$$\text{vector velocidad} = \frac{\text{vector desplazamiento}}{\text{tiempo empleado}} \quad (2.2)$$

Analicemos esta definición más en detalle. Si un móvil pasa en el instante  $t_A$  por el punto A, indicado por el vector posición  $(x_A ; y_A)$ , y en el instante  $t_B$  por el B, dado por  $(x_B ; y_B)$ , entonces (para más claridad ver la figura del ejemplo desarrollado a continuación):

$$\text{vector desplazamiento} = (x_B - x_A ; y_B - y_A),$$

$$\text{tiempo empleado} = t_B - t_A ,$$

vector velocidad:

$$\vec{v} = \frac{(x_B - x_A ; y_B - y_A)}{t_B - t_A} \quad (2.3)$$

En adelante, siguiendo una insoslayable tradición del lenguaje científico, utilizaremos la letra griega  $\Delta$  (delta mayúscula) para indicar la diferencia entre dos valores elegidos que toma una variable. Haremos esto frecuentemente con todo tipo de variables que aparecerán a lo largo del libro, y aquí comenzamos con:

- $\Delta r = r_B - r_A$ ,  $\Delta y = y_B - y_A$ , son las componentes del vector desplazamiento  $\vec{\Delta r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ . Cada componente indica un desplazamiento a lo largo de un eje.
- $\Delta t = t_B - t_A$ , la diferencia entre dos valores de  $t$ , indica la duración del intervalo correspondiente. En general utilizaremos la letra  $t$  para indicar un instante, y  $\Delta t$ , para indicar la duración de un intervalo, o sea, un tiempo transcurrido.

Con esta notación, teniendo en cuenta que  $\Delta t$  es un escalar, y que dividir un vector por el escalar  $\Delta t$ , es lo mismo que multiplicarlo por  $1/\Delta t$  (que es otro escalar), y que eso debe hacerse con cada componente, la definición de vector velocidad queda:

$$\vec{v} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t}; \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \quad (2.3')$$

Esto es lo mismo que decir que las componente del vector velocidad son:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}; \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

### • Ejemplo

Consideremos un punto que se desplaza uniformemente a lo largo de una recta, que en  $t_A = 2$  s pasa por el punto A dado por  $\vec{r}_A = (-40 \text{ m}; 40 \text{ m})$ , y en  $t_B = 10$  s pasa por el punto B, señalado por  $\vec{r}_B = (40 \text{ m}; 20 \text{ m})$ .

- Indique en un dibujo a escala el vector desplazamiento desde A hasta B. Indíquelo como par ordenado. Calcule la distancia recorrida en el tiempo indicado. Calcule cuánto recorrió en cada segundo, y compare con la definición de velocidad (2.1).
- Encuentre las componentes del vector velocidad dado por la definición (2.2). Dibuje este vector con alguna escala que usted determine, y muestre que tiene:
  - módulo igual a la distancia recorrida dividido el tiempo empleado, es decir igual a la velocidad del movimiento.
  - dirección y sentido iguales a los del desplazamiento sufrido por el punto.

### • Desarrollo

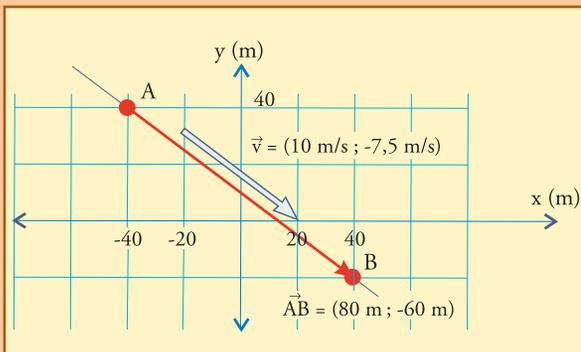
El vector desplazamiento se obtiene restando el vector posición inicial menos el final (componente a componente), y está mostrado con sus componentes en la figura. La distancia recorrida es el módulo del desplazamiento  $\vec{AB}$ , es decir  $\sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ m}$ .

El tiempo demorado es  $t_B - t_A = 10 \text{ s} - 2 \text{ s} \Rightarrow t_B - t_A = 8 \text{ s}$ , de manera que en cada segundo se recorre  $100/8 = 12,5 \text{ m}$ . Esto coincide con lo que se obtiene aplicando la definición de velocidad (2.1):

$$v = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado}}$$

$$v = \frac{100 \text{ m}}{8 \text{ s}}$$

$$v = 12,5 \text{ m/s}$$



El vector velocidad dado por la definición (2.2) es:

$$\vec{v} = \frac{(80\text{m} - 60\text{m})}{8\text{s}} = \left( \frac{80\text{m}}{8\text{s}}; -\frac{60\text{m}}{8\text{s}} \right) = (10\text{m/s}; -7,5\text{m/s})$$

El módulo de este vector es  $\sqrt{10^2 + 7,5^2} = 12,5\text{ m/s}$ , en coincidencia con los resultados anteriores (distancia recorrida dividida por el tiempo empleado), y en la figura está representado con un vector hueco con la escala  $1\text{ cm} : 5\text{ m/s}$ , el cual tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento  $\vec{AB}$  sufrido por el punto. Además puede inferirse que eso no es accidental, sino que es consecuencia directa de que dividimos cada componente de  $\vec{AB}$  por un mismo escalar positivo (8 s).

## EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 2

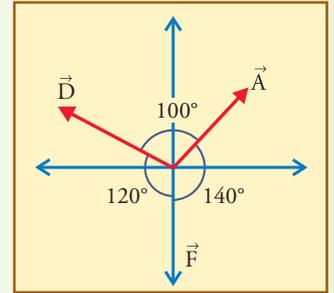
### ▲ Ejercicio 2.1.

Dibujar los siguientes vectores, y calcular las componentes, módulos, y ángulos con los ejes x e y, tomando cada uno dentro del cuadrante correspondiente.

a)  $\vec{A} = (-20; 5)$       b)  $\vec{B} = -5 (5; -10)$       c)  $\vec{C} = 1/5 (30; -60)$

### ▲ Ejercicio 2.2.

Calcular las componentes horizontales y verticales de los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{D}$ , y  $\vec{F}$ , que se muestran, cuyos módulos son  $A = 30$ ,  $D = 35$  y  $F = 24$ . Calcular la suma  $(\vec{A} + \vec{D} + \vec{F})$ , y graficarla cualitativamente.

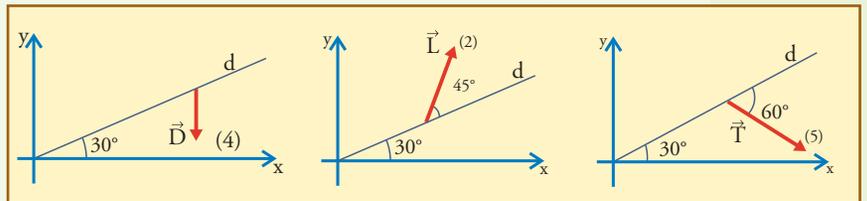


### ▲ Ejercicio 2.3.

Dados los vectores  $\vec{D}$ ,  $\vec{L}$ , y  $\vec{T}$ , mostrados, de módulos:  $D = 4$ ,  $L = 2$ ,  $T = 5$ .

a) Calcular las componentes horizontal y vertical de cada vector. Dibujarlas cualitativamente.

b) Calcular las componentes de estos vectores en la dirección inclinada d, y en una dirección normal a esa dirección. Dibujarlas cualitativamente.



### ▲ Ejercicio 2.4.

Tomando como origen un punto O en una región, el eje x positivo hacia el este, y el eje y positivo hacia el norte, considere un expedicionario que viaja en línea recta desde O hasta el punto A dado por las coordenadas (20 km ; 10 km). A partir de allí el viajero se desvía, desplazándose 40 km hacia el norte, hasta el punto B. Allí nuevamente se desvía, girando la dirección de marcha  $120^\circ$  hacia la izquierda, recorriendo 60 km en esta nueva dirección,

hasta el punto C.

- a) Dibuje los vectores desplazamiento  $\vec{D}_1$ ,  $\vec{D}_2$ , y  $\vec{D}_3$ , correspondientes a los tres tramos rectilíneos descriptos, calculando e indicando las componentes y módulos de cada uno.
- b) Dibuje a escala los vectores posición  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ , y  $\vec{C}$ , de los puntos correspondientes, y expréselos por sus componentes. Calcule también el módulo de cada uno.
- c) Realice gráficamente las siguientes operaciones vectoriales, explique el significado de cada una, y encuentre relaciones entre ellas:  $\vec{B} - \vec{A}$ ;  $\vec{C} - \vec{A}$ ;  $\vec{D}_1 + \vec{D}_2$ ;  $\vec{D}_2 + \vec{D}_3$ ;  $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$ .
- d) Explique el significado de cada una de las siguientes operaciones, y encuentre su resultado:  $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$ ;  $|\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3|$ ;  $|\vec{D}_1| + |\vec{D}_2| + |\vec{D}_3|$ .
- e) Teniendo a la vista los gráficos efectuados, responda a las siguientes cuestiones.
- e1) Las denominaciones correctas para la operación  $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$ , podrían ser (puede haber más de una opción correcta):
1. Suma de vectores
  2. Suma de fuerzas
  3. Suma vectorial de fuerzas
  4. Composición de desplazamientos.
  5. Composición de vectores
  6. Suma vectorial de desplazamientos.
  7. Suma de distancias

e2) El resultado de esta operación ( $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$ ), es (puede haber más de una opción correcta):

*Un vector*

*Una fuerza*

*Una distancia*

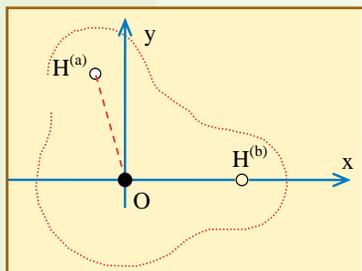
*Un desplazamiento*

e3) El resultado de esta operación ( $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$ ), indica (puede haber más de una opción correcta):

1. La posición de C con respecto a O.
2. El movimiento seguido
3. La fuerza total
4. La fuerza resultante
5. La distancia recorrida
6. La trayectoria seguida
7. La distancia desde C hasta P

### ▲ Ejercicio 2.5.

En la figura se muestra un esquema de la molécula de agua, ubicada en un sistema de ejes x,y. Cada punto indica la posición del núcleo del átomo correspondiente: negro el núcleo del oxígeno, y blanco el de cada hidrógeno (protón). Los protones se han distinguido con un índice para poder plantear con claridad algunas preguntas.



a) A partir de los datos:

ángulo  $\text{HOH} \cong 104,5^\circ$ ; dist.  $\text{H} - \text{O} \cong 0,957 \times 10^{-10} \text{ m}$ , encuentre para cada caso y exprese como par ordenado los vectores:

- $\vec{r}_a$  : posición del protón  $H^{(a)}$
- $\vec{r}_b$  : posición del protón  $H^{(b)}$
- $\vec{r}_a - \vec{r}_b$  : interprete su significado
- $\vec{r}_b - \vec{r}_a$  : interprete su significado

- b) Encuentre el módulo de los vectores mencionados en a). Diga cuál o cuáles de los módulos calculados representan la distancia entre los protones.
- c) Diga cuáles de los vectores que ha escrito representan la posición de  $H^{(a)}$  con respecto a  $H^{(b)}$ , y cuáles representan dicha posición con respecto a O.
- d) Muestre gráfica y analíticamente cómo se efectúa la siguiente operación vectorial:  $\vec{r}_a +$  vector posición de  $H^{(b)}$  con respecto a  $H^{(a)} = \vec{r}_b$

### ▲ Ejercicio 2.6.

Consideremos una red cristalina. Supongamos que A y B representan el núcleo o centro de dos átomos cualquiera.

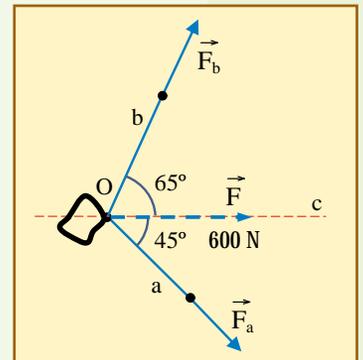
Supongamos que  $r_A = (2 ; 3) \times 10^{-10} \text{ m}$  , y  $r_B = (-2 ; 1) \times 10^{-10} \text{ m}$  .

- a) Calcule las distancias de A y B al origen, y sus respectivas orientaciones con respecto a la dirección señalada por el eje  $x^+$ .
- b) Calcule  $r_B - r_A = \vec{AB}$  , muéstrelo en un dibujo, y a partir de ese vector indique la distancia y la orientación con la que habría que desplazar el átomo A para que ocupe el lugar del B.
- c) Muestre todos los vectores en un dibujo. Si los átomos A y B fuesen iguales y estuviesen en contacto, calcule el valor de sus diámetros.
- d) Explique sobre el dibujo cómo se muestra que  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$ , y también cómo se muestra que  $\vec{AB}$  es la posición de B con respecto a A.

### ▲ Ejercicio 2.7.

Dos operarios tratan de arrastrar horizontalmente un cuerpo muy pesado tirando con dos cuerdas amarradas al cuerpo en O. El cuerpo debe ser arrastrado en la dirección de la recta c, y por efecto de ciertos obstáculos que hay en el lugar las cuerdas deben ubicarse en las direcciones a, y b, mostradas, que forman  $45^\circ$  y  $65^\circ$  con la dirección c (todas en un plano horizontal). Dado que se sabe que para que el cuerpo comience a deslizarse la fuerza neta horizontal aplicada debe superar los 600 N, los operarios tratan de averiguar previamente cuánta fuerza deberá aplicar cada uno, para decidir si será posible arrastrar dicho cuerpo.

Realice un diagrama vectorial a escala que muestre la descomposición, según las direcciones de las dos cuerdas, de la fuerza  $\vec{F}$  , de 600 N, que se espera obtener como resultante, y obtenga de este diagrama los valores de



las fuerzas que tiran de cada cuerda.

▲ **Ejercicio 2.8.**

Explique cuál es el error de la siguiente frase:

“Todo vector es una fuerza y toda fuerza es un vector”.

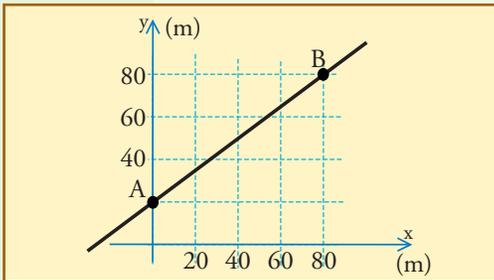
▲ **Ejercicio 2.9.**

Consideremos un punto que se desplaza uniformemente a lo largo de una recta, que en  $t_1 = 0\text{s}$  pasa por el punto A dado por  $\vec{r}_A = (0\text{ m} ; 20\text{ m})$ , y en  $t_B = 4\text{s}$  pasa por el punto B, señalado por  $\vec{r}_B = (80\text{ m} ; 80\text{ m})$ .

a) Indique en el dibujo el vector desplazamiento desde A hasta B. Indíquelo como par ordenado. Calcule su módulo, y utilícelo para expresar la distancia recorrida en los 4 segundos indicados. Calcule cuánto recorrió en cada segundo, y compare con la definición de velocidad (2.1).

b) Encuentre el vector velocidad dado por la definición (2.3'). Dibuje este vector con alguna escala que usted determine, y muestre que tiene igual dirección y sentido que el vector desplazamiento.

c) Calcule el módulo de este vector y compare con lo calculado en a).



# Fuerzas y tensiones mecánicas

La **mecánica** es la disciplina que describe y estudia las posiciones de los cuerpos y sus variaciones en el tiempo en función de sus interacciones recíprocas. Las variables mecánicas típicas son las posiciones y las velocidades, pero también las formas y deformaciones de los cuerpos, que son posiciones y cambios de posición relativos entre puntos de un cuerpo. Las acciones *mecánicas* son las que afectan a este tipo de variables, y ellas tienen lugar cuando un cuerpo, por medio de la **aplicación de fuerzas**, empuja, mueve o deforma a otro.

En este capítulo nos dedicaremos a entender las fuerzas que se manifiestan en el ámbito de la vida diaria, al que podríamos llamar el reino de lo macroscópico. En él son evidentes, casi exclusivas, las manifestaciones de dos tipos de fuerzas: las fuerzas de **contacto**, y la fuerza de **gravedad**, en apariencia muy distintas.

También hablaremos de las nociones de *tensión*, o *esfuerzo*, que expresan el valor de la *concentración de fuerza por unidad de superficie*, que en muchas situaciones resulta más importante que el valor de la fuerza en sí misma.

## ■ 3.1. Ideas básicas sobre las fuerzas

La primera noción básica que dejaremos establecida es que, en nuestro *modelo de las interacciones mecánicas*, la fuerza debe ser un ente de naturaleza *vectorial*, porque es lo que se aplica a un cuerpo para producir desplazamientos, que son vectores. Esto es cierto tanto si hablamos de poner en movimiento como de deformar algo. En ambos casos lo que se logra se expresa con vectores de desplazamiento, y para lograrlo en los dos casos se debe aplicar una fuerza que, por lo tanto, debe gozar de la misma posibilidad de ser orientada en el espacio que los desplazamientos que tiende a producir.

### ● La fuerza resulta de una interacción

En nuestro modelo es esencial considerar que las fuerzas *no son propiedades de un cuerpo*, sino que son resultado de una interacción entre cuerpos. Excepto el caso especial de la atracción gravitatoria, que analizaremos aparte, la interacción requiere de una *zona de contacto* a través de la cual cada cuerpo aplica fuerza al otro.

Debe estar claro que, dejando de lado la acción de la gravedad, o sea el “peso” del cuerpo, todas las demás fuerzas son de contacto: **no hay fuerza donde no hay contacto**. Será posible identificar todas las fuerzas actuantes sólo si se revisan todos los contactos.

Y esto implica dos cosas muy simples que deberemos respetar:

**a) Cuando termina el contacto, deja de aplicarse la fuerza.**

Esto significa que un cuerpo no conserva la fuerza que se le aplicó: conserva energía, conserva movimiento, pero no puede conservar fuerza. **Llamamos fuerza a cierta propiedad del contacto no a algo que el cuerpo pueda acumular y conservar.**

Es decir, si impulsamos un cuerpo aplicándole una fuerza  $\vec{F}$ , y después de que dejamos de empujarlo continúa moviéndose, entendemos que eso es la *inercia*, y no que lo hace porque conserva la fuerza que le hemos aplicado. El cuerpo *conserva el movimiento* que le hemos comunicado aplicándole fuerza. Si se nos pregunta qué fuerza está actuando sobre el cuerpo en ese momento (*después de que dejamos de empujarlo*), no debemos decir que sigue actuando  $\vec{F}$ , porque eso significaría que lo seguimos empujando.

**b) Un cuerpo no se aplica fuerza a sí mismo.** La fuerza sobre un cuerpo sólo puede ser aplicada por otro cuerpo, al cual frecuentemente llamaremos “agente exterior”, para destacar este concepto fundamental.

Esto significa que un cuerpo *aislado* no se puede poner en movimiento, ni frenarse, a sí mismo. La física *no admite la posibilidad* de que un cuerpo o ser adquiera movimiento (o se frene), al estilo “Superman”, recurriendo a una especie de “fuerza interior”. Un automóvil, por caso, sólo puede iniciar su movimiento, o frenarse, *aplicando fuerza al piso*. No podría hacerlo sin contacto con el piso. Insistiremos y reflexionaremos mucho más sobre esto oportunamente.

## Efecto de las fuerzas sobre los movimientos

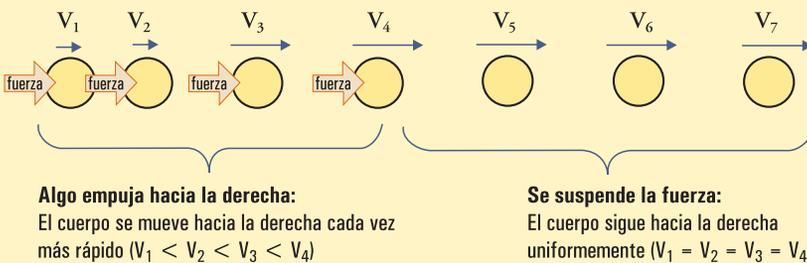
Vamos a plantear cuál es el efecto de una fuerza sobre el movimiento de un cuerpo. Uno de los casos más simples o elementales posibles es: *un cuerpo sobre el que se aplica una única fuerza*.

Para que este planteo no sea mal interpretado, imaginaremos un cuerpo aislado, muy lejos de la influencia gravitatoria de cualquier planeta, y sin contacto con cosa alguna; diremos que está como flotando en la nada (no hay gravedad, no hay piso, no hay aire,

no hay rozamiento, etc.).

Así que para este hipotético cuerpo que, según el principio de inercia, mientras no se le apliquen fuerzas mantendrá su reposo o movimiento uniforme en línea recta, podremos decir:

**1.** Si el cuerpo está en reposo y se le aplica una (única) fuerza, iniciará el movimiento



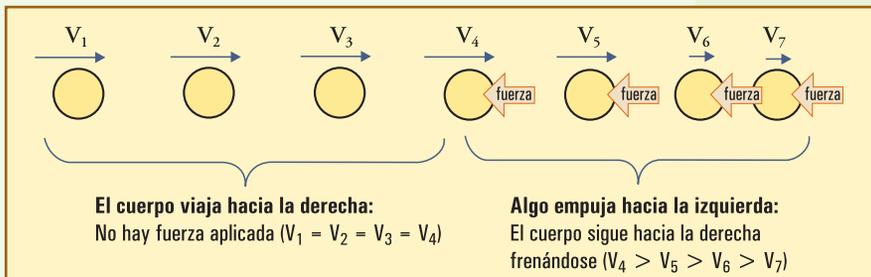
**Fig. 3.1.** Por acción de un agente externo que no se muestra, una fuerza empuja al cuerpo en el lapso que abarca los cuatro primeros dibujos, haciendo que se inicie el movimiento, y luego que aumente su velocidad. Al suspenderse la fuerza, el movimiento continúa como lo establece el principio de inercia.

con la orientación de la fuerza. Si la fuerza se mantiene aplicada con la misma orientación, la velocidad aumentará mientras ello ocurra. Si la fuerza deja de aplicarse, la velocidad dejará de aumentar, *pero no disminuirá*. Para que disminuya se necesita una fuerza que lo frene.

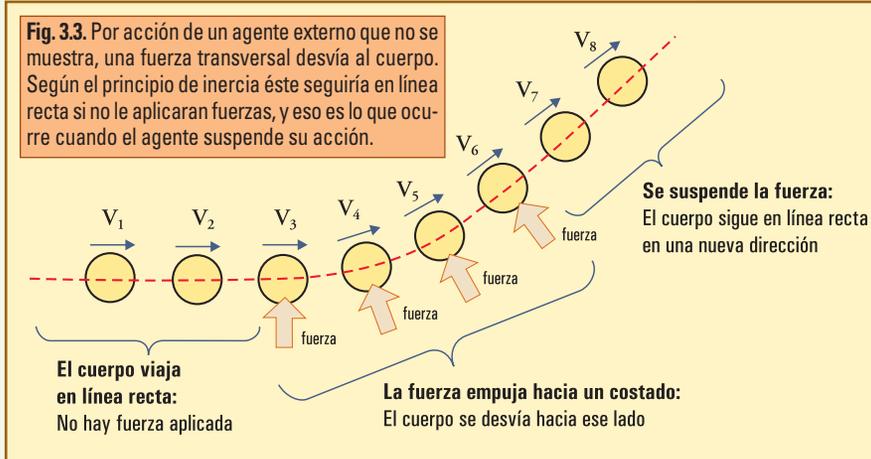
2. Si el cuerpo está en movimiento y se le aplica una fuerza orientada en sentido contrario al movimiento, el efecto será la disminución de la velocidad, pudiendo llegar a detener el cuerpo.

3. Si el cuerpo está en movimiento y se le aplica una fuerza transversal, su efecto será desviar al cuerpo de la línea recta que seguiría naturalmente. La desviación ocurre, por supuesto, en el sentido de la fuerza aplicada, y el cuerpo describe una línea curva mientras dura la aplicación de la fuerza.

4. Si se aplican varias fuerzas simultáneamente sobre un cuerpo, *el efecto sobre el movimiento* es la *superposición* de los efectos que ellas tendrían por separado. Como veremos pronto, en estos casos se determina la *fuerza resultante*, que puede pensarse como la fuerza neta actuante, y se razona con ella como si fuese la única fuerza.



**Fig. 3.2.** En los cuatro últimos cuadros se muestra el frenado del cuerpo por medio de una fuerza en contra del movimiento (aplicada por un agente externo que no se muestra). Si el agente continúa actuando luego de que el cuerpo se detenga, el movimiento se reiniciará hacia la izquierda.



**Fig. 3.3.** Por acción de un agente externo que no se muestra, una fuerza transversal desvía al cuerpo. Según el principio de inercia éste seguiría en línea recta si no le aplicaran fuerzas, y eso es lo que ocurre cuando el agente suspende su acción.

**Nota 1. No hay excepciones**

*Estas ideas son tan importantes, que volveremos a revisarlas cada vez que estudiemos algún movimiento particular. Pero vayamos preparando nuestra mente para entender que **no hay excepciones**. Cuando parece que un cuerpo se detiene solo, es porque alguna fuerza que no hemos advertido lo detuvo (en general un rozamiento). La fuerza nunca actúa en un instante. Los procesos transcurren en el tiempo, durante un intervalo mayor o menor (ver figuras anteriores). Cuando parece que puede haber algún fenómeno explosivo, un choque, un rebote, algo que ocurre en un instante, se debe reflexionar más, inspeccionar con más cuidado el modelo mental que se tiene de lo que ocurre. No es posible*

poner en movimiento, detener, o desviar, instantáneamente a un cuerpo. Cualquier proceso que parezca ser instantáneo, si se filma o inspecciona con un aparato suficientemente rápido, se verá que se desarrolla gradualmente, a lo largo de cierto intervalo de tiempo.

Cuando parece que un proyectil se detiene “de golpe” al chocar contra algo, si se analiza, se observa que avanzó algo, por poco que sea, durante el proceso de chocar.

Lo mismo si parece que la trayectoria de un proyectil se quiebra en ángulo al rebotar contra algo. Inspeccionando (mentalmente) el ángulo siempre se encontrará un pequeño tramo de la trayectoria que es realmente curva.

### • Ejemplo 1

Se observa que un cuerpo de masa  $m = 200 \text{ kg}$  que está en reposo en A se pone en movimiento en  $t_0 = 0 \text{ s}$ , siguiendo la trayectoria dibujada. El cuerpo aumenta gradualmente de velocidad hasta pasar por B en  $t_1 = 8 \text{ s}$ , y a partir de allí el movimiento se mantiene uniforme. El cuerpo pasa por C en  $t_2 = 11 \text{ s}$ , y continúa uniformemente hasta pasar por D, donde comienza a frenarse gradualmente para quedar en reposo en E.

a) Encuentre los vectores desplazamiento correspondientes a los intervalos sucesivos AB, BC, CD, y DE. Dibújelos sobre la trayectoria y expréselos como par ordenado.

b) Calcule el vector velocidad correspondiente al tramo BC. Dibújelo sobre la trayectoria, en algún punto del tramo, con una escala  $2 \text{ m/s} : 1 \text{ cm}$ .

c) Indique el módulo de la velocidad con la que es recorrido el tramo uniforme BD. Calcule en qué instante pasa el móvil por D.

d) Explique en qué partes de la trayectoria hay fuerza neta actuando sobre este móvil, y en qué partes dicha fuerza debe ser nula. Dibuje cualitativamente los vectores fuerza en donde existan, explicando qué efecto está haciendo la fuerza en ese instante sobre el móvil.

e) Considere las siguientes afirmaciones. Para cada una califíquela de verdadero o falso en general, e indique qué parte de este movimiento particular planteado aquí sirve para ilustrar su conclusión.

e.1) Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, o si la resultante es nula, deberá estar en reposo.

e.2) El movimiento de un cuerpo siempre tiene lugar en la dirección de la fuerza resultante.

e.3) Si en un instante dado, la velocidad de un cuerpo es nula, la fuerza resultante sobre él, en ese instante, también lo será.

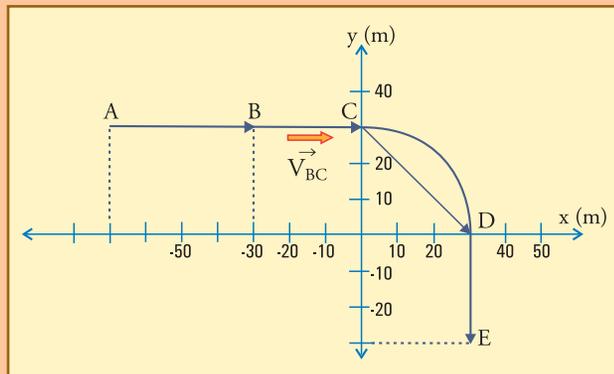
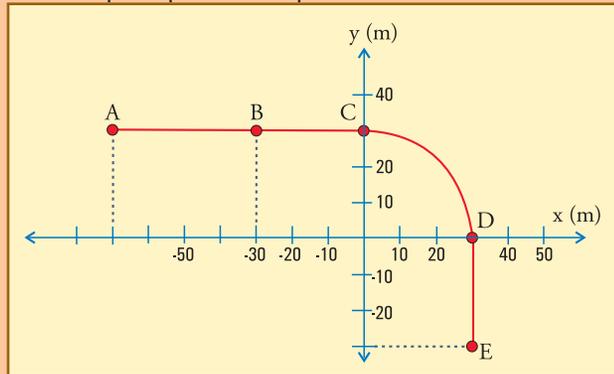
### • Desarrollo

a) En la figura se muestran los desplazamientos.

$$\vec{AB} = (40 \text{ m}; 0 \text{ m}); \vec{BC} = (30 \text{ m}; 0 \text{ m});$$

$$\vec{CD} = (30 \text{ m}; -30 \text{ m}); \vec{DE} = (0 \text{ m}; -30 \text{ m}).$$

b) Dividiendo  $\vec{BC}$  por el tiempo demorado, que es



11- 8 = 3 s, obtenemos (se muestra como un vector hueco en la figura):

$$\vec{V}_{BC} = (10 \text{ m/s} ; 0 \text{ m/s})$$

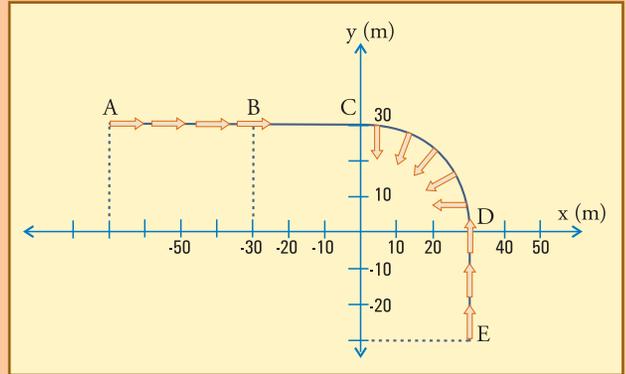
Vale aclarar que por ahora sólo tenemos elementos para calcular la velocidad en este tramo, porque en los otros el vector velocidad varía. Más adelante veremos qué hacer en esos casos.

- c) El módulo de este vector es 10 m/s, y se mantiene constante hasta D. Para calcular lo que demora el móvil en llegar a D, dividimos: longitud(CD) /  $v = \frac{1}{2} \pi \times 30 \text{ m} / 10 \text{ (m/s)} \cong 4,71 \text{ s}$ . De manera que pasa por D en  $t_D \cong 15,71 \text{ s}$ .
- d) En el tramo AB la velocidad aumenta, y no hay desviación, de manera que debió actuar una fuerza resultante hacia delante, es decir, hacia la derecha de la figura.

El tramo BC se recorre uniformemente en línea recta, eso significa que **no hay fuerza neta (resultante)** actuando.  $F_R = 0$  entre B y C.

El tramo CD se recorre uniformemente con desviación hacia la derecha: debe estar actuando una fuerza resultante perpendicular al movimiento, hacia la derecha del mismo.

Entre D y E, el móvil se frena en línea recta. Es decir, se suspende la fuerza perpendicular que lo venía desviando, y comienza a actuar una fuerza (resultante) hacia atrás (en la figura hacia arriba), que se mantiene hasta que el móvil se detiene. En la figura se muestra la fuerza resultante con vectores huecos.



e.1) Es falso, contradice el principio de inercia. Tramo BC.

e.2) Es falso, como queda mostrado en el tramo CD, en el cual la fuerza es perpendicular al movimiento, o más notablemente aún en el tramo DE, en el cual la fuerza es exactamente contraria al movimiento. Es necesario reflexionar sobre el hecho de que, aunque el enunciado e.2) sería cierto para el tramo AB, no lo es *en general*, y eso le confiere el carácter de FALSO, ya que contiene el cuantificador "siempre".

e.3) Falso. El hecho de que un cuerpo se detenga no depende de la fuerza que actúa en ese instante, sino de la acción de la fuerza en los instantes previos. En el instante exacto de la detención, la fuerza puede anularse, o no, y en este ejemplo encontramos ilustradas las dos situaciones.

Así tenemos el caso del punto E: la fuerza que ha actuado durante todo el trayecto DE para detener al cuerpo, debe anularse en el instante en que el cuerpo se detiene (en E), ya que si continuara actuando el movimiento se reiniciaría hacia D, es decir en el sentido de la fuerza que habría permanecido sin anularse (por ejemplo si en el punto E hubiera habido un resorte que es comprimido por el móvil hasta detenerlo, y luego lo lanza en sentido contrario).

De manera que en punto E, en el ejemplo desarrollado, la afirmación e.3) ha sido válida, pero con un simple cambio en el enunciado, podría no haberlo sido. Esto la califica como FALSA, ya que *de la anulación de la velocidad no se deduce la anulación de la fuerza resultante*.

El punto inicial, A, por otra parte, constituye un ejemplo de caso en que la afirmación e.3) es falsa. Ya que mientras la fuerza resultante sea nula en el punto A, de velocidad nula, el movimiento *no se iniciará*. El movimiento se inicia precisamente en el instante en que se aplica una fuerza en A. En ese instante exacto, la velocidad es nula y la fuerza resultante no.

### Nota conceptual

Las afirmaciones e.1), e.2), e.3), pueden parecer capciosas, pero no lo son. Son tres afirmaciones que reflejan la identificación errónea de la fuerza con el movimiento o la velocidad.

Esta identificación, que es una de las barreras más comunes que hay que superar para entender las leyes de la dinámica, obedece a una metodología de pensamiento muy difundida, denominada "metodología de la superficialidad", la cual consiste en identificar de manera irreflexiva y rápida conceptos diferentes a partir de cualquier semejanza. Los que adoptan (en general inconscientemente) esta metodología, actúan como si estuvieran obligados a tener respuestas o certezas rápidas para todas las cuestiones, no importa cómo se obtengan, y como si hubiese algo malo en demorarse reflexionando y elaborando alguna idea.

La esencia del pensamiento científico está precisamente en lo contrario: busca elaborar con cuidado las ideas, revisando todos sus aspectos. Una semejanza nunca es motivo para una identificación inmediata, sino para una búsqueda de razones que la justifiquen.

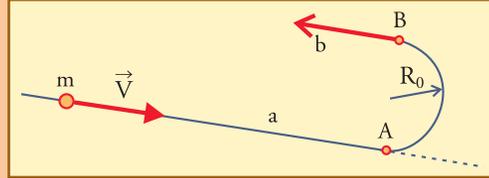
La veracidad de una ley *no se juzga buscando un ejemplo favorable*, sino al contrario, tratando de mostrar que no podría haber contraejemplos.

### Ejemplo 2

Una partícula se desplaza libremente en el espacio (sin que actúen sobre ella fuerzas de ningún tipo, no hay gravedad ni rozamiento) a lo largo de una recta **a**.

A partir de un punto **A** se desea desviar a la partícula para que siga la trayectoria mostrada, que consiste en una semicircunferencia de radio  $R_0$ , que luego continúa en la línea recta **b**, sin que varíe la rapidez de su movimiento.

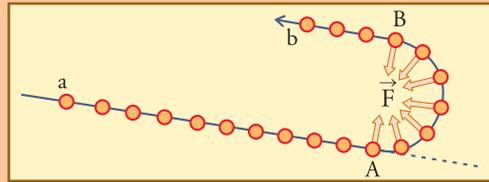
Explique cómo es la fuerza que es necesario aplicar para lograr este movimiento: qué orientación debe tener, y durante qué lapso debe actuar. Dibuje cualitativamente.



### Desarrollo

Al no haber rozamiento ni otras fuerzas extrañas, hay que esperar que el cuerpo llegue a A, sin aplicarle fuerza alguna. Cuando llega a ese punto hay que comenzar a aplicarle una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento, hacia la izquierda, y hay que mantener esa fuerza aplicada de esa manera (exactamente perpendicular a la trayectoria), con módulo constante, hasta que el cuerpo llegue a B (donde se completa la semicircunferencia).

A partir de ese instante  $t_B$ , simplemente se suspende la fuerza, y el cuerpo continuará por la línea recta **b**.



Con **dibujar cualitativamente** queremos decir un dibujo aproximado, sin escala, pero que muestra cualidades, es decir, muestra si algo coincide con determinada dirección, o no; en el caso de que no, muestra si forma ángulo agudo u obtuso, grande o chico; también puede indicar si el módulo está aumentando o disminuyendo, o alguna otra propiedad que sea importante para la situación. En éste (y en cualquier texto de física), veremos a cada paso este tipo de dibujo.

## Naturaleza vectorial de las fuerzas y principio de superposición

El carácter vectorial de las fuerzas significa que cada componente de un vector fuerza  $\vec{F}$  representa la intensidad de una acción a lo largo de la correspondiente dirección del espacio, tal que la superposición de las acciones representadas por todas las componentes, cada una a lo largo de su dirección particular, equivale a la acción de  $\vec{F}$  a lo largo de su propia dirección.

Este enunciado, denominado **principio de superposición**, esencialmente es lo mismo que antes hemos llamado principio de independencia de los movimientos, ya que ambos enunciados sostienen que las acciones en una dirección tienen efectos sobre el movimiento en esa dirección independientemente de lo que ocurra en otras direcciones, y que sólo pueden ser reforzadas o contrarrestadas por acciones en esa misma dirección.

Ahora bien, es difícil que tratemos con cuerpos sobre los que actúe una única fuerza. Aún en el caso en que apliquemos una única fuerza sobre un cuerpo, por lo general provocaremos la aparición de otras fuerzas que resultarán de la interacción con los demás cuerpos que están en contacto con él, comúnmente llamadas **reacciones**. Como resultado de todo eso, el cuerpo en cuestión resultará sometido a un **sistema de fuerzas**, y el principio de superposición nos permitirá simplificar las ideas, reemplazando, para determinados fines, a todo ese sistema de fuerzas con la llamada **“fuerza resultante”**.

## • Fuerza resultante

La operación que expresa la superposición de los efectos de las componentes de una fuerza es la composición o suma vectorial.

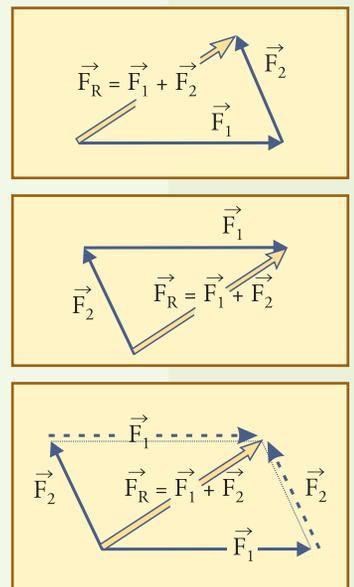
En función de esto, definimos que la fuerza resultante de un sistema de fuerzas es el resultado de la suma vectorial de todas las fuerzas del sistema.

Como ya hemos visto, la suma vectorial, aunque se indica con el símbolo “+”, de la misma manera que la suma de números, se efectúa entre elementos que son vectores, **componiendo** los vectores. Esta operación -como ya hemos visto- se efectúa componente a componente, y se expresa gráficamente dibujando los vectores uno a continuación del otro.

De este modo, cuando se suman muchos vectores se obtiene un “polígono vectorial”, en el que la resultante está indicada desde la “cola” del primer vector, hasta la “punta” del último. Si sólo se suman dos vectores, que será lo más frecuente, el polígono se reduce a un triángulo -a veces es preferible completar el “paralelogramo de vectores”-.

La expresión analítica de este procedimiento, como ya hemos visto, consiste en sumar independientemente las componentes de los vectores según cada dirección del espacio:

$$\begin{aligned}
 [3.1] \quad \vec{F}_R &= \sum \vec{F}_i \\
 \vec{F}_R &= \begin{cases} F_{Rx} = \sum F_{ix} \\ F_{Ry} = \sum F_{iy} \\ F_{Rz} = \sum F_{iz} \end{cases}
 \end{aligned}$$



**Fig. 3.4.** Tres formas equivalentes de sumar dos vectores fuerza  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ . Los polígonos que se obtienen dibujando un vector a continuación del otro son los triángulos mostrados primero, totalmente equivalentes entre sí. A la derecha se muestra el paralelogramo, que no es más que la reunión de los dos triángulos anteriores.

### Nota 2. No debe confundirse la suma de fuerzas con la suma de sus módulos

Debe estar muy claro que la intensidad de la fuerza resultante en general **no es igual** a la suma de las intensidades o módulos de las fuerzas que se suman, ya que cada una actúa según distintas direcciones. A partir de la observación del polígono de vectores es muy fácil darse cuenta de que solamente corresponderá sumar los módulos cuando las fuerzas actúen con la misma orientación.

### Nota 3. La fuerza resultante no tiene en cuenta todos los detalles

Hallar la resultante significa simplificar el sistema de fuerzas haciendo abstracción de numerosos detalles. Así por ejemplo, en el cálculo de las componentes de la fuerza resultante sólo intervienen las componentes de las fuerzas del sistema, pero no dónde y cómo están aplicadas, de manera que no se está teniendo en cuenta si las fuerzas del sistema están aplicadas de manera de deformar o romper (o no) el cuerpo, ni si pueden producir o no su rotación. Ésta es una simplificación absolutamente necesaria para determinados fines..

## • Primera condición de equilibrio

Supongamos un sistema de  $N$  fuerzas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ , aplicadas sobre un cuerpo.

Sabemos hallar la resultante del sistema con la operación vectorial  $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$ .

Cuando se da la situación de que no hay fuerza resultante -lo que significa que la fuerza resultante es un vector nulo:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \vec{0}$  -, se dice que el sistema de fuerzas cumple lo que se denomina “primera condición de equilibrio”.

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_i &= \vec{0} \\ \sum \vec{F}_i &= F_R\end{aligned}\quad (3.2)$$

De las ideas básicas que hemos enunciado se desprende que, cuando el sistema de fuerzas actuante sobre un cuerpo cumpla con la condición de fuerza resultante nula, un cuerpo que esté en reposo no será alterado en su reposo, y si está viajando, tampoco será acelerado ni frenado ni desviado de la línea recta, por el sistema de fuerzas. Por ahora, entenderemos así la condición de equilibrio.

## • Fuerza equilibrante

Si el sistema de fuerzas actuante sobre un cuerpo tiene resultante  $\vec{F}_R$  (obviamente no está en equilibrio), podemos hacer que cumpla la condición (3.2) aplicando sobre el mismo cuerpo una fuerza exactamente opuesta a  $\vec{F}_R$ , que se llamará “fuerza equilibrante” del sistema,  $\vec{F}_E$ , ya que:

si  $\vec{F}_E = -\vec{F}_R$ , entonces el sistema compuesto por todas las  $\vec{F}_i$  y además la  $\vec{F}_E$ , tiene re-

sultante nula (pues  $\underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N}_{\vec{F}_R} + \underbrace{\vec{F}_E}_{-\vec{F}_R} = \vec{F}_R - \vec{F}_R$

$$\underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N}_{\vec{F}_R} + \underbrace{\vec{F}_E}_{-\vec{F}_R} = \vec{0} )$$

#### Nota 4. Otra condición de equilibrio

Si recordamos que la suma vectorial se efectúa simplemente sumando las componentes correspondientes entre sí, advertimos que esta primera condición se refiere exclusivamente a las componentes de las fuerzas, y no tiene en cuenta en dónde se aplica cada una. Veamos ahora un ejemplo simple, que presenta ideas sobre distintas situaciones posibles.

Supongamos que un agente aplica al cuerpo de la figura 3.5(a) una fuerza  $\vec{F}$  en el punto  $\vec{A}$ , y que otro quiere contrarrestar el efecto aplicando la fuerza opuesta  $\vec{E} = -\vec{F}$ , y analicemos lo que sucede aplicando  $\vec{E}$  en tres puntos posibles diferentes, A, B, y C.

Si se aplica  $\vec{E}$  exactamente en el mismo punto A que  $\vec{F}$  (figura 3.5(b)), con ciertos cuidados, se puede llegar a cancelar su efecto. Se habría llegado a un equilibrio total entre las acciones, y la resultante nula, esta situación equivaldría a la ausencia de fuerzas sobre el cuerpo.

Si se aplica en B (figura 3.5(c)), se llega a un equilibrio entre las acciones, pero el cuerpo queda tensionado entre un agente que tira hacia la izquierda desde B y otro que tira hacia la derecha desde A. El cuerpo se deforma un poco o mucho (el segmento AB se estira algo), y hasta puede romperse. Si no se rompe, el sistema queda equilibrado, y en lo que respecta al movimiento (ignorando las tensiones internas) la resultante nula en este caso, también equivale a la ausencia de fuerzas.

Ahora bien, si se aplica en C (figura 3.5(d)), queda claro que aunque el cuerpo en conjunto no se traslade hacia la derecha ni hacia la izquierda, la fuerza  $\vec{E}$  no podrá impedir que la  $\vec{F}$  desplace al punto A hacia la derecha, ni la  $\vec{F}$  podrá impedir que  $\vec{E}$  desplace al B hacia la izquierda. Estos desplazamientos constituirán, en principio, una rotación del cuerpo en sentido horario (tendiente a alinear el segmento AC con las fuerzas). De manera que en este caso vemos que  $\vec{E}$  equilibra a  $\vec{F}$  en lo que se refiere a las posibilidades de traslación del cuerpo, pero no relación con posibles rotaciones.

Veremos más adelante, al estudiar rotaciones, que hay una 2da condición de equilibrio que tiene en cuenta dónde se aplican las fuerzas. Esta condición determina si el sistema de fuerzas puede o no impulsar rotaciones.

En función de esto es que la condición de equilibrio que aquí estamos estudiando se denomina también “condición de equilibrio de traslación”.

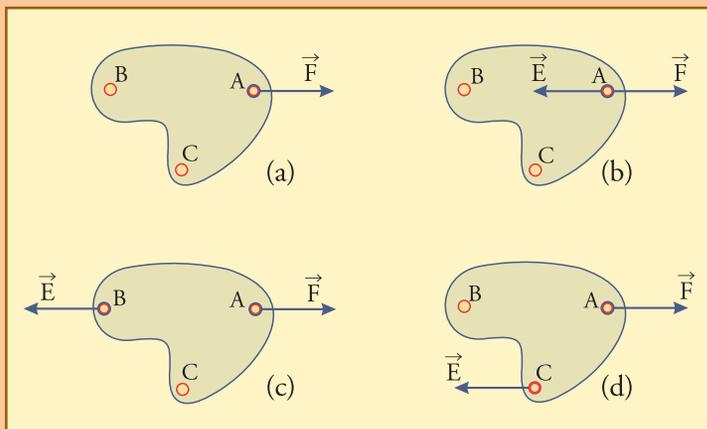


Fig. 3.5. (a): se aplica  $\vec{F}$  en el punto A de un cuerpo. (b), (c), (d): se muestra  $\vec{E}$  aplicada respectivamente en A, B, y C.

### Ejemplo

1. En un sistema de ejes cartesianos elija una escala adecuada y dibuje las fuerzas:

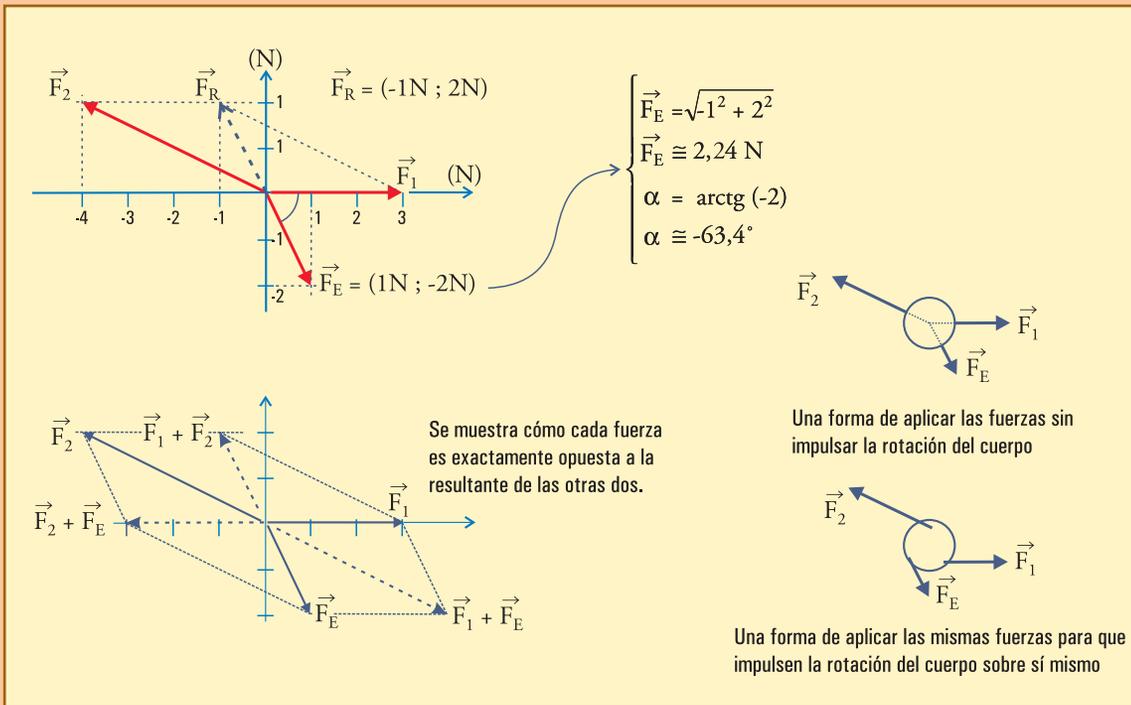
$$\vec{F}_1 = (3 \text{ N}; 0 \text{ N}) \quad ; \quad \vec{F}_2 = (-4 \text{ N}; 2 \text{ N}).$$

2. Encuentre gráficamente la equilibrante de este sistema de dos fuerzas, escríbala como par ordenado, y calcule su módulo y el ángulo que forma con los ejes.

3. Para el sistema formado por  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , y  $\vec{F}_E$ , muestre gráficamente que cada fuerza es equilibrante del sistema que forman las otras dos.

4. Dibuje esquemáticamente un cuerpo con  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , y  $\vec{F}_E$  aplicadas de manera de no impulsar su rotación, y otro con las mismas fuerzas aplicadas de manera de impulsar su rotación.

### Desarrollo



Toda aplicación de fuerza por un cuerpo A sobre otro B, da lugar a una reacción exactamente opuesta y de la misma intensidad, aplicada por el cuerpo B sobre el A.

## Principio de acción y reacción

Para seguir avanzando en el concepto de fuerza debemos enunciar otro de los tres principios de la dinámica, llamado principio de acción y reacción (en general se lo enuncia en tercer lugar, pero para este texto conviene hacerlo ahora), que dice:

Al igual que los otros, este principio no tiene excepciones, y vale tanto si las fuerzas son

de contacto, como si no lo son (caso de la gravedad, por ejemplo).

Cada fuerza sólo existe junto con su reacción, y ambas constituyen un “*par acción-reacción*”. Ambas son exactamente iguales en módulo, opuestas, y existen al mismo tiempo -ninguna precede en lo más mínimo a la otra, ni la supera en ninguna cantidad-.

**Cualquiera de las dos puede ser denominada acción, y la otra por lo tanto es la reacción.**

**Y, además, no se anulan entre sí. Porque no actúan sobre el mismo cuerpo.**

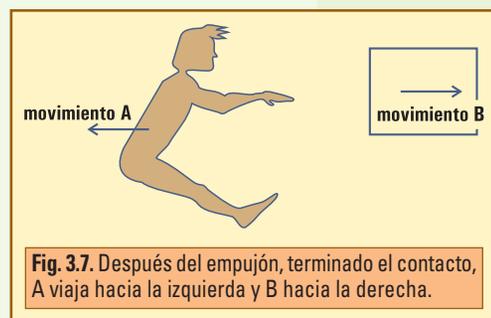
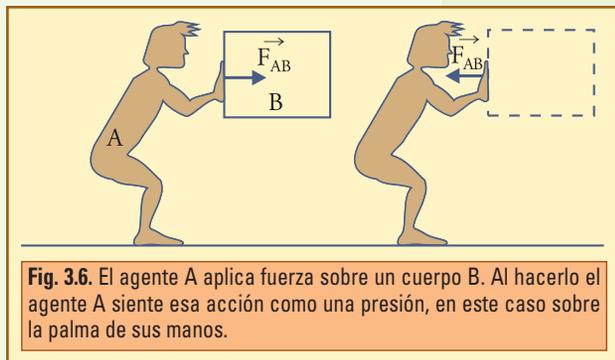
Esto suele parecer confuso, pero se puede entender analizando cualquier situación elemental de aplicación de una fuerza, como la siguiente.

Un agente A aplica la fuerza  $\vec{F}_{AB}$  sobre el cuerpo B empujándolo con las palmas de sus manos (como se muestra esquemáticamente en la figura 3.6.). B, hasta ese momento, estaba en reposo sin contacto con ningún otro cuerpo (supongamos que no hay gravedad, para poder concentrarnos en lo que interesa: A y B están como flotando en la nada).

Por efecto de  $\vec{F}_{AB}$  el cuerpo B sale del reposo y comienza a desplazarse hacia la derecha. Pero al empujar a B, el agente A siente en las palmas de sus manos la intensidad de la fuerza. Él siente esa fuerza que aplica, es decir siente el contacto de B, que actúa sobre sus palmas presionándolas. Y una presión sobre la palma de sus manos, es lo que sentiría en cualquier situación en la cual algún objeto se apoyara allí para empujarlo hacia la izquierda. *De manera que lo que siente A al empujar a B es una fuerza hacia la izquierda que B le aplica.* Y así A resulta impulsado hacia la izquierda. En lenguaje coloquial podemos decir que él mismo se está impulsando hacia atrás apoyándose en B, pero en el lenguaje de la física, la fuerza que actúa sobre A, es aplicada por B.

El agente A siente en la piel de sus manos la acción según el empuje con más o menos intensidad. La fuerza sería sentida tanto por el cuerpo B (si tuviese capacidad de sentir) como por la palma de la mano de A. Lo que siente uno se denomina acción, y lo que siente o sentiría el otro se denomina reacción.

Es importante entender que en este caso el agente A es consciente de lo que hace y de lo que siente. Él puede decidir empujar a B para lograr determinado efecto, o no hacerlo, mientras que B es un objeto inerte, que no puede decidir ni sentir nada. Esto podría sugerir engañosamente que sólo A aplica fuerza, pero la realidad es que para la física, la conciencia que A puede tener de la acción es irrelevante, y ambos cuerpos son equivalentes en cuanto su capacidad de aplicar fuerza.



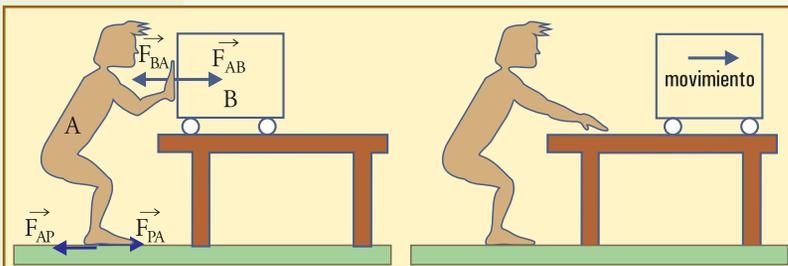
Para entender física tenemos que ser capaces de separar conceptualmente el acto de aplicar una fuerza, que es resultado del contacto entre cuerpos, de la conciencia o de la intención que puede tener algún agente.

De manera que una forma de entender más fácilmente el significado de este principio es imaginar la zona en que los medios interactúan (en el ejemplo podría ser la piel de la palma de las manos de A). Cuando, como en este ejemplo, esta zona está comprimida, o sea aplastada en algún grado, sólo puede estarlo si desde *ambos lados* actúan fuerzas opuestas tendiendo a aplastarla: no se puede aplastar algo empujando desde un lado, si no hay algo que se oponga desde el otro lado. Esas fuerzas opuestas son las acciones de cada cuerpo sobre la zona. Si luego hacemos abstracción de la idea de una zona comprimida, nos queda la idea de que ambos cuerpos en interacción actúan con fuerzas opuestas sobre la zona. Los mismos razonamientos valen si la zona es “estirada” por las fuerzas, o deformada de cualquier otra manera, además de aplastada. La tensión, de cualquier tipo que sea, que se establece en la zona de contacto entre cuerpos o sistemas es tal que a través de la superficie de separación, ambos se aplican recíprocamente fuerzas opuestas.

La situación del ejemplo anterior puede ser enriquecida con la presencia de la gravedad y el piso. Supongamos que el cuerpo B está apoyado sobre rueditas sobre una superficie horizontal bien lisa, para que no haya fuerzas horizontales sobre él, más que la acción de A. El agente A, a su vez, está apoyado sobre el piso (figura 3.8).

Ahora todo el análisis es igual para el cuerpo B. Pero el agente ya no sale impulsado hacia atrás, porque el piso, sobre el que está apoyado, se lo impide: al recibir el empuje hacia la izquierda por parte de B (como reacción a su acción de empujarlo), sus pies tienden a deslizarse sobre el piso hacia la izquierda, pero aparece el *rozamiento*, que es la fuerza  $\vec{F}_{PA}$  que el piso le aplica hacia la derecha impidiéndoselo. En esta parte del proceso, sus pies empujan al piso hacia la izquierda con  $\vec{F}_{AP}$ . El par  $\vec{F}_{PA}$ ,  $\vec{F}_{AP}$ , es un par acción-reacción que se desarrolla horizontalmente en el contacto pie-piso

En resumen (mencionando sólo las fuerzas horizontales):



**Fig. 3.8.** A la izquierda se muestra que el agente A aplica fuerza  $\vec{F}_{AB}$  con las manos sobre un cuerpo B, y  $\vec{F}_{AP}$  con los pies sobre el piso, mientras que B aplica  $\vec{F}_{BA}$  sobre él, y el piso aplica  $\vec{F}_{PA}$  también sobre él. A la derecha se muestra que, como resultado de todas estas acciones, el cuerpo B se mueve hacia la derecha porque sobre él sólo actuó horizontalmente  $\vec{F}_{AB}$ , pero A no se mueve porque sobre él actuaron dos fuerzas opuestas que se cancelaron. (Ver figura 3.9 para completar.)

Sobre B actúa  $\vec{F}_{AB}$  hacia la derecha y ninguna otra acción para equilibrarla. El cuerpo B se mueve impulsado hacia la derecha.

Sobre el agente A actúa  $\vec{F}_{BA}$  hacia la izquierda, aplicada por B, y  $\vec{F}_{PA}$  hacia la derecha aplicada por el piso. Ambas se equilibran y el agente no se mueve.

El piso recibe la acción  $\vec{F}_{AP}$  hacia la izquierda, ninguna acción para equilibrarla  $\longrightarrow$  el planeta Tierra

es impulsado hacia la izquierda. ¡Sí, el planeta es impulsado hacia la izquierda como consecuencia de que a alguien se le ocurrió empujar a un cuerpo hacia la derecha! ¡Y se mueve! Pero como su masa es tan grande, su movimiento es indetectable por lo pequeño!

**Nota 5. ¡Cuidado con la reacción!**

*En la vida diaria es común hacer alusión a este Principio interpretando equivocadamente que contiene una advertencia sobre cierta reacción opuesta que debería provocar cualquier acto. Así se lo relaciona tanto con la posible reacción de una persona que es agredida por otra, o de la masa popular luego de algún mal acto del gobierno, como con la reacción de un trampolín que lanza hacia arriba al saltador después de que éste actuó hundiéndolo. Es importante entender que este principio fundamental no se refiere, ni siquiera indirectamente, a ninguno de estos tres ejemplos comentados ni a ninguna otra cosa que no sea exclusivamente el mecanismo por el cual dos cuerpos se aplican mutuamente fuerza.*

*Un aspecto que a veces nos permite advertir si estamos intentado aplicar este principio donde no corresponde, es revisar si la reacción se espera posteriormente o simultáneamente a la acción: si la reacción sigue posteriormente a la acción, ya es seguro que no corresponde.*

*Otro aspecto que también denunciaría el error en la aplicación de este principio sería la posibilidad de que exista algún mecanismo por el cual la reacción podría faltar o aparecer debilitada; por ejemplo, la posibilidad de que el trampolín se rompa al ser pisado, o la posibilidad de que la persona agredida no haga frente al agresor. Etc.*

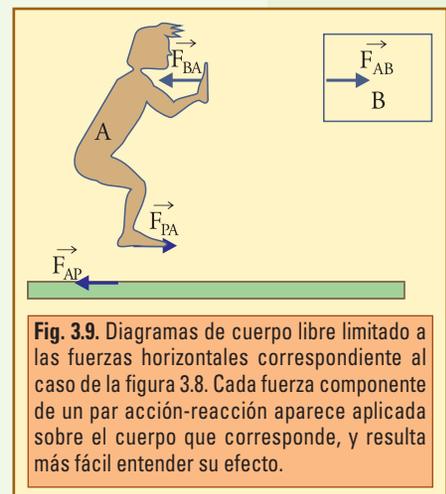
*Este Principio se refiere exclusivamente a la forma en que se manifiestan las fuerzas en la interacción entre dos cuerpos: siempre exactamente opuestas y exactamente simultáneas. Lo cual es válido siempre, tanto si al aplicar una fuerza a un cuerpo todo se reacomoda sin romperse, como si se produce la ruptura del cuerpo. Tanto si finalmente todo queda estático, habiéndose logrado el equilibrio entre todas las fuerzas actuantes sobre el cuerpo, como si no se llega al equilibrio y se produce el movimiento, o la desviación del cuerpo, o cualquier otra cosa.*

• Diagrama de cuerpo aislado

Para tratar cualquier situación resulta fundamental elaborar un modelo adecuado, que tenga en cuenta sólo los elementos que son relevantes.

En un problema de mecánica lo único que se considera relevante de cada objeto vecino es la fuerza que aplica al cuerpo en estudio. Podemos hacer un dibujo o esquema con todos los elementos del modelo, llamado *diagrama de cuerpo libre*, o de *cuerpo aislado*. En este esquema se muestra solamente el cuerpo en cuestión, y las *fuerzas que actúan sobre él*, y se ignoran explícitamente las reacciones con las que él actúa sobre sus vecinos.

Como ejemplo simplificado (porque lo limitamos sólo a las fuer-



zas horizontales), para explicar más claramente la situación de la figura 3.8, podríamos hacer una figura como la 3.9, que muestra por separado los cuerpos que interactúan con las fuerzas que actúan sobre él.

Para dibujar el diagrama de cuerpo libre se siguen los siguientes pasos:

1) Se realiza un análisis global inicial de la situación para reconocer los aspectos más importantes (luego *muchos detalles surgirán al revisar los dibujos que resulten*).

2) Se dibuja el cuerpo o sistema en estudio solo, aislado.

3) Se revisa cada uno de los vecinos que tiene contacto con el cuerpo en estudio, se analiza cómo es la interacción entre ambos, y se dibuja, de la manera más clara y representativa posible, *la fuerza que el vecino ejerce sobre él*, ignorándose la correspondiente reacción (del cuerpo dibujado sobre el vecino). En este análisis se incluyen las fuerzas *posibles*: donde hay contacto con un vecino se dibuja una fuerza con las características que ese vecino hace posible aunque no se sepa si realmente actúa. Luego de la resolución completa del caso, surgirá si esa fuerza es nula (es decir que realmente no existe) o no.

4) Se revisa globalmente lo hallado, es decir, se vuelve al punto 1) rehaciendo el proceso, y se efectúan modificaciones si ello surge del análisis.

Se obtiene así un esquema (que en general es cualitativo, aproximado aunque sin escala exacta) en el cual deben estar dibujadas todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en estudio, a partir del cual recién se puede plantear el análisis formal de cualquier situación.

En general, dada una fuerza  $\vec{F}_0$  aplicada por el agente exterior, en el diagrama

- estará ella,
- luego habrá otras que están por otras razones independientes de dicho agente, como por ejemplo, el peso,
- y finalmente habrá otras aplicadas por los vecinos como consecuencia de la acción considerada del agente.

A estas últimas suele denominarse *reacciones*, sin que esta denominación implique que forman par acción-reacción con  $\vec{F}_0$ , ya que cada una pertenece a un par acción-reacción que corresponde a la interacción con uno de los vecinos. Debemos aplicar estas indicaciones *cada vez que estudiemos alguna situación*.

### • Ejemplo

Un agente tira del extremo B de una cuerda horizontal cuyo otro extremo A está sujeto a un cuerpo que está apoyado sobre el suelo, como se muestra. Supongamos que todo queda estático porque la fuerza  $\vec{F}_B$  que aplica el agente, es incapaz de vencer el rozamiento que se desarrolla entre el cuerpo y el piso.



Analice la situación y todas las fuerzas intervinientes, mostrando los diagramas de cuerpo libre del cuerpo y del hilo.

• **Desarrollo**

1) Análisis de la situación:

El agente externo tira de la cuerda, con una fuerza aplicada en B ( $\vec{F}_B$ ), y como consecuencia de ello la cuerda tira del cuerpo con una fuerza aplicada en A ( $\vec{F}_A$ ); mientras tanto el cuerpo está sometido a la acción de la gravedad ( $\vec{P}$ ), y sostenido por el piso con cierta reacción ( $\vec{R}$ ). Además la fuerza de rozamiento ( $\vec{F}_r$ ) tira hacia atrás en la superficie de contacto con el piso, y podría no estar si hubiera alguna aclaración explícita de que no se considere el rozamiento. En la

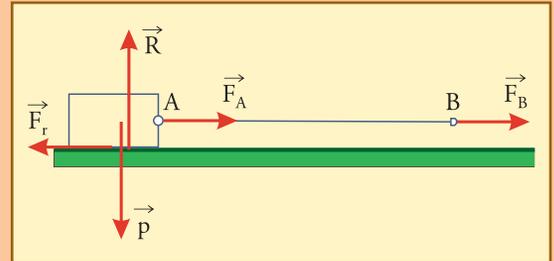
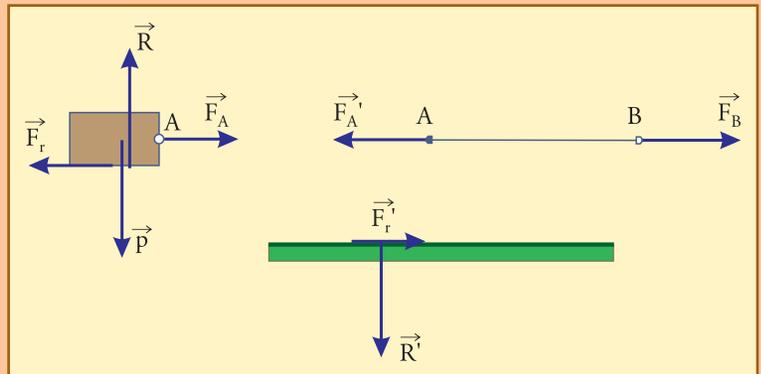


figura que sigue se muestran todas estas fuerzas, sin pretensiones de que el dibujo sea completo.

Este análisis inicial nos ha dejado algunos interrogantes como: ¿ $\vec{F}_A$  tiene el mismo módulo que  $\vec{F}_B$ ? ¿Cuáles son los valores (módulos) de  $\vec{F}_r$  y de  $\vec{R}$ ? Para aclarar todos estos detalles revisemos diagramas de cuerpo libre, en los cuales para cada fuerza, designaremos con prima (') a su compañera del par acción-reacción.

Del diagrama de cuerpo libre del cuerpo se concluye que, por el equilibrio entre las acciones verticales,  $\vec{R}$  tiene el mismo módulo que  $\vec{P}$  ( $R = P$ ), y por el de las horizontales,  $\vec{F}_r$  tiene igual módulo que  $\vec{F}_A$  ( $F_r = F_A$ ).

Del diagrama de cuerpo libre de la cuerda, se concluye que  $\vec{F}_A$  se equilibra con ( $F_{A'} = F_B$ ), y dado que tiene el mismo módulo que  $\vec{F}_A$ , porque



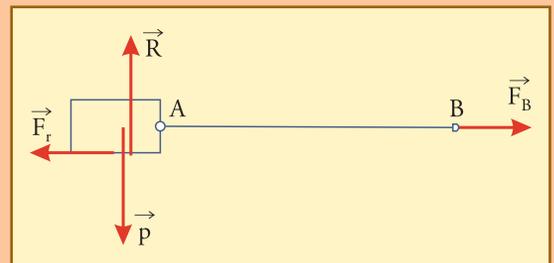
constituyen un par acción-reacción, entonces se concluye, por un lado que:

En este caso la cuerda transmite directamente la fuerza que le aplica el agente externo en B, aplicando en A una fuerza de exactamente el mismo módulo, que también es el módulo de la fuerza de rozamiento que se desarrolla (debido a que en este caso el rozamiento impide el movimiento).

Por otra parte, el piso resulta pisado por el cuerpo con fuerza  $\vec{R}'$  (reacción a  $\vec{R}$ ), cuyo módulo es el del peso  $\vec{P}$  (veremos más detalles después de hablar de la fuerza de gravedad), y resulta empujado horizontalmente hacia la derecha por el rozamiento con la misma intensidad de la fuerza externa aplicada en B.

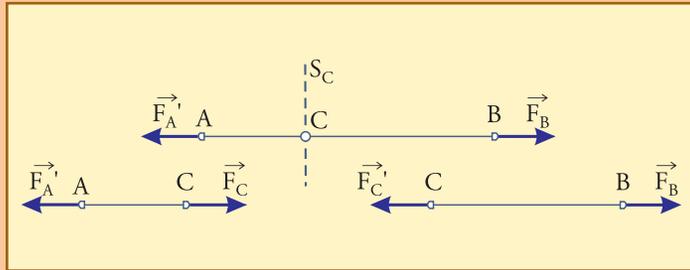
Además es interesante notar que si se considera el sistema "cuerpo + cuerda", para este sistema las fuerzas en A serían interiores y no aparecerían en el diagrama de cuerpo libre, el cual sería:

En este diagrama, el equilibrio horizontal indica directamente que  $F_r = F_B$ , sin la intervención de las fuerzas en A.



Por último, es interesante aprovechar este ejemplo para destacar que en cualquier punto  $C$  de la cuerda se puede considerar una superficie imaginaria  $S_C$  que separa la cuerda en dos partes:  $AC$  y  $CB$ . El equilibrio de cada una de esas partes - como se ve a continuación en los diagramas de cuerpo libre- obliga a considerar fuerzas en  $C$  para su explicación. Estas fuerzas en  $C$ , que son  $\vec{F}_C$  y  $\vec{F}'_C$ , son fuerzas exteriores cada una para cada segmento y forman un par acción-reacción. Obviamente, el módulo de ambas es igual al de la fuerza aplicada en  $B$  por el agente. La misma situación puede imaginarse para cada uno de los infinitos puntos de la cuerda y, en general, para cada sección imaginable de cualquier cuerpo tensionado cuando transmite una fuerza.

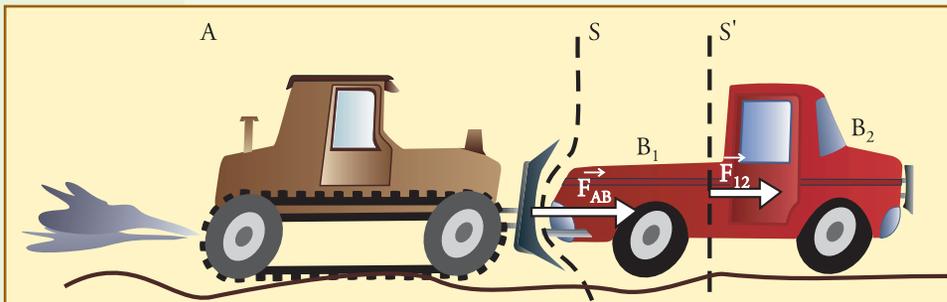
Esto significa que el cuerpo que transmite la fuerza, la cuerda  $AB$ , está tensionada en todos sus puntos. En cualquiera de sus secciones que se considere, hay un par acción-reacción constituido por fuerzas interiores que no se tienen en cuenta al hablar del sistema total, pero que pueden ser considerados, si es necesario, para determinados fines.



### ■ 3.2. Fuerzas de contacto

Lo que discutimos en el ejemplo anterior, acerca de que un cuerpo -la cuerda en ese caso- sobre el que se aplica una fuerza, la transmite en virtud de un estado de tensiones que se establece en todos sus puntos, es un caso simple de la forma en que las fuerzas se ejercen y transmiten en cualquier situación. Por ejemplo, y sólo para enriquecer las mismas ideas, consideremos la situación de la figura 3.10, en la que el vehículo  $A$  empuja al  $B$  aplicándole la fuerza  $\vec{F}_{AB}$ .

La fuerza de empuje sólo comienza a existir en el instante en que  $A$  toma contacto con  $B$ ; lo que ocurre a través de la superficie de contacto  $S$ .  $S$  puede ser simplemente una superficie ideal que delimita el sistema: lo que está a un lado de  $S$  es  $A$ , y lo que está al otro lado es  $B$ .



**Fig. 3.10.**  $A$  aplica la fuerza de empuje  $\vec{F}_{AB}$  sobre  $B$  a través de la superficie de contacto  $S$  que prolongamos con línea de trazos. A su vez, eso causa que  $B_1$  empuje a  $B_2$  a través de  $S'$ .  $B_2$  es empujado directamente por  $B_1$ , y no por  $A$ .

Si imaginamos cualquier superficie como  $S'$  que divide idealmente a  $B$  delimitando  $B_1$  y  $B_2$ , podemos decir:  $B_2$  es un sistema con materia que estaba en reposo y que ha sido puesto en movimiento, pero

Si imaginamos cualquier superficie como  $S'$  que divide idealmente a  $B$  delimitando  $B_1$  y  $B_2$ , podemos decir:  $B_2$  es un sistema con materia que estaba en reposo y que ha sido puesto en movimiento, pero

que no fue tocado por A. Si nos preguntamos quién o qué lo puso en movimiento, tratando de ir más allá de la idea trivial de que “fue A” quien lo hizo, diremos: “A no tuvo contacto directo con B<sub>2</sub>, A empujó a B<sub>1</sub> a través de S, y fue B<sub>1</sub> quien, a través de S’, empujó directamente a B<sub>2</sub>”. B<sub>1</sub> es un sistema que transmitió la acción de A hasta B<sub>2</sub>.

En general, cada parte de un sistema puede, a su vez, ser considerada *un sistema*, que recibe la acción del resto a través de la superficie que la delimita. Cada parte es empujada a través de la correspondiente superficie por el resto del sistema, y este empuje indica que en cada superficie hay tensiones, es decir, **fuerzas distribuidas**.

En el interior de cualquier sistema sobre el que actúan fuerzas se produce un estado de tensiones, por medio del cual la fuerza es transmitida, a través de cada sección imaginable, donde lo que está de un lado actúa lo que está del otro.

## Tensión

Usamos la palabra **tensión**, o **esfuerzo**, para designar cómo está distribuida la fuerza que se ejerce a través de una superficie dada.

El **tipo de tensión** nos indicará cómo actúa la fuerza, y su **intensidad**, definida como la fuerza por unidad de superficie, nos indicará cuán concentrada está la fuerza en la superficie.

Si S es la extensión de una superficie plana a través de la cual se aplica una fuerza distribuida uniformemente, entonces:

$$\text{Intensidad o valor de la tensión} = \frac{\text{Fuerza a través de } S}{S} \quad (3.3)$$

### Nota 6. Sobre el punto de aplicación de las fuerzas

*Cuando se aplica una fuerza sobre un cuerpo concreto, éste sufre determinados efectos de distinta índole. Por ejemplo, en cuanto a la ruptura del material no depende de la fuerza total, sino de la tensión, es decir de cuánta fuerza actúa por unidad de área. Generalmente, se simplifica al hablar del **punto de aplicación** de la fuerza. Eso es válido para ciertas aplicaciones, pero se aparta de la realidad: ninguna fuerza se aplica en un punto, siempre se distribuye su aplicación en alguna superficie; la pretensión de aplicarla en un punto, es decir en una superficie  $S=0$ , daría por resultado una tensión infinita, que ningún material resistiría.*

## Deformación elástica

Todo cuerpo se deforma cuando se le aplican fuerzas. Según la forma, las fuerzas aplicadas, y el material, algunos se deforman más y otros menos. Fuerzas más pequeñas producen deformaciones proporcionalmente más pequeñas, pero no nulas. De manera que

siempre hay un estado de deformación asociado con el estado de tensión de cada cuerpo.

Ya hemos dicho que se denomina elástica a la deformación, sea grande o pequeña, que desaparece al suspenderse la aplicación de la fuerza. Hay muchos materiales que poseen un definido comportamiento elástico mientras las tensiones a que se los somete no superen determinados valores propios de cada uno. Dentro de esa “zona elástica” el material resistirá la deformación aplicando una fuerza *proporcional* a la misma, orientada en el sentido de recuperar la forma inicial o “de equilibrio”. Se denominan fuerzas elásticas, o fuerzas recuperadoras, a las fuerzas de este tipo, que *son las fuerzas fundamentales en toda oscilación o vibración*.

Tal como el concepto de elasticidad lo requiere, estos materiales sólo dejan de aplicar la fuerza cuando el cuerpo ha vuelto completamente a su forma original, ya que mientras exista una pequeña deformación, existirá una fuerza recuperadora proporcional a dicha deformación. La ley de fuerza proporcional a la deformación se denomina *ley de fuerza elástica*.

Para cada material se puede definir el llamado *módulo de elasticidad*, indicativo de la constante de proporcionalidad entre tensión aplicada y deformación sufrida por el cuerpo, según cierto detalle de procedimiento. Los materiales que tienen mayor módulo de elasticidad son los que se deforman menos bajo la acción de la misma tensión, son los que comúnmente se denominan más “duros”.

### Ley de Hooke

Para un cuerpo dado, la relación entre la fuerza total que se le aplica y la deformación total registrada depende en gran medida de *su forma* y del *tipo de deformación* a que se lo somete, además de depender de las propiedades del material del que está compuesto. De manera que es posible construir, por ejemplo, resortes de acero que se estiren mucho con fuerzas pequeñas, y resortes del mismo acero que se estiren poco con fuerzas grandes. No obstante, para todos ellos habrá una serie de valores de fuerza, o de deformación, dentro de la que el material se comportará elásticamente.

El caso de resortes es interesante para los movimientos oscilatorios. Para este caso la ley de fuerza elástica se denomina “**Ley de Hooke**”, en honor a Robert HOOKE (1635-1703); en ella la constante de proporcionalidad entre fuerza y deformación (tanto estiramiento como acortamiento), se denomina *constante elástica* del resorte, *k*.

Colocando el eje x a lo largo del eje del resorte, puede se escribir:

$$(3.4) \quad \begin{array}{l} \text{Constante elástica: } k = \frac{|F_x|}{|\Delta x|} \\ k = \frac{\text{fuerza aplicada}}{\text{estiramiento}} \end{array}$$

La expresión (3.4) se puede aplicar para definir la constante elástica de cualquier sistema elástico en general, aunque no tenga forma de resorte.

• **Ejemplo**

La siguiente gráfica muestra la fuerza necesaria para estirar un resorte dado hasta una longitud total  $x$  cualquiera:

a) Calcule la constante elástica  $k$ , e indique la longitud de equilibrio de este resorte (sin tensión).

b) Suponga que un agente tira del extremo B, estirándolo hasta  $x' = 24$  cm. Complete la figura indicando (calcule los valores que hagan falta)

• el vector  $\vec{F}_{B(\text{ext})}$  que indica la fuerza con la cual el agente tira del resorte en B.

• el vector  $\vec{F}_{B(\text{res})}$  que indica la fuerza con el cual el resorte tira del agente en B.

• el vector que  $\vec{F}_{A(\text{res})}$  indica la fuerza con la cual el resorte tira de su anclaje en A.

(Para cada uno de los vectores indique el módulo, y además escríbalos como par ordenado).

c) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del resorte.

• **Desarrollo**

a) La longitud de equilibrio es  $x_0 = 15$  cm, y la constante elástica:

$$k = \frac{40\text{ N}}{25\text{ cm} - 15\text{ cm}}$$

$$k = 4\text{ N/cm}$$

$$k = 400\text{ N/m}$$

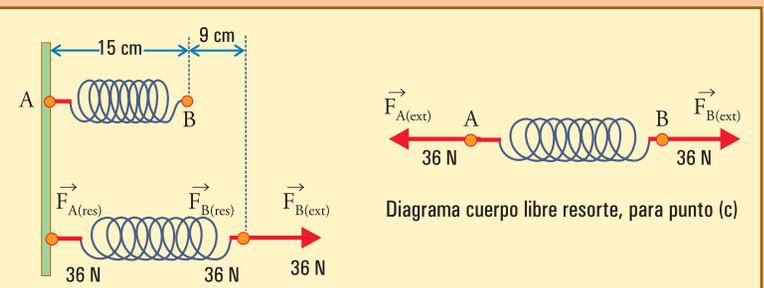
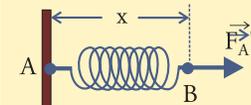
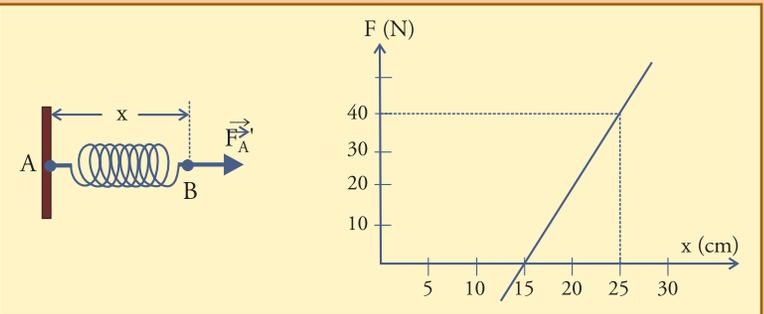
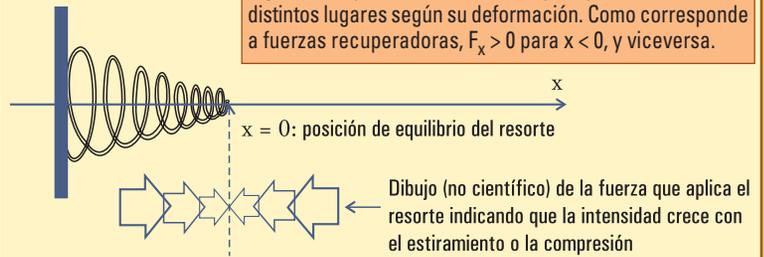
b) Para estirar este resorte hasta 24 cm, hay que tirar con una fuerza de módulo:

módulo fuerza =  $4(\text{N/cm}) \times (24 - 15)$  cm  
 módulo fuerza = 36 N

De manera que los vectores que intervendrán en esta situación, que es de equilibrio, serán todos de ese módulo, y para ver el sentido de cada uno es necesario inspeccionar la situación en un dibujo:

Estos vectores escritos como par ordenado son:  $\vec{F}_{B(\text{ext})} = (36\text{ N} ; 0\text{ N})$ ,  $\vec{F}_{B(\text{res})} = (-36\text{ N} ; 0\text{ N})$ ,  $\vec{F}_{A(\text{res})} = (36\text{ N} ; 0\text{ N})$ ,  $\vec{F}_{A(\text{ext})} = (-36\text{ N} ; 0\text{ N})$ .

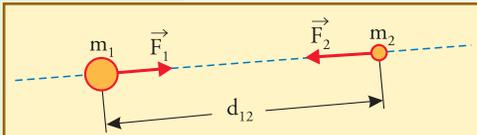
**Fig. 3.11.** Esquema de las fuerzas que aplica un resorte en distintos lugares según su deformación. Como corresponde a fuerzas recuperadoras,  $F_x > 0$  para  $x < 0$ , y viceversa.



## ■ 3.3. Fuerza de gravedad

### Ley de gravitación universal

Uno de los más grandes éxitos de NEWTON fue mostrar que la fuerza que atrae los cuerpos hacia abajo, a la que llamamos “peso”, es la misma que mantiene a la Luna en su órbita. Este es un caso particular de un fenómeno absolutamente universal, que se manifiesta a través de atracciones entre todos los astros, denominado *gravitación*.



**Fig.3.12.** La fuerza de gravedad es una acción mutua, y como corresponde al principio de acción y reacción,  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ . La fuerza sobre el cuerpo de mayor masa es exactamente de igual intensidad que la que actúa sobre el de menor masa.

NEWTON enunció en 1687, junto con las leyes del movimiento, la Ley de gravitación universal, que establece que entre dos cuerpos cualesquiera se manifiesta una fuerza de atracción mutua, con intensidad directamente proporcional a ambas masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros; y absolutamente independiente de cualquier otra cosa.

La expresión para el módulo de la fuerza de atracción entre dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$ , cuyos centros están a distancia  $d_{12}$  uno de otro, es:

$$F_1 = F_2 = F = G \frac{m_1 m_2}{d_{12}^2} \quad (3.5)$$

donde  $G$  es una constante de proporcionalidad llamada “constante de fuerza gravitatoria” que depende solamente del sistema de unidades utilizado, y cuyo valor, que se determina experimentalmente, es  $G \cong 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

#### Nota 7. El significado de la constante $G$

La constante  $G$  se puede interpretar diciendo que una vez aceptada la ley « $F$  es proporcional a  $m_1 m_2 / d_{12}^2$ », se hace necesario, para cada sistema de unidades, contar con una constante de proporcionalidad que permita que se obtengan los valores reales, experimentales, cualesquiera sean las unidades de masa, distancia, y fuerza elegidas en ese sistema.

Es decir, si medimos la fuerza que aparece sobre una masa  $m_1 = 1 \text{ kg}$ , debida al campo gravitatorio de otra  $m_2 = 1 \text{ kg}$ , situada a  $1 \text{ m}$  de distancia, obtenemos **experimentalmente**:  $F \cong 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}$ , y el valor de la constante  $G$  es quien debe reflejar este resultado experimental. Para ello  $G$  debe tener un valor y unidad tal que:  $G \times 1 \text{ kg} \times 1 \text{ kg} / 1 \text{ m}^2 \cong 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}$ .

De manera que en cada sistema de unidades el valor numérico de la constante universal  $G$  es exactamente el valor de la fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos de la unidad de masa, situadas a la unidad de distancia uno de otro. El valor de esta constante se determina experimentalmente con muy delicados aparatos, y su extrema pequeñez ( $\sim 10^{-11}$  en las unidades que estamos usando) es la explicación de porqué estas atracciones entre diferentes cuerpos de la vida diaria pasan totalmente desapercibidas (excepto cuando uno de los cuerpos es el planeta Tierra).

## ● Campo gravitatorio

La idea de “fuerzas a distancia”, o “acciones a distancia”, que pudieran ejercerse sin necesidad de un contacto, desagradaba a todos, y también a NEWTON, pero fue aceptada porque nadie pudo interpretar de otra manera la gravitación por muchos años.

Bastante tiempo después se desarrolló la noción de campo, que es fundamental en la física moderna, por lo cual haremos uso de algunas *ideas y palabras* que tienen que ver con ella, aunque sin pretender profundizar en el tema.

Así diremos que cada cuerpo tiene un campo de fuerza gravitatoria, proporcional a su masa, por medio del cual atrae a otros cuerpos.

El campo gravitatorio producido por *cuerpos de la vida diaria* de algunos kilogramos o toneladas, es *tremendamente débil*, como se desprende de la pequeñez de la constante  $G$  en la ley (3.5): se requiere una masa enorme, del orden de la de un planeta para que la acción del campo resulte perceptible. Un cuerpo como nuestro planeta de  $\sim 10^{25}$  kg produce un campo muy notable, que al actuar sobre un cuerpo cualquiera de los que utilizamos todos los días, se manifiesta como la llamada fuerza peso del cuerpo, proporcional a su masa. Esta fuerza es responsable prácticamente de casi todas las cosas que suceden en nuestro mundo: determina que la tierra nos retenga sobre su superficie, y también que retenga su atmósfera sin la cual no podríamos respirar.

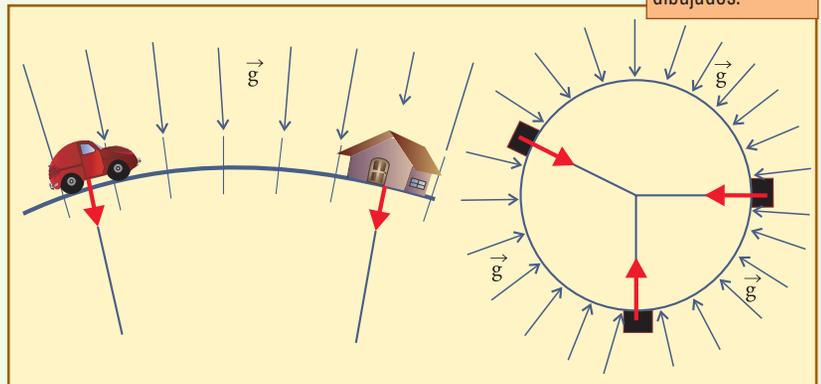
Es costumbre representar el campo gravitatorio de un planeta con una especie de lluvia de vectores dirigidos como la fuerza que resulta sobre un cuerpo que esté allí, es decir verticalmente hacia abajo. Designaremos con  $\vec{g}$  a estos vectores.

La intensidad o módulo del campo gravitatorio en un planeta dado, se define como el peso de un cuerpo de masa  $m$ , dividido por  $m$  (es decir por unidad de masa):

$$g = \frac{P}{m} \quad (3.6)$$

Definido de esta manera, dado que el peso de cualquier cuerpo es proporcional a su masa, el campo gravitatorio resulta ser independiente de la masa del cuerpo que se considera, y depende sólo de las características del planeta.

Es importante notar que en comparación con el radio de la Tierra ( $R \cong 6.370$  km)



**Fig. 3.13.** El campo gravitatorio, representado con las líneas finas apuntando hacia el centro del planeta, define en cada lugar la noción de verticalidad. Las flechas más gruesas son los vectores peso de los distintos cuerpos dibujados.

todas las cosas cotidianas pueden considerarse pegadas a la superficie: subir hasta el techo de una casa, o 1.000 m en una avioneta, o 10 km en un avión de alta performance, por encima de las nubes y de las montañas más altas, no puede considerarse que sean alejamientos sensibles del centro de la Tierra. De manera que para aplicar la ley (3.5) a un cuerpo de masa  $m$  en la superficie de un planeta de masa  $M$  y radio  $R$ , la distancia  $d$  entre los centros de los cuerpos será aproximadamente igual a  $R$ , y tendremos:

$$\text{Peso} = \frac{GMm}{R^2} \quad (3.7)$$

Y por lo tanto,  $g$ , considerado como el peso por unidad de masa,  $g = P / m$ , queda:

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (3.8)$$

Si en esta expresión colocamos los valores que corresponden para nuestro planeta,  $M \cong 5,98 \times 10^{24}$  kg,  $R \cong 6374$  km) tenemos:

$$\text{Peso} \cong \frac{6,67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \times 6 \times 10^{24} kg \times m}{(6370 \times 10^3 m)^2}$$

$$\text{Peso} \cong 9,81 \frac{N}{kg} \times m \quad (3.9)$$

Y de aquí, teniendo en cuenta que  $P = m g$ , resultan las expresiones que tendrán valor práctico para nosotros:

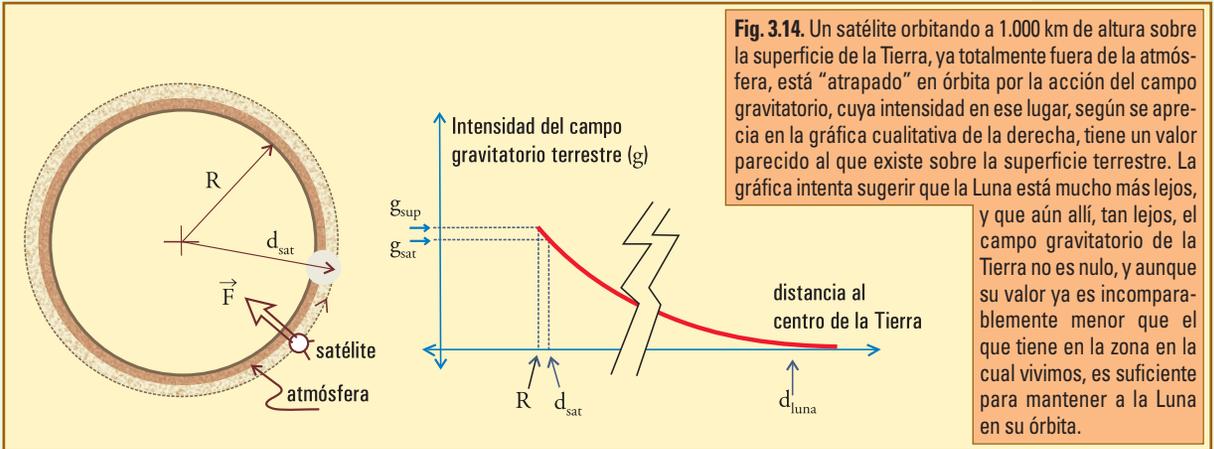
$$g \cong 9,81 \text{ N/kg} \quad ; \quad P \cong m \text{ kg} \times 9,81 \text{ N/kg} \quad (3.10)$$

Según la expresión (3.8) tenemos que el valor de  $g$  varía levemente de un lugar a otro, debido a que la Tierra está levemente achatada en los polos, de manera que el valor 9,81 corresponde a los lugares a  $45^\circ$  de latitud, a nivel del mar.

Si además advertimos que  $R$  en el denominador de la expresión (3.8), expresa la distancia entre el centro del planeta y el punto en el cual se calcula el campo gravitatorio, concluimos que éste se debilita si aumenta la altura del punto.

Ahora bien, dado que el radio terrestre es muy grande, en todas las circunstancias de la vida práctica el debilitamiento del campo gravitatorio con la altura a la que se sitúa un cuerpo es prácticamente imperceptible; es más lo que varía la gravedad de un lugar a otro debido a distribuciones inhomogéneas de yacimientos minerales, que lo que varía, por ejemplo, debido a que alguien se aleje del suelo en una avioneta o cosa similar.

Aún un satélite típico, que orbite a  $\sim 600$  km por encima de la superficie terrestre, *ya está fuera de la atmósfera*, y sin embargo su distancia al centro del planeta sólo es un



**Fig. 3.14.** Un satélite orbitando a 1.000 km de altura sobre la superficie de la Tierra, ya totalmente fuera de la atmósfera, está "atrapado" en órbita por la acción del campo gravitatorio, cuya intensidad en ese lugar, según se aprecia en la gráfica cualitativa de la derecha, tiene un valor parecido al que existe sobre la superficie terrestre. La gráfica intenta sugerir que la Luna está mucho más lejos, y que aún allí, tan lejos, el campo gravitatorio de la Tierra no es nulo, y aunque su valor ya es incomparablemente menor que el que tiene en la zona en la cual vivimos, es suficiente para mantener a la Luna en su órbita.

10% mayor que la de los que seguimos en la superficie.

Las imágenes de astronautas flotando en una estación espacial sugieren engañosamente que están en un lugar donde prácticamente no hay gravedad, y la figura 3.14 debe mostrar claramente que eso no es así: la expresión (3.5) es absolutamente universal, permite calcular que el campo gravitatorio en la órbita es de un valor parecido al que hay en la superficie, y eso es incuestionable. La explicación de la ingravidez que sienten los astronautas en órbita, debe ser buscada en las características del movimiento orbital. Aclaremos esto más adelante.

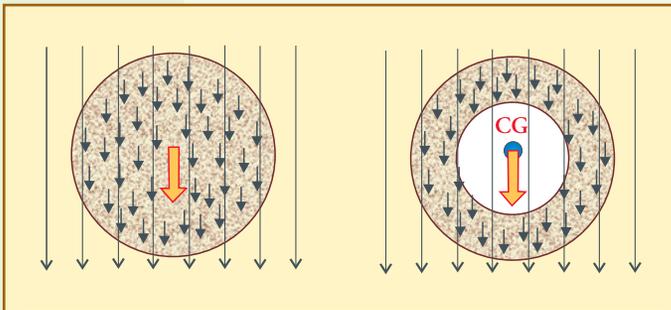
● **Centro de gravedad**

La acción de la gravedad se ejerce sobre todas las partículas materiales, el peso de un cuerpo es la resultante de la suma todos los pesos de sus partículas, y no puede decirse que esté aplicada en un punto particular, sino que es una acción distribuida en todo el volumen del cuerpo.

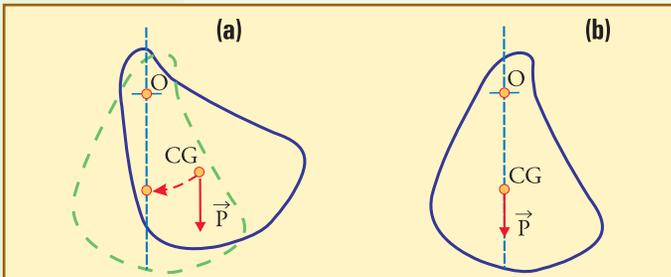
Ahora bien, para todos los fines prácticos, puede determinarse un punto en el cual se puede *suponer aplicado* el vector peso total, para que represente lo mejor posible la acción de la gravedad sobre las infinitas partículas del cuerpo (ya hemos dicho en otras ocasiones que cada vez que se reemplaza un sistema de fuerzas por la resultante, que es una única fuerza, la equivalencia nunca puede ser totalmente completa).

Este punto se denomina *centro de gravedad*, "CG", y coincide con el *centro de masa*, "CM", que definiremos más adelante. Por ahora no estamos en condiciones de encontrar el centro de gravedad o de masa de cuerpos complicados, pero bastará saber que en los cuerpos homogéneos con simetría el centro de gravedad coincide con el centro geométrico.

Desde el punto de vista práctico, por ahora es fácil advertir que si se suspende un cuerpo colgándolo de un punto O cualquiera alrededor del cual pueda girar libremente,



**Fig. 3.15.** Se han dibujado líneas representativas del campo gravitatorio, y pequeños vectorcitos representativos de las fuerzas gravitatorias actuantes sobre cada elemento de masa del cuerpo. En ambos casos se considera la fuerza resultante de todas éstas, el peso, como aplicada en el centro de gravedad del cuerpo respectivo. El centro de gravedad puede estar en un lugar vacío, puesto que el peso no tiene realidad en sí mismo como fuerza realmente aplicada en ese punto, sino como representante de todo el conjunto de vectorcitos.



**Fig. 3.16.** (a) Acción del peso en un cuerpo suspendido del punto O, alrededor del cual puede girar, cuando se lo libera en una posición fuera del equilibrio. La fuerza peso, actuando en CG, llevará al cuerpo a una posición de equilibrio como la que se muestra en (b), con CG ubicado en la línea vertical trazada por el punto de suspensión.

la posición de equilibrio en la cual el cuerpo podrá quedarse en reposo, deberá ser con el CG en la misma línea vertical que O, debajo de él. Esto es porque, cuando el cuerpo suspendido está en equilibrio bajo la acción de la gravedad, no podemos suponer que correspondería ubicar al peso en un punto fuera de la vertical, ya que actuando allí, el peso haría girar al cuerpo alrededor de O hasta que este punto descienda lo máximo posible, es decir hasta que se ubique en la vertical mencionada (figura 3.16).

La conclusión es que, si la forma de un cuerpo se presta para ello, se puede ubicar el CG del cuerpo de manera práctica suspendiéndolo sucesivamente desde varios puntos, y buscando el lugar en que se cruzan todas las líneas verticales trazadas por los respectivos puntos de suspensión.

**Nota práctica:**  
**Fuerza peso y su reacción.**

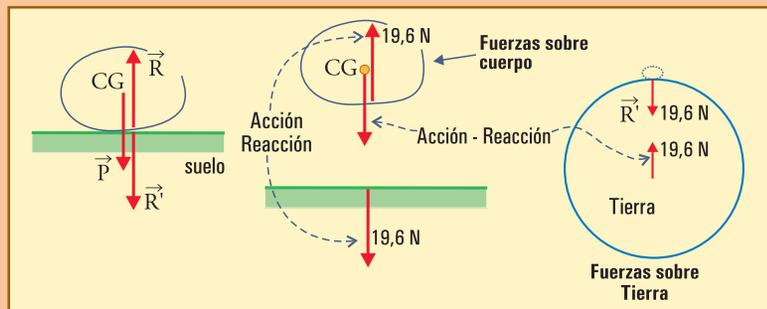
*Cuando realizamos los diagramas de cuerpo libre para analizar alguna situación, debemos dar un tratamiento especial a la fuerza de gravedad, diferente del que damos a las de contacto, debido a que el par acción-reacción con la fuerza peso de un cuerpo, se forma con la atracción del cuerpo sobre el planeta Tierra, aplicada en el centro de la Tierra, y por lo tanto, no se puede incluir en el dibujo.*

● **Ejemplo**

Considere un cuerpo de 2 kg apoyado sobre el piso.

a) Dibuje todas las fuerzas actuantes, calculando el valor de cada una. Explique en qué interacción se origina cada una, y dibuje el vector correspondiente con los diagramas de cuerpo libre necesarios.

b) Repita a) si un agente aplica al cuerpo una fuerza de 5 N, verticalmente hacia abajo, sobre su parte superior.



- **Desarrollo**

a) Sobre el cuerpo actúa el peso,  $P$ , hacia abajo, ejercido por la Tierra, y la reacción del piso,  $R$ , sosteniéndolo, hacia arriba. Ambas fuerzas deben tener el mismo módulo para equilibrarse, y para conocerlo debemos averiguar el peso.

$$R = P$$

$$R = m g$$

$$R = 2 \text{ kg} \times 9,81 \text{ N/kg}$$

$$R = 19,6 \text{ N}$$

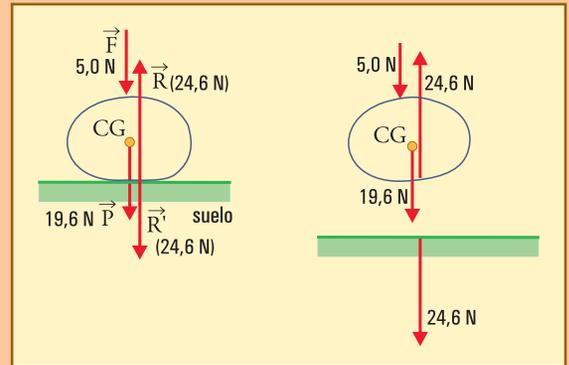
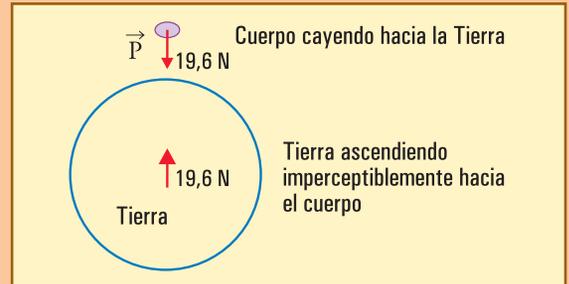
La reacción al peso  $\vec{P}$  del cuerpo no es  $\vec{R}$ , sino la fuerza con que el cuerpo atrae a la Tierra: una fuerza de 19,6 N dibujada en el centro de la Tierra, hacia arriba. Una forma

de convencerse de esto es pensar en el cuerpo cayendo libremente, durante el lapso que permanece sin tocar el piso. En esta situación  $\vec{P}$  actúa, y por lo tanto su reacción también; pero no, puesto que no hay contacto.

De manera que claramente  $\vec{R}$  no es reacción a la fuerza con que la Tierra atrae al cuerpo, sino que  $\vec{R}$  es reacción

a la fuerza con que el cuerpo se apoya sobre el piso. Por lo tanto  $\vec{R}$  es acción-reacción con  $\vec{R}'$ , la fuerza con que el cuerpo "pisa" el suelo. En el próximo punto la idea se amplía con otros valores.

b) Ahora tenemos el mismo peso, pero mayor presión sobre el piso, porque un agente agrega 5 N sobre el cuerpo. El piso reaccionará con lo necesario para impedir que el cuerpo se hunda en él, o sea equilibrando  $19,6 + 5 = 24,6$  N. Por lo tanto ese será el valor de  $R$  y de  $R'$ .



## Unidades

- El problema de medir una fuerza

Para medir la intensidad de una fuerza debemos definir un método de medición, y una unidad, que generalmente surgirá del método que se utilice.

Las ideas básicas planteadas hasta aquí sobre lo que es una fuerza, nos permiten imaginar tres formas esenciales de medir la intensidad de una fuerza.

## 1) Medir una fuerza por su capacidad de deformar cuerpos

Si construimos un mecanismo elástico, podemos calibrarlo definiendo que a cierta deformación corresponde 1 unidad. La unidad puede elegirse arbitrariamente, o con algún criterio fundamentado de alguna manera.

Estos instrumentos existen y se denominan *dinamómetros*; en general el elemento elástico es un resorte cuyo estiramiento se puede leer (amplificado o no) en una escala que se calibra experimentalmente. Las balanzas de resorte son esencialmente dinamómetros de este tipo.

Las balanzas electrónicas también son dinamómetros, en las cuales las deformaciones o alteraciones microscópicas que produce la fuerza aplicada en ciertos cristales sensibles (“piezoeléctricos”) se traduce en una señal eléctrica.

Sería posible definir la unidad de fuerza de un sistema como cierta indicación arbitraria de algún dinamómetro elegido especialmente como “patrón”, pero eso no se hace en un sistema de unidades que pretenda categoría científica, pues quedaría esta unidad sujeta a las propiedades particulares de un aparato, que además podría sufrir alteraciones (envejecer, oxidarse, ser sustituido por una imitación, etc.).

De manera que este método es el que se utiliza típicamente para *medir* fuerzas, pero *no define* unidades, las cuales se toman de otros métodos, como veremos.

## 2) Medir una fuerza comparándola con la de la gravedad

El hecho de ser la gravedad una fuerza que se origina en propiedades del planeta Tierra que son prácticamente inalterables, la distingue como un fenómeno adecuado para establecer unidades de fuerza (explícita o implícitamente).

Si se define algún cuerpo patrón, su peso puede tomarse como unidad de fuerza, y medirse fácilmente con dinamómetros o balanzas.

Así es que si se considera un cuerpo de 1 kg de masa, su peso constituye la unidad práctica de fuerza denominada  $\text{kg}_{\text{fuerza}}$ , o kgf, o  $\vec{\text{kg}}$  :

### Unidad práctica de fuerza:

1 kg fuerza = peso (a nivel del mar y 45° de latitud) de un cuerpo de 1 kg

Ésta no puede ser la unidad de fuerza del Sistema Internacional de Unidades (en adelante “SI”, para abreviar), aunque la masa del cuerpo elegido, 1 kg, sí haya sido unidad de masa del SI (pronto discutiremos la razón para esto).

Y aplicando (3.10) tenemos la forma de convertir entre N y kgf:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kg f} &= 9,81 \text{ N} \\ 1 \text{ N} &= (1/9,81) \text{ kgf} \\ 1 \text{ N} &= 0,102 \text{ kgf} \end{aligned} \quad (3.11)$$

De manera que, dado que en la vida práctica estamos acostumbrados a pensar en kilogramos (tanto en kilogramos unidades de masa, como de fuerza), las expresiones (3.10)

y (3.11) nos permitirán utilizar la unidad SI, newton, aún sin haberla definido formalmente.

De la misma manera se define la unidad inglesa “libra” de fuerza (“pound” en inglés), como el peso de un cuerpo cuya masa es una libra (de la cual hay muchas variantes). No utilizaremos estas unidades, pero es útil saber que la libra aún en uso es la “pound avoirdupois”, que equivale aproximadamente a 0,4536 kg (tanto de fuerza como de masa).

### 3) La unidad del SI

Aunque el kg sea la unidad SI para la masa, el kgf no sería una buena unidad para la fuerza, porque sujetaría el CONCEPTO de fuerza, a la GRAVEDAD TERRESTRE. Además de ese problema conceptual, la gravedad tiene el problema de no ser estrictamente constante, ya que varía levemente de un lugar a otro, y también varía (imperceptiblemente) a mientras caen meteoros que aumentan la masa del planeta, y mientras el hombre lanza satélites que la hacen disminuir; aunque estas alteraciones sean tan pequeñas que no puedan detectarse con ningún instrumento, es claro que el concepto de fuerza, no puede ser condicionado formalmente por ellas.

De manera que *la fuerza en el SI se define a través de sus efectos sobre los movimientos.*

Los procedimientos de medición son más complejos en estos procesos, pero establecen la unidad de fuerza incuestionablemente, en función de otras unidades (masa, longitud, y tiempo), con independencia de cualquier aparato, planeta o propiedad de ningún cuerpo particular.

En el capítulo correspondiente de dinámica veremos más precisiones sobre esta unidad, pero hasta ese momento nos manejaremos con los elementos que ya tenemos.

## ● Unidades de presión o tensión

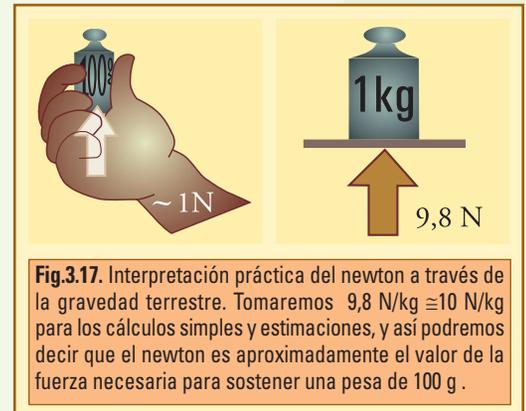
Las unidades de tensión (o presión) se derivan de las unidades de fuerza dividiendo por la unidad de superficie.

La unidad SI de tensión es el pascal, abreviatura *Pa*, en honor a Blas PASCAL (1.623-1.662):

$$1 Pa = \frac{1 N}{1 m^2}$$

$$1 Pa = 1 N \cdot m^{-2}$$

Un pascal representa una tensión o presión de pequeñísima intensidad, ya que corresponde a distribuir en  $1 m^2$  el esfuerzo de sostener una pesa de 100 g. Otras unidades no SI que surgen naturalmente en la práctica son:



- el  $\text{kgf/cm}^2$ , de importancia práctica por ser aproximadamente el valor de la presión atmosférica normal:  $1 \text{ kgf/cm}^2 \cong 10^5 \text{ Pa}$

$$1 \text{ kgf/cm}^2 \cong 1 \text{ atm.}$$

- la unidad inglesa libra/pulgada<sup>2</sup> (en inglés: “pound/square inch”, abreviatura “psi”) que citamos aquí porque aparece en muchos aparatos. Por ejemplo, es la unidad utilizada en los indicadores de presión de los neumáticos de automotores.  $1 \text{ psi} \cong 7,0 \times 10^3 \text{ Pa}$ .

### • Ejemplo

Las cuatro ruedas que soportan a un automóvil de unos 1.000 kg tienen 12 cm de ancho en la banda de rodaje, y por efecto del peso del vehículo se aplastan levemente, de manera que cada una se apoya en el suelo aproximadamente en un rectángulo de 12 cm x 11 cm (valores aproximados tomados de un caso real).

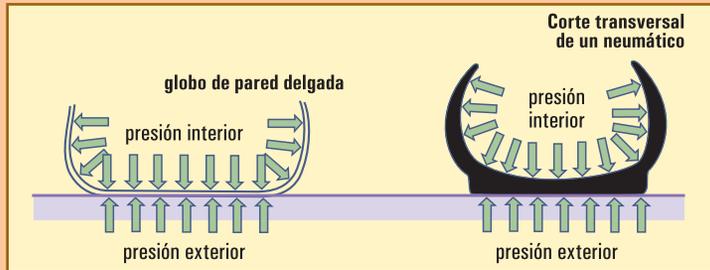
- Suponiendo para simplificar que el peso se distribuye igualmente entre las cuatro ruedas, calcule la presión que se ejerce en cada uno de los rectángulos mencionados. Expresé esta presión en Pa, en atm, y en psi.
- Compare esta presión con la de inflado de los neumáticos, y comente.

### • Desarrollo

Aplicando (3.17) o (3.18) tenemos que el automóvil de 1.000 kg pesa 9.800 N; para redondear digamos aproximadamente  $10^4 \text{ N}$ , que repartidos en 4 ruedas hacen 2,5 kN por rueda.

La presión entre neumáticos y suelo, por lo tanto, resulta

- $p \cong 2,5 / (12 \times 11)$
- $p \cong 2,5 / (12 \times 11)$
- $p \cong 0,019 \text{ kN/cm}^2$
- $p \cong 0,19 \text{ MPa}$
- $p \cong 1,9 \text{ atm}$
- $p \cong 27 \text{ psi}$ .



b) Si la cubierta de la rueda fuera una cosa muy delgada, sin rigidez, podríamos esperar que en la parte que está aplastada contra el suelo la presión sea la misma en la cara que da contra el suelo, y en la cara interior (como por ejemplo, si tuviésemos un globo con una parte aplastada contra el piso).

En el caso del neumático no esperamos una igualdad entre las presiones exterior e interior, pero esperamos valores parecidos. Y eso efectivamente sucede, ya que la presión normal de inflado es de unos 28 psi.

## EJERCICIOS CAPÍTULO 3

### ▲ Ejercicio 3.1

Complete las siguientes frases.

- La condición para que la trayectoria sea rectilínea y recorrida con velocidad decreciente es que la componente normal de la fuerza resultante sea . . . . . , y que la componente tangencial de la fuerza resultante sea . . . . .

- .....
- b) La condición para que la trayectoria sea circular y recorrida uniformemente es que la componente tangencial de la fuerza resultante sea ....., y la componente normal de la fuerza resultante sea .....

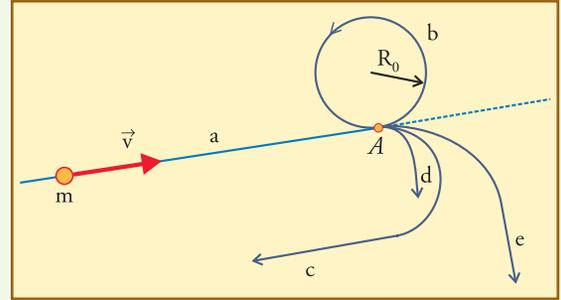
▲ **Ejercicio 3.2**

Una partícula se desplaza libremente en el espacio (sin que actúen sobre ella fuerzas de ningún tipo) a lo largo de una recta **a**.

- a) Critique cada una de las opciones siguientes.

Su velocidad, en estas circunstancias:

- puede ser constante;
- debe ser constante;
- puede variar;
- debe disminuir;
- debe aumentar.



- b) A partir de un punto A se desea desviar a la partícula de la línea recta según las posibilidades b, c, d, y e, mostradas en la figura, sin que varíe la rapidez de su movimiento:

Siendo:

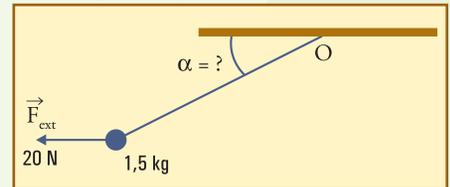
- b) circunferencia completa de radio  $R_0$
- c) semicircunferencia del mismo radio, que luego continúa en línea recta.
- d)  $\frac{1}{4}$  de circunferencia de radio  $\frac{1}{2} R_0$ , seguida de recta.
- e)  $\frac{1}{4}$  de circunferencia de radio  $2R_0$ , seguida de recta.

Explique cómo son las fuerzas que es necesario aplicar en cada caso: qué orientaciones deben tener, durante qué lapso deben actuar, cuáles deben ser más intensas y cuáles más débiles.

▲ **Ejercicio 3.3**

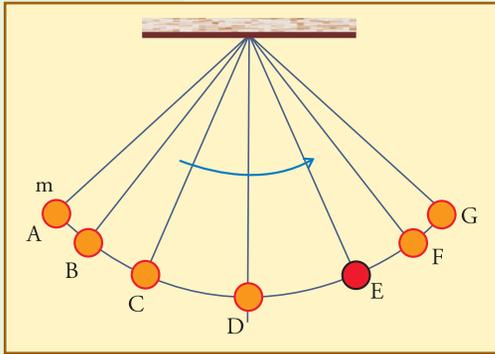
Se mantiene aplicada una fuerza horizontal  $\vec{F}_{ext}$  de 20 N a la pequeña esfera de un péndulo de 1,5 kg de masa con un hilo de 2 m de longitud.

- a) Calcule la fuerza que tira del hilo, y calcule el ángulo  $\alpha$  en el cual se llega al equilibrio.
- b) Dibuje todas las fuerzas actuantes sobre la bolita, indique cuáles serían las reacciones a ellas.
- c) Dibuje las fuerzas actuantes sobre el hilo, y sobre el techo, indicando quiénes son acción-reacción.



▲ **Ejercicio 3.4**

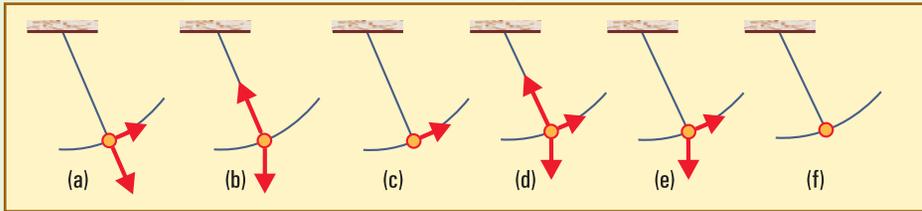
Un péndulo está oscilando entre los puntos extremos A, y G. Sobre la trayectoria se han marcado varios puntos intermedios y se le pide a usted que considere el cuerpo de masa  $m$



mientras pasa por E, en el movimiento  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$  indicado en la figura (suponga que no hay rozamiento):

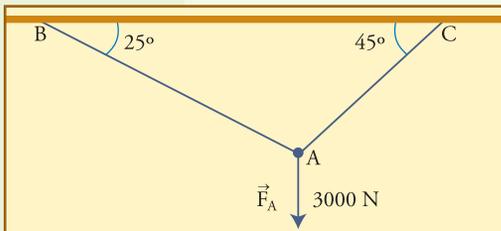
Elija la figura que muestra correctamente, de manera cualitativa, los vectores representativos de todas las fuerzas (solamente de las fuerzas, no otros vectores) que actúan sobre el cuerpo al pasar por E:

Explique, además, cómo debe ser aproximadamente la fuerza resultante, y analice cuál es su efecto sobre el movimiento (en el punto E).



### ▲ Ejercicio 3.5

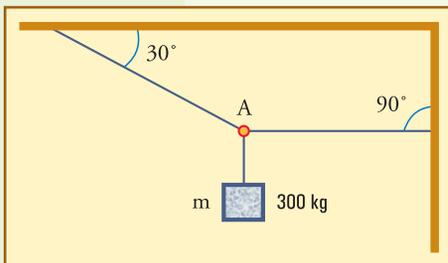
Se tira con una fuerza de 3.000 N del punto A, que une las dos cuerdas mostradas, sujetas en B y C:



- Realizando un diagrama vectorial a escala encuentre gráficamente los valores de las fuerzas con las que cada cuerda tira del punto A.
- Encuentre los valores de las fuerzas en cada cuerda por algún método analítico.

### ▲ Ejercicio 3.6

Un cuerpo pende suspendido de las cuerdas mostradas.

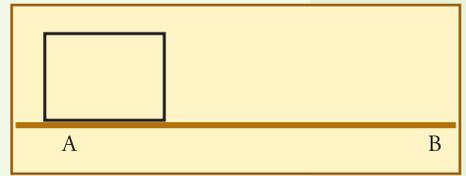


- Calcule el peso del cuerpo, y dibuje todas las fuerzas actuantes sobre el mismo.
- Dibuje el diagrama de cuerpo aislado de la cuerda vertical que tira de A, indicando los valores de los vectores correspondientes.
- Realizando un diagrama vectorial a escala encuentre gráficamente las fuerzas que traccionan a cada cuerda.
- Obtenga por algún método analítico el resultado del punto anterior (c).

### ▲ Ejercicio 3.7

Considere un cajón de peso P, el cual debe ser arrastrado por una persona desde A

hasta B. Suponga que, dadas las características de las superficies de contacto entre piso y cajón, y dada la fuerza normal que presiona una contra otra, la fuerza de rozamiento puede llegar a valer hasta cierto valor  $F_{Rm\acute{a}x}$ : si se aplica al cajón una fuerza horizontal mayor que ese valor, la fuerza de rozamiento no podra equilibrarla y se producira el deslizamiento.



- Suponiendo una situación en que nadie empuja el cajón, dibuje esquemáticamente todas las fuerzas actuantes sobre el mismo y sobre el piso, distinguiendo las que actúan sobre el cajón de las que lo hacen sobre el piso.
- Repita el dibujo de todas las fuerzas actuantes para el caso en que se empuja al cajón con una fuerza horizontal  $\vec{F}_1$  cuya intensidad sea la cuarta parte de  $F_{Rm\acute{a}x}$ . Indique cuál sera la fuerza tangencial que se desarrolla entre cajón y piso en esta situación.
- Repita todo lo pedido en b) para el caso en que se aplica  $\vec{F}_2$  horizontal que sí logra hacer que el cajón deslice mínimamente.
- Considere una situación real de un ropero de 40 kg. Calcule el peso del mismo en N. Estime algún valor posible para  $F_{Rm\acute{a}x}$ , y a través de él estime el valor de la fuerza horizontal mínima necesaria para moverlo.
- Elija la opción que indica mejor lo que usted ha estimado para el punto d):

$F_2$ , la fuerza horizontal mínima necesaria para hacer que deslice algún objeto, debe ser

- |  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>aproximadamente igual</li> <li>levemente mayor</li> <li>considerablemente mayor</li> <li>considerablemente menor</li> </ol> |
|--|

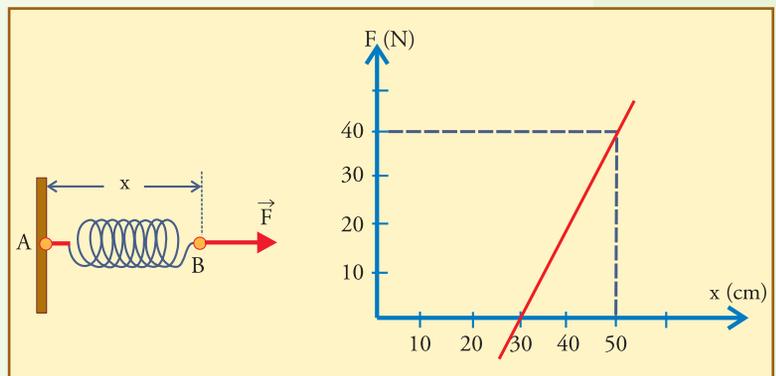
que el peso del objeto

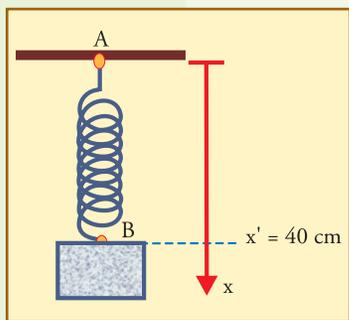
Invente alguna experiencia sencilla para corroborar su elección en el punto e), reelicela, y explique lo obtenido (por ejemplo elija un cuerpo de alrededor de  $\frac{1}{2}$  kg, y mida cuántos cm se estira una bandita elástica colgando el cuerpo, y cuánto se estira para arrastrarlo horizontalmente). Si sus resultados contradicen sus expectativas reflexione con cuidado, revise todo, tanto sus ideas como sus procedimientos.

### ▲ Ejercicio 3.8

La siguiente gráfica muestra la fuerza necesaria para estirar un resorte dado, hasta una longitud total  $x$  cualquiera:

- Calcule la constante elástica  $k$ , e indique la longitud de equilibrio de este resorte.
- Suponga que hay un cuerpo suspendido en reposo de este resorte, y que lo estira hasta  $x' = 40$  cm,





como se ilustra:

Complete la figura indicando (calcule los valores que hagan falta)

- b1** : el vector que indica la fuerza con la cual el cuerpo tira del resorte en B (calcule su valor).
- b2** : el vector que indica la fuerza con que el resorte tira del cuerpo en B, y el que corresponde a la fuerza con la cual el resorte tira de su anclaje en A (indique valores).
- b3** : el vector que indica la fuerza del campo gravitatorio sobre el cuerpo (indique su valor).

c) calcule la masa de este cuerpo.

d) Suponga que se lleva este cuerpo con este resorte a la Luna ( $m_L = 0,012 M_T$ ;  $R_L = 0,27 R_T$ ) y allí se lo suspende suavemente. Indique todas las cosas que cambiarán y las que no, con respecto a la Tierra: ¿ $x$ ? ¿ $F$ ? ¿ $m$ ? ¿Peso? ¿gráfica  $F$  vs  $x$ ?

### ▲ Ejercicio 3.9

Una varilla elástica está sujeta firmemente del borde de una mesa, y se verifica que colocando una pesa de 50 g en su extremo libre (que sobresale 30 cm), éste descende 1 cm debido a la flexión de la varilla. Consideremos que desplazamientos verticales de 2 ó 3 cm en el extremo, frente a 30 cm de largo, pueden estimarse lo suficientemente pequeños como para poder describirlos con un eje vertical rectilíneo (eje  $y$ ).

- a) Limitándonos a deformaciones suficientemente pequeñas, calcule la constante elástica que describe aproximadamente la relación entre la fuerza aplicada y la altura y del extremo libre.
- b) Calcule cuánto descende el extremo si se coloca encima un cuerpo de 20 g. Dibuje la situación, mostrando en un diagrama de cuerpo aislado las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo.

### ▲ Ejercicio 3.10

Considerando la Ley de Gravitación Universal,  $F_{12} = G m_1 m_2 / d_{12}^2$ , (la masa de la Luna vale  $7,4 \times 10^{22}$  kg, su radio 1738 km, y la constante  $G$ ,  $6,67 \times 10^{-11}$   $\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ):

- a) Explique cómo se obtiene y qué significa la intensidad del campo gravitatorio lunar  $g_L \cong 1,63$  N/kg
- b) Indique, con una breve justificación, cuáles opciones son verdaderas y cuáles falsas:
  1. La causa de que el campo gravitatorio en la superficie lunar sea bastante menor que el que hay en la superficie terrestre es la ausencia de atmósfera en la Luna.
  2. En la Luna dos cuerpos de 1 kg cada uno, situados a 1 m de distancia, se atraen mutuamente con una fuerza de aproximadamente 1,63 N.
  3. En la Luna dos cuerpos de 1 kg cada uno, situados a 1 m de distancia, se atraen mutuamente con una fuerza de aproximadamente  $6,7 \times 10^{-11}$  N.

# Principios de la dinámica

Como ya comentamos, toda la Dinámica se basa sobre tres principios fundamentales, de los que ya hemos presentado formalmente dos. Ahora advertiremos, que además, cuando hablábamos del efecto de las fuerzas sobre los movimientos, ya estábamos presentando y utilizando, informalmente, el tercero. Nos quedó pendiente para este capítulo, la tarea de completar la estructura formal de aquellas afirmaciones. Una vez que lo hagamos, estaremos en condiciones de realizar los cálculos que podamos necesitar, tanto como revisar y comprender finalmente, la esencia de todos los conceptos de mecánica.

## ■ 4.1. Movimiento lineal

Ya dijimos que todo lo que se relaciona con el movimiento depende del sistema de referencia que se elige. Si elegimos un sistema de referencia caprichoso, desde él veremos a los cuerpos moverse caprichosamente, y para eso no podremos establecer leyes.

De manera que para ocuparnos en detalle de las leyes del movimiento, comenzaremos suponiendo que se eligió un “buen” sistema de referencia, con lo que queremos decir *un sistema en el cual se cumple el Principio de Inercia*. Más adelante, discutiremos cómo se hace para elegir un sistema con estas características, pero ahora simplemente suponemos que lo hemos encontrado, y siendo así, *ya sabemos cómo se mueven los cuerpos sobre los que no se aplican fuerzas*. Considerando ese punto de partida, tratemos de estudiar el movimiento de cualquier cuerpo, en función de las fuerzas que se le apliquen.

### ● Trayectoria

La trayectoria es la línea del espacio descrita por un punto móvil a medida que transcurre el tiempo.

Cuando un cuerpo se mueve, cada punto describe su propia trayectoria, y el resultado es una *familia de líneas*, con un aspecto que puede ser muy complicado.

Para simplificar la descripción del movimiento de un *cuerpo sólido* puede indicarse el movimiento de su *centro de masa*, y además el movimiento con respecto a dicho centro, que se denomina *movimiento intrínseco*.

La parte del movimiento del cuerpo que se describe a través del movimiento del centro de masa se denomina de *traslación*, y la parte intrínseca, para un sólido, es necesariamente una *rotación*.

Una simplificación muy útil consiste en hacer abstracción de los detalles del cuerpo, y considerar como si toda su masa estuviese concentrada prácticamente en un punto (el cual necesariamente es el centro de masa). Esto se llama *idealizar el cuerpo a una partícula puntual*.

Por ahora nos ocuparemos solamente del movimiento del centro de masa, o de cuerpos idealizados de esta manera, con lo cual la trayectoria será una simple línea, y hablaremos de *movimientos lineales*, dejando de lado posibles rotaciones para estudiar su

descripción más adelante.

Estos movimientos pueden ser clasificados de acuerdo con:

- la forma de la trayectoria: rectilíneo, curvilíneo, circular, etc.
- el ritmo o la rapidez con que se recorre la trayectoria: uniforme, variado, uniformemente variado, periódico, oscilatorio, etc.

La rapidez de un movimiento lineal tiene que ver con la distancia que recorre el punto móvil a lo largo de la trayectoria por unidad de tiempo. Necesitamos profundizar la definición de este aspecto, o propiedad del vector velocidad.

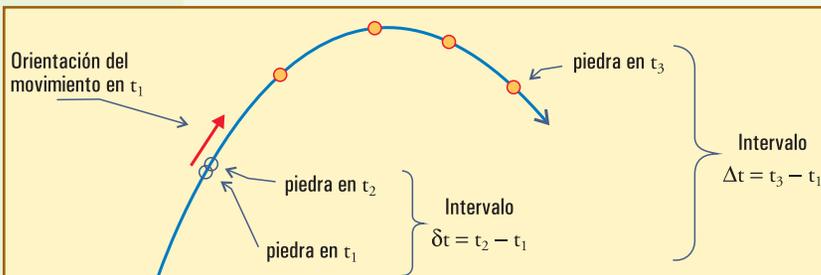
## • El carácter de instantáneo

Imaginemos el punto móvil correspondiente a una piedra lanzada oblicuamente hacia arriba, que describe la trayectoria mostrada en la figura 4.1.

La orientación del movimiento de nuestra piedra-partícula-material-puntual varía instante a instante, y queremos describirla *para cada instante*, es decir con carácter de *instantánea*.

Pero el tiempo *debe transcurrir* para que tenga sentido el concepto de movimiento. En un instante exacto,  $t_1$  por ejemplo, podemos tener una posición, como si fuera una fotografía, pero para tener *movimiento* tenemos que tener *cambio de posición*, y para ello, un intervalo de tiempo que transcurre, desde  $t_1$  hasta otro instante  $t_2$ .

Para hablar de la orientación del movimiento en un instante, debemos considerar un transcurso extremadamente pequeño de tiempo, con  $t_2$  tan próximo a  $t_1$  que ambos puedan considerarse prácticamente como si fuesen el mismo instante para la orientación del movimiento, pero *sin que sean exactamente el mismo instante*.



**Fig. 4.1.** Trayectoria de una piedra lanzada al aire. Se ilustra lo que para este caso se considera un intervalo grande de tiempo  $\Delta t$ , y uno pequeño  $\delta t$ .

Mientras que entre  $t_1$  y  $t_3$  la orientación del movimiento cambia mucho desde el comienzo hasta el final, entonces sólo se podría hablar de una orientación media para todo el intervalo, que no se parecería ni la del comienzo ni a la del final.

Ya hemos utilizado la letra griega delta mayúscula ( $\Delta$ ) para indicar la duración de un intervalo:  $\Delta t = t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}$ , ahora reservaremos esta letra para los intervalos que se consideran largos, como  $\Delta t = t_3 - t_1$ , y utilizaremos la delta minúscula ( $\delta t$ ), para designar los intervalos suficientemente pequeños, como  $\delta t = t_2 - t_1$ . A veces diremos que estos intervalos son *infinitamente* o *infinitesimalmente* pequeños, sin pretender el rigor o la precisión que tienen en matemática estos vocablos.

En la figura 4.1 se ilustra lo que podría ser un intervalo suficientemente pequeño, desde  $t_1$  hasta  $t_2$ , y un intervalo grande, desde  $t_1$  hasta  $t_3$ . La orientación de este movimiento entre  $t_1$  y  $t_2$  está representada por la flechita en la figura, y puede considerarse *instantánea* (tanto correspondería a  $t_1$ , como a  $t_2$ , como a cualquier  $t$  entre ambos), porque no cambia apreciablemente en ese lapso.

## • Desplazamiento infinitesimal y tangencial

Matemáticamente existen definiciones precisas para lo que se considera infinitesimal. Nosotros vamos a manejarnos con los siguientes criterios que son más simples. Para que un intervalo sea considerado suficientemente pequeño, lo que se debe cumplir es que en su transcurso no cambie apreciablemente ni la rapidez ni la dirección del movimiento. Es importante notar que cualquier intervalo, por pequeño que sea, siempre tiene infinitos puntos, y puede seguir subdividiéndose infinitamente más.

Siempre es posible, para cualquier movimiento en cualquier instante dado, imaginar un intervalo tan pequeño que en él el movimiento pueda considerarse rectilíneo y uniforme. Así es que, durante ese pequeño intervalo podemos aplicar la definición de vector velocidad que ya conocemos (Capítulo 2), y obtener un vector velocidad que será válido para ese pequeñísimo intervalo. Eso es lo que buscamos, un vector velocidad que pueda corresponder a un intervalo tan pequeño que pueda considerarse un instante.

En síntesis podemos decir:

Consideremos la definición de vector velocidad (2.2) (Capítulo 2) para el movimiento rectilíneo y uniforme: “vector desplazamiento /  $\Delta t$ ”. Ahora decimos que esta definición sólo tiene pretensión de representar un *valor medio* para un intervalo largo como  $\Delta t$ , por lo cual, ahora denominamos ese vector “velocidad media en el intervalo  $\Delta t$ ”,  $v_m$  :

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.3'')$$

$$\vec{v}_m = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t}; \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)$$

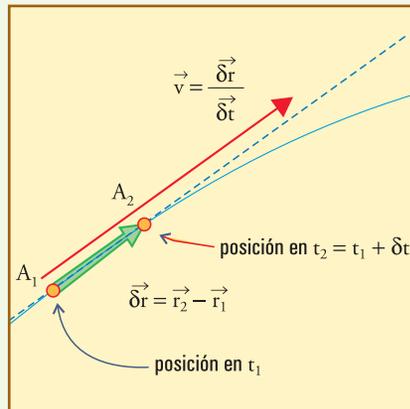
Esta definición, en intervalos  $dt$  que puedan considerarse suficientemente pequeños, se transforma en el concepto de velocidad instantánea, :

$$\vec{v} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} \quad (4.1)$$

$$\vec{v} = \left( \frac{\delta x}{\delta t}; \frac{\delta y}{\delta t} \right)$$

El vector desplazamiento  $\delta \vec{r}$ , desde el lugar ocupado por la partícula en  $t_1$  hasta el ocupado en el instante infinitamente próximo  $t_2$ , indica la dirección del movimiento que está ocurriendo en ese lapso. La recta que contiene a cualquier vector de estas características es la que pasa por los dos puntos infinitamente próximos de la trayectoria, llamada en geometría: *recta tangente a la curva en ese punto*. (Fig.4.2).

El problema geométrico de definir la



**Fig. 4.2.**  $A_1$  y  $A_2$  son las posiciones del punto móvil en los instantes sucesivos  $t_1$  y  $t_2$ . Los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , que no se muestran, serían indicativos de estas posiciones respecto de un origen cualquiera que tampoco se muestra.  $\delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  es el correspondiente VECTOR DESPLAZAMIENTO, que se dibuja desde la punta de  $\vec{r}_1$  hasta la de  $\vec{r}_2$ , es decir desde  $A_1$  hasta  $A_2$ . Si  $\delta t$  es suficientemente pequeño, el desplazamiento desde  $A_1$  hasta  $A_2$  a lo largo de la trayectoria tiende a coincidir con el vector desplazamiento, y la recta en línea de trazos que pasa por ambos puntos define la tangente a la curva allí. El vector velocidad,  $\vec{v}$ , se orienta como  $\delta \vec{r}$ .

recta tangente a una curva es el mismo problema de definir la orientación del movimiento:

- el movimiento en un instante cualquiera, está ocurriendo *hacia los puntos infinitamente próximos*

- la tangente debe pasar por el punto *y por los puntos infinitamente próximos*

Es decir que la tangente debe tocar a la curva en el punto, pero no de cualquier manera, sino *tendiendo a coincidir*, o a *confundirse*, con ella en la zona infinitamente próxima. Hablamos de este modo porque la tangente, al ser una recta, no puede coincidir exactamente con un trozo cualquiera de una línea que no es recta, pero la idea es que *a medida que el intervalo se hace más pequeño la aproximación es cada vez mejor*, y llega a ser casi imposible distinguir una de otra. Ese es el sentido de la palabra “confundirse” aquí. Por supuesto, que en un tramo recto de trayectoria la confusión es perfecta porque la tangente sí coincide exactamente con ella.

Para que este concepto quede claro recomendamos hacer el siguiente ejercicio, y luego comparar sus ideas con los comentarios al final de este capítulo.

### • Ejercicio

Analice y critique las siguientes definiciones de tangencia, dando ejemplos y/o contraejemplos que avalen sus afirmaciones.

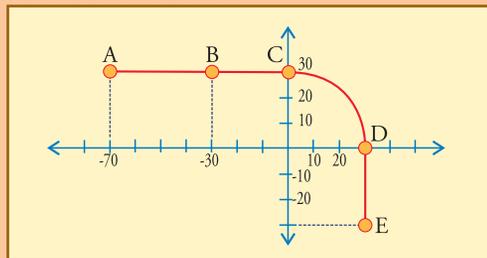
1. Tangente a una curva en un punto es la recta que toca a la curva en ese solo punto.
2. Tangente a una curva en un punto es la recta que toca a la curva en ese punto sin cortarla.
3. Tangente a una curva en un punto es la recta que pasa por el punto considerado y por otros puntos de la curva infinitamente próximos.
4. La tangente a una línea recta es la misma línea.

En este punto es posible estar un poco abrumado por todos los aspectos que hay que tener en cuenta para definir la velocidad instantánea, y es importante saber que la expresión (4.1) *define el concepto*, pero que *no representa cálculos que realmente haya que realizar*. En la práctica, teniendo claro el concepto, las operaciones a realizar suelen ser bastante más sencillas, como se entenderá revisando el siguiente ejemplo.

### • Ejemplo

Este ejemplo ya se trabajó en el Capítulo 3, pero ahora se presentan otras cuestiones.

Se observa que un cuerpo de masa  $m = 200 \text{ kg}$  que está en reposo en A se pone en movimiento en  $t_0 = 0 \text{ s}$ , siguiendo la trayectoria dibujada. El cuerpo aumenta gradualmente de velocidad hasta pasar por B en  $t_1 = 8 \text{ s}$ , y a partir de allí el movimiento se mantiene uniforme. El cuerpo pasa por C en  $t_2 = 11 \text{ s}$ , y continúa uniformemente hasta pasar por D, donde comienza a frenarse gradualmente para quedar en reposo en E.



- a) Encuentre los vectores desplazamiento correspondientes a los intervalos sucesivos AB, BC, CD, y DE. Dibújelos sobre la trayectoria y expréselos como par ordenado.
- b) Calcule el vector velocidad media correspondiente a los tramos AB, y BC.
- c) Calcule el vector velocidad instantánea correspondiente a cada uno de los puntos A, B, C, D, y E. Dibújelos sobre la trayectoria y escríbalos como pares ordenados.
- d) Explique cómo dibujaría el vector velocidad instantánea correspondiente a un punto cualquiera sobre la curva.

• **Desarrollo:**

a) Este punto ya fue resuelto en el capítulo 3, en el cual puede verse el dibujo. Aquí reescribimos los vectores para utilizarlos:  $\vec{D}_{AB} = (40 \text{ m}; 0 \text{ m})$ ;  $\vec{D}_{BC} = (30 \text{ m}; 0 \text{ m})$ ;  $\vec{D}_{CD} = (30 \text{ m}; -30 \text{ m})$ ;  $\vec{D}_{DE} = (0 \text{ m}; -30 \text{ m})$ .

b) Dividiendo los desplazamientos por los tiempos demorados, que son: 8 s para AB, y  $11 - 8 = 3$  s para el BC, obtenemos:  $\vec{v}_m(AB) = (5 \text{ m/s}; 0 \text{ m/s})$ ;  $\vec{v}_m(BC) = (10 \text{ m/s}; 0 \text{ m/s})$ .

Y lo mismo haríamos para los siguientes intervalos si se pidiera el cálculo.

c) Ahora viene la cuestión de qué hacer con la teoría de la velocidad instantánea. No tenemos que hacer el cociente “desplazamiento muy pequeño / intervalo muy pequeño”, sino que, con esa idea razonamos:

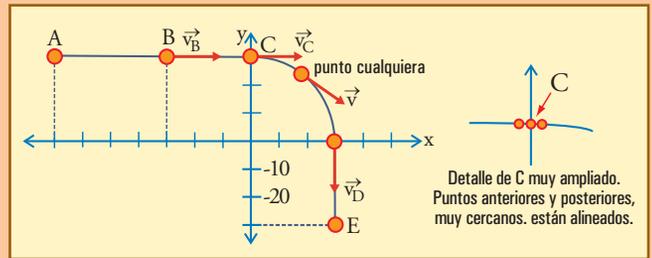
El módulo de la velocidad en A es nulo, aumenta gradualmente hasta alcanzar en B un valor que se mantiene constante hasta D, y luego disminuye gradualmente hasta ser nuevamente nulo en E.

O sea que, para comenzar,  $\vec{v}_A = \vec{v}_E = (0; 0)$ .

Para seguir, entre B y C el movimiento es rectilíneo y uniforme, y en este caso la velocidad media es igual en cualquier intervalo que se considere, en todo el intervalo o en cualquier parte pequeña del mismo, por pequeña que sea. Por lo tanto, el vector velocidad instantánea en cualquier parte del intervalo BC, incluidos los puntos B y C, es el mismo que la velocidad media:  $\vec{v}_B = \vec{v}_C = (10 \text{ m/s}; 0 \text{ m/s})$ .

Para el tramo CD, el vector velocidad mantiene el mismo módulo que en BC, o sea 10 m/s (porque el movimiento es uniforme), y sólo va cambiando de dirección manteniéndose tangente a la circunferencia. De manera que:  $\vec{v}_D = (0 \text{ m/s}; -10 \text{ m/s})$

No se debe pretender que los vectores velocidad se curven un poco para mantenerse sobre la parte curva de la trayectoria: estos vectores son tangentes y rectos. Puede parecer chocante que en puntos como C, donde comienza la curva, el vector deba mantenerse exactamente horizontal. Pero si se piensa en este punto (C), y puntos inmediatamente anteriores, o posteriores, como se muestra



en la figura ampliada, es muy claro que el vector está bien así, ya que indica cómo es el movimiento que está ocurriendo en esos instantes, entre esos puntos muy próximos (**IMPORTANTE:** revisar y reflexionar sobre este detalle).

## Vector cantidad de movimiento

Si multiplicamos el vector velocidad por la masa de la partícula, habida cuenta de que la masa es un escalar positivo, obtendremos otro vector de la misma orientación, es decir con la orientación del movimiento en cada instante, pero que además representa, con su módulo, un ente proporcional a la cantidad de materia en movimiento, y no sólo a la rapidez.

Se acostumbra utilizar la letra  $\vec{p}$  para representar a este vector, de manera que definimos:

**Vector cantidad de movimiento:**

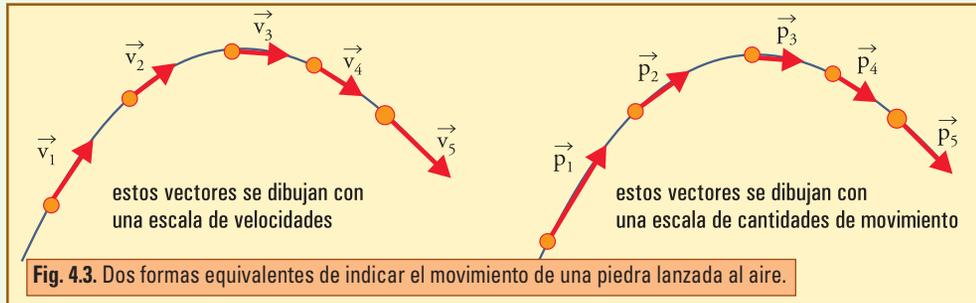
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Unidad: kg m/s

(4.2)

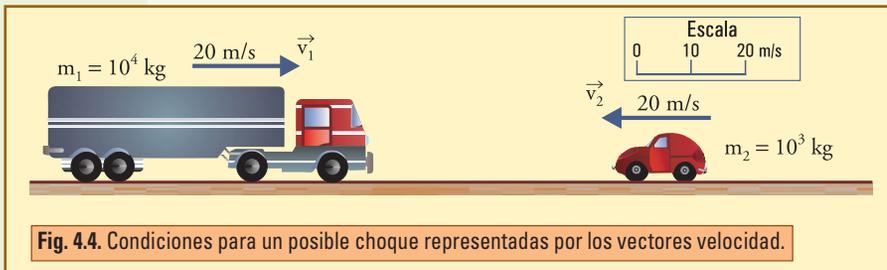
Hemos definido así un vector que desde el punto de vista de su representación en un dibujo no podrá distinguirse del vector velocidad más que por las unidades de la escala:

será tangente a la trayectoria, marcando la orientación del movimiento en cada instante, y como la masa de la partícula no cambia mientras ésta se mueve, los cambios en el módulo del vector  $\vec{p}$  solamente darán cuenta de cambios en la rapidez. Si por ejemplo, consideramos la trayectoria de una piedra lanzada al aire, las flechas de la figura 4.3 pueden ser tanto vectores velocidad como vectores cantidad de movimiento.



En el caso ilustrado por estas figuras, cualquiera de las dos representaciones da cuenta de lo mismo: tanto los vectores  $\vec{v}$  como los vectores  $\vec{p}$  indican cómo la dirección del movimiento va siendo alterada (curvada hacia abajo) por la acción de la fuerza de gravedad, al mismo tiempo que la rapidez disminuye mientras la piedra sube, y vuelve a aumentar luego de que ésta pasa por el punto más alto, efecto también debido a la acción de la gravedad. Es útil contar con ambos vectores para poder establecer leyes del movimiento.

La situación planteada en las figuras 4.4 y 4.5, pretende enfatizarlo.



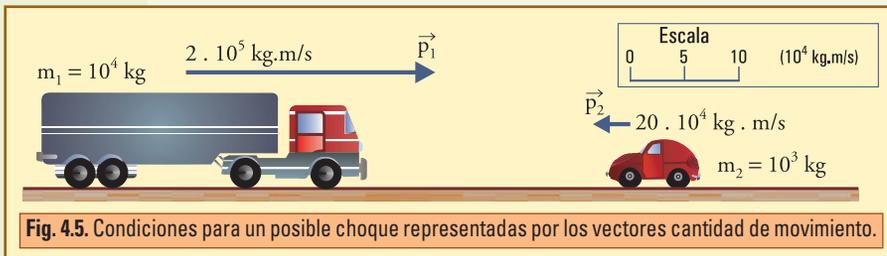
Vemos un camión y un pequeño automóvil que se dirigen frontalmente a chocar entre sí (supongamos que están tripulados por muñecos que prueban implementos de seguridad). Ambos vehículos tienen

igual velocidad, pero muy distinta masa. Este último dato es muy importante para prever lo que pueda pasar. Si no tuviésemos ese dato, bastaría con ver el dibujo del camión y compararlo con el del auto para imaginar la diferencia de masas de cada vehículo. Pero, ¿cuál es el concepto físico que nos permitiría pensar eso mismo si no viésemos el dibujo y no estuviese explícitamente anotada la masa de cada uno? ¿Hay algún concepto que combine adecuadamente la información de la masa con la de la velocidad?

Sí, los vectores cantidad de movimiento son los que contienen la información necesaria

para describir los choques. Puede verse en la figura 4.5 cómo estos vectores hacen explícitos los temores del dueño del automóvil.

En este momento dejamos este planteo



aquí, pero anticipamos que para analizar choques, así como para establecer leyes del movimiento en general, será fundamental el concepto de cantidad de movimiento.

● Hay otras denominaciones que se utilizan habitualmente para este vector  $\vec{p}$  en diversos textos, como, **momentum (lineal)**, **momenta (lineal)**, **momento (lineal)**. En todos los casos se puede agregar “lineal” para distinguir del mismo concepto referido al movimiento de rotación, en cuyo caso se denomina “angular”, como veremos oportunamente. Evitaremos especialmente utilizar el vocablo “momento” aquí, para que no surjan confusiones con el concepto de momento de fuerzas, y con otros “momentos” que aparecerán en determinados temas.

Una de las características más importantes del concepto que estamos definiendo surge a través de su carácter extensivo, como veremos a continuación.

### ● Cantidad de movimiento de un cuerpo extenso (no partícula)

Para cualquier cuerpo o sistema material complicado, independientemente de que sea o no sólido, incluso de que esté formado o no por partes no conectadas entre sí, definimos su vector cantidad de movimiento total como la suma (vectorial) de los vectores cantidad de movimiento de todas las partes elementales por las que se lo pueda suponer integrado:

$$\vec{p}_{\text{total}} = \sum \vec{p}_i \quad (4.3)$$

A partir de esta definición, llamando  $V_{\text{CM}}$  a la velocidad del centro de masa, puede demostrarse que:

$$\vec{p}_{\text{total}} = m_{\text{total}} \vec{V}_{\text{CM}} \quad (4.4)$$

Según esta expresión, es lo mismo calcular el vector cantidad de movimiento de un cuerpo o sistema material cualquiera, teniendo en cuenta todos los movimientos individuales de las partículas que componen dicho sistema; o considerar una única partícula formada por toda la masa concentrada en el centro de masa.

Esta expresión justifica algunas afirmaciones que hemos hecho anteriormente acerca de la posibilidad de reemplazar el cuerpo en estudio por una adecuada partícula material, vamos a prescindir de su demostración, y a considerarla como una generalización natural de la definición del vector cantidad de movimiento de una partícula.

---

## ■ 4.2. Los principios de la dinámica

---

Hemos dicho que toda la física de los movimientos se basa en tres principios fundamentales, hasta ahora hemos visto dos de ellos: **el Principio de Inercia**, y **el Principio de Acción y Reacción**.

Ahora presentaremos el que se conoce como **Principio de Masa**, que usualmente se presenta en segundo lugar. Aquí, por razones prácticas, lo denominaremos **Ley del Impulso**.

Aunque éste es un Principio, es decir una premisa básica que se postula y no tiene demostración, mostraremos los razonamientos que guían su elaboración, y que ayudan a comprender su significado y sus implicancias.

## Ley del Impulso

En el Capítulo 3 hemos visto ideas cualitativas acerca del efecto de las fuerzas sobre el movimiento de un cuerpo, ahora, con esta ley cuantificaremos esas ideas.

Comencemos recordando la idea presentada en cuarto lugar: “si se aplican varias fuerzas simultáneamente sobre un cuerpo, *el efecto sobre el movimiento es la superposición de los efectos que ellas tendrían por separado*”. Esto significa que cuando actúan varias fuerzas, el efecto debe calcularse con la **fuerza resultante**. Esto es lo primero que debemos tener presente: cualquier cosa que diga la Ley del Impulso, debe referirse a la fuerza resultante.

Aún si no se escribe explícitamente resultante, debe interpretarse que es un olvido: donde diga fuerza, debe decir fuerza resultante.

Teniendo en cuenta esto, decimos:

1) El efecto de una fuerza es proporcional al tiempo que actúa.

Una fuerza necesita tiempo para producir modificaciones en el movimiento de un cuerpo, de manera que el vector indicativo de dicho efecto se obtiene multiplicando el vector fuerza por el intervalo de tiempo  $\Delta t$  durante el que está aplicada. Este vector se denomina vector *impulso* aplicado en el intervalo  $\Delta t$ ,  $\vec{I}_{\Delta t}$ :

Impulso aplicado por  $\vec{F}$  durante  $\Delta t$ :

$$\vec{I}_{\Delta t} = \vec{F} \Delta t \quad (4.5)$$

2) La modificación del movimiento, que puede consistir tanto en modificación del módulo, como de la dirección del vector velocidad, es inversamente proporcional a la masa del cuerpo en estudio.

De manera que el enunciado de la Ley del Impulso, deberá ser:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \frac{\vec{I}_{\Delta t}}{m} \\ \Delta \vec{v} &= \frac{\vec{F}_R \Delta t}{m} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Que también, multiplicando por  $m\vec{v}$ , y recordando que  $m\vec{v} = \vec{p}$ , puede expresarse como:

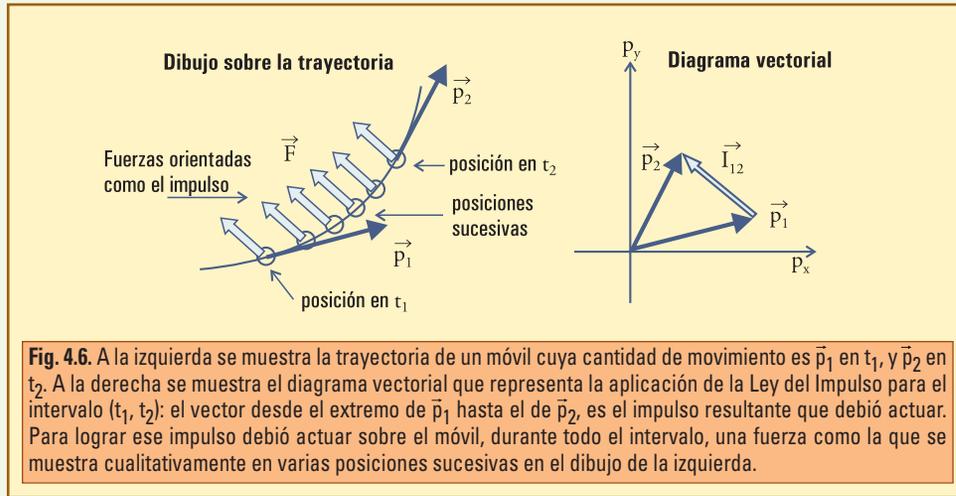
$$\begin{aligned} \vec{I}_{\Delta t} &= m \Delta \vec{v} \\ \vec{I}_{\Delta t} &= m v_{final} - m v_{inicial} \\ \vec{I}_{\Delta t} &= \Delta \vec{p} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Entonces, a partir de una cantidad dada de movimiento inicial cualquiera, luego de actuar las fuerzas durante  $\Delta t$ , será:

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{I}_{\Delta t} \quad (4.7')$$

## • Interpretación gráfica

Si en un instante  $t_1$  un móvil tiene la cantidad de movimiento  $\vec{p}_1$ , y hasta el instante  $t_2$  actúan sobre el móvil fuerzas cuya resultante es  $\vec{F}$ , aplicándole el impulso  $\vec{I}_{12}$ , entonces la cantidad de movimiento del móvil en  $t_2$  será el vector  $\vec{p}_2$  que se obtiene efectuando la suma vectorial  $\vec{p}_1 + \vec{I}_{12}$  (se dibuja  $\vec{p}_1$  y  $\vec{I}_{12}$  a continuación).



Esta expresión exige sumar cantidades de movimiento, cuya unidad es  $\text{kg m/s}$ , con impulsos, cuya unidad es  $\text{Ns}$ . Eso es lícito porque la unidad de fuerza, como ampliaremos muy pronto, es:  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$ . Aplicando esto se tiene:  $1 \text{ Ns} = 1 \text{ kg m/s}$ , y como debe ser, todos los sumandos son de la misma dimensión.

### Nota 1. El impulso cuando la fuerza no es constante

Debe estar muy claro que todas las leyes, y en particular ésta, deben cumplirse instante a instante, en cada instante, lo cual significa que, para los intervalos suficientemente pequeños, la ley vale sin lugar a ninguna duda. Ahora bien, para intervalos grandes, puede mostrarse que la ley también es exacta cuando el vector fuerza se mantiene constante, pero cuando no es así, aparece el problema de calcular el impulso aplicado por una fuerza resultante que va cambiando mientras transcurre el intervalo considerado.

Para calcular correctamente el impulso en estos casos, es necesario subdividir el intervalo en infinitud (todos los que sean necesarios) de intervalitos suficientemente pequeños para que en cada uno se pueda considerar constante a la fuerza. Habiendo hecho esto se calculan todos los pequeños impulsos  $\vec{F} \delta t$  correspondientes a cada intervalito, y se suman todos vectorialmente para obtener el impulso total del intervalo.

$$\vec{I}_{12} = \sum \vec{F} \delta t \quad (4.8)$$

Vale notar que si el vector  $\vec{F}$  se mantiene constante durante todo el intervalo, entonces sale factor común de esta suma, y vale la expresión (4.4) presentada inicialmente:

$$\vec{I}_{12} = \vec{F} \Delta t$$

$$\vec{I}_{12} = \vec{F} (t_1 - t_2)$$

Otra cosa que vale notar es que, aunque veremos algunos trucos que nos evitarán tener que utilizar explícitamente la expresión (4.8), ella es importante como **concepto**, porque destaca el hecho de que el impulso no es algo de un instante, sino que es algo que se acumula durante todo el tiempo en que se está aplicando la fuerza. **El impulso corresponde a un intervalo, nunca a un instante.** Es lo que ya hemos dicho al comienzo: la acción de una fuerza debe mantenerse cierto tiempo para causar algún efecto.

## Nota 2. Otra forma de la Ley del Impulso

Si en la expresión (4.6) dividimos por  $\Delta t$  obtenemos:  $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}}{m}$

El miembro izquierdo es la variación del vector velocidad por unidad de tiempo, que es el vector denominado “aceleración”,  $\vec{a}$ .

Con esta notación tenemos la ley en la forma en la cual tradicionalmente se la presenta, con la denominación ya mencionada de “Principio de masa”:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ o bien, } \vec{F} = m\vec{a}$$

Como trataremos de no depender del concepto de aceleración, en general utilizaremos muy poco estas expresiones

### • Ejemplo 1

Un cuerpo de masa  $m = 5 \text{ kg}$  está en reposo apoyado sobre una superficie horizontal sobre la que puede deslizarse sin rozamiento, cuando se le aplica horizontalmente una fuerza de  $10 \text{ N}$  durante  $6$  segundos, en cierta dirección que se elige para el eje  $x$ .

1) Dibuje esquemáticamente la situación planteada. Dibuje todas las fuerzas actuantes sobre el cuerpo (diagrama de cuerpo libre).

2) Determine el impulso aplicado por la fuerza. Dibuje cualitativamente el vector  $\vec{I}$ .

3) Determine la cantidad de movimiento  $\vec{p}$  y la velocidad  $\vec{v}$  que adquiere este cuerpo bajo la aplicación de esta fuerza en  $6$  segundos.

4) Repita el problema para el caso en que el cuerpo tuviera inicialmente una velocidad de  $2 \text{ m/s}$  en la dirección positiva del eje  $x$ .

Dibujar cualitativamente las dos situaciones con todos los vectores importantes. ¿Qué pasa luego de los  $6$  segundos si ya no actúa ninguna otra fuerza horizontal?

### • Desarrollo

1) Las fuerzas actuantes sobre el cuerpo son: el peso,  $\vec{P} = (0; -m g) \cong (0 \text{ N}; -49 \text{ N})$ , la reacción de la mesa, que equilibra al peso, ya que ambas son las únicas fuerzas verticales, o sea  $\vec{R} = (0 \text{ N}; 49 \text{ N})$ , y la fuerza aplicada por un agente externo,  $\vec{F} = (10 \text{ N}; 0 \text{ N})$ .

Claramente  $\vec{F}$  es también la resultante, de manera que es la única que hay que considerar para el movimiento.

2)  $\vec{I} = \vec{F} \times 6 \text{ s}$

$$\vec{I} = (60 \text{ Ns}; 0 \text{ Ns}).$$

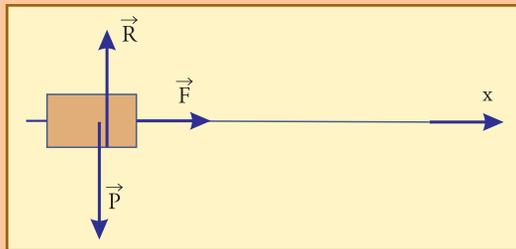
Se advierte que en el eje vertical todo será nulo en este problema, de manera que podemos simplificar la notación trabajando sólo con las componentes  $x$ :  $I_x = F_x \times 6 \text{ s}$

$$I_x = 60 \text{ Ns}.$$

3) Para  $t = 0$ ,  $p_{0x} = 0 \text{ kg m/s}$ . Aplicamos la Ley: para  $t = 6 \text{ s}$ ,  $p_x = p_{0x} + I_x$

$$p_x = 60 \text{ Ns}$$

$$p_x = 60 \text{ kg m/s}.$$

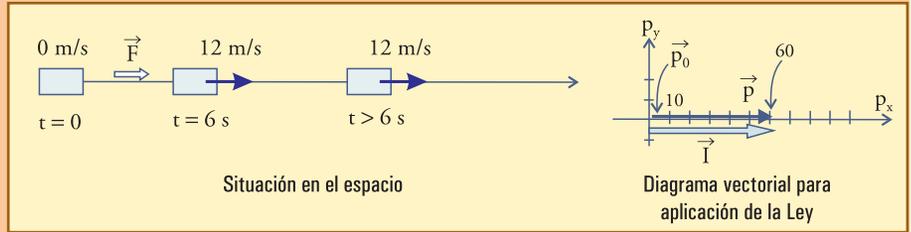


Dado que  $p = m v$ , entonces la velocidad en  $t = 6 \text{ s}$ , es  $v_x = p_x / m$

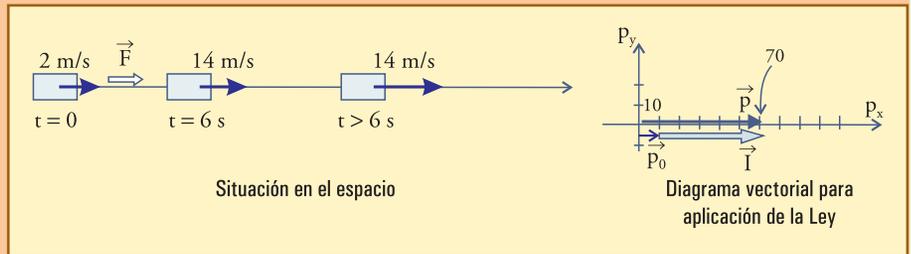
$$v_x = 60 \text{ (kg m/s)} / 5 \text{ (kg)}$$

$$v_x = 12 \text{ m/s}.$$

**Obsérvese la forma de trabajar:** con los datos de la fuerza calculamos el impulso aplicado, luego aplicamos la ley para tener la cantidad de movimiento, una vez que la tenemos, dividiendo por  $m$  tenemos la velocidad.



4) Si inicialmente el cuerpo hubiera estado en movimiento, sólo hubiese cambiado, en este ejercicio, la cantidad de movimiento inicial:  
 $p_{0x} = 2 \text{ m/s} \times 5 \text{ kg}$   
 $p_{0x} = 10 \text{ kg m/s}$ .



Dado que el impulso en  $x$  seguiría siendo  $60 \text{ Ns}$ , entonces la cantidad de movimiento y la velocidad finales son:  
 $p_x = 10 \text{ kg m/s} + 60 \text{ Ns}$   
 $p_x = 70 \text{ kg m/s}$ ,

con lo cual,

$$v_x = p_x / m$$

$$v_x = 14 \text{ m/s}.$$

La Ley del Impulso nos permite averiguar *cómo es el movimiento*, pero no nos habla de la posición o de la distancia recorrida. Más adelante, veremos cómo determinar esas cosas, por ahora debe estar claro que *no se las tenemos que pedir a esta ley*.

### ● Ejemplo 2

Sobre un cuerpo de masa  $m = 8 \text{ kg}$ , que se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad inicial de  $12 \text{ m/s}$ , se aplica una fuerza de  $10 \text{ newtons}$  en sentido *contrario* al movimiento durante  $4 \text{ segundos}$  (luego el cuerpo continúa absolutamente libre de fuerzas que actúen en dirección horizontal).

- 1) Analice la situación, y determine la velocidad del cuerpo al final de los  $4 \text{ segundos}$  que dura la aplicación de la fuerza. Explique si el movimiento continúa o no, y cómo, después de suspender la aplicación de la fuerza. Dibuje los vectores que sean útiles o necesarios.
- 2) Determine el tiempo necesario para detener el cuerpo con la fuerza propuesta.
- 3) Explique lo que sucede si la fuerza permanece aplicada  $12 \text{ s}$ . Realice el diagrama vectorial de impulsos y cantidades de movimiento para responder.

### ● Desarrollo

Aprovechando lo visto en el ejercicio anterior, nos ahorraremos el análisis de las fuerzas verticales, ya que sa-

remos que estarán en equilibrio y no influirán en nada. También consideraremos el movimiento a lo largo de x, consideraremos sólo componentes x de los vectores.

1) Ahora tenemos: cantidad de movimiento inicial:

$$p_{0x} = 8 \text{ kg} \times 12 \text{ m/s}$$

$$p_{0x} = 96 \text{ kg m/s.}$$

Impulso aplicado en

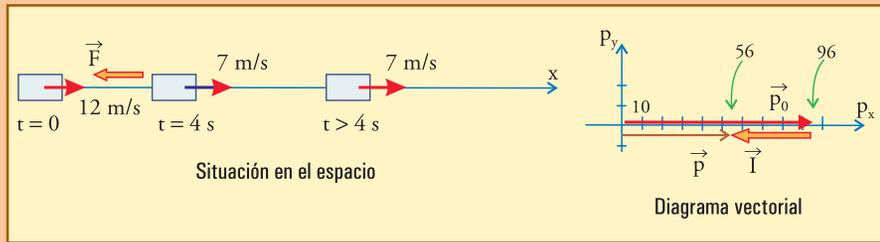
$$4 \text{ s: } I_x = -10 \text{ N} \times 4 \text{ s}$$

$$4 \text{ s: } I_x = -40 \text{ Ns.}$$

Aplicación de la ley:

$$p_x = 96 \text{ kg m/s} - 40 \text{ Ns}$$

$$p_x = 56 \text{ kg m/s.}$$



Luego el movimiento continúa con velocidad constante que vale:

$$v = v_x$$

$$v = \frac{p_x}{m}$$

$$v = 7 \text{ m/s.}$$

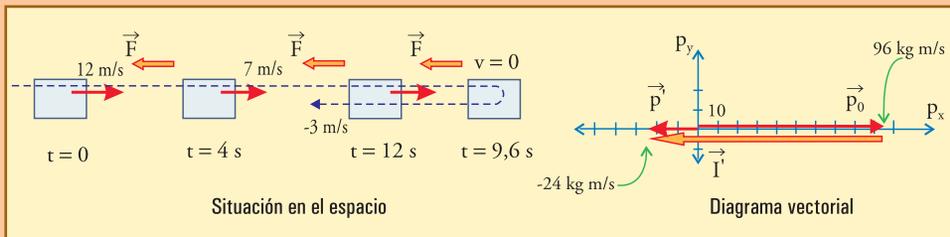
2) Para detener el cuerpo hay que mantener la fuerza aplicada hasta que p sea cero:  $p_x = p_{0x} + I_x$   
 $p_x = 0.$

Entonces  $I_x = -96 \text{ Ns}$ , y para ello:  $\Delta t = I_x / F_x$

$$\Delta t = \frac{-96}{(-10)}$$

$$\Delta t = 9,6 \text{ s.}$$

3) Si continúa aplicada la fuerza después de que el móvil se detiene, se reiniciará el movimiento en sentido contrario. Para  $t' = 12 \text{ s}$  podremos



calcular la cantidad de movimiento  $p'_x$  tanto multiplicando la fuerza por 12 s y restándola de la cantidad de movimiento inicial, como multiplicando la fuerza por 2,4 s, que es el tiempo transcurrido desde el instante de reposo (9,6 s):

$$p'_x = 96 \text{ kg m/s} - 120 \text{ Ns}$$

$$p'_x = -24 \text{ kg m/s}$$

$$p'_x = -10 \text{ N} \times 2,4 \text{ s.}$$

$$\text{La velocidad es: } v'_x = \frac{-24}{8}$$

$$v'_x = -3 \text{ m/s.}$$

● **Ejemplo 3**

Un cuerpo de masa  $m = 3 \text{ kg}$  se desplaza con una velocidad de módulo  $v = 4 \text{ m/s}$  a lo largo del eje  $x$  hacia la derecha (sentido positivo), hasta que al llegar a un punto  $A$  comienza a actuar sobre él una fuerza de  $6 \text{ N}$  que se mantiene constante durante  $2 \text{ s}$ , en dirección exacta del eje  $y$ . Ambos ejes,  $x$  e  $y$ , están en un plano horizontal, sobre el cual el movimiento ocurre sin rozamiento.

Aplique la Ley del Impulso para determinar los vectores cantidad de movimiento y velocidad después al terminar de aplicarse la fuerza, y explique cómo continúa el movimiento después.

Dibuje cualitativamente la trayectoria, mostrando los vectores importantes para este proceso.

● **Desarrollo**

Por las mismas razones que antes, dejamos de lado lo del eje vertical, pero aún así, debemos trabajar en dos dimensiones ( $x$ , e  $y$ , del plano horizontal).

Ya sabemos que una fuerza hacia un costado del movimiento curva la trayectoria hacia ese lado. Ahora podemos calcular cuánto.

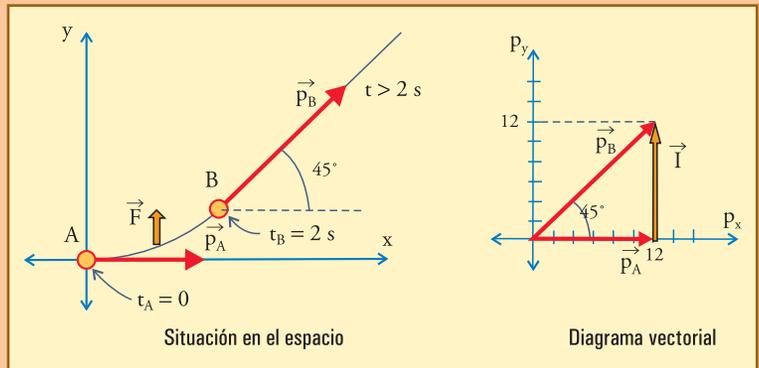
La cantidad de movimiento inicial es:  $\vec{p}_0 = (12 \text{ kgm/s} ; 0 \text{ kgm/s})$ , el impulso aplicado:  $\vec{I} = \vec{F} \times 2 \text{ s}$   
 $\vec{I} = (0 ; 12 \text{ Ns})$ .

Así resulta que la cantidad de movimiento final es:  $\vec{p} = (12 ; 12) \text{ kgm/s}$ , y la velocidad  $\vec{v} = \vec{p} / m$   
 $\vec{v} = (4 ; 4) \text{ m/s}$ .

Luego, al suspenderse la fuerza, el móvil deberá continuar uniformemente en línea recta en la nueva dirección. Esto significa que, en  $2 \text{ s}$ , la trayectoria se ha curvado de manera que forma  $45^\circ$  con la dirección inicial, y esa es la nueva dirección por la que continuará en línea recta.

Vemos que la velocidad en el eje  $x$  no ha cambiado, como corresponde al hecho de que no ha actuado ninguna fuerza en esa dirección.

También vemos que el módulo de la velocidad ha aumentado un poco, de  $4$  a  $(4^2 + 4^2)^{1/2} = 5,66 \text{ m/s}$ , y eso se entiende porque, a medida que la trayectoria se ha ido torciendo, la fuerza orientada exactamente como el eje  $y$ , ha ido actuando con cierta componente tangencial hacia delante.



Aplicando la Ley del Impulso no determinamos exactamente la forma de la trayectoria. Más adelante veremos cómo hacerlo. Pero sí debe estar **muy claro** que esta ley dice que la trayectoria es una *curva* que pasa gradualmente de la dirección inicial a la final, ya que el móvil demora  $\Delta t = 2 \text{ s}$  en este cambio de dirección. De ningún modo la aplicación de una fuerza perpendicular a la velocidad hará que la trayectoria sea una recta quebrada (para lo cual debería ser  $\Delta t = 0$ ).

## ■ 4.3. Interpretación

### El caso de la fuerza resultante nula

Cuando la fuerza resultante es nula puede ser porque no actúan fuerzas sobre el cuerpo (caso del Principio de Inercia), o bien porque actúan fuerzas que se oponen entre sí y tienen resultante nula (caso del equilibrio de las fuerzas). En ambos casos la Ley del Impulso nos lleva a que  $\vec{p}$ , o sea  $\vec{v}$ , debe mantenerse constante, simplemente corroborando lo que dice el Principio de Inercia, aunque físicamente la situación pueda ser distinta.

Sin embargo, a pesar de estar apoyado tanto por el Principio de Inercia, como por la Ley del Impulso, el caso de la fuerza resultante nula es especialmente difícil de interpretar. Esto sucede porque en la vida cotidiana, a partir del razonamiento común, poco científico, es frecuente desarrollar ideas erróneas derivadas de *tomar en consideración sólo las fuerzas más evidentes y no advertir las otras*.

Por ejemplo, todos estamos acostumbrados a ver que si un sistema de fuerzas pone en movimiento un cuerpo, al suspenderse la aplicación de estas fuerzas el cuerpo aminora su velocidad hasta detenerse. Este hecho, prácticamente, ha sido responsable de generar el tipo de razonamiento denominado *aristotélico*, vigente durante milenios en la ciencia, y aún vigente en el pensamiento común. Según las ideas aristotélicas, es necesaria una fuerza para mantener un movimiento. El movimiento es proporcional a la fuerza que lo mantiene, y cesa cuando ésta desaparece.

¿Qué nos dice la Ley del Impulso?

Dice que el error está en que se nos hacen tan evidentes las fuerzas que ponen en movimiento al cuerpo, que no advertimos que hay otras. La detención del móvil no ocurre porque  $\vec{F}_{\text{Resultar}}$  sea nula, sino **precisamente por lo contrario**: siempre están actuando los rozamientos. Si no hay fuerzas que contrarresten a los rozamientos, entonces *la resultante de estos*, no nula, actuando *en sentido contrario al movimiento*, hará aminorar la velocidad hasta que el cuerpo se detenga.

Veamos un ejemplo más elaborado.

#### ● Ejemplo 4

Vemos un automóvil viajando uniformemente por una carretera rectilínea a 120 km/h. Su conductor explica orgulloso que el motor es excelente, y que está aplicando una fuerza superior a los rozamientos, razón por la cual el automóvil puede mantener esa velocidad.

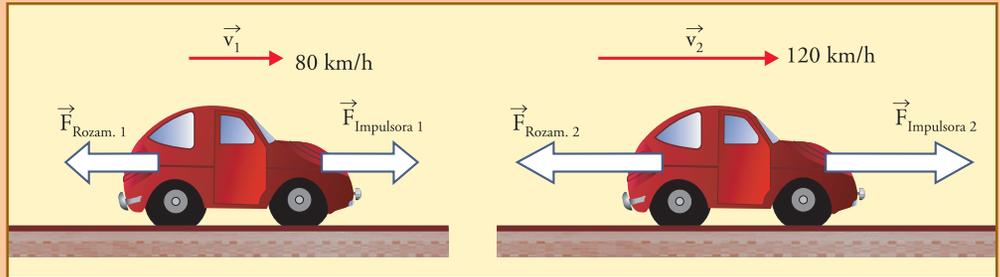
Suponiendo que un mecanismo complicado como un automóvil pudiese tratarse simplícidamente como un cuerpo sobre el que actúan sólo dos fuerzas: la resultante de las acciones motrices, hacia adelante, y la resultante de los rozamientos, hacia atrás ¿Cuál sería el error conceptual del conductor?

#### ● Desarrollo

El motor podrá ser excelente, pero no está superando sino *equilibrando* los rozamientos. Los rozamientos *aumentan con la velocidad*, y el dueño del automóvil tiene razón al estar orgulloso de su motor, ya que ha superado todos los valores de rozamiento que encontró a menos velocidad, y por eso es que *pudo superar* esas velocidades y llegar a la que está manteniendo ahora (120 km/h).

La “fuerza motriz” sobre el automóvil *no está superando* los rozamientos mientras está manteniendo cualquier velocidad constante. *Cuando lo haga, si puede, entonces la velocidad aumentará.*

En esta figura vemos la comparación de lo que sucede con un automóvil viajando a dos velocidades distintas, que se están manteniendo



constantes en cada caso.

En ambos casos hay equilibrio:

Equilibrio a  $80\text{ km/h}$ :  $F_{\text{impulsora}1} = F_{\text{rozam.}1}$ .

Equilibrio a  $120\text{ km/h}$ :  $F_{\text{impulsora}2} = F_{\text{rozam.}2}$ .

Pero  $F_{\text{impulsora}2} > F_{\text{impulsora}1}$ , pues  $F_{\text{rozam.}2} > F_{\text{rozam.}1}$ .

Para pasar de  $80\text{ km/h}$ , el vehículo debe tener capacidad para aplicar  $F_{\text{impulsora}}$  superior a  $F_{\text{rozam.}1}$ . Al aplicar esta fuerza superior al rozamiento, su velocidad aumenta hasta un valor mayor, por ejemplo  $120\text{ km/h}$ , en el que se equilibra con un valor mayor del rozamiento.

¿Cómo podemos saber si la fuerza resultante total *es efectivamente nula o no*, cuando el vehículo viaja a velocidad constante?

En algunos casos se pueden hacer mediciones experimentales, y en otros no; pero en nuestras aplicaciones siempre podremos y deberemos seguir los siguientes dos pasos:

**Primero:** deberemos crear que la Ley del Impulso es válida, puesto que es un *principio*.

**Segundo:** una vez que creemos en la validez de esta ley, si vemos que el movimiento se mantiene con  $\vec{p}$  constante, simplemente decimos que es porque la fuerza resultante es estrictamente nula. Cualquier valor no nulo de la fuerza resultante produciría variación en el vector  $\vec{p}$ .

## El Principio de Inercia como postulado fundamental

A veces se razona diciendo que el Principio de Inercia se obtiene de la Ley del Impulso, porque si no hay fuerzas actuando, al ser nula la fuerza resultante, esta última ley implica que  $\vec{p}$ , o sea  $\vec{v}$ , debe permanecer constante. Este razonamiento es erróneo, ya que, si bien es correcto (y necesario) que la Ley del Impulso no contradiga al Principio de Inercia, no es cierto que pueda reemplazarlo.

Para razonar correctamente es necesario comenzar advirtiendo que, aunque el Principio de Inercia sea un principio fundamental, incuestionable por ser un postulado, *no vale automáticamente en cualquier sistema!*

¿Cómo se entiende esto?

Es sencillo. Revisemos las siguientes ideas.

Si un observador O ve que cierto cuerpo tiene un movimiento muy complicado, otro observador  $O_1$  que se mueva acompañando exactamente al cuerpo lo vería, al mismo tiempo, en reposo. ¿Cuál de las dos descripciones debemos tomar en cuenta para reflexionar sobre las fuerzas que actúan sobre el cuerpo? Aplicando los razonamientos que

hemos hecho a las observaciones de  $O_1$ , diríamos que la fuerza neta sobre el cuerpo es nula, y aplicándoselos a las de  $O$  diríamos que actúan fuerzas muy complicadas y cambiantes. Quisiéramos poder definir un observador que se pueda considerar en un estado de reposo absoluto, para decir que las descripciones válidas son las que se refieren a él. Pero tal observador absoluto no existe, y *siempre debemos superar cierta cantidad de incertidumbre cuando elegimos el sistema de referencia más adecuado para la descripción de un movimiento*.

O sea, debe quedar claro que antes de hablar de movimiento hay que elegir el sistema de referencia, o “referencial”, sin lo cual ninguna afirmación tendría sentido. Aquí es donde juega su papel el Principio de Inercia. Aceptar este principio fundamental implica suponer que de alguna manera es posible saber si un cuerpo está libre o no de la acción de fuerzas de todo tipo, y que una vez que estamos seguros de eso, podemos definir algún sistema de referencia respecto del cual este cuerpo está en reposo, o con movimiento rectilíneo y uniforme.

Es fácil determinar si un cuerpo está libre o no de la acción de fuerzas de *contacto*, pero no es fácil determinar si está libre de la acción de *cualquier tipo posible de fuerzas*. A este conocimiento se accedería luego de considerar globalmente todos los fenómenos que puedan tener algo que ver con la situación del cuerpo, y en principio no tendría por qué ser algo simple. *Podría ser necesario llegar a conocer todas las leyes del Universo antes de poder decir que sobre determinado cuerpo no actúa ninguna fuerza*. Aunque ello no es posible, en la práctica podemos establecer esto para ciertos cuerpos típicos dentro de cierto grado de aproximación, conociendo algunos fenómenos y leyes importantes. Una vez que se ha encontrado —aunque sea hipotética o aproximadamente— un conjunto adecuado de cuerpos libres de fuerzas, entonces aplicamos el Principio de Inercia, para *elegir*, o *definir*, un referencial en el cual estos cuerpos se mueven, (o moverían, si son hipotéticos) conservando su  $\vec{p}$ .

Una vez hecho eso, este principio nos asegura que cualquier otro cuerpo libre de fuerzas que aparezca, también se moverá de esta manera en este referencial.

## ● Referenciales inerciales

Los referenciales en los cuales se cumple el Principio de Inercia, se denominan “referenciales inerciales”.

En un referencial *no inercial*, al no cumplirse este principio, tampoco se cumple la Ley del Impulso, ya que ella tiene como base el aludido principio.

Esto significa que los referenciales inerciales son los únicos referenciales aptos para aplicar las leyes de la mecánica (abreviando a veces decimos que son referenciales “buenos” para la mecánica).

De manera que antes de resolver un problema de dinámica, hay que asegurarse de estar hablando desde el punto de vista de un observador o referencial inercial. Esto debe hacerse siempre antes de pretender analizar un movimiento (en la práctica se suele descuidar este paso formalmente, pero debe estar presente al menos de manera tácita, implícita).

Es interesante saber que si se encuentra un referencial inercial, entonces cualquier referencial que viaje **uniformemente en línea recta y sin girar** con respecto a él, **también es inercial**.

Es decir que si hay uno, hay infinitos referenciales inerciales. Descripto desde distintos referenciales inerciales un movimiento tendrá diferentes vectores  $\vec{p}$ , pero los vectores  $\Delta\vec{p}$ , que son los que tienen que ver con las fuerzas según estas leyes y principios, no serán afectados por el cambio de referencial.

### Grados de inercialidad

El sistema inercial perfecto no existe en la práctica, sino que se pueden definir sistemas en los cuales, dentro de ciertas limitaciones y criterios, el Principio de Inercia se cumple con mayor o menor aproximación. En este sentido se suele decir que un sistema tiene mayor o menor grado de “inercialidad” que otro.

### Nota 3. Calesitas y sistemas no inerciales

Si sobre un piso muy liso, duro y horizontal, dejamos en reposo una esfera muy dura y lisa, o la lanzamos rodando para examinar su movimiento, veremos que el Principio de Inercia se cumple bastante bien en las direcciones horizontales (el rozamiento hará que el movimiento se detenga antes de que se note cualquier efecto de la rotación diurna del planeta). En esta aproximación, podemos decir que la superficie de la Tierra, localmente y en extensiones no demasiado grandes, se puede considerar un buen sistema inercial.

Si ahora pensamos en un tren muy rápido y suave que viaja por una vía horizontal muy perfecta y lisa, como en las discusiones del Capítulo 2, concluimos que éste también es un sistema inercial, y por eso un pasajero no puede sentir ninguna diferencia entre viajar en él, o estar en tierra firme.

Pero el pasajero sí detecta, con sus sensaciones y con sus experimentos, si el tren toma una curva. El mismo efecto se nota, más exageradamente, en una calesita que gira.

Cuando vemos a los niños girando en una calesita, tenemos muy clara la idea que la calesita es un artefacto que gira, mientras el mundo exterior permanece quieto.

Sin embargo, si subimos a la calesita y filmamos desde allí, veremos en la filmación que todos los que van en la calesita están en reposo entre sí, mientras que el mundo exterior gira alrededor de ella (en sentido contrario al que vimos girar la calesita desde afuera).

Esto es una clara muestra de que el movimiento es relativo: desde el punto de vista de que todo movimiento se define con respecto a algún referencial, es tan válido decir que (con respecto a la Tierra) “gira la calesita y no la Tierra”, como decir que (con respecto a la calesita) “gira la Tierra y no la calesita”.

Pero los de afuera se sienten cómodos y ven que los de la calesita tienen que sujetarse para no caerse. Por otra parte, los de la calesita ven que los de afuera están muy cómodos mientras ellos mismos no lo están, tienen que sujetarse, y hasta se marean. De manera que todos, tanto los de afuera como los de la calesita concluyen, ambos grupos en total acuerdo, *en que cada grupo ve girar al otro*, pero que *en realidad*, los que giran son los de la calesita.

Además, si repitiéramos en la calesita las experiencias del tren anterior, veríamos otras cosas: el péndulo ya no colgaría en la vertical, sino hacia afuera, la naranja no caería en los pies del que la suelta sino hacia afuera y algo hacia atrás, y si se la dejara quieta en el piso (suponiendo una calesita perfecta y suave con el piso bien horizontal y liso) no permanecería en reposo, sino que clara y obstinadamente comenzaría a rodar hacia fuera, y si la dejásemos seguir (o si la lanzáramos rodando) no lo haría en línea recta!.

¿Qué hacemos entonces con la idea de que el movimiento es relativo? Decir finalmente que uno de los sistemas en realidad no gira, y el otro sí, equivale a negar que ambos sirvan como sistemas de referencia.

La respuesta de la física es que, *en su lenguaje*, se define al movimiento como relativo a un referencial, y por lo tanto no es correcto decir que la quietud de la Tierra *es más real* que la de la calesita.

Lo que se siente raro en la calesita, esencialmente es que *en ella no se cumple el Principio de Inercia*: alguien que quiera permanecer en reposo en ella, deberá aplicar fuerzas para ello, y tal vez deberá sujetarse para no caer. Las esferas ruedan por el piso siguiendo líneas curvas, y alguien que intente caminar en línea recta lo sentirá muy raro.

Esto, en el lenguaje de la física, significa que con nuestras sensaciones detectamos que la calesita *no es un sistema inercial*.

Es claro que nuestro sistema sensorial y de control de movimientos continua e inconscientemente trata de hacer coincidir nuestras sensaciones con lo que vemos para generar los impulsos nerviosos de los que dependemos para movernos, para caminar, para estar parados, para esquivar peligros, y para sobrevivir a cada instante.

Nuestro cuerpo, en general, detecta cuando estamos en un referencial que no es inercial. En un referencial inercial *sentimos como que todo está bien*, y pensamos “está quieto”. “En un referencial no inercial detectamos que hay

algo raro, sentimos que “algo se mueve”. Eso puede ser erróneo desde el punto de vista de las definiciones, pero a nuestro sistema de conocimiento común no le importan las abstracciones ni las definiciones de la física: si sentimos que el piso se mueve, a sujetarse para no caerse!

De la misma manera, cuando decimos que realmente gira la Tierra alrededor del Sol, y no el Sol alrededor de la Tierra, estamos incurriendo en el mismo *uso incorrecto del lenguaje científico*: la cuestión no es que estos movimientos sean o no reales, sino que si lo que tomamos de referencia sea o no inercial.

La Tierra es un referencial mucho más inercial que la calesita, pero no lo suficiente para estudiar los movimientos de los planetas. Un referencial fijo en el Sol (que además ignore la rotación del Sol sobre sí mismo, que también la tiene), es mucho mejor que la Tierra en su grado de inercialidad permite una buena descripción dinámica del Sistema Solar.

Sin embargo para estudiar la galaxia no podríamos tomar como fijo al Sol, habría que buscar algo mejor en su inercialidad. Y así sucesivamente.

## Fuerzas interiores y fuerzas exteriores

La Ley del Impulso vale tanto para cualquier cuerpo extenso, como para cada parte del mismo. Esta ley requiere que se consideren todas las fuerzas actuantes, y para cada parte de un cuerpo o sistema éstas pueden ser subdivididas entre las que le son aplicadas por otras partes del mismo sistema, y las que le son aplicadas por agentes externos.

Con relación a un sistema material llamamos fuerzas “interiores” a aquellas que son aplicadas sobre una parte del sistema por otra parte también perteneciente al sistema, es decir a las que resultan de la interacción mutua entre partes del sistema. Y llamamos fuerzas “exteriores”, a las demás, es decir a las que son aplicadas sobre partes del sistema por agentes o cuerpos que no pertenecen al mismo, es decir que resultan de la interacción con objetos de *otro* sistema material.

De manera que para hallar la fuerza resultante sobre un sistema, debemos sumar todas las fuerzas que actúan sobre todas las partes. Podemos hacerlo agrupando por separado las fuerzas interiores y las exteriores:

$$\vec{F}_{\text{Res}} = \sum \vec{F}_{\text{int}} + \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

Ahora bien, las fuerzas interiores resultan de la interacción mutua entre partes del sistema, y según el principio de acción y reacción, la suma total debe dar cero, ya que para cada fuerza aplicada por una parte interior  $B$  sobre otra parte interior  $A$ , se encuentra necesariamente su opuesta exacta, actuando sobre la parte  $B$ , aplicada por  $A$ . De esta manera, el conjunto de todas las fuerzas interiores necesariamente se puede descomponer en *pares acción-reacción*, cada uno con contribución nula a la *suma sobre todas las partes* del cuerpo o sistema.

Es decir que,  $\sum \vec{F}_{\text{int}} = 0$ , y por lo tanto:

$$\text{Fuerza resultante total} = \text{Resultante de las fuerzas exteriores} \quad (4.9)$$

Esto significa que:

**Sólo las fuerzas exteriores pueden alterar la cantidad de movimiento de un sistema. Lo único que se puede hacer desde el interior de un sistema para cambiar su cantidad de movimiento es interactuar con objetos del exterior.**

## • Propulsión, vehículos y rozamiento

Cualquier animal terrestre avanza (hacia delante) apoyándose en una pata que se mueve y empuja el suelo *hacia atrás*. Aquí interviene el principio de acción y reacción: empujar algo hacia atrás, para recibir la reacción hacia delante, y al mismo tiempo interviene la idea de que nada puede auto empujarse, sin interactuar con algo.

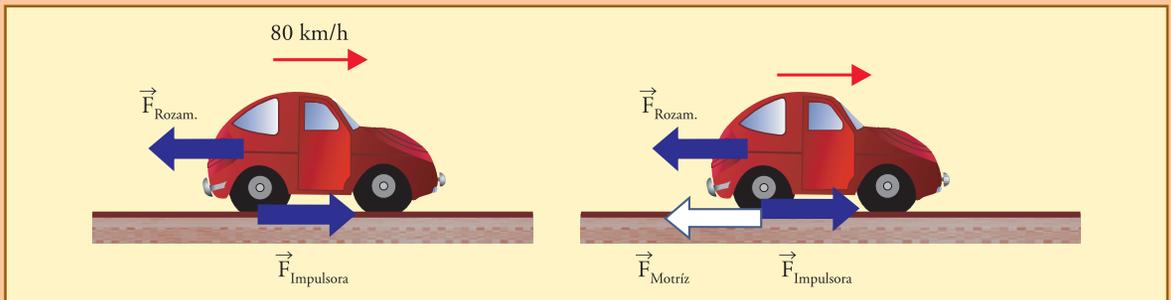
Un automóvil *debe empujar el piso hacia atrás* por medio de sus ruedas motrices, para impulsarse. Si se impide el contacto de las ruedas motrices con el piso, por ejemplo levantando estas ruedas, o suspendiendo el vehículo en el aire, se impide la acción hacia atrás del auto sobre el piso, y como resultado el vehículo no puede impulsarse. O mejor dicho, **el auto no puede hacer que el piso lo impulse**.

Nótese que el par “acción del vehículo sobre el piso hacia atrás-reacción del piso sobre el vehículo hacia delante” no es ni más ni menos que la fuerza de rozamiento entre la parte impulsora -la rueda- y el piso. Este rozamiento es lo que nos permite impulsarnos. Cualquier persona sabe lo difícil que es aprender los trucos dinámicos que permiten impulsarse sin rozamiento, por ejemplo con patines, o sobre un terreno resbaloso. Lo mismo para un automóvil en un terreno pantanoso.

De manera que es importante distinguir la fuerza de rozamiento que nos empuja hacia delante en el lugar donde empujamos al piso hacia atrás, de la fuerza de rozamiento que aparece en otros lugares, tendiendo a impedir que nos deslicemos hacia delante con respecto a algo.

### • Ejemplo desarrollado

Considere un automóvil de 900 kg viajando a velocidad constante de 80 km/h en una carretera horizontal. Suponga que este automóvil tiene “tracción trasera” (es decir que el motor comunica movimiento a las ruedas traseras), y que viajando a esa velocidad sufre la acción de una fuerza de rozamiento total de 2.000 N que se debe, casi exclusivamente, al aire.



- Realice un diagrama de cuerpo libre del automóvil mostrando las fuerzas horizontales exteriores sobre el mismo, indicando dónde deben considerarse ubicadas.
- Calcule el valor de la fuerza motriz que debe aplicar el automóvil al suelo por medio de sus ruedas traseras. Dibuje esta fuerza en un esquema.

### • Desarrollo

- En (a) se muestran las dos fuerzas exteriores horizontales que consideramos sobre este vehículo. La  $\vec{F}_{\text{Rozam.}}$  es la resultante de la acción del aire distribuida sobre toda la carrocería, y actúa hacia atrás con 2.000 N, tendiendo

a frenar el vehículo. La  $\vec{F}_{\text{impulsora}}$  es la reacción del suelo ante la acción motriz de la rueda empujando al suelo hacia atrás. Ésta es la fuerza que impulsa al vehículo, y debe valer 2.000 N, de manera que la resultante sobre el vehículo es cero y por ello la velocidad se mantiene constante.

b) En (b) se muestra además el par acción-reacción que forma la " $\vec{F}_{\text{motriz}}$ " representativa de la acción por medio de la cual el automóvil empuja al piso hacia atrás, con  $\vec{F}_{\text{impulsora}}$ , que es la reacción del piso, hacia adelante, sobre el vehículo. Tanto una como la otra son manifestación del **rozamiento** rueda-pavimento, y su intensidad está limitada por la capacidad de los materiales para resistir el deslizamiento. Estas dos fuerzas no dan resultante nula sobre el vehículo, porque sólo una de ellas actúa sobre él. No son un "sistema de fuerzas actuantes sobre el auto", y no se calcula su resultante.

No corresponde dibujar rozamiento hacia atrás sobre el vehículo en el contacto rueda piso, a menos que la rueda esté frenada, cuando se trata de detener al vehículo.

## Acerca de la definición formal de fuerza y de masa

Hasta ahora hemos trabajado con definiciones de masa y fuerza, de cierta manera provisionarias, pero adecuadas para desarrollar los conceptos presentados.

Es posible definir la masa y la fuerza, con sus respectivas unidades, sin recurrir a la gravedad, es decir, al peso, a la balanza, etc., pues estos conceptos son planteados en sí, independientes de la gravedad. Los principios de la dinámica son los que permiten definir formalmente esos conceptos, analicemos lo que queda pendiente.

### • Unidad de fuerza

A partir de un cuerpo con la unidad de masa, se define la unidad de fuerza aplicando la expresión (4.6): *"la unidad de fuerza es la que aplicada a un cuerpo de la unidad de masa durante la unidad de tiempo, le produciría un cambio de velocidad igual a la unidad de velocidad"*.

La unidad SI, el newton, es la fuerza necesaria para hacer que un cuerpo de 1 kg adquiriera la velocidad de 1 m/s, en 1 s, habiendo partido del reposo. Esto se puede expresar de maneras parecidas, por ejemplo: se puede decir que el valor de una fuerza, medido en *newtons*, es igual a la cantidad de m/s de velocidad que adquiriría un cuerpo de 1 kg sometido a la acción de esa única fuerza durante 1 s, habiendo partido del reposo.

La expresión del newton en función de las unidades fundamentales resulta también de la expresión (4.6):

$$1N = 1kg \times \frac{1m/s}{1s}$$

$$1N = 1kg \times \frac{1m}{1s^2}$$

$$1N = 1kg \cdot m \cdot s^{-2}$$

## • Masa, concepto y unidad

Hemos definido arbitrariamente que determinado cuerpo tiene unidad de masa, y para determinar la masa de otro cuerpo cualquiera, simplemente recurrimos a la balanza.

Pero la balanza compara el peso de los cuerpos, y aunque esto en la práctica funciona, quisiéramos que la medición de la masa se pueda concebir en ausencia de gravedad, ya que masa y peso son conceptos independientes.

Para esto recurrimos a las leyes de la dinámica, y al concepto de “masa inercial”.

### Masa inercial

Interpretemos la masa a través de la expresión (4.6) adecuadamente modificada como sigue:

$$m = \frac{\left| \vec{F} \right|}{\left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right|} = \frac{F}{a} \quad (4.6')$$

Esta expresión define que la masa de un cuerpo es el cociente entre la fuerza que se le aplica y la aceleración que adquiere.

Esto se denomina *masa inercial*, denominación que se justifica a través de cierta interpretación de la inercia como *resistencia al cambio* de velocidad, que aparece exactamente reflejada por el cociente (4.6') ya que éste implica que: un cuerpo *A* tiene más masa inercial que otro *B*, si bajo la acción de la misma fuerza en el mismo tiempo se modifica menos la velocidad del cuerpo *A* que la del *B*.

O bien: si se requiere más fuerza para modificar en el mismo tiempo la velocidad de *A* en la misma medida que la de *B*.

Según la teoría que desarrollamos, la expresión (4.6') da un resultado independiente tanto del numerador como del denominador, *dependiente sólo del cuerpo*, ya que, si por ejemplo se aumenta la fuerza, entonces aumenta proporcionalmente la velocidad que adquiere finalmente el cuerpo, o disminuye el tiempo que demora para llegar a determinada velocidad, y así el cociente (4.6') permanece exactamente invariable.

Un procedimiento elemental para determinar la masa según estas ideas podría ser el siguiente.

Se toma un cuerpo cuya masa se elige como unidad de masa, se lo sujeta al extremo de un resorte de longitud en equilibrio  $L_0$ , y, partiendo del reposo, se tira del otro extremo del resorte durante cierto lapso  $\Delta t$ , con una fuerza que se va regulando para que durante todo el intervalo la longitud del resorte se mantenga fija en cierto valor  $L$ . Mientras el cuerpo se va acelerando hay que cuidar de mantener siempre el mismo estiramiento del resorte, y finalmente se mide la distancia  $d_0$  recorrida en este lapso.

Luego se sujeta el resorte al cuerpo cuya masa se quiere medir, y se repite con él el mismo procedimiento anterior, partiendo también del reposo, y cuidando de mantener siempre el resorte estirado hasta la misma longitud  $L$ . Se mide la distancia “ $d$ ” recorrida en el mismo lapso  $\Delta t$ .

Con estas mediciones, independientemente del resorte y de la duración del lapso  $\Delta t$  (para calcularlo habría que aplicar las fórmulas que veremos en el próximo capítulo y que no interesan aquí), se tendría:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{d_0}{d}$$

Es decir, el cociente  $d_0/d$  daría la masa del cuerpo incógnita en unidades de la masa del cuerpo patrón elegido.

Estas operaciones pueden realizarse sin problemas en cualquier lugar donde no haya gravedad. Para realizarlas en la Tierra habría que anular el efecto de la gravedad, por ejemplo montando los cuerpos sobre una pista bien rectilínea y horizontal, con precauciones para que el rozamiento pueda ser despreciado.

Obviamente, ésta ha sido una propuesta totalmente rústica, elemental, que se podría mejorar tanto como se quisiera, con la cual aquí, sólo intentamos mostrar que es posible establecer el concepto de masa como definitivamente independiente de la balanza y de la gravedad.

### **Masa gravitatoria**

Utilizando la balanza se puede comparar el peso  $P$  de cualquier cuerpo con el  $P_0$  de un cuerpo patrón, y como, según la ley de gravitación universal se tiene que  $\text{Peso}/\text{masa} = g$ , constante independiente del cuerpo, entonces:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{P}{P_0}$$

De esta manera, con la balanza se define la masa como proporcional al peso, lo que con precisión se denomina “masa gravitatoria”.

### **¿Y la masa como cantidad de materia?**

La noción de masa como cantidad de materia no admite una definición precisa, como la de masa inercial, o la de masa gravitatoria. Pero la idea de masa como cantidad de materia es útil aunque no sea muy precisa, porque es casi la base conceptual que tenemos para pensar que el cociente (4.6') define un valor constante para cada cuerpo, y que no varía cuando variamos, por ejemplo, la fuerza.

Por último, digamos que si bien los conceptos de masa inercial y de masa gravitatoria son distintos por su génesis, han fallado todas las experiencias (algunas muy precisas) que se han ideado para poner de manifiesto hasta la más mínima diferencia entre ellos. A tal punto que la Teoría General de la Relatividad (la cual si se quiere es el referente máximo de las leyes de la mecánica) *postula que ambas son realmente la misma cosa* (“postulado de equivalencia”).

Es decir:

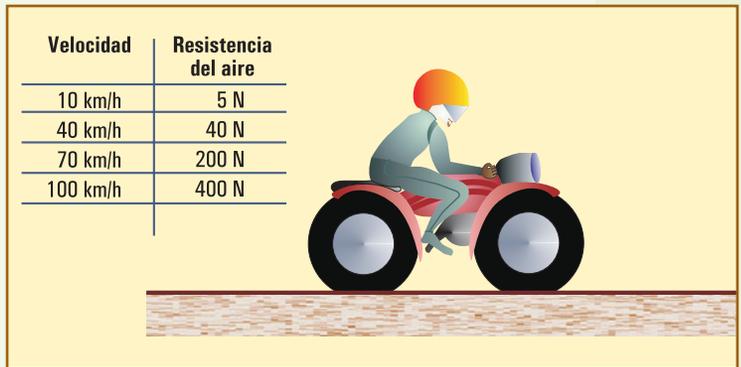
***En este nivel de conceptualización hay una sola masa. Es válido definirla con el cociente (4.6'), determinarla con la balanza, y pensar que es la cantidad de materia.***

## **EJERCICIOS CAPÍTULO 4**

### **▲ Ejercicio 4.1**

La figura muestra una motocicleta viajando. La masa total de ésta (sistema moto + carga + conductor) es de 180 kg. La fuerza de rozamiento que se opone a la marcha de la motocicleta (esencialmente debida al aire) crece con la velocidad de ésta, según muestra aproximadamente la tabla

- a) Para el sistema considerado (moto + carga + conductor) realice un dibujo de cuerpo aislado, mostrando cualitativamente las fuerzas exteriores sobre el mismo mientras viaja a velocidad constante de 70 km/h. Explique qué condiciones deben cumplir las fuerzas dibujadas, y dónde está aplicada aproximadamente cada una.
- b) Realice un esquema de la rueda trasera, muestre en él las fuerzas tangenciales que resultan contra el piso (indique cuál es la acción de la rueda sobre el piso, y cuál la del piso sobre la rueda) y calcule el valor de estas fuerzas.



Explique cuál de éstas es la fuerza impulsora que mantiene el movimiento del sistema.

#### ▲ Ejercicio 4.2

Sobre un cuerpo de masa  $m = 40$  kg, que se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad inicial de 5 m/s, se aplica una fuerza de 80 N durante 20 segundos, en la misma dirección y sentido que este movimiento.

- a) Dibuje esquemáticamente la situación planteada. Dibuje todas las fuerzas actuantes sobre el cuerpo (diagrama de cuerpo libre).
- b) Determine el impulso aplicado por la fuerza. Dibuje cualitativamente el vector  $\vec{I}$ .
- c) Determine la cantidad de movimiento  $\vec{p}$  y la velocidad  $\vec{v}$  que adquiere este cuerpo bajo la aplicación de esta fuerza en 20 segundos.
- d) Explique qué pasa luego de los 20 segundos si ya no actúa ninguna otra fuerza horizontal.

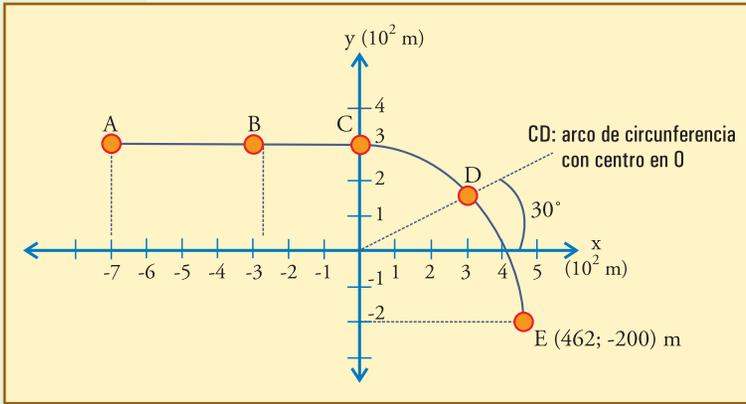
#### ▲ Ejercicio 4.3

Sobre un cuerpo de masa  $m = 20$  kg, que se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad inicial de 10 m/s, se aplica una fuerza de 15 newtons en sentido contrario al del movimiento inicial durante 4 segundos (luego el cuerpo continúa absolutamente libre de fuerzas que actúen en dirección horizontal).

- a) Analice la situación, y determine la velocidad del cuerpo al final de los 4 segundos que dura la aplicación de la fuerza. Explique si el movimiento continúa o no, y cómo, después de suspender la aplicación de la fuerza.  
Dibuje los vectores que sean útiles o necesarios.
- b) Determine el tiempo necesario para detener el cuerpo con la fuerza propuesta.
- c) Explique lo que sucede si la fuerza permanece aplicada 18 s. Realice el diagrama vectorial de impulsos y cantidades de movimiento para responder. Indique lo que sucede después de los 18 s.

#### ▲ Ejercicio 4.4

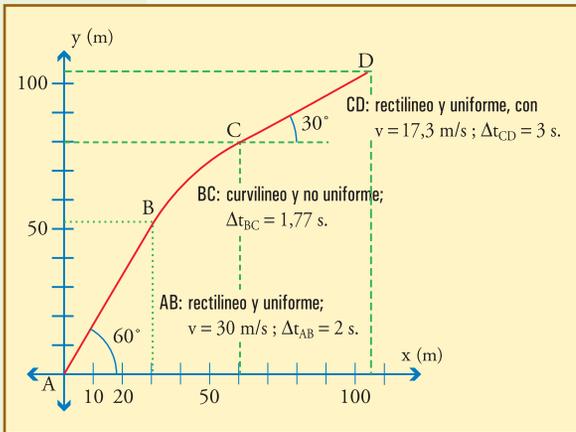
Un cuerpo de masa  $m = 200$  kg viaja uniformemente por la trayectoria dibujada, pasando a razón de 6 m/s por ABCD. A partir de allí comienza a frenarse uniformemente, hasta quedar detenido en E. Las coordenadas de D y E son: (260 m; 150 m) , y (462 m; -200 m).



- Calcule los vectores velocidad y cantidad de movimiento en los puntos A, B, C, D, y E. Escríbalos como pares ordenados. Dibuje los vectores velocidad cualitativamente sobre la trayectoria.
- Para cada uno de los tramos, AB, BC, CD, y DE, dibuje el diagrama vectorial cualitativo que muestre la operación vectorial  $\vec{I} = \Delta p$ , indicando el módulo del vector impulso en cada uno.
- Indique en qué tramos de la trayectoria

debe haber fuerza neta (resultante) actuando sobre el móvil, y dibújela cualitativamente.

#### ▲ Ejercicio 4.5



Un cuerpo de masa  $m = 3 \text{ kg}$  se desplaza siguiendo la trayectoria mostrada en la figura. El movimiento tiene las características indicadas en la figura:

- Calcule la cantidad de movimiento en cada uno de los cuatro puntos señalados A, B, C, y D. Dibuje los vectores con alguna escala sobre la trayectoria, y exprese cada uno como par ordenado.
- Por medio de los correspondientes diagramas vectoriales calcule gráficamente la variación de la cantidad de movimiento en cada tramo. Indique los vectores impulso que debieron actuar en los intervalos que haya correspondido. Indique en qué intervalo debió actuar fuerza resultante sobre el movimiento, y calcule todas las características

de la misma (módulo, dirección, componentes), supuesta constante en el intervalo. Dibuje el vector fuerza cualitativamente en varios puntos sucesivos sobre la trayectoria, indicando así donde tuvo lugar su acción.

#### ▲ Ejercicio 4.6

Un cuerpo de masa  $m = 2 \text{ kg}$  se desplaza en línea recta sobre un plano horizontal sin rozamiento, con una velocidad de módulo constante  $v_0 = 3 \text{ m/s}$ . En el instante  $t_0 = 0$  comienza a ser desviado hacia la izquierda por la acción de una fuerza constante que se le aplica. En  $t_1 = 5 \text{ s}$ , cuando el vector velocidad tiene una dirección perpendicular a la inicial, y su módulo es de  $4 \text{ m/s}$ , se suspende la aplicación de la fuerza, y la situación se mantiene sin variantes indefinidamente desde allí en adelante.

- Realice un análisis de la situación, dibuje la trayectoria estimativamente, e indique las características de la fuerza que debe actuar en los distintos tramos.
- Determine el módulo y las componentes de la fuerza necesaria para las condiciones del enunciado en cada tramo.

▲ Ejercicio 4.7

Considere un automóvil de 900 kg en reposo sobre un camino horizontal ideal. Suponga que en  $t = 0$  comienza a actuar el motor, y como resultado de ello el automóvil recibe de las ruedas motrices una fuerza constante de 800 N (hacia adelante), que denominaremos fuerza impulsora,  $\vec{F}_1$ . Pero considere también actuando sobre el mismo la fuerza aerodinámica de resistencia del aire, hacia atrás, dada aproximadamente por (todo esto es una situación muy simplificada):

$$F_a = c S v^2,$$

en donde:

$c$  : coeficiente de forma, tomaremos  $c \approx 0,3 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$ .

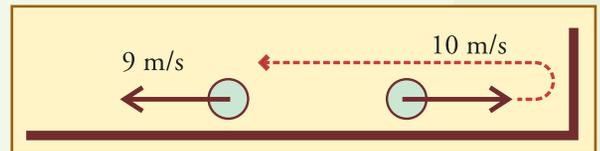
$S$  : Sección transversal opuesta al avance, tomaremos  $S \approx 2 \text{ m}^2$ .

$v$  : velocidad.

- Explique cualitativamente cómo irá variando la velocidad en función del tiempo. Muestre que si la situación se mantiene suficiente tiempo la velocidad se aproximará a un valor final que no podrá superar. Calcule aproximadamente dicho valor final.
- Responda y explique: ¿Es cierto que la velocidad final es proporcional a la fuerza aplicada? ¿Es cierto que cuando la fuerza de rozamiento alcance el valor de 800 N el automóvil se detendrá? ¿O sólo comenzará a detenerse en ese momento? ¿Es cierto que la situación de velocidad final constante sólo se podría alcanzar cuando se equilibrasen las fuerzas?

▲ Ejercicio 4.8

Una pelota de  $m = 2 \text{ kg}$ , viaja sobre un piso horizontal, y llega con  $v = 10 \text{ m/s}$  a chocar perpendicularmente con una pared vertical, y luego de rebotar su velocidad es de  $9 \text{ m/s}$ .

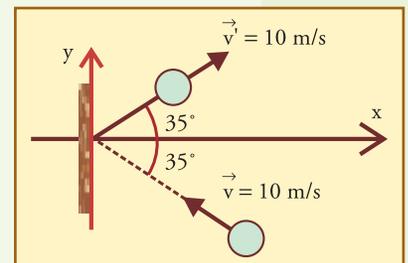


- Por medio de un diagrama vectorial de cantidades de movimiento, calcule y dibuje cualitativamente el impulso aplicado por la pared a la pelota, y por la pelota a la pared.
- Si otra pelota de la misma masa (2 kg) pero bastante más blanda, llega con la misma velocidad (10 m/s) a chocar de la misma manera con esta pared, y resulta que rebota también con esta misma velocidad (9 m/s), del hecho de que esta pelota sea más blanda puede deducirse que aplicará a la pared:  
EL MISMO IMPULSO, PERO UNA FUERZA MENOR.  
LA MISMA FUERZA, PERO UN IMPULSO MENOR.  
Elija la opción correcta y justifique.

▲ Ejercicio 4.9

Una pelota de masa  $m = 0,5 \text{ kg}$  choca contra una pared en el punto A, según los datos que muestra la figura (ignore la acción del peso):

Por medio de la realización del correspondiente diagrama vectorial de cantidades de movimiento, determine módulo y componentes del vector impulso aplicado por la pared a la pelota, y del aplicado por la pelota a la pared. Dibuje ambos vectores en la figura del choque.



▲ **Ejercicio 4.10**

Viendo que no es posible ilustrar el movimiento de la Tierra con experimentos simples de dinámica tales como determinar si la plomada o la trayectoria de los cuerpos que caen desde el reposo se desvían apreciablemente de la dirección vertical, un científico decide filmar la Tierra desde un satélite para poder tener así una prueba definitivamente concluyente de que el planeta se mueve.

Así lo hace y efectivamente, en las filmaciones obtenidas se aprecia con suma facilidad cómo la Tierra rota por debajo del satélite. También se aprecia con claridad cómo flotan todos los elementos en la nave, y cómo los astronautas deben maniobrar con ciertas dificultades originadas en la ingravidez: deben asirse para mantenerse en un mismo lugar, ya que de lo contrario se alejan flotando hacia cualquier parte del recinto. De manera que este científico también considera que la filmación sirve para mostrar cómo al alejarse del planeta la gravedad ha disminuido hasta ser prácticamente imperceptible.

Pero al enunciar sus conclusiones se producen fuertes discusiones con otros científicos. Le dicen que la rotación de la Tierra tan claramente apreciable en la filmación, no es real sino aparente, así como es aparente el estado de ingravidez tan claramente sentido por los astronautas y de consecuencias tan visibles en las filmaciones.

Opine usted, fundamentando sus afirmaciones:

- a) Tiene razón el científico: sus filmaciones han probado de manera práctica que la Tierra se mueve; y sin quererlo también ha probado de la misma manera que en la cápsula prácticamente no hay campo gravitatorio.
- b) Tienen razón los que lo critican: no ha probado ni una cosa ni la otra (ni que la Tierra se mueve, ni la ausencia de gravedad en la nave en órbita).
- c) Cada uno tiene razón en una de las afirmaciones :
  - Las filmaciones sí prueban que . . . . .
  - Pero no prueban que . . . . .
  - Elija la opción correcta y explíquela

# Movimientos lineales básicos

A esta altura tenemos las herramientas necesarias para analizar cualquier movimiento, y además hemos visto algunos ejemplos. Podemos analizar específicamente detalles de los movimientos más simples y típicos, tanto para conocerlos como para lograr una comprensión mejor y más profunda sobre el significado de estas leyes.

## 5.1. Discusión general básica

Vimos en muchos ejemplos cómo la rapidez del movimiento depende de la fuerza resultante a lo largo del mismo, mientras que la curvatura de la trayectoria, cuando la hay, depende de la fuerza resultante en la dirección transversal.

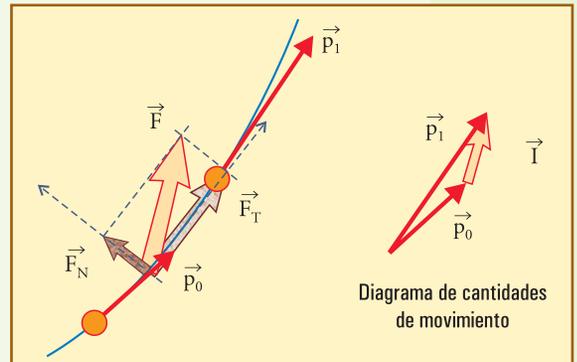
Apoyándonos en la independencia de las acciones en las diferentes direcciones del espacio, juntaremos todos los elementos para tratar cualquier caso general.

Denominaremos *tangencial*, e indicaremos con el subíndice T, a la dirección del movimiento en cada instante, es decir a la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto correspondiente, y *normal*, o *transversal*, (indicada con el subíndice N) a la dirección perpendicular a la anterior en cada instante.

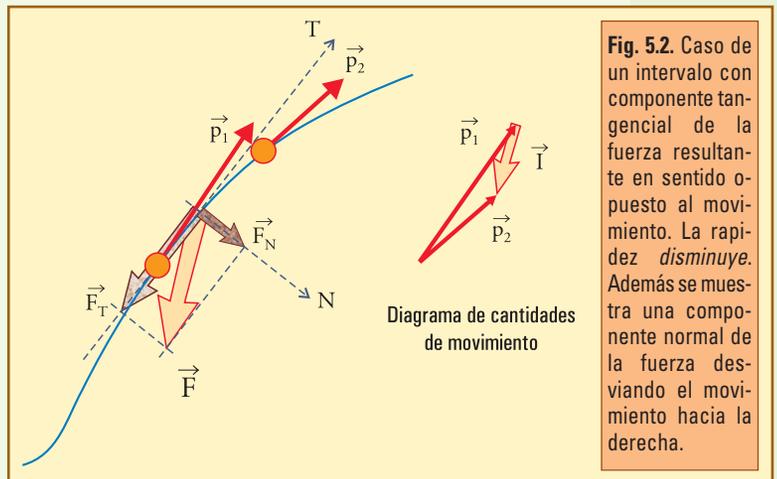
Las figuras 5.1, 5.2, y 5.3, ilustran varios casos. En ellas, se eligió un intervalo supuesto de duración suficientemente corta como para que la fuerza resultante sea más o menos constante en él. Dicha fuerza resultante está indicada con un vector hueco, y descompuesta según las direcciones tangencial (T) y normal (N).

En cada figura se agrega un diagrama de cantidades de movimiento correspondiente al intervalo considerado, que ilustra la aplicación de la Ley del Impulso a la situación.

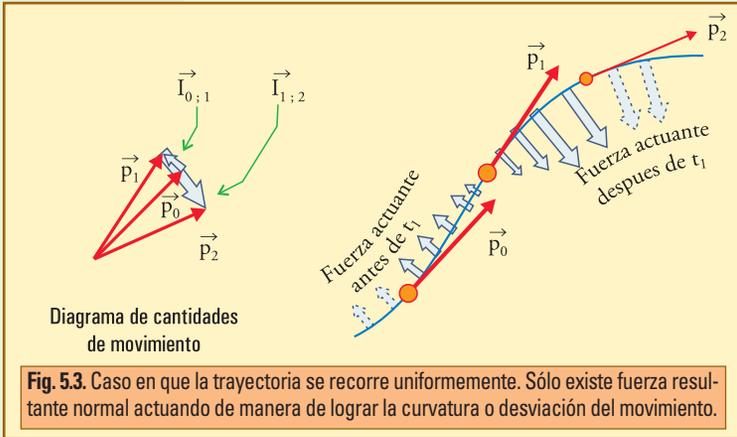
En todos los casos, la trayectoria se curva hacia donde apunta la componente normal de la fuerza aplicada. El vector impulso (representado también con una flecha hueca en cada diagrama de cantidades de movimiento) tiene tamaño proporcional y exactamente la



**Fig. 5.1.** Caso de un intervalo con componente tangencial de la fuerza resultante en el mismo sentido del movimiento. La rapidez *aumenta*. Además se muestra una componente normal de la fuerza desviando el movimiento hacia la izquierda.



**Fig. 5.2.** Caso de un intervalo con componente tangencial de la fuerza resultante en sentido opuesto al movimiento. La rapidez *disminuye*. Además se muestra una componente normal de la fuerza desviando el movimiento hacia la derecha.



**Fig. 5.3.** Caso en que la trayectoria se recorre uniformemente. Sólo existe fuerza resultante normal actuando de manera de lograr la curvatura o desviación del movimiento.

misma dirección y sentido, que la fuerza resultante dibujada sobre la trayectoria.

## La ley del impulso para las fuerzas tangenciales

Si adoptamos el criterio (arbitrario pero usual y conveniente) de elegir como *positivo el sentido del movimiento*, podremos hablar siempre de  $p_T$  y  $v_T$  positivos, es decir que  $p_T$  será igual al módulo de  $\vec{p}$ , y correspondientemente  $v_T$  será lo

mismo que el módulo de  $\vec{v}$  (recordar que  $\vec{v}$  y  $\vec{p}$  no tienen componente normal).

Con esta convención nunca tendremos el caso de  $p_T$  o  $v_T$  negativos, y consideraremos positivas las fuerzas tangenciales hacia adelante, y negativas hacia atrás.

En estas condiciones, el principio fundamental de la dinámica, escrito para la componente tangencial, dirá:

$$F_T \Delta t = \Delta v = m \Delta v \quad (5.1)$$

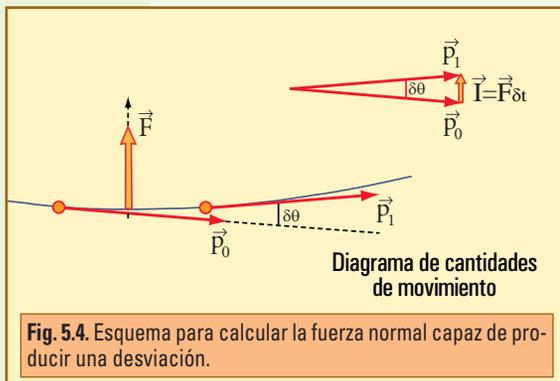
Expresión que indica directamente lo que sucede con el módulo de  $p$  o de  $v$  (módulos de  $\vec{p}$  y  $\vec{v}$ ), a partir de características de la componente tangencial de las fuerzas aplicadas.

Por ejemplo digamos que, si  $F_T > 0$ , es decir hacia adelante, entonces  $\Delta p > 0$ , lo que significa que *el módulo de  $\vec{p}$ , o de  $\vec{v}$ , aumenta*. Y viceversa,  $F_T < 0$  significará *hacia atrás con respecto al movimiento*, y entonces  $\Delta p < 0$ , indicará que *el módulo de  $p$ , o de  $v$ , disminuye*, o sea que  $F_T$  está frenando al móvil.

## La ley del impulso para las fuerzas normales

Consideremos un movimiento en el cual actúa una fuerza estrictamente normal, es decir, sin componente tangencial, de manera que la trayectoria se desvía un ángulo  $\Delta\theta$  en un lapso  $\Delta t$ , sin que cambie la rapidez del movimiento.

Ya sabemos que para lograr esto la fuerza debe ir continuamente cambiando de dirección para mantenerse siempre perpendicular a la trayectoria, y sólo falta averiguar el módulo necesario para producir cierta desviación. En la próxima figura analizamos los vectores para un ángulo  $\delta\theta$ , que se supone suficientemente pequeño como para poder ignorar el cambio en la dirección de  $F$ , así obtendremos el módulo de la fuerza en ese instante; luego la fuerza se mantiene aplicada con ese mismo módulo todo el tiempo que sea necesario para completar la desviación  $\Delta\theta$  que se quiera.



**Fig. 5.4.** Esquema para calcular la fuerza normal capaz de producir una desviación.

En la figura no se puede mostrar el ángulo tan pequeño como debería ser, pero es posible imaginarlo, y en esas condiciones, en el diagrama vectorial de la derecha vale (recordar que el valor de un ángulo expresado en radianes, es el cociente del arco sobre el radio, y en el caso de ángulo muy pequeño queda un pequeño triangulito en el cual el arco es lo mismo que el lado pequeño):

$$\delta\theta = \frac{F \delta t}{p} \quad (5.2)$$

De aquí podemos despejar el valor que debe tener la fuerza para lograr esta desviación:

$$\begin{aligned} F &= p \frac{\delta\theta}{\delta t} \\ &= p \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si denominamos *velocidad angular*,  $\omega$ , a la desviación por unidad de tiempo, tenemos otras expresiones útiles:

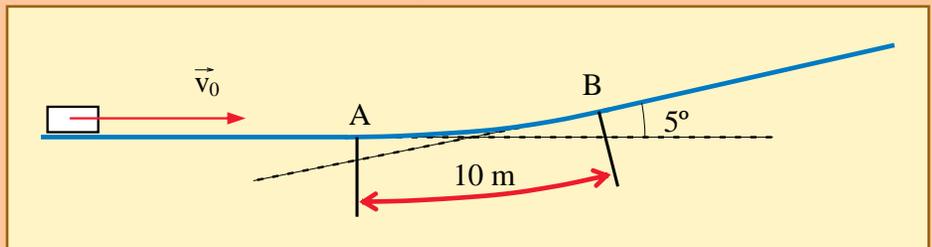
$$\begin{aligned} F &= \omega p \\ F &= m \omega v \end{aligned} \quad (5.3')$$

En donde  $\omega = \delta\theta/\delta t$ , o, en valores medios,  $\Delta\theta/\Delta t$ , es la velocidad angular.

### • Ejemplo 1

Un automóvil de 1.000 kg (incluida la masa de los ocupantes) viaja por una carretera rectilínea horizontal a razón de 20 m/s. En el punto A la carretera se curva suavemente hacia arriba, de manera que 10 m más adelante, en el punto B, continúa en línea recta con pendiente positiva, formando  $5^\circ$  con la horizontal. Suponga para tener valores aproximados que las fuerzas de rozamiento valen unos 1.500 N = 1,50 kN, redondeando a tres cifras significativas, ya que más no tendría sentido.

Calcule la reacción normal del piso mientras el automóvil viaja horizontalmente, inmediatamente después de pasar por A, y después de B, mientras viaja en línea recta por la pendiente. ¿Qué sentirían los pasajeros?



### • Desarrollo

En el tramo horizontal de la pista, dado que el automóvil viaja con velocidad constante, todas las fuerzas están equilibradas, y la resultante es nula. En particular, en la dirección vertical tenemos el peso ( $P = m g$ )

$$(P = 9.800 \text{ N})$$

equilibrado con la reacción normal del piso, que por lo tanto debe valer 9,80 kN. Y en la dirección horizontal tenemos el rozamiento de 1,50 kN equilibrado con la fuerza impulsora aplicada por el piso a las ruedas motrices (reacción a la acción hacia atrás de estas ruedas sobre el piso) también de 1,50 kN.

El equilibrio también vale para el tramo posterior a B, en el cual habrá dos cambios:

- En la dirección tangencial habrá una componente tangencial del peso,  $P_T \cong 9,80 \times \text{sen} 5^\circ$   
 $P_T \cong 0,854 \text{ kN}$ ,

Ya sabemos que el efecto de las fuerzas tangenciales es independiente de la presencia o ausencia de fuerzas las normales, y viceversa. Así es que los cálculos que hay que hacer para aplicar la ley del impulso para las fuerzas tangenciales en casos de trayectorias curvas (en las cuales además hay fuerza normal resultante) son exactamente los mismos que se han mostrado en los casos de movimientos rectilíneos (sin fuerza normal resultante).

Por ello en este momento podemos prescindir de ejemplos de aplicación de la ley del impulso tangencial, y en cambio sí es interesante analizar el siguiente ejemplo de aplicación de ley del impulso para las fuerzas normales.

que deberán ser compensados con un aumento de 0,854 kN en la fuerza motriz, que deberá pasar a valer  $1,50 + 0,85 = 2,35$  kN.

• En la dirección normal, las fuerzas tendrán una leve disminución, ya que

$$P_N \cong 9,80 \times \cos 5^\circ$$

$$P_N \cong 9,76 \text{ kN}$$

(dado que la pendiente es pequeña, la disminución resulta casi imperceptible, del 0,4 %).

Pero en la curva debe haber una resultante no nula, que debe ser normal, hacia arriba, para lograr la desviación de la cantidad de movimiento, y debe valer, según (5.2):

$$F_R = m v \Delta\theta / \Delta t.$$

Para calcular debemos expresar la desviación en radianes:

$$\Delta\theta = 5^\circ$$

$$\Delta\theta = \frac{5 \times 2 \times \pi}{360}$$

$\Delta\theta \cong 0,0873$  rad, y calcular el tiempo demorado:

$$\Delta t = 10 \text{ m} / 20 \text{ (m/s)}$$

$$\Delta t = 0,50 \text{ s.}$$

La fuerza resultante, inmediatamente después de pasar A debe valer

$$F_R \cong 1.000 \text{ kg} \times 20 \text{ m/s} \times \frac{0,0873}{0,5 \text{ s}}$$

$$F_R \cong 3,49 \text{ kN.}$$

La reacción normal del piso debe valer en este punto:

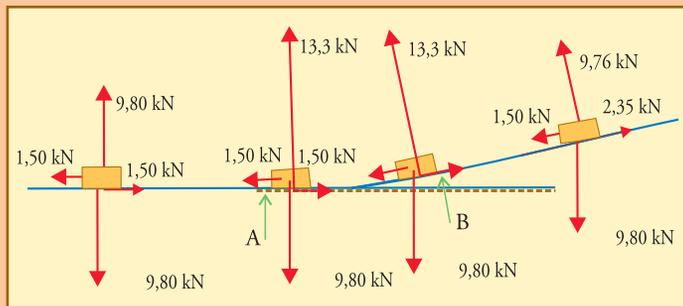
$$R_N = P_N + F_R$$

$$R_N \cong 9,80 + 3,49$$

$$R_N \cong 13,3 \text{ kN.}$$

Dado que a lo largo del tramo AB puede despreciarse tanto la variación de la com-

ponente normal del peso, como la diferencia entre proyectar sobre la dirección normal, o la dirección vertical, podemos decir que la reacción normal del piso debe mantener aproximadamente constante el valor aumentado de 13,3 kN a lo largo de todo el tramo, y durante los 0,5 s que dura, los pasajeros sentirán un aumento (proporcional a la masa de cada uno) en la fuerza con que el asiento los sostiene. Dado que esa fuerza es reacción a la que cada uno ejerce contra el asiento, los pasajeros tendrán la sensación de un aumento (temporal) de peso.



## ■ 5.2. Movimientos rectilíneos

En estos movimientos la trayectoria es una línea recta, que contiene la dirección tangencial y todos los vectores interesantes para el movimiento, es decir vector desplazamiento, velocidad, cantidad de movimiento, y fuerza (resultante). Si arbitrariamente sobre esta línea ubicamos el eje  $x$  (equivalentemente podría elegirse el  $y$ ), ganamos enormemente en comodidad ya que en ese caso sólo tendremos que considerar la componente  $x$  de

todos los vectores que intervienen, pudiendo prescindir de las otras, como se ve a continuación.

Cada vector podría ser descrito con las dos componentes que corresponden, pero al elegir el eje  $x$  sobre la trayectoria la componente  $y$  es siempre nula:

posición:  $r = (x ; 0)$

velocidad:  $v = (v_x ; 0)$

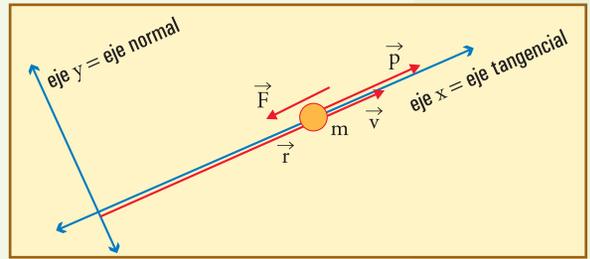
$$v = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}$$

$$v = \frac{(\delta x; 0)}{\delta t}$$

$$v = \left( \frac{\delta x}{\delta t}; 0 \right)$$

cantidad de movimiento:  $p = (p_x ; 0)$   
 $p = (m v_x ; 0)$

fuerza (resultante):  $F = (F_x ; 0)$



**Fig. 5.5.** Elección típica de ejes para un movimiento rectilíneo. El vector fuerza se dibujó arbitrariamente de manera de representar una fuerza que está frenando al móvil y debe estar claro que es la fuerza **resultante de todas las acciones exteriores en ese instante**.

Dado que todas las operaciones que debemos efectuar con vectores (suma, resta, y multiplicación por números) se efectúan por separado sobre cada componente, entonces podemos sobreentender la componente  $y$ , y escribir todas las expresiones sólo para la componente  $x$ . De este modo, sin olvidar que siempre trabajamos con la componente del vector que corresponda, podremos escribir simplemente *funciones*.

Se destacan casos típicos que analizamos en detalle a continuación.

## Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

En este caso la fuerza resultante es nula, y el cuerpo mantiene inalterada su cantidad de movimiento, y con ella su velocidad:

$$F_x = 0 \Rightarrow p_x = \text{cte} \Rightarrow v_x = \Delta x / \Delta t$$

$$v_x = \text{cte}$$

Para este movimiento sólo tenemos expresiones simples. Todas se obtienen a partir de la definición de velocidad:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_x = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado}}$$

$$v_x = \text{valor constante} \tag{5.4}$$

O lo que es lo mismo:  $\Delta_x = v_x \Delta t$   
 $\Delta_x = \text{cte} \times \Delta t$

$$\tag{5.5}$$

Esto se lee diciendo que *la distancia recorrida es directamente proporcional al intervalo de tiempo transcurrido*, y la velocidad es la *constante de proporcionalidad*.

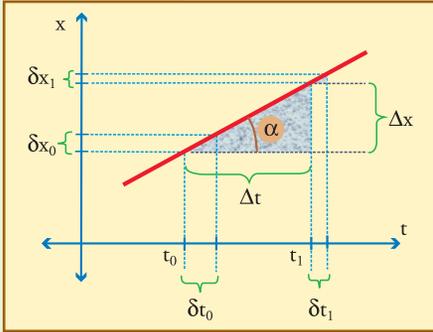
Si queremos expresar la posición  $x$ , en función de  $t$ , reemplazamos  $\Delta x = x - x_0$ , y obtenemos,  $x = x_0 + v_x \Delta t$ , en donde, si se toma (arbitrariamente)  $t_0 = 0$ , entonces  $\Delta t = t$ , y se tiene la expresión más habitual, que caracteriza a una *función lineal* de  $t$ :

$$x = x_0 + v_x t \quad (5.6)$$

En nuestras aplicaciones prácticas es probable que sólo necesitemos utilizar la definición de velocidad (5.4), y según el caso, despejar de ella (5.5). Pero ésta es una buena ocasión para familiarizarnos con el manejo de funciones y representaciones gráficas, porque al conectarnos con los conceptos estudiados en Matemática, esto nos permite ganar claridad en la visión global de las situaciones, y habilidad para el tratamiento de movimientos más complicados.

Para este caso puede interesarnos mostrar en una gráfica como varía la posición  $x$  en función de  $t$ , y por ser una función lineal, su representación gráfica es una línea recta, como se ve en la figura 5.6.

Esta figura es útil porque permite obtener la velocidad,  $\Delta x / \Delta t$ , como pendiente de la gráfica. Como se muestra en la figura, todos los cocientes  $\Delta x / \Delta t$  que se realicen en distintos instantes, con intervalos grandes o pequeños, dan el mismo valor de velocidad, como corresponde a una función lineal. Si la gráfica fuese curva, eso no significaría que la trayectoria es curva, sino que su pendiente, o sea, la velocidad del movimiento, va cambiando, como veremos en otros movimientos.



**Fig. 5.6.** Función  $x(t)$  lineal. Los triángulos sombreados, al ser todos semejantes, sirven para ver que los cocientes  $\delta x / \delta t$  tienen igual valor en los distintos instantes:  $\delta x_1 / \delta t_1 = \delta x_0 / \delta t_0 = \Delta x / \Delta t$

Para cualquiera de los triángulos rectángulos sombreados en la figura 5.6, la pendiente está dada por los cocientes  $\Delta x / \Delta t$ , los cuales también definen la función trigonométrica denominada *tangente del ángulo*  $\alpha$ :  $\text{tg} \alpha = \Delta x / \Delta t$ . Esta pendiente se debe calcular con las unidades de cada eje:  $[\text{longitud}/\text{tiempo}] = [\text{velocidad}]$ , para obtener la velocidad del móvil con las unidades correspondientes. No debe calcularse la función  $\text{tg} \alpha$  a partir del ángulo medido sobre la figura, a menos que se utilice una escala tal que la unidad de las abscisas (tiempo) tenga exactamente el mismo tamaño en la figura que la de las ordenadas (distancia).

### • Ejemplo 1

Obtenga la velocidad y la función  $x(t)$  a partir de la siguiente gráfica.

#### • Desarrollo

Primeramente agregamos a la figura un triángulo con un  $\Delta t$  arbitrario y el correspondiente  $\Delta x$ .

La velocidad resulta

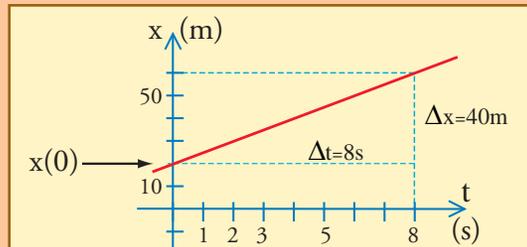
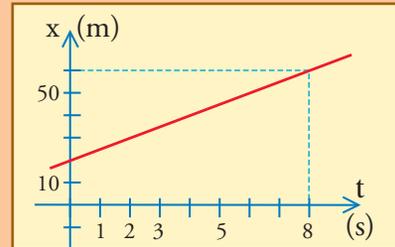
$v = \text{pendiente}$

$$v = \frac{40 \text{ m}}{8 \text{ s}}$$

$$v = 5 \text{ m/s;}$$

y con ella tenemos la constante de proporcionalidad. Ahora, para escribir la función falta  $x(0)$ , que es el valor de  $x$  en  $t_0 = 0 \text{ s}$ , o sea el valor de ordenada donde la gráfica corta al eje de ordenadas, y lo obtenemos de la figura:  $x(0) = 20 \text{ m}$ .

Entonces:  $x(t) = 20 \text{ m} + 5 \text{ (m/s)} \cdot t$



## Nota 1. Funciones y representaciones gráficas

*Esta es una ocasión en la cual el estudio de los movimientos se relaciona con el estudio de diversas funciones, y conviene revisar alguna nomenclatura de matemática, aplicada concretamente a nuestros fines.*

*Ya hemos dicho que con las coordenadas  $(x; y)$  formamos el vector que nos indica la posición de un punto en un sistema de ejes cartesianos que hemos elegido de referencia.*

*Si el punto es móvil, entonces la posición va cambiando, y tenemos que ir considerando distintas posiciones para cada instante: así, un vector  $(x_1; y_1)$  corresponderá al instante  $t_1$ , otro vector  $(x_2; y_2)$  corresponderá al instante  $t_2$ , etc. Cada componente del vector posición, a su vez, indica la posición referida al eje correspondiente: para el eje  $x$ ,  $x_1$  es la posición en el instante  $t_1$ ,  $x_2$  en  $t_2$ , etc, mientras que de manera similar, para el eje  $y$ ,  $y_1, y_2$ , etc., son las posiciones en  $t_1, t_2$ , etc.*

*Es decir que para cada eje la posición va variando con el tiempo de manera que define una función de  $t$ . Así, para el eje  $x$ , tenemos la función posición  $x(t)$ , en la que  $t$  es la variable independiente, y  $x$  es la dependiente; y para el eje  $y$  tenemos  $y(t)$ , con  $y$  variable dependiente y  $t$  siempre variable independiente.*

*Cada una de estas funciones puede representarse gráficamente, cuando conviene para comprender mejor alguna situación. Es decir, cualquier variable se puede representar gráficamente en función de cualquier otra, pero nosotros sólo haremos algunas representaciones gráficas típicas, y siempre, por razones físicas, será  $t$  la variable independiente (desde el punto de vista matemático cualquiera de las variables se podría elegir como independiente).*

*En nuestras aplicaciones, los diagramas con ejes  $(x, y)$  **no son representaciones gráficas de funciones**, sino que **son dibujos que muestran algo que está ubicado en el espacio.***

*Estos ejes no indican variables que dependen una de otra.*

*Así, por ejemplo, en un diagrama con ejes  $(x, y)$ , dibujamos una recta para mostrar una trayectoria rectilínea, una curva como las de la figura 4.1 ó 4.3, para mostrar la trayectoria de una piedra arrojada oblicuamente, y una circunferencia sería la trayectoria de un punto con movimiento circular.*

*Ahora bien, estos dibujos no pueden mostrar cómo ocurre el movimiento a medida que el tiempo transcurre. Para eso recurriremos a las representaciones gráficas en función del tiempo: colocaremos la variable independiente,  $t$ , en abscisas, y en ordenadas la variable que querremos mostrar cómo depende de  $t$ . Puede ser  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $v(t)$ ,  $F(t)$ ,  $F_x(t)$ , etc. Cualquier variable que interese en determinada situación, podrá ser graficada en función del tiempo.*

*Para ir familiarizándonos de a poco, como hemos dicho, sólo graficaremos algunas pocas cosas de interés.*

*Hemos comenzado con movimientos que ocurren en el eje  $x$ . No interesa graficar  $y$  en función del tiempo, ya que  $y$  se mantiene constantemente nulo. Sí puede interesar graficar la función  $x(t)$ , la cual, para el movimiento simple que estamos viendo, es una recta.*

*Esta gráfica es una recta porque la función  $x(t)$  es lineal, y de la gráfica podemos obtener información tal como el valor de la velocidad. Aunque la trayectoria fuese curva, la gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo sería recta siempre que la velocidad fuese constante.*

*Y si la gráfica no fuese recta, eso no indicaría trayectoria curva, sino que indicaría que va cambiando la velocidad.*

*Debemos reflexionar sobre estas ideas al analizar los ejemplos que se presentan, aprovechando al mismo tiempo para revisar todas las nociones adquiridas en Matemática relacionadas con las representaciones gráficas de funciones, especialmente las nociones de función lineal, y pendiente de una gráfica.*

• **Ejemplo 2**

Escribir la función  $y(t)$  de un móvil que viaja uniformemente en línea recta a lo largo del eje  $y$ , suponiendo que en  $t_0 = 0$  s pasa por el lugar  $y(0) = 60$  m, acercándose hacia el origen, al cual llega en  $t_1 = 6$  s. Realizar la gráfica  $y(t)$ .

• **Desarrollo**

Para escribir la función  $y(t)$  debemos averiguar la velocidad. A partir de los datos esto es fácil:

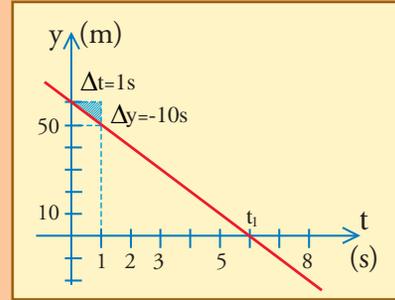
$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$v = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}$$

$$v = \frac{0\text{m} - 60\text{m}}{6\text{s} - 0\text{s}}$$

$$v = \frac{-60\text{ m}}{6\text{ s}}$$

$$v = -10\text{ m/s};$$



Aunque hemos omitido el subíndice, se sobreentiende que hemos calculado  $v_y$ , la componente  $y$  del vector velocidad. Dado que ya tenemos el término independiente,  $y(0) = 60$  m; entonces la función  $y(t)$  es

$$y(t) = 60\text{ m} - 10\text{ (m/s)} \cdot t$$

Para realizar la gráfica, podemos trazar una recta que pasa por los dos puntos dados, pero como ejercicio aquí queremos trazarla a partir de la pendiente.

Para ello tenemos la primer posición en  $t_0 = 0$ , es decir marcamos el punto  $y_0 = 60$  m en el eje de ordenadas, y a partir de allí, una pendiente de  $-10$  m/s, significa que por cada segundo la ordenada debe disminuir en  $10$  m; en  $6$  segundos se recorren los  $60$  metros que faltan para el origen.

## Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Como veremos inmediatamente, éste es el caso que tiene lugar cuando se aplica una fuerza tangencial constante. Efectivamente en este caso el impulso aplicado es proporcional al tiempo, y la cantidad de movimiento varía linealmente con el tiempo:

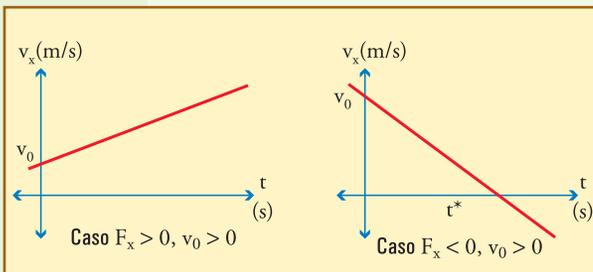
$$F_x = \text{cte} ; I_x = F_x \Delta t$$

$$p_x = p_0 + F_x \Delta t \tag{5.7}$$

Dividiendo esta expresión por la masa, se tiene automáticamente la expresión para la velocidad, que también debe ser una función lineal del tiempo:

$$v_x = v_0 + (F_x / m) \times \Delta t \tag{5.8}$$

Nótese cómo en el caso de este movimiento, la velocidad y no la posición, es la que varía linealmente con el tiempo. Ahora nos resulta interesante graficar la velocidad en función del tiempo, aplicando las mismas ideas relacionadas con la función lineal. Como vemos a continuación, tenemos gráficas parecidas a las anteriores, pero con un significado totalmente diferente.



Observando esta última gráfica de  $v_x(t)$ , encontramos que: dado que la fuerza se mantiene orientada hacia los  $x$  negativos en todo momento, mientras  $v_x > 0$ , es decir hasta  $t = t^*$ , la fuerza tiene sentido contrario al movimiento y por lo tanto está frenando al móvil. Precisamente en  $t = t^*$  es que éste se detiene, y a partir de ese instante la  $v_x$  es negativa y por lo tanto la fuerza resulta a favor del movimiento y hace aumentar el valor absoluto de la velocidad.

Por otra parte, dado que la gráfica es una recta, queda claro que el movimiento es simétrico respecto del instante de la detención, y esperando un cierto tiempo después de  $t^*$ , la velocidad tiene el mismo valor absoluto que tenía el mismo tiempo antes de  $t^*$ .

## • La aceleración

Si recordamos la definición de aceleración  $a = \Delta v / \Delta t$ , según la Ley del Impulso resulta:  $a = F/m$ , para este caso  $a$  es un vector constante que también tiene la misma dirección del movimiento. Esto significa que en todas las expresiones anteriores se puede reemplazar  $(F/m)$  por  $a$ , obteniendo expresiones como:

$$v_x = v_0 + a \Delta t \quad (5.9)$$

## Cálculo de la distancia recorrida

Aquí se nos presenta un problema interesante: ¿cómo calculamos la distancia recorrida, o la posición, en cada instante?

La posición es una función  $x(t)$  tal que  $v_x = \delta x / \delta t$ , de donde podemos despejar  $\delta x = v_x \delta t$ .

Si esta expresión fuera válida para un intervalo cualquiera, no sólo para los pequeños, escribiríamos  $\Delta x = v_x \Delta t$ , esto diría que  $x$  es una función lineal de  $t$  (esto es lo que hicimos con el MRU, al pasar de la expresión (5.4) a la (5.5)).

Ahora eso no corresponde, porque  $v_x$  no es constante: no vale lo mismo al comenzar el intervalo, al medio, o al final.

Hagamos un paréntesis para aprender una interesante manera de resolver este problema.

### La distancia cuando la velocidad va cambiando, y el área bajo una gráfica

Cuando la velocidad varía no podemos aplicar  $\Delta x = v_x \Delta t$  para calcular la distancia recorrida en un intervalo cualquiera  $(t_0, t_1)$ , suponiendo que éste no es muy pequeño, simplemente porque no está determinado el valor de la velocidad que habría que utilizar.

No obstante, en un intervalo suficientemente pequeño, siempre vale calcular la distancia recorrida (que es muy pequeña) aplicando  $\delta x = v_x \delta t$ , si colocamos el valor  $v_x$  que corresponde a ese intervalo.

Ahora bien, si subdividimos el intervalo total en muchísimos intervalos suficientemente pequeños, siempre podremos expresar la distancia total recorrida como la suma de todas las distancias recorridas en cada uno de los intervalos pequeños. Claro que no intentaremos hacer este cálculo efectivamente en la práctica, porque si la cantidad de intervalos pequeños es muy grande, el procedimiento podría resultar tremendamente tedioso, y tal vez hasta imposible.

Pero tiene valor como idea.

Es decir, ahora tenemos el problema de averiguar el resultado de esta suma de toda una enorme cantidad de pequeñas distancias, pero *sin hacerla realmente*.

Para solucionar este problema recurrimos a un truco con la ayuda de las representaciones gráficas.

Consideremos una gráfica de la velocidad en función del tiempo de un movimiento cualquiera, como la de la figura 5.7. Si trazamos líneas verticales subdividiendo el intervalo  $(t_0, t_1)$  en muchos intervalitos de duración  $\delta t$  suficientemente pequeña cada uno, el espacio bajo la gráfica, hasta el eje horizontal, queda subdividido en rectángulos (o trapecios rectangulares) muy angostos, cuya base, o ancho es  $\delta t$ , y cuya altura es el valor de  $v_x$  allí, en ese el intervalo. Si ahora, para calcular  $\delta x$ , efectuamos el producto  $v_x \delta t$ , obtenemos el área de cada rectángulo.

Esto significa que la suma de todas las distancias  $\delta x$  recorridas en todos los intervalos, es lo mismo que la suma de todas las áreas de todos estos delgados rectángulos, y *eso es lo mismo que el área total bajo la gráfica*.

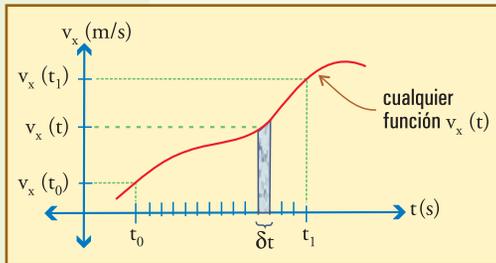
Es decir que *con el concepto* de que la distancia total es la suma de un número inmenso de pequeñas contribuciones (suma que nunca podríamos efectuar en la práctica), llegamos a la conclusión de que lo que necesitamos es saber calcular el área de una figura geométrica. Obsérvese el poder de manipular ideas!

De manera que en general, para la distancia recorrida (en  $x$ ) por un móvil en el intervalo cualquiera desde  $t_0$  hasta  $t_1$ , con una velocidad dada por cualquier función  $v_x(t)$ , siempre vale:

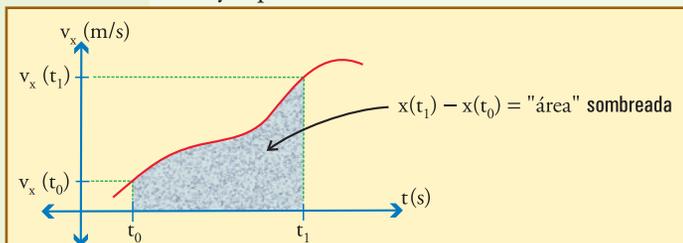
$$\Delta x = \text{“área” bajo la gráfica, entre } t_0 \text{ y } t_1$$

“Área” está entre comillas porque no es la verdadera área geométrica de la figura, sino que se calcula con las escalas de cada eje, con dimensiones de tiempo en el eje de abscisas, y de velocidad en el de ordenadas: este área resulta con dimensiones de longitud ya que es una distancia.

Vale notar que si en vez de hablar de la componente  $x$  del vector velocidad, hablamos de su módulo,  $v(t)$  (suponiendo que lo tenemos graficado en función del tiempo), dado que éste se refiere a la distancia recorrida en el espacio, y no sobre el eje  $x$ , ahora tendremos que el área de la gráfica de  $v(t)$ , en cualquier intervalo, representa *la distancia recorrida en el espacio a lo largo de la trayectoria*.



**Fig. 5.7.** Si para cualquier intervalo de base  $\delta t$ , multiplicamos la base por la altura  $v_x(t)$  en algún punto intermedio, obtenemos el área sombreada, que a la vez debe ser la distancia  $\delta x$  recorrida en ese lapso. Si  $\delta t$  es suficientemente pequeño se puede considerar un instante, y la altura del rectángulito es la velocidad en ese instante.



**Fig. 5.8.** Para cualquier velocidad  $v_x(t)$  dada por una gráfica, la distancia recorrida queda determinada por el área sombreada.

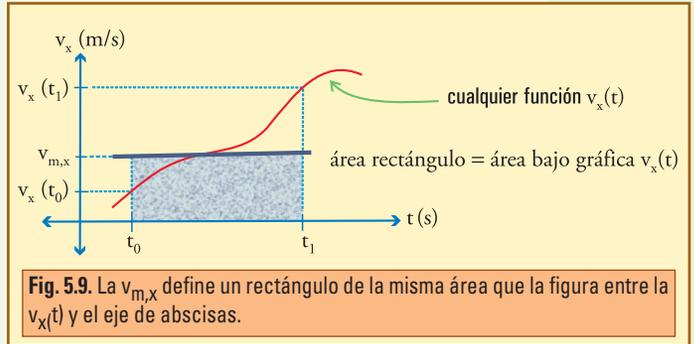
### Velocidad media

La definición (2.3') de velocidad media (referida al eje  $x$ )  $v_{m,x} = \Delta x / \Delta t$ , según se discute en el Capítulo 4, es válida para cualquier movimiento. Esto se interpreta diciendo que la velocidad media (siempre referida al eje  $x$ ),  $v_{m,x}$ , es aquella que el móvil debería haber mantenido constante durante todo el intervalo considerado, para recorrer la misma distancia (en el mismo tiempo).

Dado que ahora sabemos que para cualquier movimiento  $\Delta x$  es el área bajo la gráfica de la función  $v_x(t)$ , podemos decir:

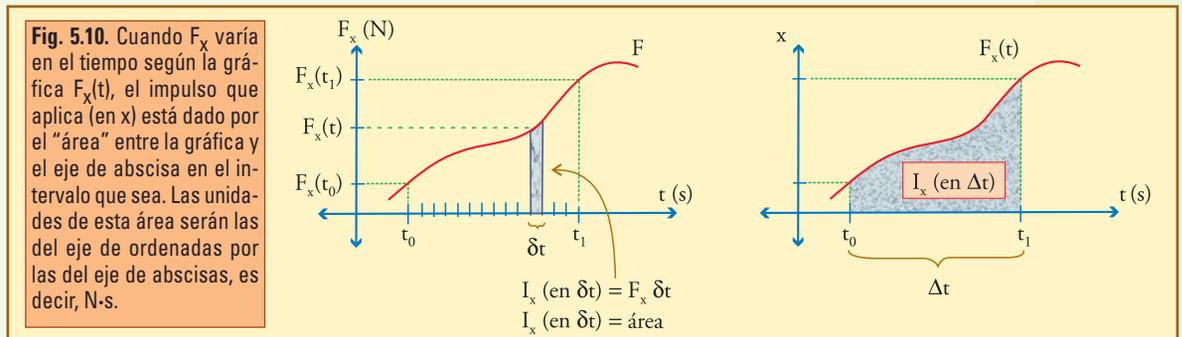
$$v_{m,x} = \frac{\text{área bajo } v_x(t)}{\Delta t} \quad (5.10)$$

Esto se puede interpretar en la figura 5.9 viendo que si dibujamos una línea de altura (constante) igual a  $v_{m,x}$ , queda un rectángulo cuya área, dada por el producto  $v_{m,x} \times \Delta t$ , debe ser, según (5.10), igual al área bajo la gráfica de la función  $v_x(t)$ . Ahora podemos decir que la velocidad media  $v_{m,x}$ , de un movimiento cuya velocidad va variando según lo indica la función  $v_x(t)$  cualquiera, en cualquier intervalo  $\Delta t$ , es la altura de un rectángulo que tiene la misma área que queda bajo la curva representativa de la función  $v_x(t)$ .



## • Impulso y fuerza media

Si aplicamos las mismas ideas al cálculo del impulso que aplica una fuerza que va cambiando en el tiempo, suponiendo que conocemos la gráfica de la componente  $x$  en función del tiempo,  $F_x(t)$ , obtenemos que el impulso aplicado en un intervalo debe ser igual al “área” de la gráfica correspondiente (figura 5.10).



Si dividimos el impulso total del intervalo (es decir el área) por  $\Delta t$ , obtenemos la altura de un rectángulo que tendría la misma área, o sea obtenemos el valor de la fuerza media, que es la que siendo constante aplicaría el mismo impulso (en el mismo tiempo):

$$F_{m,x} = \frac{I_x(\text{en } \Delta t)}{\Delta t} \quad (5.11)$$

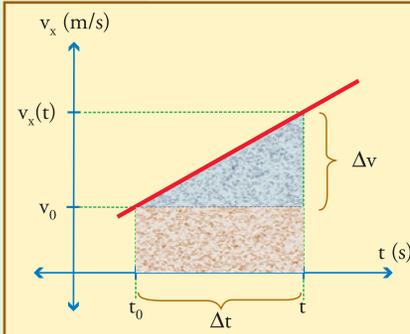
O también (puesto que vale para cualquier eje):

$$\text{vector fuerza media} = \frac{\vec{I}(\text{en } \Delta t)}{\Delta t} \quad (5.11')$$

### **Distancia recorrida en el MRUV**

Luego de estos conceptos generales, podemos volver al problema particular de determinar la distancia recorrida en un movimiento en el cual la velocidad varía linealmente.

En este caso debemos calcular el área de triángulos o trapecios.



Cálculo por medio de rectángulo + triángulo:

$$\text{Área total} = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta v \cdot \Delta t$$

Cálculo por medio del trapecio:

$$\text{Área total} = \frac{1}{2} (v_0 + v) \cdot \Delta t$$

**Fig. 5.11.** Se muestran opciones para calcular el área correspondiente a una gráfica lineal de  $v_x(t)$ .

En la figura se muestra que hay más de una forma de calcular el “área”, o sea  $\Delta x$  (el subíndice  $x$  está sobreentendido en todo lugar en donde falte). Todas las formas son equivalentes, pero unas pueden ser más cómodas que otras según sean los datos que se posean.

Las expresiones que más se utilizan son:

- Reemplazando  $\Delta v = a \Delta t$ , en rectángulo + triángulo:

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \quad (5.12)$$

Expresión en la cual se pone de relieve que  $\Delta x$  es función cuadrática del tiempo.

- Reemplazando  $\Delta t = \Delta v / a$ , en trapecio:

$$\Delta x = \frac{1}{2} (v + v_0) \times \{(v - v_0) / a\}$$

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad (5.13)$$

O también:

$$v^2 = v_0^2 + 2 a \Delta x \quad (5.13')$$

- La expresión para el área del trapecio tal cual está en la figura:

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \times \Delta t$$

$$\Delta x = v_{\text{promedio}} \Delta t \quad (5.14)$$

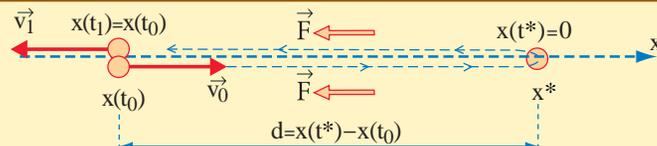
En donde  $v_{\text{promedio}}$  es el promedio entre la velocidad inicial y la final.

Para el movimiento en el que la velocidad varía uniformemente (no es así en otros), la velocidad media, definida como  $\Delta x / \Delta t$ , es lo mismo que el promedio entre la velocidad inicial y la final.

Podría parecer que en esta expresión (5.14)  $\Delta x$  depende linealmente de  $t$ , pero eso no es así, ya que  $v_{\text{promedio}}$  no es constante, sino que también aumenta linealmente con el tiempo.

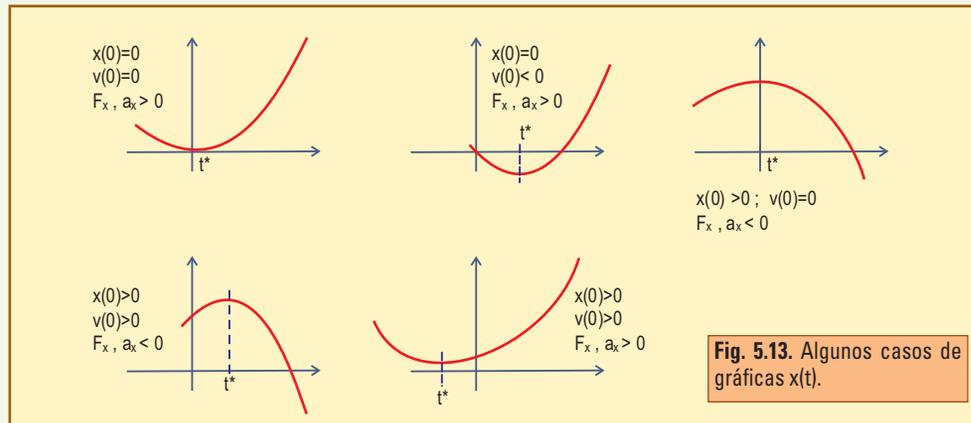
Cuando la fuerza se aplica en sentido contrario a la velocidad el móvil se va frenando, y si la fuerza se mantiene aplicada luego de que el móvil se detiene, el movimiento se reinicia instantáneamente en el sentido de la fuerza, es decir en sentido contrario al del movimiento inicial. En este caso  $\Delta x$  no sirve para saber la distancia recorrida, ya que sólo indica la diferencia entre la posición inicial y la final. Si en particular hacemos  $\Delta x = 0$  en (5.13) o

(5.13'), obtenemos  $v^2 = v_0^2$ . Esto muestra nuevamente que el movimiento es simétrico respecto del punto de detención: si teniendo velocidad  $v_0$  en  $x_0$ , el móvil avanza en contra de la fuerza hasta una posición  $x^*$  en la cual se detiene e invierte la marcha, cuando luego pasa por la misma coordenada ( $x_1 = x_0$ ), lo hace con la misma velocidad cambiada de signo ( $v_1 = -v_0$ ).



**Fig. 5.12.** Móvil que avanza una distancia  $d$  contra la fuerza. Ésta lo detiene y luego lo acelera, y al cabo de la distancia  $d$  el móvil tiene la misma velocidad inicial, con signo opuesto. Pero  $\Delta x$  ya no indica la distancia recorrida.

Algunas representaciones gráficas típicas, para las diversas condiciones que se indican, son las siguientes:



Para los razonamientos físicos se suele descomponer el movimiento en dos fases: hasta que se detiene ( $v = 0$ ), y luego comenzando allí desde el reposo ( $v_0 = 0$ ). De esta manera, ignorando los signos y la distinción entre  $v_0$  y  $v$  (que luego se deciden para cada caso), todo se puede resolver con dos expresiones muy simples:

$$d = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \quad (5.12')$$

$$v^2 = 2 a d \quad (5.13')$$

Nótese que:

- El signo de  $x(0)$  se refiere a dónde corta la gráfica al eje vertical.
- El signo de  $v(0)$  indica cómo corta la curva al eje vertical (con pendiente hacia arriba o hacia abajo).
- El signo de  $F_x$  (que es el mismo de  $a_x$ ) indica si la curva aumenta o disminuye de pendiente a partir de un instante cualquiera. O también si el movimiento se *inicia* hacia los  $x$  positivos o hacia los  $x$  negativos a *partir del instante de velocidad nula* ( $t^*$ ).

### • Ejemplo

Un automóvil de 800 kg de masa que viaja a 20 m/s debe detenerse en un semáforo que está 55 m más adelante.

- Calcular la fuerza mínima necesaria, suponiendo que se la comienza a aplicar cuando faltan 50 m para el semáforo, y se mantiene constante.
- Calcular el tiempo demorado para frenar.
- Calcular la velocidad cuando faltan 2 m para el semáforo.
- Graficar posición y velocidad en función del tiempo.

### • Desarrollo

a) Aplicamos  $v^2 = 2 a d \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 d}$

$$a = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{100 \text{ m}}$$

$$a = 4 \text{ m/s}^2 \Rightarrow F = m a$$

$$F = 3.200 \text{ N}$$

En estos cálculos  $v$  se refiere a la velocidad inicial, y  $a$  es el módulo de la aceleración. Si se hubiera utilizado la expresión completa (5.13) se hubiera obtenido la aceleración negativa, y luego la fuerza también hubiera resultado con signo menos, porque obviamente debe aplicarse hacia atrás.

b) Aplicamos la Ley del Impulso:  $3.200 \text{ N} \times \Delta t = 800 \text{ kg} \times 20 \text{ m/s} \rightarrow \Delta t = 5 \text{ s}$ .

Otra forma es aplicar  $\Delta t = \frac{d}{v_m}$

$$\Delta t = \frac{50 \text{ m}}{10 \text{ (m/s)}}$$

$$\Delta t = 5 \text{ s}$$

c) Aplicamos  $v^2 = 2 a d$ , considerando el movimiento desde el punto para el que se calcula la velocidad, y  $d$  la distancia hasta el punto de velocidad nula (semáforo), o sea:  $d = 2 \text{ m}$ . Resulta  $v^2 = 2 \times 4 \text{ (m/s}^2) \times 2 \text{ m}$

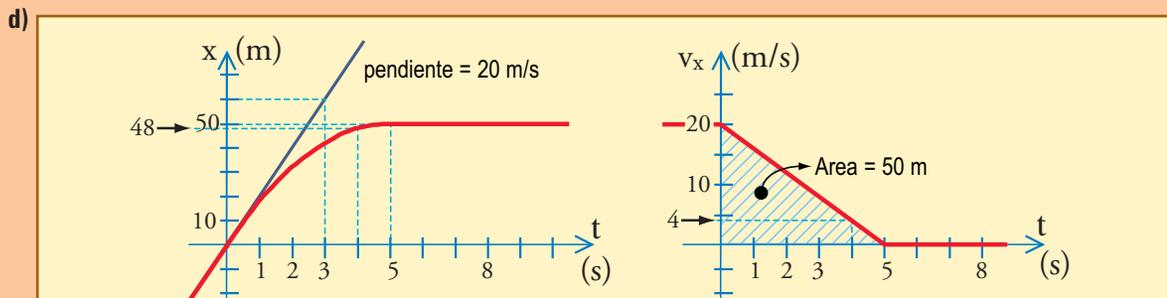
$$v^2 = 16 \text{ m}^2/\text{s}^2 \rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

(dado que la aceleración es  $4 \text{ m/s}^2$ , esta velocidad se alcanza 1 s antes de la detención). Con la expresión completa, (5.13), hubiera sido  $v^2 = v_0^2 + 2 a d$ , en donde  $d$  hubiese sido la distancia desde el punto inicial hasta el punto para el que se calcula la velocidad, o sea  $d = 48 \text{ m}$ . De manera que el cálculo debería haber sido

$$v^2 = 20^2 + 2 \times (-4) \times 48$$

$$v^2 = 16 \text{ m}^2/\text{s}^2 \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

Obviamente, de las dos maneras obtenemos el mismo valor.



## Movimiento oscilatorio

Consideremos un cuerpo de masa “ $m$ ” que se mueve horizontalmente, sin fricción, en el extremo de un resorte de constante elástica “ $k$ ”. El movimiento es a lo largo del eje  $x$ , cuyo origen se elige en la posición de equilibrio del resorte (figura 5.13).

Las fuerzas verticales están equilibradas entre sí (peso y reacción normal del piso), y en ausencia de rozamiento la resultante es exactamente la fuerza que el resorte aplica al cuerpo, la única que se necesita considerar. Esta fuerza tiene un valor y un sentido que va cambiando según el grado de estiramiento instantáneo del resorte: es una fuerza elástica dada por  $F_x = -k x$ , que tiende a llevar al cuerpo hacia la posición de equilibrio.

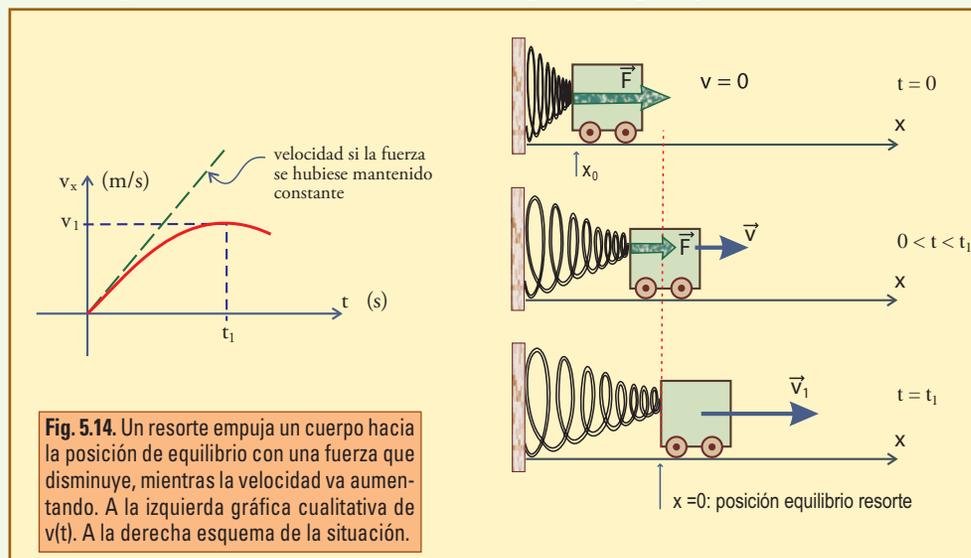
*Este es un caso para el cual no podremos hacer cálculos hasta más adelante, pero son muy importantes los razonamientos cualitativos que plantearemos ahora, así como algunas conclusiones a las que llegaremos. Es importante entender que saber física significa poder hacer estos razonamientos antes de hacer cuentas.*

Analicemos el movimiento a partir de una condición inicial arbitraria como la siguiente: un agente externo mantiene al cuerpo en un valor negativo de  $x$  ( $x_0 < 0$ , o sea resorte comprimido), y en  $t = 0$  lo suelta.

Tenemos un cuerpo que parte del reposo impulsado por una fuerza que inicialmente vale  $k x_0$ , y que va disminuyendo a medida que el resorte se aproxima a su posición de equilibrio.

Es importante la siguiente idea: **aunque la fuerza va disminuyendo la velocidad va aumentando**, porque la fuerza siempre es hacia adelante. Aún si la fuerza desapareciera, la velocidad no tendría que disminuir. Una imagen que ayuda es pensar en cuando se empuja un automóvil: se comienza aplicándole una fuerza grande para iniciar el movimiento, y a medida que la velocidad aumenta se va disminuyendo la fuerza, pero mientras sea hacia adelante, por pequeña que sea, contribuirá con un pequeño aumento de la velocidad.

Bien, el caso es que la velocidad no aumentará tanto como si fuera una fuerza constante (MRUV), pero necesariamente aumentará hasta que el cuerpo llegue a  $x = 0$ .



**Fig. 5.14.** Un resorte empuja un cuerpo hacia la posición de equilibrio con una fuerza que disminuye, mientras la velocidad va aumentando. A la izquierda gráfica cualitativa de  $v(t)$ . A la derecha esquema de la situación.

En el instante que denominaremos  $t_1$  en el cual el resorte alcanza su longitud de equilibrio ( $x = 0$ ), la fuerza exactamente se ha anulado y el cuerpo ha alcanzado la velocidad que llamamos  $v_1$ . Aunque esa es la posición de equilibrio, el cuerpo obviamente no puede quedarse allí, ya que se está moviendo, y allí exactamente no hay fuerza que lo frene -y aunque la hubiera el cuerpo seguiría avanzando, necesitaría un tiempo y una distancia para frenarse-. Efectivamente eso es lo que sucede: el cuerpo pasa por la posición de equilibrio y comienza a frenarse por acción de la fuerza elástica que crece negativamente a partir de allí. Esto significa que al pasar la posición de equilibrio recién empieza a disminuir la velocidad, o sea: la velocidad  $v_1$  es la **máxima** que alcanzará este cuerpo.

Luego el cuerpo deberá detenerse en algún lugar  $x_2$ , ya que la fuerza que lo frena crece mientras el cuerpo avanza.

Y este es un buen momento para interrumpir con una pregunta:

*¿Dónde/cuándo se detendrá el cuerpo?*

Mientras hacemos un alto, tratemos de responder y reflexionemos sobre las si-

guientes opciones.

- Se detendrá cuando se termine su fuerza de avance.
- Se detendrá cuando la fuerza (que es negativa) iguale a la velocidad (en valor absoluto).
- Se detendrá cuando la fuerza del resorte (que es negativa) iguale a la fuerza del cuerpo (en valor absoluto).
- Se detendrá cuando el impulso aplicado por la fuerza de frenado (que es negativo) iguale a la cantidad de movimiento  $m v_1$ .

“Son todas absurdas excepto la correcta, pero pueden ser tentadoras. Quien encuentre algo de tentador en a), b), o c), debería revisar sus ideas más básicas, además de leer los comentarios sobre estas respuestas al final del capítulo.”

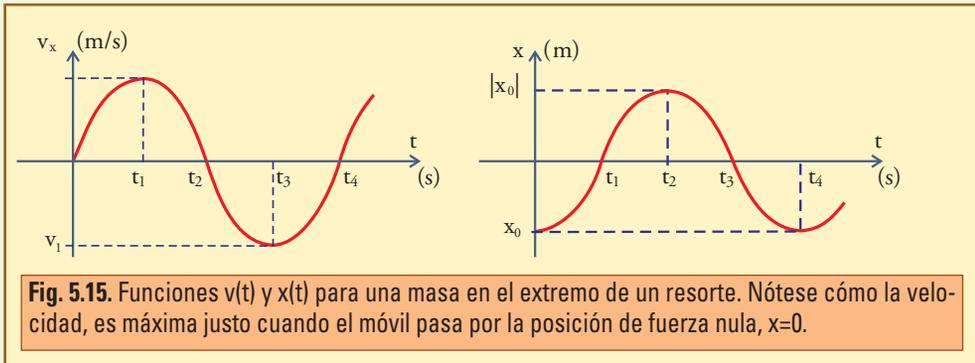
No estamos en condiciones de determinar el valor de  $t_1$  ni de  $t_2$ , pero sí de afirmar que se llegará a un instante tal que  $I_x(t_1 \rightarrow t_2) = -m v_1$ , y en ese instante será  $v_2 = 0$ . Además es fácil imaginar, por la simetría del proceso (más adelante podremos demostrarlo) que  $t_2 - t_1 = t_1$ , y que  $x_2 = -x_1$ .

Una vez que el cuerpo se detiene en  $x_2$  es claro que no puede permanecer allí porque el resorte está estirado, aplicando una fuerza hacia el origen. De manera que el movimiento se reinicia instantáneamente, ahora con velocidad creciendo negativamente, y se repite exactamente lo mismo que ocurrió desde la partida, pero en sentido contrario, ya que la fuerza que aplica el resorte es exactamente igual, salvo el signo, para el resorte estirado o comprimido. Así es que en  $t_3 = t_2 + t_1$  el cuerpo pasará por la posición de equilibrio con  $v_3 = -v_1$ , y en

$$t_4 = 2 t_2$$

$$t_4 = 4 t_1,$$

se detendrá por un instante en la posición inicial, para recomenzar y repetir exactamente todo indefinidamente (en la suposición de no haber rozamientos ni influencias extrañas).



Este movimiento es *periódico*, de período

$$T = 2 t_2$$

$$T = 4 t_1;$$

se denomina *período*,  $T$ , al tiempo transcurrido en el cual todo se repite, y *frecuencia*,  $f$ , al número de veces que se repite cada ciclo completo por unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} \quad (5.15)$$

Se denomina *elongación* a la posición con respecto a la posición de equilibrio ( $x$  para este caso), y *amplitud* de la oscilación al máximo valor de la elongación ( $|x_0|$  para este caso).

Aún no podemos efectuar cálculos analíticos; aunque sabemos que el impulso aplicado por el resorte en cada cuarto de período, desde la máxima elongación hasta la posición de equilibrio, es igual a la cantidad de movimiento adquirida:  $I(0; t_1) = p_1$

$$= m v_1,$$

no estamos en condiciones de calcular ese impulso, porque no conocemos la función  $F_x(t)$ . Si la conociéramos tal vez podríamos calcular el impulso como el área bajo la gráfica. Pero aunque sabemos que  $F_x = -kx$ , no conocemos la función  $x(t)$ , de la cual *lo único que sabemos* es que debe tener un representación gráfica como la de la figura 5.14.

También podemos determinar que, si aumentamos la masa del cuerpo, para igual posición inicial, deberá tardar más en llegar a la posición de equilibrio, mientras que deberá tardar menos si aumentamos la constante  $k$  del resorte, ya que eso haría que aplique fuerzas mayores. Esto nos permite decir que el período aumentará con  $m$ , y disminuirá con  $k$ .

Aunque no tenemos las herramientas matemáticas para averiguar más detalles, esta explicación cualitativa es suficientemente valiosa aún sin fórmulas y cálculos numéricos.

En el Apéndice 4 veremos que las funciones  $x(t)$  y  $v_x(t)$  mostradas en la figura 5.14, son funciones seno o coseno, que se denominan funciones “armónicas”.

Pero a través de este tratamiento debe sernos posible analizar cualquier fuerza de tipo *restaurador* (que empuja hacia una posición de equilibrio), aunque no sea exactamente elástica (proporcional a la elongación), y debemos saber que siempre encontraremos que la partícula sometida a esta fuerza realizará oscilaciones periódicas. En general la función  $x(t)$  será *más o menos parecida* a una función armónica, sin serlo exactamente.

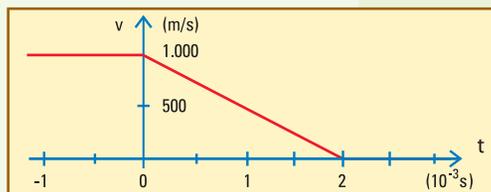
Por ejemplo: podemos pensar en la bolita de un péndulo, o en una bolita que rueda por la parte más baja de una pista o canaleta curvada hacia arriba.

**El movimiento de cualquier cuerpo sometido a una fuerza restauradora es oscilatorio, y si la fuerza es elástica las oscilaciones son armónicas.**

## EJERCICIOS CAPÍTULO 5

### ▲ Ejercicio 5.1

Un proyectil de masa  $m = 20 \text{ g}$ , que viaja con velocidad constante  $\vec{v}_0$  a lo largo de  $x$ , hace impacto en un determinado instante en una pila de arena en la cual penetra una cierta distancia hasta detenerse, como puede deducirse a partir del siguiente gráfico de la velocidad  $v(t)$  del proyectil:

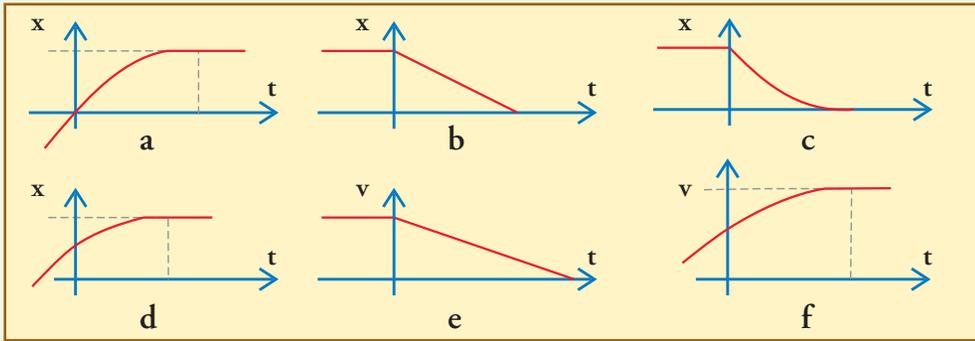


- Encuentre la distancia penetrada por el proyectil en la arena a partir del gráfico presentado.
- Calcule el módulo de la fuerza  $\vec{F}$  que frena al proyectil en este proceso.
- Calcule el impulso comunicado por el proyectil al blanco.

### ▲ Ejercicio 5.2

Un automóvil de masa  $m = 900 \text{ kg}$  se desplaza a una velocidad de  $72 \text{ km/h}$ . En un momento determinado se aplican los frenos, como resultado de lo cual actúa una fuerza neta sobre el vehículo, hacia atrás, de  $12.000 \text{ N}$ .

- Esquematice la situación planteada, dibujando cualitativamente los vectores que intervienen en el problema.
- Determine la distancia que recorre el automóvil hasta detenerse.
- Determine cuáles de los siguientes gráficos podrían ser correctos para el caso en que finalmente el automóvil queda detenido. Para todos los correctos indique valores importantes sobre ambos ejes. Indique qué representan  $t = 0$ , y  $x = 0$ , según su elección.



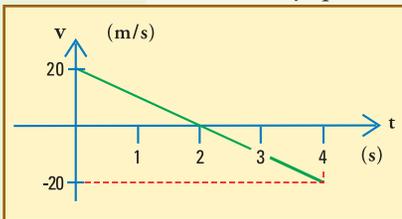
### ▲ Ejercicio 5.3

Una persona arroja oblicuamente una piedra de 200 g de masa, hacia un muro vertical de 10 m de altura que está a 20 m de distancia. La persona arroja la piedra desde aproximadamente 1,30 m de altura (lo que le permite su brazo), imprimiéndole un impulso de 4 Ns, en una dirección que forma  $30^\circ$  con la horizontal.

- Despreciando la resistencia del aire determine dónde (a qué altura) choca la piedra contra el muro (o si es que no llega a él, o si pasa por encima sin tocarlo).
- Suponiendo que al chocar la piedra rebota de diversas maneras, explique lo que puede decirse acerca de la fuerza y del impulso aplicado a la pared por este proyectil.

### ▲ Ejercicio 5.4

Considere la siguiente gráfica  $v(t)$ . Considere que se refiere a un movimiento rectilíneo vertical, y que se ha elegido positivo el sentido de movimiento hacia arriba.



- Elija la opción correcta, y justifique su elección:

Esta gráfica corresponde aproximadamente al movimiento de:

- Un yo-yo que baja y sube.
- Una pelota arrojada verticalmente hacia arriba.
- Una pelota que se deja caer desde una altura de 20 m.

- La gráfica anterior muestra que, durante los 4 s ilustrados, la fuerza neta que ha actuado sobre el móvil :

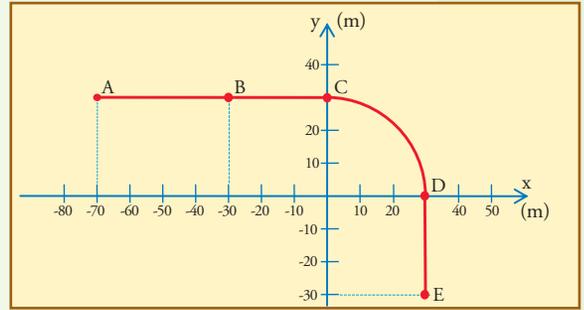
- Ha sido constante, orientada hacia abajo.
- Ha estado orientada hacia arriba, ha ido disminuyendo hasta anularse, y luego ha aumentado gradualmente, orientada hacia abajo.
- Ha sido constante, orientada hacia arriba.

Elija la opción que le parezca más razonable, y justifique su elección.

### ▲ Ejercicio 5.5

Un cuerpo de masa  $m = 30$  kg que está en reposo en A se pone en movimiento

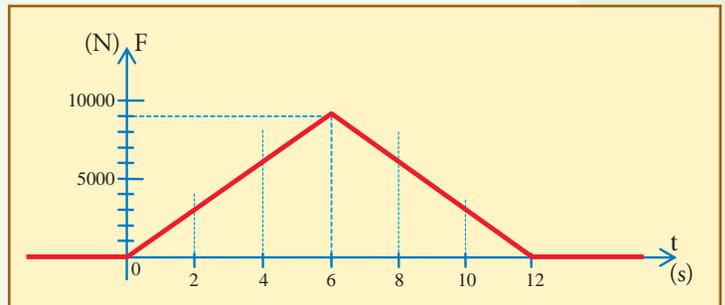
en  $t_0 = 0$  s siguiendo la trayectoria dibujada. El cuerpo aumenta gradualmente de velocidad hasta pasar por B en  $t_B = 20$  s. A partir de allí el movimiento se mantiene uniforme; el cuerpo pasa por C en  $t_C = 27,5$  s, y continúa así hasta pasar por D, en donde comienza a frenarse gradualmente hasta quedar detenido en E.



- Calculando los valores correspondientes, dibuje los vectores velocidad y escríbalos como par ordenado, en cada uno de los puntos indicados (A, B, C, D, y E).
- Calcule en qué instante pasará el móvil por D, y en qué instante llegará a E.
- Indique en qué intervalos debe haber fuerza neta (resultante) actuando sobre esta partícula para mantener este movimiento. Explique las características de esta fuerza, y calcule su módulo. Dibújela cualitativamente ubicada en varios puntos sucesivos sobre la trayectoria.
- Por medio de un diagrama vectorial de impulsos y cantidades de movimiento, encuentre los vectores impulso aplicados al cuerpo por la fuerza resultante en cada uno de los tramos indicados (AB, BC, CD, y DE). Comente la relación entre cada vector impulso y la fuerza correspondiente en ese tramo, calculada en c).

#### ▲ Ejercicio 5.6

Sobre un cuerpo de masa  $m = 1.000$  kg, que está en reposo sobre una pista horizontal, se aplica en  $t=0$  una fuerza también horizontal cuyo valor es tal que la fuerza neta (resultante) tiene el valor indicado en el siguiente gráfico  $F = F(t)$ .

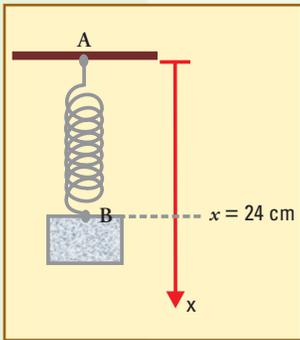


- Calcule el valor del impulso aplicado al cabo de los 12 segundos que actúa la fuerza, y con él calcule la cantidad de movimiento y la velocidad del cuerpo en  $t = 12$  s.
- Especule y reflexione acerca de las características generales de este movimiento. Indique especialmente qué sucede con la velocidad hasta  $t = 6$  s, entre 6 s y 12 s, y después de los 12 s. Muestre sus conclusiones al respecto en una gráfica aproximada de  $v(t)$ .
- Dibuje aproximadamente la gráfica de la velocidad en función del tiempo, desde  $t=0$  en adelante, obteniendo sus valores por intervalo, y compárela con la gráfica anterior. Su gráfica, a pesar de la aproximación del método, debe indicar sin lugar a dudas si la velocidad aumenta o disminuye y si lo hace linealmente o no en algún intervalo, y qué pasa luego de los 12 s.

#### ▲ Ejercicio 5.7

Un cuerpo se cuelga suavemente de un resorte de constante elástica  $k = 400$  N/m y 15 cm de longitud en equilibrio, el cual queda estirado (en reposo) hasta una longitud  $x = 24$  cm, como se ilustra.

- Complete la figura indicando (calcule los valores que hagan falta)
  - el vector que indica la fuerza con la cual el cuerpo tira del resorte en B (calcule



su valor).

a2 : el vector que indica la fuerza con el cual el resorte tira del cuerpo en B, y el que corresponde a la fuerza con la cual el resorte tira de su anclaje en A (indique valores).

a3 : el vector que indica la fuerza del campo gravitatorio sobre el cuerpo (indique su valor).

b) calcule la masa de este cuerpo.

c) Un agente tira del cuerpo hasta que el extremo del resorte llegue a  $x = 30$  cm (como se muestra en la figura), y allí lo suelta.

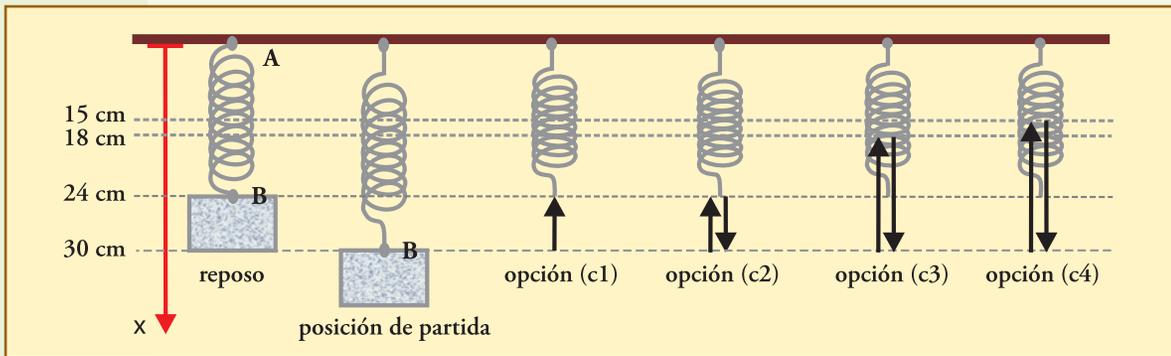
Elija la opción correcta acerca de lo que hará el cuerpo, justificando su elección.

c1) El cuerpo retornará a la posición de equilibrio ( $x = 24$  cm).

c2) El cuerpo oscilará con el punto B entre 24 y 30 cm.

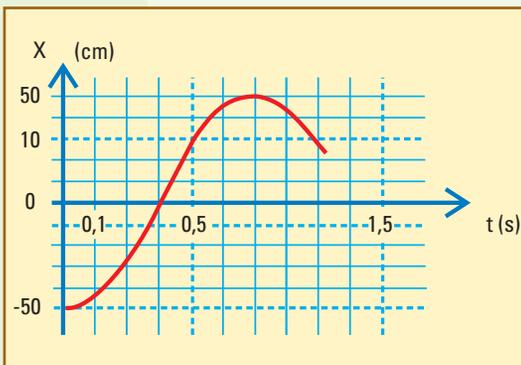
c3) El cuerpo oscilará con el punto B entre 18 y 30 cm.

c4) El cuerpo oscilará con el punto B entre 15 y 30 cm.



### ▲ Ejercicio 5.8

Un cuerpo oscila a lo largo del eje  $x$ , sobre una superficie lisa, horizontal y sin rozamiento, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica  $k = 20$  N/m, de tal manera que un trozo de la gráfica  $x(t)$  obtenida en un cierto intervalo de tiempo es la indicada en la figura (luego el movimiento continúa, aunque no se haya continuado la gráfica).



a) Calcule a partir de la gráfica el período y la frecuencia del movimiento.

b) Calcule a partir de la gráfica la distancia recorrida por el cuerpo desde  $t = 0,2$  s hasta  $t = 0,3$  s, y con eso calcule la velocidad media en ese intervalo.

c) A partir de la gráfica estime la velocidad máxima (tenga en cuenta que debe ser un valor muy parecido a su resultado anterior) y compare con lo que se obtiene aplicando:  $v_{\text{máx}} = \omega \times \text{amplitud}$ .

d) Calcule aproximadamente según la gráfica y los demás datos, el valor de la fuerza actuante (aplicada por el resorte) en los instantes  $t = 0,2$  s, y  $0,3$  s.

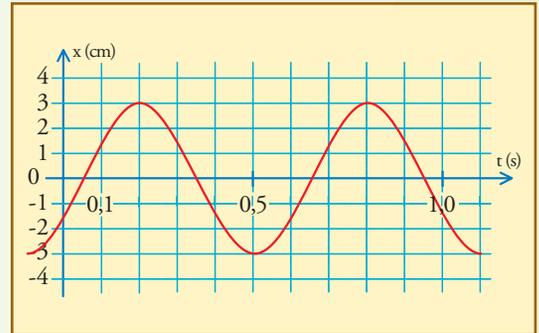
e) Para cada uno de los dos instantes considerados,  $0,2$  s y  $0,3$  s, diga hacia dónde actúa la fuerza e indique cuál es el efecto que está produciendo sobre el movimiento, seleccionando

para ello alguna de estas afirmaciones (luego justifique y muestre en un esquema):

- I. En ese instante la fuerza está haciendo que el móvil permanezca detenido.
- II. En ese instante el resorte no está aplicando fuerza.
- III. En ese instante la fuerza está haciendo aumentar el módulo de la velocidad del móvil.
- IV. En ese instante la fuerza está haciendo disminuir el módulo de la velocidad del móvil.

### ▲ Ejercicio 5.9

Considere la siguiente gráfica  $x(t)$ , correspondiente a las oscilaciones de cierto cuerpo sujeto al extremos de un resorte de constante elástica  $k = 20 \text{ N/m}$ , deslizando sin rozamiento sobre una pista horizontal.



- a) Obtenga el período de las oscilaciones a partir de la gráfica, y calcule la masa del cuerpo.
- b) Defina algún instante que considera inicial, y según él, invente (y escriba) las condiciones iniciales correspondientes para esta oscilación.
- c) Señale en la gráfica cuáles son los instantes de fuerza neta actuante nula, cuáles los de fuerza neta actuante máxima, cuáles los de velocidad máxima y cuándo la masa se detiene.
- d) Realice un esquema mostrando la ubicación espacial de la masa en  $t = 0$ , en  $t = 0,2 \text{ s}$ , y en  $t = 0,35 \text{ s}$ , y dibuje allí, cualitativamente, los vectores velocidad, y fuerza neta actuante.
- e) Calcule la velocidad máxima de dos maneras distintas, y compare los valores obtenidos (deben coincidir aceptablemente).
- f) Aplicando la Ley del Impulso calcule el impulso aplicado sobre la masa entre  $0,05 \text{ s}$  y  $0,35 \text{ s}$ ; luego, entre  $0,35$  y  $0,50 \text{ s}$ ; y finalmente entre  $0,50$  y  $0,80 \text{ s}$ . A partir de alguno de estos valores adecuado para ello calcule la fuerza media que aplica el resorte en una elongación desde una posición de equilibrio hasta volver a ella, y compare con la fuerza máxima que actúa.

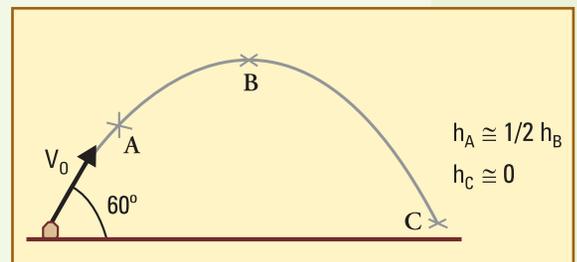
### ▲ Ejercicio 5.10

Se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil de masa  $m = 1,5 \text{ kg}$ , con una velocidad inicial de  $180 \text{ m/s}$ . Desprecie la resistencia del aire.

- a) Calcule la altura máxima que puede alcanzar el proyectil, y el tiempo demorado en alcanzarla.
- b) Calcule la altura máxima que puede alcanzar el proyectil, y el tiempo demorado, en el caso de ser lanzado oblicuamente a  $50^\circ$  por encima de la horizontal. Indique la velocidad en el punto más alto.

### ▲ Ejercicio 5.11

En un gran ambiente en el cual se ha hecho el vacío, se arroja oblicuamente una piedra de masa  $m = 2 \text{ kg}$ , con una velocidad inicial de  $30 \text{ m/s}$  orientada como muestra la figura:



- a) Calcule la altura máxima alcanzada ( $h_B$ ).
- b) Calcule y escriba como pares ordenados los vectores velocidad en A, en B, y en C.
- c) Dibuje la fuerza resultante actuante sobre el proyectil

en A, y en B, mostrando cualitativamente sus componentes normal y tangencial, y explicando cuál es el efecto de cada una sobre el movimiento en ese instante.

- d) Realice un diagrama vectorial de impulsos y cantidades de movimiento correspondiente a cada uno de los tramos (OA, AB, y BC), indicando los valores de cada vector. Comente la relación entre cada vector impulso y la fuerza resultante en ese tramo.

#### ▲ Ejercicio 5.12

Considere un satélite de 50 kg en órbita circular alrededor de la Tierra, a 1.000 km por encima de su superficie. El satélite ha sido puesto en órbita en algún momento anterior que no interesa: en el momento considerado ya está en órbita describiendo un movimiento circular uniforme.

Datos a considerar:  $M \cong 6,0 \times 10^{24}$  kg (masa de la Tierra);  $R_T \cong 6.370$  km (radio terrestre);  $G \cong 6,67 \times 10^{-11}$   $\text{Nm}^2/\text{kg}^2$  (constante de gravitación universal).

- a) Realice un esquema mostrando la situación y las fuerzas actuantes sobre el satélite.  
b) Calcule la velocidad que debe tener el satélite para mantenerse en esta órbita, y a partir de ella calcule el período del movimiento.  
c) Calcule la intensidad del campo gravitatorio en la zona de la órbita, y compárelo con el valor en la superficie de la Tierra. Elabore alguna explicación sobre la ingravidez que se observa en los filmes de situaciones orbitales.  
d) La llamada Tercera Ley de KEPLER dice que si se considera un conjunto de cuerpos en órbita alrededor de un mismo astro central, se encontrará que los cuadrados de los períodos de revolución de los distintos cuerpos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas (las cuales, según otra ley, son elipses con el astro central en uno de los focos).

Un caso particular simple, es el caso en el que las elipses no tienen excentricidad, y son circunferencias bien centradas, cuyo radio es lo mismo que el semieje mayor.

Muestre con los cálculos anteriores cómo surge esta ley para este caso de órbitas circulares, y cómo, a partir del período de revolución de los satélites y del radio de la órbita, puede calcularse la masa del astro central.

- e) Aplique lo anterior para calcular la masa de la Tierra a partir de los datos de la órbita de la Luna (alrededor de la Tierra):  $T \cong 27,322$  días;  $R_O \cong 384.400$  km (la órbita no es exactamente circular, pero es bastante parecida).

#### Comentarios sobre las preguntas.

a) Un cuerpo no tiene “fuerza de avance”. Eso no existe. Fuerza es lo que el resorte le aplica, en este caso tirando de él para frenarlo. Por acción y reacción el cuerpo tira del resorte hacia adelante con una fuerza de exactamente la misma intensidad en todo momento.

b) Una fuerza nunca puede igualar a una velocidad, ya que son cosas de diferente naturaleza y dimensión.

c) Vale el mismo comentario a).

d) Obviamente hay que aplicar la Ley del Impulso:  $m \mathbf{v}_2 = m \mathbf{v}_1 + \mathbf{I}_{x(t_1 \rightarrow t_2)}$  e igualar esta expresión a cero.

A comienzos del siglo XVIII ocurrió algo nuevo en la faz de la Tierra: el hombre inventó máquinas que trabajaban por él usando el poder del fuego.

Las máquinas eran alimentadas con carbón, y gracias a lo que se llamó la *fuerza motriz del fuego*, hacían el *trabajo*: primero bombearon agua para desagotar las minas de carbón, luego movieron cosas, después comenzaron a propulsar vehículos, y definitivamente pusieron en marcha una revolución, la *Revolución Industrial*.

En el proceso de tratar de que las máquinas hicieran más cosas con menos gasto de carbón se desarrolló uno de los conceptos más fecundos de la física, el concepto de energía, que luego desbordó el marco de la física, y ahora trata con todas las ciencias.

En este capítulo realizaremos un abordaje simplificado de este concepto, *dentro del marco de la mecánica*, y en el Apéndice 6 ampliaremos la explicación de los procesos históricos que tuvieron lugar, y del significado general de la energía.

## ■ 6.1. Trabajo mecánico

### Introducción a la idea de trabajo

En la base misma del concepto de trabajo hay una idea estrechamente relacionada con las necesidades de la Revolución Industrial: la idea de *desplazar un objeto una cierta distancia por medio de la aplicación de una fuerza*, expresada a través del *producto de ambos*:

Todo trabajo realizado implica la utilización de cierta cantidad de *energía*, por ahora imaginémosla como *algo que inevitablemente hay que gastar* para realizar estos procesos. Algo que se necesita tener previamente para hacer el trabajo, en cantidad proporcional a la cantidad de trabajo que se desea realizar.

Una fuerza se puede mantener aplicada durante un tiempo ilimitado, sin gastar nada. Por ejemplo, con un tornillo ajustado, o con un cuerpo pesado que se coloca sobre algo para mantenerlo aplastado. Se entiende que puede haber cierto “gasto” para ajustar el tornillo, o para colocar el cuerpo pesado en el lugar deseado, pero nada debe gastarse luego, mientras la fuerza permanece aplicada durante años.

Pero ésta no es la situación cuando es necesario aplicar fuerza para *desplazar* un objeto. En esos casos habrá que gastar algo que, por ahora, llamaremos energía pero definiremos con más detalle más adelante.

Tendremos que tener presente que, como organismos biológicos que somos, tendemos a hacer distintas interpretaciones del esfuerzo que se requiere de nosotros. Medimos esas interpretaciones a través de nuestra

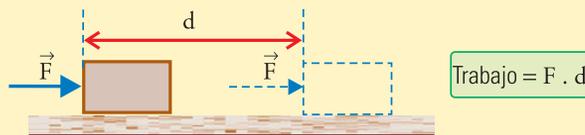


Fig. 6.1. Esquema de una fuerza que desplaza un cuerpo y realiza un trabajo.

sensación, y eso puede llevar a confusiones porque hay más de una forma legítima de interpretar lo que es un trabajo. Por ello en función de lo que vamos a plan-tear en el marco de la física, no debemos confundir las siguientes ideas:

**1**  
**TRABAJO MECÁNICO**

*Es el realizado por una fuerza o sistema de fuerzas, según definiciones que desarrollaremos en esta sección.*

**2**  
**TRABAJO BIOLÓGICO**

*Es una denominación sin rigor científico, utilizada frecuentemente para designar la energía utilizada por un organismo viviente al intentar realizar un trabajo mecánico u otros procesos parecidos.*

La idea (2) es más compleja y difícil de precisar, no nos ocuparemos de ella. No obstante, si se quisiera profundizar, de todas maneras habría que tener previamente bien definida la idea (1).

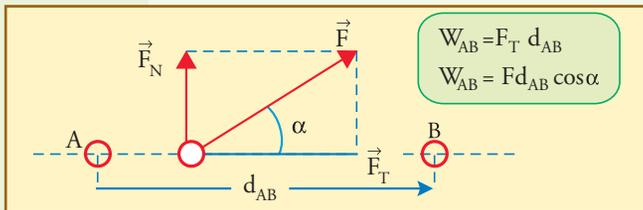
## • Trabajo mecánico

Cuando se diseña una máquina que debe mover un cuerpo se trata de que aplique la fuerza de la mejor manera posible, es decir, bien alineada con el movimiento que se quiere producir.

No obstante, sabemos que la dirección del movimiento de un cuerpo no tiene porqué coincidir en todo instante con la de la fuerza resultante, ni con la de alguna fuerza particular que le aplica algún agente determinado. Por lo tanto, la definición de trabajo hecho por una fuerza debe servir para el caso general, y debe contemplar cualquier orientación de la fuerza respecto del movimiento.

Comencemos considerando el caso de un móvil que sufre un desplazamiento rectilíneo bajo la acción de un sistema de fuerzas que se mantienen constantes en todo el intervalo (oportunamente extenderemos las ideas para cualquier caso general). De todo el sistema de fuerzas elegimos una cualquiera para definir el trabajo que realiza. La definición vale para cada fuerza, y es independiente de que haya o no otras fuerzas actuando.

El trabajo mecánico  $W$  hecho por la fuerza  $F$  aplicada sobre un punto mientras éste se desplaza desde  $A$  hasta  $B$  en una dirección que forma un ángulo  $\alpha$  con la fuerza, es el producto de la distancia recorrida por la componente *tangencial* de la fuerza:



Si bien en la definición de trabajo intervienen dos vectores (fuerza y desplazamiento), es importante notar que el trabajo no es vector, es una cantidad escalar, que puede tener signo positivo, o negativo. Una fuerza con componente tangencial positiva ( $\alpha < 90^\circ$ ) hace trabajo positivo, el cual suele denominarse *motriz*,

mientras que si esta componente es negativa ( $\alpha > 90^\circ$ ), el trabajo es negativo, y suele denominarse *resistente*.

Según la definición, una fuerza perpendicular al desplazamiento no hace trabajo, y eso se justifica en virtud de la relación entre trabajo y energía que vamos a plantear más adelante.

La unidad SI de trabajo es el *joule*, símbolo  $J$ , denominado así en honor al físico inglés James Prescott JOULE (1818-1889), uno de los “descubridores” de la conservación de la energía:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \times 1 \text{ m}$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$$

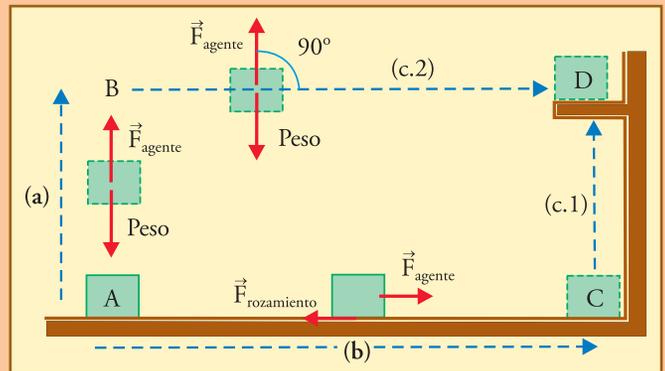
Ésta es una unidad pequeña, ya que equivale aproximadamente al trabajo que se hace levantando una pesa de 100 g a una altura de 1m, veremos más adelante la equivalencia con otras unidades de trabajo o energía de uso común.

Se utiliza casi universalmente la letra  $W$  para designar el trabajo (por trabajo en inglés, “work”). En algunos textos puede verse  $L$ , por “lavoro”, que es trabajo en italiano. No utilizaremos la  $T$ , de nuestro idioma, porque la reservamos para el tiempo, de manera que adheriremos al uso inglés.

• **Ejemplo 1**

Un cuerpo de 6 kg de masa está apoyado sobre el piso en el punto A.

- a) Calcular el trabajo que hace un agente externo para levantar el cuerpo hasta el punto B, a 1,80 m de altura sobre A.
- b) Considere que un agente arrastra este cuerpo una distancia (horizontal) de 5 m hasta el punto C, suponiendo que entre el cuerpo y el piso se produce una fuerza de rozamiento de 4 N. Calcule el trabajo hecho por el agente, y el trabajo hecho por la fuerza de rozamiento.
- c) Considere que el agente lleva este cuerpo hasta dejarlo colocado en una repisa en D, 1,80 m por encima del punto B de las siguientes dos maneras:
  - c.1) Arrastra el cuerpo hasta C y allí lo levanta verticalmente hasta la repisa.
  - c.2) Levanta el cuerpo hasta B, y luego lo lleva directamente a la repisa.



• **Desarrollo**

- a) El agente sólo debe equilibrar al peso, de valor:  $m g \cong 59 \text{ N}$ . La fuerza se aplica en la misma dirección y sentido que el desplazamiento, por lo cual:  $W_{AB} \cong 59 \text{ N} \times 1,80 \text{ m}$

$$W_{AB} = 106 \text{ J}$$

- b) Ahora el agente sólo debe equilibrar el rozamiento:

$$F_{\text{agente}} = 4 \text{ N},$$

$$W_{\text{agente}}(AC) = 4 \text{ N} \times 5 \text{ m}$$

$$W_{\text{agente}}(AC) = 20 \text{ J}.$$

El rozamiento es opuesto al desplazamiento: entonces

$$W_{\text{rozamiento}}(AC) = - 4 \text{ N} \times 5 \text{ m}$$

$$W_{\text{rozamiento}}(AC) = - 20 \text{ J}.$$

$$F_{\text{rozamiento}} = 4 \text{ N}, \text{ pero } \alpha = 180^\circ;$$

- c.1) El agente debe hacer sucesivamente lo calculado en b) más lo calculado en a):  $20 \text{ J} + 106 \text{ J} = 126 \text{ J}$ .
- c.2) Ahora el agente debe hacer sucesivamente lo calculado en a) más el trabajo para llevar el cuerpo horizontalmente a 1,80 m de altura (trayecto BD). Pero para esto último el agente aplica una fuerza que equilibra al peso, sin componente tangencial ( $\alpha = 90^\circ$ ), y no realiza trabajo.

Por lo tanto el trabajo del agente para ABD, es el mismo que para AB: 106 J.

En este punto vale la pena discutir si puede ser correcto considerar que el trabajo es nulo para transportar un cuerpo de 6 kg a 1,80 m de altura a lo largo de 5 m. Según la definición corresponde decir  $W_{BD} = 0$ , pero, ¿no correspondería cambiar esa definición?

No corresponde cambiar, está bien así, y ya hemos comentado algo sobre esto. Para una persona puede ser cansador transportar este cuerpo a 1,80 m de altura. Como también sería cansador si le pidieran que simplemente lo mantuviese fijo en D durante cierto tiempo  $\Delta t$ , hasta que vayan a comprar la repisa.

Pero eso no interesa en la definición de *trabajo mecánico hecho por una fuerza*. La fuerza que aplica el agente para sostener el cuerpo, cansándose, también podría ser aplicada por un soporte, que lo podría sostener indefinidamente. Y el transporte BD podría hacerse con un riel adecuado sin esfuerzo alguno. Sólo habría que trabajar para subir el cuerpo hasta B (106 J), pero no para mantenerlo allí, o transportarlo hasta D. Incluso el riel podría tener rozamiento, y el agente debería hacer trabajo en el transporte BD, tal como ocurre en el AC, pero sería *para vencer el rozamiento*, y no tendría que ver con la fuerza vertical.

Es decir, algunas cosas se pueden hacer bien, sin gastar, o se pueden hacer mal, con mucho gasto. Veremos muchas veces que las componentes de las fuerzas perpendiculares a los movimientos siempre pueden ser aplicadas por dispositivos que, si son adecuados, no gastan para ello.

## ■ 6.2. Teorema del trabajo y la energía cinética

Consideremos un intervalo AB de la trayectoria de un cuerpo prácticamente puntual. Si bien lo que vamos a demostrar es válido para el movimiento del centro de masa de cualquier cuerpo, aunque éste no sea rígido ni puntual, es útil simplificar las ideas pensando que hablamos de una partícula de masa  $m$  concentrada en un punto, porque ése es un caso simple para el cual este teorema va a ser válido siempre sin ninguna restricción, por lo que sirve para guiar muchos razonamientos sobre sistemas más complicados.

Tenemos que el trabajo de la fuerza resultante vale  $W_{AB} = F_T d_{AB}$ . Si la trayectoria es curva, se entiende que AB es la longitud recorrida a lo largo de la curva.

Ahora bien, consideremos el caso más simple en que  $F_T$  se mantiene constante (si  $F_T$  varía, todo sigue siendo válido para intervalos suficientemente pequeños); para este caso el movimiento es uniformemente variado (aunque no fuese rectilíneo), y la distancia recorrida es  $d_{AB} = \frac{1}{2} (v_A + v_B) \Delta t$ , de manera que:

$$W_{AB} = F_T d_{AB}$$

$$W_{AB} = \frac{(v_A + v_B)}{2} F_T \Delta t$$

Según la ley del impulso para la fuerza tangencial (5.1), tenemos que  $F_T \Delta t = m (v_B - v_A)$ , de manera que la expresión para el trabajo queda:

$$W_{AB} = \frac{m(v_A + v_B)(v_B - v_A)}{2}$$

$$W_{AB} = \frac{m(v_B^2 - v_A^2)}{2} \quad (6.2)$$

Esta expresión es muy importante porque nos dice que el trabajo de la fuerza resul-

tante se manifiesta como una variación de la cantidad  $\frac{1}{2} m v^2$ , que se denomina *energía cinética*, que significa *energía de movimiento*:

$$E_C = \frac{m v^2}{2} \quad (6.3)$$

$$W_{AB} = E_{CB} - E_{CA} \quad (6.4)$$

$$E_{CB} = E_{CA} + W_{AB} \quad (6.5)$$

La energía cinética debe tener la misma unidad que el trabajo (J), ya que de lo contrario no podrían igualarse, sumarse o restarse; y esto se verifica fácilmente si se recuerda que la unidad de fuerza es:  $[N] = [kg][m]/[s]^2$ .

### Nota 1. Energía cinética como capacidad para hacer trabajo

*Si la cantidad dada por (6.3) es una energía, le corresponde el nombre de cinética, dada la forma en que depende del movimiento. Ahora bien, ¿por qué le llamamos energía?*

*A partir de la idea inicial de que la energía es algo que los sistemas deben “gastar” (y previamente tener) para hacer un trabajo, esta cantidad  $E_C$  sería merecedora de esa denominación (energía) si pudiéramos probar que perdiendo esa cantidad  $\Delta E_C$ , el móvil podrá hacer esa misma cantidad de trabajo sobre otro sistema.*

*Ahora bien, en las situaciones típicas con  $W < 0$ , en las que algún agente intenta detener un cuerpo en movimiento, como la que discutimos a continuación, eso es muy fácil de probar.*

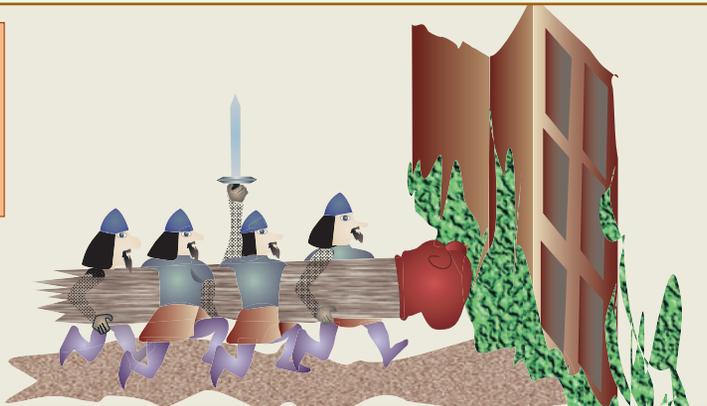
*Efectivamente, para detener un cuerpo que tiene energía cinética  $E_{CA}$ , el agente tendrá que aplicarle una fuerza hasta que realice un trabajo  $W_{AB} = - E_{CA}$*

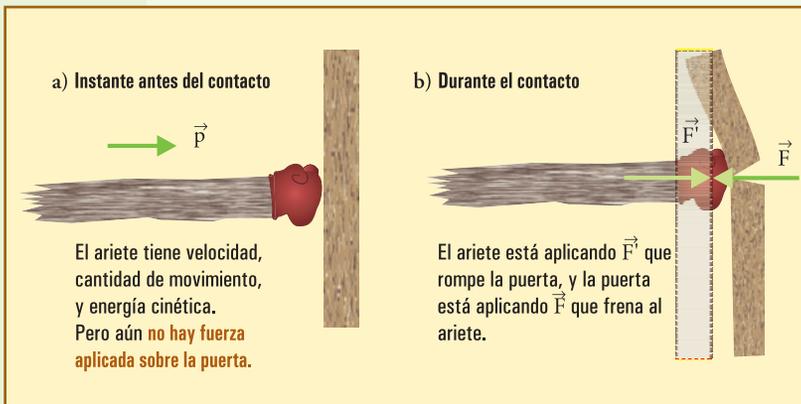
$$W_{AB} = - F d_{AB}$$

*Es decir que el móvil siempre recorrerá una distancia antes de detenerse ( $d_{AB} > 0$ ). Además, lo hará aplicando una fuerza igual a la que se le aplique a él (principio de acción y reacción), y por lo tanto hasta detenerse avanzará haciendo una cantidad positiva de trabajo  $W_{AB} = E_{CA}$ . Esto da pie para decir que, en estas situaciones puramente mecánicas y simples, la energía cinética es la capacidad del móvil para hacer trabajo.*

En las próximas figuras vemos la ilustración de una situación a la que se le puede aplicar esta idea.

**Fig. 6.2.** Los soldados tratan de derribar una puerta con un ariete. Éste, un tronco de gran masa, acumula energía cinética gracias al trabajo de los homrecitos en la carrera previa.





**Fig. 6.3.** El ariete es detenido por la fuerza  $\vec{F}$  que le aplica la puerta. Pero ello no puede ocurrir sin que el ariete deforme (y tal vez rompa) al obstáculo aplicándole la fuerza  $\vec{F}$ , y avanzando la distancia necesaria para hacer un trabajo igual a la energía cinética que tenía antes del contacto.

Lo mismo es el caso de golpear con un martillo: si el cuerpo en movimiento encuentra un obstáculo muy duro, le aplicará una fuerza tan grande

como sea necesaria para que se desplace la distancia suficiente hasta que el producto *fuerza  $\times$  distancia*, igual a la energía cinética que el cuerpo debe perder, es decir la que posee inicialmente.

Por otra parte, considerando expresión  $W = \Delta E_c$ , para el caso  $W > 0$ , podemos decir que *el trabajo hecho sobre el sistema es energía transferida al mismo.*

Esta es una idea fundamental que podremos profundizar a lo largo de este capítulo, comenzando por el siguiente ejemplo.

### • Ejemplo desarrollado

Considere un cuerpo de 5 kg que en  $t_A$  tiene una velocidad de 3 m/s, y que es empujado durante 10 s, hasta  $t_B$ , por una fuerza resultante de 4 N (constante) alineada con la trayectoria.

a) Calcule la velocidad que adquiere el móvil y la distancia recorrida en estos 10 s.

b) Verifique la expresión (6.4), aprovechando para reflexionar sobre el significado de los conceptos.

### • Desarrollo

a) El movimiento es rectilíneo. Aplicamos la ley del impulso:

$$4 \text{ N} \times 10 \text{ s} = 5 \text{ kg} \times (v_B - 3 \text{ m/s})$$

$$v_B = 11 \text{ m/s};$$

$$d = \frac{1}{2}(v_A + v_B) \Delta t$$

$$d = 70 \text{ m}$$

b)

$$W = 4 \text{ N} \times 70 \text{ m}$$

$$W = 280 \text{ J};$$

$$E_{cA} = \frac{1}{2} 5 \text{ kg} \times (3 \text{ m/s})^2$$

$$E_{cA} = 22,5 \text{ J}$$

$$E_{cB} = \frac{1}{2} 5 \text{ kg} \times (11 \text{ m/s})^2$$

$$E_{cB} = 302,5 \text{ J}.$$

De manera que por un lado podemos verificar la expresión (6.4):  $302,5 - 22,5 = 280$ .

Por otro lado, veamos qué interpretamos acerca de la energía:

El cuerpo tenía inicialmente 22,5 J de energía, y luego pasa a tener 302,5, es decir 280 J más, cuando se hace sobre él un trabajo de 280 J.

Esto nos dice que todo el trabajo (positivo) hecho sobre el cuerpo ha sido almacenado por éste como energía cinética, y podemos interpretar que cada joule positivo de trabajo que se haga sobre él, es un joule que se le transfiere.

La energía cinética, que depende exclusivamente de la velocidad, o sea del movimiento, es una energía mecánica. Las energías mecánicas son las que se expresan en términos de variables mecánicas: posiciones y velocidades. Veremos otras.

### Nota 2. La energía cinética es un escalar positivo

La expresión (6.3) muestra que la energía cinética es siempre positiva independientemente del sentido del movimiento. No puede ser negativa, y sólo puede ser cero si el cuerpo está en reposo. Si un sistema tiene varias partes en movimiento, una parte no puede cancelar la contribución a la energía cinética de otra parte: todas las partes aportan contribuciones de signo positivo. Es claro que no es un concepto vectorial. La energía cinética es un escalar absolutamente independiente de la orientación del movimiento.

### Nota 3. Energía cinética de traslación

En un sistema de muchas partículas animadas cada una de diferente velocidad, podríamos expresar la energía cinética total como:

$$E_c = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (6.6)$$

Si el sistema es un cuerpo rígido, el movimiento más simple es el de traslación pura, en el cual todos los puntos tienen exactamente el mismo movimiento (el mismo vector velocidad). En este caso, todas las  $v_i^2$  saldrían factor común en la suma (6.6), que se transformaría en:

$$E_{c(\text{traslación pura})} = \frac{m v_{CM}^2}{2} \quad (6.7)$$

En esta expresión  $m$  es la masa total, y  $v_{CM}$  la velocidad del centro de masa, es en realidad la velocidad de cualquier punto, ya que todos tienen la misma velocidad.

Si el cuerpo es rígido pero su movimiento no es de traslación pura, entonces es combinación de traslación con rotación (en este caso las  $\vec{v}_i$  no son iguales entre sí, ni iguales a  $\vec{v}_{CM}$ ), y la energía cinética (6.6) se escribe como la suma de los correspondientes términos:

$$E_c = E_{c_T} + E_{c_R} \quad (6.8)$$

La energía cinética de traslación,  $E_{c_T}$ , siempre está dada por (6.7), y veremos en el próximo capítulo como se escribe la de rotación,  $E_{c_R}$ .

## • Fuerza tangencial media

Cuando la fuerza tangencial no es constante, podemos calcular el trabajo por un proceso similar al seguido para calcular el impulso de una fuerza variable: si conocemos la fuerza tangencial para cada posición a lo largo de la trayectoria, podemos graficarla, y entonces tendremos que el trabajo estará dado por el área entre la gráfica y el eje de abscisas:

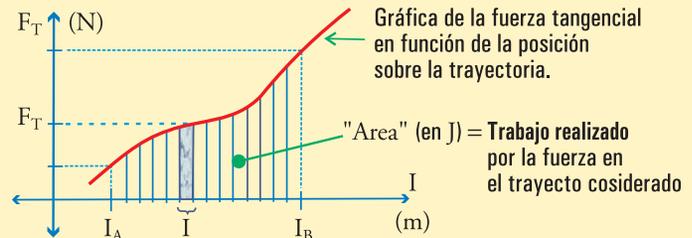


Fig. 6.4. Si la trayectoria se divide en pequeños segmentos de longitud  $\delta l$ , el trabajo en cada uno de ellos,  $F_T \delta l$ , es el área del rectángulo de ancho  $\delta l$  y altura  $F_T$ . El trabajo total hecho en el intervalo es la suma de todas las contribuciones, o sea, toda el área sombreada.

Nuevamente hay que recordar que el área se calcula con las unidades de los ejes, o sea resulta con unidad de energía.

A veces interesa definir la *fuerza tangencial media*, como aquella que, manteniendo constante el valor, hubiera hecho el mismo trabajo (o sea la misma área) en el mismo trayecto. En este caso:

$$F_{T(\text{media})} = \frac{W_{AB}}{d_{AB}}$$

$$F_{T(\text{media})} = \frac{\text{Área}}{d_{AB}}$$

● La Ley del Impulso permite relacionar la fuerza tangencial con las velocidades inicial y final a través del tiempo demorado, según:

$$F_T \Delta t = \Delta p$$

El teorema del trabajo y la energía cinética permiten relacionar las mismas cosas, fuerza tangencial con velocidades inicial y final a través de la distancia recorrida, según:

$$F_T d = \Delta E_c$$

Si en un problema en el que estamos trabajando con fuerza tangencial y velocidades, tenemos el tiempo demorado, podemos aplicar directamente la Ley del Impulso, mientras que si tenemos la distancia recorrida, conviene aplicar trabajo y energía cinética.

### ● Ejemplo

Calcular la fuerza necesaria para detener en 30 metros un cuerpo de masa  $m = 200 \text{ kg}$  que está viajando a razón de  $10 \text{ m/s}$ .

### ● Desarrollo

Calculemos la energía cinética inicial  $E_{c0}$ , para aplicar directamente  $W = \Delta E_c$   
 $W = -E_{c0}$

$$E_{c0} = \frac{200 \text{ kg} \times (10 \text{ m/s})^2}{2}$$

$$E_{c0} = 10.000 \text{ J}; \text{ entonces } W = -10.000 \text{ J},$$

y la fuerza tangencial media es

$$F_T = -10.000 / 30$$

$$F_T = -333,3 \text{ N}$$

Si quisiéramos aplicar la ley del impulso, deberíamos calcular primero el tiempo demorado. Para ello decimos: supongamos que es un MRUV, con  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ , y  $v_f = 0$ , entonces  $v_m = 5 \text{ m/s}$ . Para recorrer  $30 \text{ m}$  se demorarían  $30 / 5 = 6 \text{ s}$ . El impulso aplicado es igual a la variación de la cantidad de movimiento:  $-2.000 \text{ kg m/s}$ , entonces la fuerza media tangencial:  $-2.000 / 6 = -333,3 \text{ N}$ .

## ■ 6.3. Sistemas con fuerzas conservativas

Ya hemos hablado de la energía cinética, que es la forma de almacenar energía en el movimiento de un sistema.

Ahora hablaremos de la energía “potencial”, que es aquella que el sistema puede tener aún estando en reposo, en función de las posiciones o deformaciones de las partes.

La denominación potencial hace referencia a la *posibilidad de llegar a ser algo*, y no tiene que ver con la potencia mecánica que definiremos más adelante; una energía potencial, como veremos, debe interpretarse como una capacidad “latente”, en el sistema,

algo que puede llegar a manifestarse si se dan determinadas condiciones.

La idea básica de un sistema que almacena energía mecánica en forma potencial significa que su estructura o naturaleza es tal que, cuando un agente externo realiza sobre él un trabajo positivo  $W$  llevando sus partes desde una posición A hasta otra B, si luego el sistema puede retornar de B a A, lo hace realizando esa misma cantidad de trabajo  $W$  (positivo) *sobre el agente externo* (le devuelve la energía antes suministrada).

#### • Un ejemplo

Quien desee subir un cuerpo hasta una cierta posición más elevada, deberá hacer trabajo positivo para ello, ya que el cuerpo no subirá espontáneamente porque la fuerza peso siempre se opondrá a ello. Pero una vez que el cuerpo esté en la posición alta, la fuerza peso tenderá a hacerlo retornar a la posición baja, y si eso ocurre, hará trabajo positivo en el descenso.

Ahora bien, el cuerpo no tendría la capacidad de hacer trabajo bajando si no estuviese en el campo gravitatorio terrestre. De manera que el conjunto {cuerpo, planeta Tierra}, o el conjunto {cuerpo, campo gravitatorio de la Tierra}, es un sistema que almacena energía potencial gravitatoria cuando el cuerpo sube, y puede devolverla al bajar. La **energía potencial gravitatoria** debe ser una función de la altura del cuerpo.

#### • Otro ejemplo

Si alguien estira o comprime un resorte, o deforma cualquier cuerpo elástico, hace trabajo positivo para ello. Pero luego el cuerpo elástico tiende a recuperar su forma inicial, pudiendo él hacer trabajo positivo en ese proceso. Decimos entonces que almacena **energía potencial elástica** al ser deformado, y puede devolverla al recuperar su forma inicial. La energía potencial elástica debe ser una función de la deformación.

Si el cuerpo no es elástico puede quedar deformado sin hacer ningún trabajo luego de ello; ese es un ejemplo de cuerpo que no almacena energía potencial elástica.

## • Fuerza conservativa y energía potencial

Supongamos un ente o aparato que puede aplicar sobre un cuerpo una fuerza de tales características, que el trabajo que hace sobre el cuerpo al pasar éste de cualquier punto A a cualquier punto B, es exactamente el mismo cambiado de signo que el que hace al pasar el cuerpo de B a A.

De manera que si esta fuerza hace un trabajo negativo en el trayecto AB, lo cual, en virtud de las ideas que hemos enunciado hasta aquí, puede ser considerado como quitar esa cantidad de energía, queda garantizado que si se permite luego que el sistema retorne a la posición inicial A, en ese proceso la fuerza hará exactamente esa misma cantidad de trabajo, pero ahora positivo, es decir, *devolviendo íntegramente toda la energía*. Por esta razón, una fuerza de este tipo es denominada *conservativa*, la designaremos  $\vec{F}_C$  (podemos imaginarla como la gravedad, o la fuerza de un resorte). Se considera que en la posición B el ente capaz de aplicar esta fuerza tiene almacenada esa energía en forma potencial, y

Dado que en la definición (6.9') involucra un signo menos, y eso a veces confunde, puede ser útil imaginar un agente externo que actúa equilibrando a  $F_c$  y llevando el cuerpo de una posición a otra sin energía cinética. Para este agente será  $W_{ext} = -W_{F_c}$ , y por lo tanto  $\Delta E_p = W_{ext}$ . Podemos interpretar esto sin el molesto signo menos, imaginado una situación en la cual el agente hace un trabajo positivo, diciendo que la energía que el agente suministra es almacenada por el sistema como energía potencial.

puede conservarla intacta de esta manera, mientras permanezca en esa posición, todo el tiempo que sea.

Es decir, formalmente la energía potencial sería una función del estado del sistema tal que:

$$\begin{aligned} E_{pB} - E_{pA} &= \text{trabajo que } \vec{F}_c \text{ puede hacer en el trayecto } B \rightarrow A & (6.9) \\ E_{pB} - E_{pA} &= W_{F_c}(B \rightarrow A) \\ E_{pB} - E_{pA} &= -W_{F_c}(A \rightarrow B) \end{aligned}$$

Podemos enunciar que en general, cuando en un sistema actúa una fuerza conservativa,  $\vec{F}_c$ , es posible definir una energía potencial,  $E_p$ , función de las posiciones de los cuerpos, tal que:

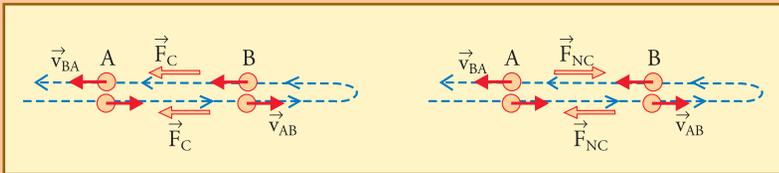
$$\Delta E_p = -W_{F_c} \quad (6.9')$$

El signo menos en (6.9') indica que si  $W_{F_c}$  es positivo, entonces  $E_{p_{final}} < E_{p_{inicial}}$ , o sea,  $\vec{F}_c$  empuja hacia donde la energía potencial disminuye, porque  $E_p$  es una energía que se "gasta" a medida que  $\vec{F}_c$  hace trabajo.

#### Nota 4. Condición necesaria para que una fuerza sea consecutiva

Si consideramos la definición de fuerza conservativa,  $W_{F_c}(A \rightarrow B) = -W_{F_c}(B \rightarrow A)$ , para dos puntos A, B, muy próximos, nos damos cuenta de que  $\vec{F}_c$  debe estar igualmente definida en cada posición, independientemente de con qué rapidez o con qué sentido se pase por allí. En cada posición debe actuar siempre de la misma manera, con igual intensidad y sentido, independientemente de cómo sea el movimiento. Así vemos que fuerzas como la gravitatoria, siempre vertical hacia abajo y de módulo constante, independientemente de que el objeto sobre el que actúa suba o baje, o la elástica, siempre hacia la posición de equilibrio del resorte, independientemente de que éste se esté estirando o acortando, cumplen con esta condición y son típicos ejemplos de fuerzas conservativas.

En cambio encontramos que la fuerza de rozamiento invierte su sentido cuando invertimos el sentido en que recorremos un trayecto cualquiera AB, y esto la califica automáticamente como fuerza no conservativa: quita energía a la ida ( $W_{A \rightarrow B} < 0$ ), y la vuelve a quitar a la vuelta ( $W_{B \rightarrow A} < 0$ ).



**Fig. 6.5.** Esquema de cómo actúa una fuerza conservativa (izquierda), y una no conservativa (derecha), mientras un móvil pasa sucesivamente por los puntos A y B en un sentido y luego en el otro.

## • Energía potencial gravitatoria

Consideremos un cuerpo de masa  $m$  en la vecindad de la superficie de la Tierra, donde el campo gravitatorio es constante. Si colocamos un eje  $x$  horizontal y un eje  $y$  vertical, positivo hacia arriba, la fuerza peso será:  $\vec{P} = (0; -m g)$ .

Una forma útil y simple de calcular el trabajo que hace esta fuerza en un trayecto cualquiera es comenzar considerando un trayecto rectilíneo desde un punto  $(x_A; y_A)$ , hasta otro  $(x_B; y_B)$ .

$$W_P(AB) = P \cos\alpha d_{AB}$$

Y teniendo en cuenta que  $d_{AB} \cos\alpha = -\Delta y$ , resulta:

$$W_P(AB) = -P \Delta y \quad (6.10)$$

Para ver más fácilmente cómo aparece el signo menos, se aconseja razonar con el ángulo  $\beta$ , mostrado en la figura, que es el ángulo que utilizamos siempre en los planos inclinados ( $\beta$  es el ángulo que forma la normal al plano con la vertical, y también es el que forma el plano con la horizontal). Vemos en el esquema (hecho para un caso en que  $\alpha > 90^\circ$ , o sea  $y_B > y_A$ ), que  $\Delta y = d_{AB} \sin\beta$ , pero como  $\beta$  es lo que  $\alpha$  excede de  $90^\circ$ , resulta que  $\sin\beta = -\cos\alpha$ , y entonces

$$d_{AB} \cos\alpha = -d_{AB} \sin\beta$$

$$d_{AB} \cos\alpha = -\Delta y$$

Ahora bien, (6.10) es válida para trayectos AB de cualquier forma, y no sólo rectilíneos. Para convencernos de eso imaginemos que AB está compuesto de varios desplazamientos sucesivos de distinta dirección,  $A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow \dots$  etc.  $\rightarrow B$ . Al sumar todas las contribuciones  $-P \Delta y$  para obtener el trabajo total, tendremos el factor común  $-P$  por la suma de todos los  $\Delta y$  sucesivos, cuyo resultado será  $-P$  por la diferencia total  $y_B - y_A$ .

De manera que, si  $\Delta E_p = -W_p$ , entonces  $\Delta E_p = P \Delta y$

$$\Delta E_p = m g y_B - m g y_A.$$

Esto significa que podemos definir:

$$E_p = P y$$

$$E_p = m g y$$

$$(6.11)$$

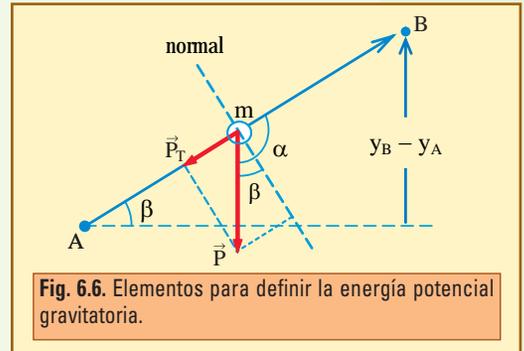
Vemos aquí cómo se cumple que la fuerza del campo apunta hacia donde disminuye  $E_p$ : la fuerza gravitatoria apunta hacia abajo, que es hacia donde disminuye  $y$ .

Ahora bien,  $y$  representa la altura con respecto a un nivel que ha sido definido arbitrariamente como altura cero (por ejemplo, el nivel del piso, o el nivel del mar, o el punto más bajo de algo, etc.). Es claro que estas elecciones posibles son todas arbitrarias, y ahora nos encontramos con que si cambiamos esta elección, cambia  $E_p$ .

¿Qué significa esto?

Esto es una consecuencia natural de la definición misma de lo que es una energía potencial, dada por (6.9) o (6.9'): la energía potencial es una función de la posición que se define por su variación.

El valor particular de  $E_p$  en un punto cualquiera no tiene significado físico; sólo la tiene su variación entre dos puntos. De manera que si  $E_p$  es una función energía potencial correcta para un sistema,  $E_p +$  cualquier constante, también lo es.



Para el caso específico de la fuerza gravitatoria, podemos decir que la función energía potencial más general posible será:

$$E_p = m g y + C \quad (6.11')$$

Donde  $C$  es una constante que se elige arbitrariamente. En general se elige para que  $E_p$  sea cero en algún lugar particular. Si no se escribe nada,  $E_p$  será cero en  $y = 0$  (que de todos modos corresponderá a una altura arbitraria).

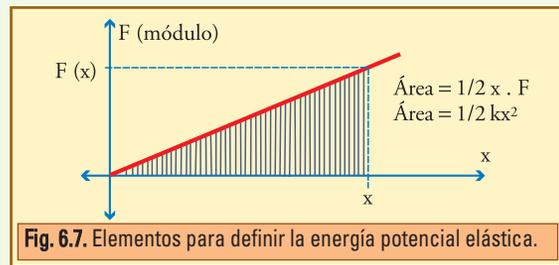
Una vez que se eligen estos valores, ya no se cambian, y los resultados con significado físico no serán afectados por estas elecciones, como veremos en ejemplos concretos.

## • Energía potencial elástica

Para el caso de una fuerza elástica a lo largo del eje  $x$ , si definimos  $x = 0$  en la posición de equilibrio, se tiene  $F_x = -k x$ . De manera que la fuerza tangencial es hacia la posición de equilibrio, y hace un trabajo negativo tanto si el resorte es estirado como comprimido. Por lo tanto, si partimos de  $x = 0$ , y estiramos o comprimimos el resorte hasta cualquier valor  $x$ , según (6.9) será:

$$E_p(x) - E_p(0) = -W$$

$$E_p(x) - E_p(0) = \text{Área de } |F(x)|$$



De manera que, finalmente:

$$E_{p(\text{elástica})} = \frac{k x^2}{2} + C \quad (6.12)$$

Donde  $C$  es el valor arbitrario de  $E_p$  en la posición de equilibrio (generalmente se toma  $C = 0$ ).

Vemos aquí cómo se cumple que la fuerza del campo apunta hacia donde disminuye  $E_p$ : la fuerza elástica siempre apunta hacia la posición de equilibrio del resorte, y en (6.12) esta posición es  $x = 0$ , en la cual la energía potencial tiene su mínimo valor.

### • Ejemplo 1

Calcule la fuerza necesaria para estirar 20 cm un resorte de constante elástica  $k = 3.000 \text{ N/m}$ , y calcule también, para el proceso de estirar el resorte: el trabajo que hace un agente externo, el trabajo que hace el resorte sobre el agente, y la energía potencial que almacena el resorte.

### • Desarrollo

$$F = k \Delta x$$

$$F = 3.000 \text{ (N/m)} \times 0,2 \text{ m}$$

$$F = 600 \text{ N.}$$

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

$$W_{\text{ext}} = \frac{3.000 \times 0,2^2}{2}$$

$$W_{\text{ext}} = 60 \text{ J};$$

$$W_{\text{resorte}} = -60 \text{ J};$$

para justificar estos signos se debería hacer un esquema mostrando que la fuerza que aplica el agente externo actúa en el sentido de la deformación, y la que (por reacción) le aplica el resorte a él, actúa en sentido opuesto.

$$\Delta E_p = 60 \text{ J}$$

Notar que una fuerza de 600 N actuando a lo largo de 20 cm, hubiera hecho un trabajo de 120 J, pero el trabajo fue sólo de 60, porque la fuerza no fue siempre de 600 N: comenzó en cero, y fue aumentando a medida que el resorte se estiraba; llegó a 600 al final. Puede decirse que la fuerza media fue de 300 N, y  $300 \times 0,2$  sí da 60 J.

### • Ejemplo 2

Considere un resorte alineado con el eje x que tiene un extremo fijo en  $x = 0$ , tal que su energía potencial está dada por la función  $E_p(x) = 600 \text{ (N/m)} \times (x - 0,20 \text{ m})^2$ .

- Encuentre la constante elástica y la posición de equilibrio  $x_0$  del extremo libre del resorte.
- Encuentre la fuerza que debe aplicar un agente para estirar el extremo libre del resorte hasta  $x_1 = 0,30 \text{ m}$ . Calcule el trabajo que hace el agente para estirar el resorte y muéstrelo en una gráfica de la función  $E_p(x)$ .
- Repita los puntos a) y b) si la función energía potencial hubiese sido  $E_{p1}(x) = 600 \text{ (N/m)} \times (x - 0,20 \text{ m})^2 + 10 \text{ J}$  (es decir, la misma  $E_p(x)$  más una constante igual a 10 J).

### • Desarrollo

- Dado que el coeficiente de  $x^2$ , en este caso 600 N/m, en la expresión de la energía potencial elástica, debe ser  $k/2$ , podemos deducir que  $k = 1200 \text{ N/m}$ . Por otra parte es claro que el mínimo de la función  $E_p(x)$  del enunciado está en  $x = 0,20 \text{ m}$ , ya que ahí vale 0, y en cualquier x mayor o menor (que 0,20 m),  $E_p$  tiene algún valor positivo. Por lo tanto, ésa debe ser la posición de equilibrio.

$$\text{b) } F = k \Delta x$$

$$F = 1.200 \text{ (N/m)} \times (0,30 - 0,20) \text{ m}$$

$$F = 120 \text{ N}$$

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_p$$

$$W_{\text{ext}} = 600 \times 0,1^2 - 0$$

$$W_{\text{ext}} = 6 \text{ J}$$

- El coeficiente de  $x^2$  sigue siendo 600 N/m, de manera que  $k = 1.200 \text{ N/m}$ . La función  $E_{p1}(x)$  tiene otro valor en el mínimo, pero éste sigue estando en  $x = 0,20 \text{ m}$ , de manera que ésa sigue siendo la posición de equilibrio.

La fuerza para estirar el resorte está dada por la misma expresión (independiente de la constante que se pueda agregar a la función  $E_p$ )  $F = k \Delta x$

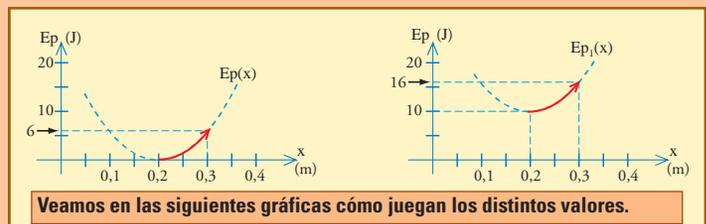
$$F = 120 \text{ N.}$$

Ahora  $E_{p1}(0,30) = 600 \times 0,1^2 + 10$   
 $E_{p1}(0,30) = 16;$   
 $E_{p1}(0,2) = 10;$

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{p1}$$

$$W_{\text{ext}} = 16 - 10$$

$$W_{\text{ext}} = 6 \text{ J}$$



## ■ 6.4. Movimiento en presencia de fuerzas conservativas y no conservativas

Supongamos un sistema que consiste en una partícula sobre la que actúa una fuerza conservativa  $\vec{F}_C$ , y alguna otra fuerza no conservativa,  $\vec{F}_{NC}$  (que podría ser aplicada por algún agente, o deberse al rozamiento, o a un motor, etc.).

La fuerza resultante sobre la partícula está dada por:  $\vec{F}_R = \vec{F}_{NC} + \vec{F}_C$ , y por lo tanto  $W_R = W_{NC} + W_{F_C}$ . Ahora bien, según el teorema del trabajo y la energía cinética,  $W_R = \Delta E_c$ , de manera que:

$$W_{NC} + W_{F_C} = \Delta E_c$$

Cuando actúa una fuerza conservativa podemos definir una energía potencial asociada con ella según (6.9),  $W_{F_C} = -\Delta E_p$ , entonces sustituyendo esto en la expresión anterior queda:

$$W_{NC} - \Delta E_p = \Delta E_c,$$

Esta expresión nos invita a agrupar todas las energías en el miembro derecho:

$$W_{NC} = \Delta E_p + \Delta E_c \quad (6.13)$$

Y llamando energía mecánica total,  $E_m$ , a la suma de la cinética y la potencial, podemos escribir:

$$E_m = E_p + E_c \quad (6.14)$$

$$W_{NC} = \Delta E_m \quad (6.13')$$

### ● Ejemplo. Resorte empuja, frena el rozamiento

Un cuerpo de 16 kg está en reposo en el punto A de una pista horizontal. Un resorte de constante elástica  $k = 104 \text{ N/m}$ , que está comprimido 20 cm, se suelta y lo impulsa hasta perder contacto con él en el punto B. Entre el cuerpo y el piso actúa una fuerza de rozamiento constante de 50 N, que lo detiene finalmente en un punto C.



1) Dibujar diagramas de cuerpo libre mostrando todas las fuerzas actuantes en cada tramo (entre A y B, y entre B y C).

2) Calcule la velocidad con que el cuerpo pasa por B.

3) Calcule la ubicación del punto C en el que el cuerpo se detiene.

### ● Desarrollo

1) Le llamamos  $\vec{F}$  a la fuerza que aplica el resorte,  $\vec{P}$  es el peso,  $\vec{R}_N$  es la reacción normal (perpendicular) del piso, y  $\vec{F}_{NC}$  es la fuerza de roce, que viene a ser la parte tangencial de la reacción del piso.

2)  $v_B$  se calcula a partir de la energía cinética en B, para calcular la cual aplicamos:  $W_{NC} = \Delta E_m$ . En esta expresión  $W_{NC}$  es el trabajo hecho por el rozamiento, que es la fuerza no conservativa que actúa desde el instante en que se libera el cuerpo. Entre

$$A \text{ y } B, W_{NC} = -F_R d_{AB}$$

$$A \text{ y } B, W_{NC} = -50 \text{ N} \times 0,2 \text{ m}$$

$$A \text{ y } B, W_{NC} = -10 \text{ J.}$$

Dado que B es la posición de equilibrio del resorte, para la energía potencial podemos plantear:

$$E_{pA} = 10.000 \text{ (N/m)} \cdot \frac{(0,2\text{m})^2}{2}$$

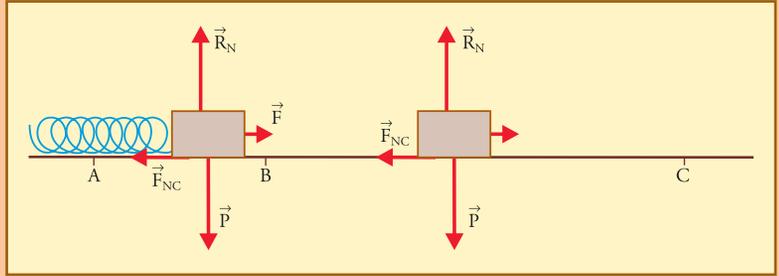
$$E_{pA} = 200 \text{ J}$$

$$E_{pB} = 0$$

Y por otra parte,  $E_{cA} = 0$ , con lo cual

$$\Delta E_m = E_{pB} + E_{cB} - (E_{pA} + E_{cA})$$

$$\Delta E_m = E_{cB} - 200 \text{ J}$$



Con estos elementos podemos calcular la energía cinética en B aplicando:

$$W_{NC} = -10 \text{ J}$$

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

$$W_{NC} = E_{cB} - 200 \text{ J} \Rightarrow E_{cB} = 190 \text{ J}$$

Despejando la velocidad de la expresión de  $E_c$ , en general se obtiene:  $v = (2E_c/m)^{1/2}$ , por lo cual ahora,

$$v_B = (2 \times 190/16)^{1/2}$$

$$v_B \cong 4,87 \text{ m/s}$$

Es importante notar que  $E_{cB}$  también se hubiese podido calcular razonando de una manera menos estructurada, diciendo: el resorte va a impulsar al móvil hasta B dándole una energía igual a la potencial que tiene almacenada en A, es decir, 200 J; y mientras esto ocurre el rozamiento le va a quitar 10 J, de manera que el móvil va a tener, al pasar por B,  $E_{cB} = 190 \text{ J}$ .

Desde B en adelante el cuerpo se desprende del resorte, y la única fuerza tangencial actuante es la del rozamiento (que además pasa a ser la resultante). De manera que planteamos

$$W_{NC} = -F_R d_{BC}$$

$$W_{NC} = E_{cC} - E_{cB}$$

$$W_{NC} = 0 - E_{cB} \Rightarrow 50 \text{ N} \times d_{BC} = 190 \text{ J} \Rightarrow d_{BC} = \frac{190}{50}$$

$$d_{BC} = 3,80 \text{ m}$$

Debe notarse que también podría haberse calculado la ubicación del punto C de un solo paso, sin calcular  $v_B$ , simplemente planteando  $W_{NC} = \Delta E_m$ , para el trayecto AC:

$$\text{tenemos } E_{cA} = E_{cC}$$

$$E_{cA} = 0$$

por lo cual  $\Delta E_m = \Delta E_p$

$$\Delta E_m = -E_{pA}$$

$$\Delta E_m = -200 \text{ J}$$

$$W_{NC} = -F_R d_{AC} \Rightarrow d_{AC} = \frac{200 \text{ J}}{50 \text{ N}}$$

$$d_{AC} = 4 \text{ m}$$

## La conservación de la energía mecánica

En los casos en los que en un sistema sólo **actúan fuerzas conservativas**, y no existen otras fuerzas, o bien existen otras fuerzas pero **no hacen trabajo**, la aplicación de (6.13) o (6.13') automáticamente nos permite plantear que el movimiento ocurrirá manteniendo la energía mecánica total constante:

$$\text{Si } W_{NC} = 0 \Rightarrow \Delta E_m = 0$$

O equivalentemente:

$$\begin{aligned} E_p + E_c &= E_m \\ E_p + E_c &= \text{constante} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Lo cual también puede expresarse diciendo que para dos puntos cualquiera A y B del movimiento, se cumplirá:

$$\begin{aligned} E_{pA} + E_{cA} &= E_{pB} + E_{cB} \\ E_{pA} + E_{cA} &= E_m \end{aligned}$$

*Cada energía puede variar,  
pero la suma se conserva.*

### • Ejemplo. Caída libre

Un cuerpo de masa  $m = 2 \text{ kg}$  está cayendo verticalmente. En un instante  $t_1$  pasa por A, a una altura de 100 metros del nivel de referencia (piso) y el módulo de su velocidad es de 20 m/s. Luego, en otro instante  $t_2$ , pasa por B, a 40 metros sobre el mismo nivel.

- 1) Dónde considera el cero de la energía potencial, y de acuerdo con eso calcule la energía mecánica total inicial del sistema .
- 2) Despreciando la resistencia del aire, determine la energía mecánica total, cinética y potencial del cuerpo cuando se encuentra a 40 metros de altura.
- 3) Determine la velocidad en ese punto, y la que tendrá luego al llegar a tierra (un instante antes de tocarla).
- 4) Indique los valores de las energías (mecánicas) potencial, cinética y total, en cada punto: A, B, y C, (inmediatamente antes de tocar el piso), eligiendo:
  - 4.1) energía potencial cero en C;
  - 4.2) energía potencial cero en A;
  - 4.3) energía total cero en C (explique en dónde, aproximadamente estaría  $E_p = 0$ ).
- 5) Determine el trabajo de la fuerza peso desde A hasta B, y desde B hasta C, y muestre qué tienen que ver esos valores con los anteriores.

### • Desarrollo

- 1) Consideramos arbitrariamente  $E_p = 0$ , en el piso, en el cual también situamos arbitrariamente el origen del eje y (vertical hacia arriba). De acuerdo con esto,  $E_p = m g y$ .

$$\text{Entonces, } E_{cA} = 2 \text{ kg} \times (20 \text{ m/s})^2 / 2$$

$$E_{cA} = 400 \text{ J}$$

$$E_{pA} \cong 2 \text{ kg} \times 9,8 \text{ (N/kg)} \times 100 \text{ m}$$

$$E_{pA} = 19,6 \text{ N} \times 100 \text{ m}$$

$$E_{pA} = 1.960 \text{ J}; E_{mA} \cong 2.360 \text{ J}$$

- 2) Planteamos conservación de la energía mecánica:  $E_{mB} = 2.360 \text{ J}$ ; y dado que  $E_{pB} = 19,6 \text{ N} \times 40 \text{ m}$

$$E_{pB} = 784 \text{ J}$$

la energía cinética debe ser  $E_{cB} = 2.360 - 784 = 1.576 \text{ J}$

$$E_{cB} = 1.576 \text{ J}$$

3) Despejando la velocidad de la expresión de  $E_c$ , en general se obtiene:  $v = (2E_c/m)^{1/2}$ ,

por lo cual:  $v_B = (2 \times 1.576/2)^{1/2}$

$$v_B = 39,7 \text{ m/s}$$

Para la llegada al suelo será  $E_{pC} = 0$ , con lo cual  $E_{cC} = 2.360 \text{ J}$ , y  $v_C = (2 \times 2.360/2)^{1/2}$

$$v_C = 48,6 \text{ m/s.}$$

4) Se registran los resultados de este punto en las siguientes tablas:

4.1			4.2			4.3					
	$E_p$	$E_c$	$E_{total}$		$E_p$	$E_c$	$E_{total}$		$E_p$	$E_c$	$E_{total}$
A	1.960	400	2.360	A	0	400	400	A	-400	400	0
B	784	1.576	2.360	B	-1.176	1.576	400	B	-1.576	1.576	0
C	0	2.360	2.360	C	-1.960	2.360	400	C	-2.360	2.360	0

Para determinar el punto en el cual la energía potencial sería cero en el caso 4.3), escribo que  $E_p = mgy + C$ , y trato de encontrar C. Eligiendo  $y = 0$ , encontramos que  $C = -2.360 \text{ J}$ , por lo tanto, para que  $E_p$  sea cero,  $y = 2.360/19,6$

$$y = 120,4 \text{ m.}$$

Esta es la altura desde la cual habría que haber soltado este cuerpo desde el reposo para que cayera de esta forma, ya que en ese punto, con  $E_p = 0$ , y  $E_c = 0$ , daría  $E_m = 0$ .

Es muy instructivo mirar estas tablas porque allí se advierte rápidamente:

- Tanto la energía potencial como la total cambian con la elección arbitraria del cero de la potencial, no así la columna de las energías cinéticas, cuyo valor tiene sentido físico en sí mismo, ya que determina la velocidad.
- Una vez conocido el valor de la energía mecánica total en un punto, por la conservación, vale para todos los puntos.
- La suma de las dos primeras columnas siempre debe dar el valor de la tercera.
- La energía potencial (y también la total, aunque en este ejemplo no se vea) puede ser negativa, no así la cinética.
- Una vez que el cuerpo llega al nivel  $y = 0$  (si no choca con algo), seguirá aumentando su energía cinética mientras aumenta negativamente su energía potencial en los valores negativos de  $y$ . Se considera que  $E_p$  disminuye cuando aumenta negativamente:  $-1.960 < -1.176 < 0$ , etc.

5)  $W_p(AB) = 19,6 \text{ N} \times 60 \text{ m}$

$$W_p(AB) = 1176 \text{ J}; W_p(BC)$$

$$W_p(AB) = 19,6 \text{ N} \times 40 \text{ m}$$

$$W_p(AB) = 784 \text{ J}$$

(ambos positivos porque fuerza y desplazamiento tienen igual sentido).

Con estos valores podemos corroborar el teorema del trabajo y la energía cinética:  $E_{cB} = E_{cA} + W_p(AB)$ , y también:  $E_{cC} = E_{cB} + W_p(BC)$ .

También podemos corroborar que el peso hace trabajo a expensas de la  $E_p$ :  $E_{pB} = E_{pA} - W_p(AB)$ , y también:  $E_{pC} = E_{pB} - W_p(BC)$ .

## • Movimientos con vínculos

En muchos casos prácticos hay sistemas con uno o más “vínculos” que determinan o modifican la trayectoria de la partícula, como por ejemplo un sistema de rieles o guías fijos, o el hilo de un péndulo. Si estos vínculos tienen ciertas características ideales (ausencia

Un caso importante es el de cuerpos que se deslizan por pistas ideales sin rozamiento. Para estos casos la única fuerza que trabaja es el peso, y la conservación de la energía mecánica se traduce en que, para dos puntos A y B de la pista o trayectoria:  $\frac{1}{2} m v_A^2 + m g y_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g y_B$ . Simplificando la masa se obtiene lo visto en el capítulo anterior, en la parte de péndulos y planos inclinados: la velocidad de los vehículos que viajan por carreteras de cualquier forma, en condiciones ideales de ausencia de rozamiento y sin otras fuerzas motrices más que el peso, es absolutamente independiente de la masa. Ahora además podemos calcular esta velocidad para una pista de cualquier forma, a partir de la expresión anterior:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g(y_A - y_B) \quad (6.16)$$

O bien:

$$v_B^2 = v_A^2 - 2g\Delta y \quad (6.16')$$

Nótese la semejanza con las expresiones (5.13) y (5.13') del MRUV, lo cual corresponde porque la caída libre vertical es a la vez un caso de MRUV, y de conservación de la energía. Ahora podemos ver que estas expresiones valen para cualquier caso de conservación de la energía en un campo gravitatorio uniforme, con trayectoria de cualquier forma, aunque no sea ni rectilínea, ni uniformemente variada la velocidad.

de rozamiento, por ejemplo) tales que no disipan energía, permiten seguir planteando la conservación de la energía mecánica.

En estos casos los vínculos aplican fuerzas sobre la partícula, y éstas actúan determinando la trayectoria; pero consideramos que tienen la característica ideal de no realizar trabajo. Para esto las fuerzas de vínculo no deben tener componentes tangenciales, es decir que deben ser fuerzas normales a la trayectoria que determinan.

En estos casos, se plantea la conservación de la energía mecánica total, con la misma función energía potencial, dependiente sólo de la fuerza conservativa que esté en juego, e independiente de estos vínculos y sus fuerzas.

### • Ejemplo. Péndulo

Considere el péndulo de la figura, consistente en un cuerpo de  $m = 500$  g suspendido de un hilo de 71 cm de longitud, que se suelta, a partir del reposo, en la posición A, a  $45^\circ$  de la vertical. No se consideran rozamientos.

a) Calcule la velocidad del cuerpo en B, en C, y en D.

b) Indique los valores de las energías (mecánicas) potencial, cinética y total, en cada punto: A, B, C, y D, eligiendo:

b.1) energía potencial cero en B;

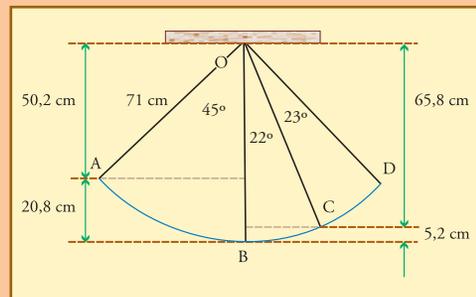
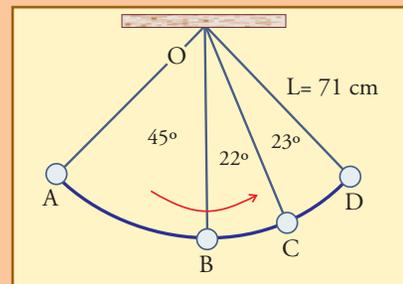
b.2) energía potencial cero en A;

b.3) energía potencial cero en el punto de suspensión.

c) Dibuje cualitativamente todas las fuerzas actuantes sobre m en los puntos B, C, y D. Explique el efecto de cada fuerza sobre el movimiento en el instante correspondiente.

### • Desarrollo

a) El hilo es un vínculo que obliga al cuerpo a seguir la trayectoria con forma de arco de circunferencia, y al hacerlo provoca la aparición de una fuerza cuyo valor se va ajustando en cada instante según la ley del impulso para las fuerzas normales. Pero esta fuerza no tiene componente tangencial, y por ello no hace trabajo, y podemos ignorarla para plantear la conservación de la energía mecánica, la cual se hace simplemente con la fuerza peso. De manera que podemos calcular las velocidades aplicando las expresiones (6.16) o (6.16'), para lo que sólo necesitamos las alturas de los puntos.



Tenemos  $y_A - y_B = 0,71 \text{ m} - 0,71 \text{ m} \times \cos 45^\circ$   
 $y_A - y_B \cong 0,710 - 0,502$   
 $y_A - y_B \cong 0,208 \text{ m}$        $y_C - y_B = 0,71 \text{ m} - 0,71 \text{ m} \times \cos 22^\circ$   
 $y_C - y_B \cong 0,710 - 0,658$   
 $y_C - y_B \cong 0,052 \text{ m}$        $y_A - y_C = 0,208 \text{ m} - 0,052 \text{ m}$   
 $y_A - y_C \cong 0,156 \text{ m}; y_D = y_A$

Entonces  $v_B \cong \sqrt{(0 + 2 \times 9,8 \times 0,208)}$   
 $v_B \cong 2,02 \text{ m/s}$        $v_C \cong \sqrt{(0 + 2 \times 9,8 \times 0,156)}$   
 $v_C \cong 1,75 \text{ m/s}$  (vc también puede calcularse a partir de  $v_B$ :  
 $v_C \cong \sqrt{(2,02^2 - 2 \times 9,8 \times 0,052)}$   
 $v_C \cong 1,75 \text{ m/s}; v_D = 0$

b) Elegimos  $E_{pB} = 0; E_{pA}$   
 $E_{pB} \cong 0,5 \text{ kg} \times 9,8 \text{ (N/kg)} \times 0,208 \text{ m}$   
 $E_{pB} \cong 1,02$        $E_{pC} \cong 0,5 \text{ kg} \times 9,8 \text{ (N/kg)} \times 0,052 \text{ m}$   
 $E_{pC} \cong 0,25 \text{ J}$

Por otra parte las energías cinéticas resultan:

$E_{cA} = 0;$   
 $E_{cB} \cong \frac{0,5 \times 2,02^2}{2}$        $E_{cB} \cong 1,02 \text{ J}; E_{cC} \cong \frac{0,5 \times 1,75^2}{2}$   
 $E_{cC} \cong 0,77 \text{ J}; E_{cD} = 0$

Efectuando todas las sumas se verifica la conservación, ya que todas dan  $E_c + E_p \cong 1,02 \text{ J}$ .

Para las otras elecciones de energía potencial cero, simplemente debemos sumar a las columnas de  $E_p$  y de  $E_{total}$  lo que haga falta para que se cumpla lo pedido y quede inalterada la columna de la  $E_c$ . Los resultados de están en las siguientes tablas:

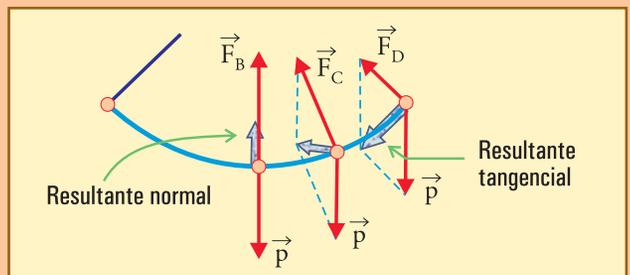
b.1				b.2			b.3				
	$E_p$	$E_c$	$E_{total}$		$E_p$	$E_c$	$E_{total}$		$E_p$	$E_c$	$E_{total}$
A	1,02	0	1,02	A	0	0	0	A	-2,46	0	-2,46
B	0	1,02	1,02	B	-1,02	1,02	0	B	-3,48	1,02	-2,46
C	0,25	0,77	1,02	C	-0,77	0,77	0	C	-3,23	0,77	-2,46
D	1,02	0	1,02	D	0	0	0	D	-2,46	0	-2,46

c) Las únicas fuerzas actuantes son, el peso, siempre igual, y la fuerza del hilo, siempre alineada con él, hacia el punto de suspensión. La fuerza del hilo tiene módulo variable de tal manera que supera a la componente normal del peso en la cantidad exacta necesaria para curvar la trayectoria:  $F_N - P_N = m v^2 / 2$ .

Así tenemos que en A (y lo mismo ocurrirá en D),  $v_A = 0$ ,  $F_N$  iguala a  $P_N$ , y la resultante es exactamente tangencial, como se requiere para que el movimiento se inicie en dirección tangencial.

En el punto más bajo, B, hay una resultante vertical, hacia arriba, que curva la trayectoria, y no hay fuerza tangencial. Por ello la velocidad, que ha estado aumentando hasta allí, deja de hacerlo, y comenzará a disminuir.

En cualquier punto como el C, la resultante tiene una componente tangencial que va frenando el movimiento, y sigue teniendo una componente normal (variable) que curva la trayectoria.



Si hubiese varias fuerzas conservativas,  $\vec{F}_{C1}, \vec{F}_{C2}, \dots$  etc. actuando sobre la partícula, nada cambiaría en los razonamientos. Para cada fuerza conservativa hay una energía potencial definida de la manera que ya se explicó:

$$\vec{F}_{C1} \rightarrow Ep_1, \text{ tal que: } \Delta Ep_1 = -W_{F_{C1}}$$

$$\vec{F}_{C2} \rightarrow Ep_2, \text{ tal que: } \Delta Ep_2 = -W_{F_{C2}}$$

Etc.

El trabajo total se puede expresar en dos términos: uno que contiene el trabajo de todas las fuerzas conservativas, y otro que contiene el trabajo de las demás, a las que llamaremos  $\vec{F}_{CN}$ :

$$W_{total} = \sum W_{F_C} + \sum W_{N_C}$$

En el término  $\sum W_{F_C}$  sumamos los trabajos que vamos a reemplazar con variaciones de energías potenciales, y en el otro quedan los de las demás fuerzas ( $W_{N_C}$ ).

Si aplicamos  $W_{total} = \Delta Ec$ , y sustituimos  $\sum W_{F_C}$  por las variaciones de las energías potenciales correspondientes tenemos:

$$W_{total} = (-\Delta Ep_1 - \Delta Ep_2 - \Delta Ep_3 \dots) + W_{N_C}$$

$$W_{total} = \Delta Ec$$

Al igual que en (6.10), si reunimos todas las variaciones de energía del lado derecho llegamos a:

$$W_{N_C} = \Delta Ec + \Delta Ep_1 + \Delta Ep_2 + \Delta Ep_3 \dots$$

Vemos que siempre seguirá siendo válida la expresión (6.13'),  $W_{N_C} = \Delta E_m$ , siendo la energía mecánica total,  $E_m$  la suma de la cinética más todas las potenciales:

$$E_m = \frac{mv^2}{2} + \underbrace{Ep_1 + Ep_2 + \dots}_{Ep_{total}}$$

única Ec

$$E_m = Ec + E_{p_{total}} \quad (6.15')$$

Dicho con otras palabras, la suma (vectorial) de todas las fuerzas conservativas sería una fuerza resultante  $\vec{F}_C$ , también conservativa, la cual define una energía potencial total  $E_{p_{total}} = \sum Ep_i$ , que funciona exactamente con las mismas expresiones de cualquier  $Ep$ .

**b)**  $Ep(x) = \frac{1}{2} 400 (x - 0,15)^2 - 36x + C$ , función de segundo grado, que debe anularse en  $x = 0,15$  m

$$\rightarrow Ep(x=0,15) = -36 \times 0,15 + C$$

$$Ep(x=0,15) = 0 \rightarrow C = 5,40$$

De manera que  $Ep(x) = 200(\text{J/m}^2) (x - 0,15\text{m})^2 - 36(\text{J/m}) x + 5,40 \text{ J}$

En el punto D la componente tangencial ha logrado detener el movimiento, y lo hará recomenzar instantáneamente. En ese instante exacto la resultante normal es nula, y por ello el movimiento recomienza en la dirección de la resultante, que es tangencial.

En el punto más bajo, B hay máxima fuerza del hilo, pues es máxima la velocidad, y por ello debe ser máxima la fuerza resultante normal. Podría pensarse que al ser ésta la posición de equilibrio del péndulo, la fuerza resultante allí debería ser nula, pero en realidad, por ser posición de equilibrio de una oscilación, la que tiene que ser nula es la resultante tangencial, cosa que se cumple. Ahora bien, dado que la trayectoria es curva, allí tiene que haber una resultante normal. No debe haber equilibrio de las fuerzas en B (a menos que el cuerpo esté en reposo allí), porque si lo hubiese la trayectoria no se curvaría.

### • Ejemplo

Un cuerpo se cuelga suavemente de un resorte de constante elástica  $k = 400 \text{ N/m}$  y  $15 \text{ cm}$  de longitud en equilibrio, el cual queda estirado (en reposo) hasta una longitud  $x_1 = 24 \text{ cm}$ , como se ilustra en el ejercicio 5.6, de fin del capítulo anterior.

**a)** Calcule la masa de este cuerpo.

**b)** Escriba la función energía potencial de este sistema,  $Ep(x)$ , eligiendo arbitrariamente que sea cero en la posición de equilibrio del resorte ( $x_0$ ). Grafíquela y utilice la gráfica para corroborar sus respuestas al ejercicio 5.6, en el cual se pedía (para este mismo sistema masa resorte) calcular el trabajo que hace un agente externo para estirar el resorte hasta  $x_2 = 30 \text{ cm}$ , y entre qué valores de  $x$  oscila el cuerpo en el extremo del resorte después de que se lo suelta.

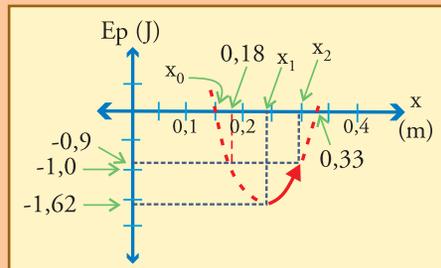
### • Desarrollo

**a)** La fuerza elástica se equilibra con el peso

$$\rightarrow k (x_1 - 15 \text{ cm}) = 36 \text{ N}$$

$$\rightarrow k (x_1 - 15 \text{ cm}) = m g \rightarrow m = \frac{36}{9,8}$$

$$m \cong 3,67 \text{ kg}$$



Para graficar esta función podemos encontrar sus valores en varios puntos, como  $E_p(0,24) = -1,62$ ;  $E_p(0,33) = 0$ ;  $E_p(0,30) = -0,90$   
 $E_p(0,30) = E_p(0,18)$ .

Podemos contestar el trabajo que debe hacer el agente para estirar el resorte desde  $x_1$  a  $x_2$ :

$$W_{\text{ext}} = E_p(x_2) - E_p(x_1)$$

$$W_{\text{ext}} = -0,90 - (-1,62)$$

$$W_{\text{ext}} = 0,72 \text{ J.}$$

Dado que además la gráfica es simétrica con respecto a la posición de equilibrio del sistema con el cuerpo suspendido ( $x_1 = 0,24$ ), inferimos que la oscilación debe ser simétrica respecto de ese punto, es decir, debe ocurrir entre 0,30 y 0,18 m. Eso se corrobora viendo que  $E_p(0,18) = E_p(0,30)$

$$E_p(0,18) = -0,90 \text{ J,}$$

pero ésa es la  $E_{\text{total}}$ ; de manera que  $x = 0,18$  debe ser el punto en el cual el cuerpo se detiene, ya que allí  $E_c = 0$ . Como comentario válido para este caso es interesante decir que una función cuadrática como la energía potencial elástica, más una lineal, como la gravitatoria, da por resultado otra función cuadrática, que es la misma anterior, con la posición de equilibrio corrida a otro lugar, y con la suma de alguna constante que es físicamente irrelevante. Por eso es que el cuerpo oscila de la misma manera suspendido del resorte que horizontalmente, alrededor de la correspondiente posición de equilibrio de cada caso.

### ● Ejercicio matemático

Muestre que la función energía potencial del ejemplo recién desarrollado puede escribirse:

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k (x - x_1)^2 - 1,62 \text{ J.}$$

## ■ 6.5. Conservación de la energía y primer principio de la termodinámica

La situación en la cual la energía mecánica de un sistema se conserva, es una situación absolutamente ideal, que en el mundo macroscópico sólo se da en grados de aproximación mayor o menor.

Es claro que no existe *un principio de conservación de la energía mecánica*, desde que la expresión (6.13'),  $W_{\text{NC}} = \Delta E_m$ , prevé la posibilidad de la variación de la misma en un sistema que puede estar totalmente aislado. En esta afirmación es importante recordar que el miembro izquierdo de (6.13') representa trabajo de fuerzas que a veces se denominan erróneamente “exteriores”, pero que pueden ser perfectamente interiores. El ejemplo más simple es el de un reloj de cuerda (de los antiguos relojes de cuerda), que funciona a expensas de cierta energía elástica acumulada en la “cuerda”, que es un resorte espiral. Cuando un agente externo carga esta cuerda de energía, el reloj funciona durante un tiempo, hasta que esa energía se agota. Lo que disipa su energía mecánica son los rozamientos, total y completamente interiores (para una discusión más completa ver el Apéndice 5).

Esto sucede en cualquier sistema mecánico aislado.

Sin embargo, una de las propiedades definitorias de la energía es su conservación. Realmente, sí existe un principio general de conservación de la energía, que se cumple en todas las situaciones concebibles.

No dice que se conservan las formas mecánicas de la energía, sino que se conserva la energía en general, pudiendo desaparecer de una forma y continuar existiendo en otra/s.

La forma típica para hacer cualquier balance de energía en la vida práctica tiene que ver con los aspectos térmicos, por eso **este principio general de conservación se denomina “Primer Principio de la Termodinámica”**. Este nombre obedece al proceso en el que se desarrollaron las ideas de energía (la Revolución Industrial), en el que se unió lo térmico con la dinámica, en la lucha por entender y mejorar las máquinas térmicas.

Este principio tiene el siguiente enunciado muy simple, que por razones obvias sólo considera formas térmicas y mecánicas de suministrar energía:

$$\text{Primer Principio de la Termodinámica} \\ Q + W_{\text{ext}} = \Delta E \quad (6.17)$$

En donde:

- $Q$  es la cantidad de energía suministrada como calor, es decir *por simple contacto o proximidad con cuerpos a diferente temperatura*.  $Q$  positivo significa calor transferido al sistema por un cuerpo más caliente, y a la inversa,  $Q$  negativo significa calor transferido por el sistema a cuerpos más fríos.
- $W_{\text{ext}}$  es el *trabajo mecánico hecho por las fuerzas exteriores actuantes sobre el sistema*.  $W_{\text{ext}}$  positivo significa energía suministrada al sistema mecánicamente, y viceversa,  $W_{\text{ext}}$  negativo significa energía que el sistema transfiere mecánicamente a otros sistemas.
- Finalmente  $E$  es la energía del sistema, de cualquier tipo que sea. Una cantidad que se compone de contribuciones mecánicas, térmicas, y de todo tipo, que depende del estado del sistema. No es posible dar una expresión general para la energía, sino expresiones particulares para cada tipo o forma de energía. Hemos visto, en páginas anteriores, expresiones para casos típicos simples de energías mecánicas. Hay una variedad inagotable de posibilidades de la energía para distintos sistemas y fenómenos.

Se le pueden agregar a (6.17) otros términos que contemplen el ingreso o salida de energía del sistema en procesos de otro tipo, además de los mecánicos y térmicos, con tal de respetar la idea fundamental de la conservación de  $E$ . Teniendo en cuenta esas posibilidades, no hay excepciones a este principio: es un Principio.

Es muy importante entender que la energía que ingresa de una forma, *no tiene por qué almacenarse de esa forma*.

En cualquier situación de movimiento con fricción (como los experimentos del conde RUMFORD, o de JOULE, que sirvieron para elaborar esta teoría, y sobre los cuales se puede ampliar en el Apéndice 6), se eleva la temperatura de un sistema haciendo trabajo sobre él, sin ponerlo en contacto con algo más caliente, es decir:

$W > 0$ , pero  $Q = 0$ , y el único efecto es que se eleva la temperatura.

Es decir, se suministra energía mecánicamente, pero se almacena térmicamente

Lo mismo sucede con cualquier sistema calefactor eléctrico, al sistema entra energía eléctrica, pero lo único que cambia en el sistema es que eleva su temperatura (es claro que no almacena energía eléctrica).

## Unidades

Desde el momento en que se aceptan (6.17) o sus variantes como referente máximo para el tratamiento de cualquier energía, y una vez aceptada la definición de trabajo,  $Q$  y  $E$

tienen que tener la misma unidad SI que el trabajo, o sea,  $J = N \cdot m$ .

Ahora bien, dado que el proceso de definición de la energía obligó a juntar ideas de mecánica, con ideas sobre el calor, que se habían desarrollado independientemente, resultó natural que la ciencia del calor tuviera ya sus unidades, entonces hubo que determinar equivalencias entre las mismas.

La unidad natural para cantidad de calor, la caloría, cal, que se define como la cantidad de calor para elevar en  $1^\circ\text{C}$  la temperatura de 1 g de agua (específicamente de  $15,5$  a  $16,5$   $^\circ\text{C}$ ), es una unidad (no SI) de energía muy aceptada.

La equivalencia con el joule es:

$$\begin{aligned}1 \text{ cal} &= 4,185 \text{ J} \\1 \text{ J} &\cong 0,239 \text{ cal}\end{aligned}$$

## ■ 6.6. Potencia mecánica

El concepto de potencia es un concepto central en el ámbito industrial, y también en el cotidiano, porque tiene que ver con todos los artefactos que una persona utiliza.

Cualquier aparato está diseñado para trabajar, entregar o utilizar energía con determinado ritmo, es decir cierta cantidad por unidad de tiempo, manteniendo ese ritmo mientras sea necesario. En general para adquirir un motor se tiene en cuenta, por ejemplo, no cuánto trabajo puede hacer, ya que eso depende del tiempo que funcione, sino cuánto trabajo puede hacer por segundo, lo que se denomina “potencia”.

Se define **potencia mecánica** como la cantidad de trabajo hecha por unidad de tiempo, es decir algo como el ritmo al cual se realiza el trabajo, o la *intensidad del proceso* de trabajar:

$$\text{Potencia} = \frac{W}{\Delta t} \quad (6.18)$$

Y de la misma manera, dado que el trabajo sólo se puede hacer a expensas de la cantidad de energía que se absorbe, también se llama potencia, en general, a la cantidad de energía de cualquier tipo que se absorbe o transforma en cualquier otra por unidad de tiempo:

$$\text{Potencia} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (6.18')$$

Todas las luces, los motores, artefactos electrodomésticos, etc., se eligen en función de su potencia.

### ● Unidades

La unidad S.I. de potencia es el *watt*, castellanizado como *vatio*, que se simboliza con  $W$ , denominado así en honor al ingeniero escocés James WATT (1736-1819), inventor de las principales mejoras de las primeras máquinas de vapor: 1 watt es la potencia mecánica correspondiente a la realización de 1 joule en 1 segundo:

$$1W = 1J / 1s \quad (6.19) \quad (\text{No confundir la letra “W” utilizada para trabajo, con el símbolo del watt}).$$

Dado que el joule es una unidad relativamente pequeña de energía, el watt también resulta una unidad más o menos pequeña de potencia para los artefactos utilizados en el hogar.

Una lámpara pequeña consume 20 W, una muy luminosa como para una habitación 100 W, y una lámpara de alumbrado público cerca de 200 W. Un motor eléctrico de cortadora de césped pequeña puede consumir 250 W, y un motor de automóvil puede estar alrededor de 70 kW.

Las empresas distribuidoras de energía eléctrica facturan a sus usuarios un monto correspondiente a toda la energía (eléctrica) suministrada en un bimestre, y utilizan una unidad particular para ello, denominada kilowatt-hora (kWh), para reemplazar al joule que es demasiado pequeño (aunque lo que correspondería científicamente sería utilizar múltiplos del joule).

De manera que en la práctica industrial se define:

1 *watt-hora* = trabajo que se hace en 1 hora trabajando con una potencia de 1 watt.

1 *kWh* = trabajo que se hace en una hora trabajando con una potencia de 1 kW.

Dado que según (6.18) o (6.18'),  $\Delta E = \text{Potencia} \times \Delta t$ , resulta:

$$1 \text{ Wh} = 1 \text{ W} \times 3.600 \text{ s}$$

$$1 \text{ Wh} = 3.600 \text{ J}$$

$$1 \text{ kWh} = 1.000 \text{ W} \times 3.600 \text{ s}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \text{ MJ}$$

Un hogar mediano consume unos 400 kWh por bimestre.

Otras unidades industriales de potencia, que no son S.I., son el HP (horse-power: caballo de potencia) y el CV (caballo de vapor). Ambas unidades surgieron durante la Revolución Industrial, y como sus nombres lo indican, toman como patrón la capacidad de ritmo promedio de trabajo de un caballo. Ambas equivalen aproximadamente a  $\frac{3}{4}$  de kW, y van cayendo en desuso.

### • Ejemplo 1

Un calefactor eléctrico de inmersión es capaz de elevar la temperatura de 2 litros de agua desde los 20 hasta los 90 °C en 5 minutos.

- Calcular la energía empleada en este proceso, y la potencia del calefactor.
- Calcular la cantidad de kWh que aporta esta operación al consumo eléctrico del hogar.

### • Desarrollo

- En este proceso el calefactor toma una cierta cantidad de energía eléctrica de la red domiciliaria y la suministra como calor al agua. Sabiendo que se requiere 1 cal para elevar la temperatura de cada gramo de agua en 1 °C, podemos calcular que para este caso se necesitarán:

$$Q = 1(\text{cal/g} \cdot ^\circ\text{C}) \times m \times \Delta T$$

$$Q = 1(\text{cal/g} \cdot ^\circ\text{C}) \times 2.000 \text{ g} \times 70 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$Q = 140 \times 10^3 \text{ cal}$$

$$Q = 140 \text{ kcal}$$

Para expresar esa energía en J utilizamos la conversión 1 cal = 4,185 J, y resulta  $Q = \Delta E$

$$Q = 140 \times 4,185 \Rightarrow Q \cong 586 \text{ kJ}$$

La potencia es  $P = \Delta E / \Delta t$

$$P = 1,95 \text{ kW}$$

- El kWh es unidad de energía: 1 kWh = 3.600 kJ;  $\Delta E = 586/3.600$

$$\Delta E = 0,163 \text{ kWh}$$

También se podría calcular multiplicando la potencia en kW por el tiempo en horas:  $1,95 \times (5/60) = 0,163 \text{ kWh}$ .

### • Ejemplo 2

Un automóvil cuya masa (incluyendo ocupantes) es de 900 kg, viaja 50 km por una ruta horizontal a razón de 80 km/h, sufriendo una fuerza de rozamiento (esencialmente por parte del aire) de 700 N.

- Calcule la potencia mecánica efectiva que aplica el vehículo al piso en estas condiciones.
- Si se supone que el motor aprovecha el 40 % del poder calorífico del combustible para producir trabajo, y que el 20 % de ese trabajo se disipa en los rozamientos internos de los mecanismos del vehículo sin transferirse al piso, calcule la energía total del combustible que se consume en el trayecto.
- Si el combustible utilizado es nafta, con un poder calorífico de aproximadamente 9.000 kcal/litro, calcular la cantidad de nafta consumida.

### • Desarrollo

- El trabajo mecánico para vencer el rozamiento de 700 N, a lo largo de 50 km, es  $F d \cong 3.500 \times 10^4 \text{ J}$   
 $F d = 35 \text{ MJ}$ .

Como el tiempo demorado es  $\Delta t = \frac{50}{80}$

$$\Delta t = 0,625 \text{ h}$$

$$\Delta t = 2.250 \text{ s}$$

la potencia mecánica resulta  $P \cong 35 \text{ MJ} / 2.250 \text{ s}$

$$P \cong 15,5 \text{ kW}$$

(que en HP, sería aproximadamente 21 HP).

Es importante advertir que la energía cinética es irrelevante aquí, ya que si pensamos en que apagamos el motor y dejamos que el vehículo avance a expensas de la energía almacenada, ella sólo le alcanzaría para recorrer una muy pequeña fracción de los 50 km. Si calculamos obtenemos:  $80 \text{ km/h} \cong 22,2 \text{ m/s}$ ;

$$E_c \cong 900 \times 22,2^2 / 2$$

$$E_c = 222 \text{ kJ}$$

$$E_c \cong 0,2 \text{ MJ}.$$

- Si  $E$  es la energía total del combustible consumido, el enunciado dice que:  $35 \text{ MJ} \cong 0,4 \times (1 - 0,2) \times E$ , entonces

$$E \cong 109 \text{ MJ}$$

$$E \cong 26 \times 10^3 \text{ kcal}$$

- Esta cantidad de energía es la que se obtendría a partir de  $\frac{26 \times 10^3}{9.000} = 2,9$  litros de nafta.

### • Ejemplo 3

Considere un martillo de 500 g de masa, que se utiliza para clavar horizontalmente un clavo en una madera. Para cada golpe se impulsa el martillo hasta que adquiere una velocidad de 10 m/s, velocidad con la cual choca, y en 5 golpes hunde completamente el clavo, de 6 cm de longitud.

- Calcule la fuerza media que debió vencer el clavo para penetrar.
- Estime una longitud del recorrido del martillo mientras es impulsado, y con ella calcule la fuerza media que se le debió aplicar.
- Explique cómo es el juego de las energías durante el choque. Estime las cantidades o porcentajes de cada una: ¿cuánto trabajo, cuánto calor, cuánta y cuál energía de otro tipo?

### • Desarrollo

- Designamos:

$t_0$ : instante de velocidad nula del martillo, inmediatamente antes de comenzar a ser impulsado hacia delante.

$t_1$ : instante previo al contacto del martillo con el clavo

$t_2$ : instante en que clavo y martillo se detienen luego de penetrar (el clavo)  $6/5 = 1,2 \text{ cm}$  en la madera.

Según los datos  $E_c(t_1) = E_{c_1}$   
 $E_c(t_1) = \frac{0,5 \text{ kg} (10 \text{ m/s})^2}{2}$

$$E_c(t_1) = 25 \text{ J},$$

de manera que si aplicamos  $W_{FR} = \Delta E_c$  para el *sistema martillo* (en donde  $W_{FR}$  es el trabajo de la fuerza resultante), obtenemos: entre  $t_0$  y  $t_1$ :  $W_{FR} = 25 \text{ J} =$  trabajo de la fuerza que impulsa al martillo;

entre  $t_1$  y  $t_2$ :  $W_{FR} = -25 \text{ J} =$  trabajo de la fuerza con que la cabeza del clavo frena al martillo;

Ahora bien, por acción-reacción, este último trabajo, cambiado de signo, es el que hace el martillo sobre el clavo hundiéndolo, que por lo tanto es también 25 J. Como además el clavo tiene velocidad nula tanto en  $t_1$  como en  $t_2$ , si le aplicamos la misma expresión obtenemos que  $W_{FR}$  sobre él es nulo en este intervalo, y por tanto, la fuerza media que lo empuja es igual en valor absoluto a la que lo frena, y podemos calcularla sabiendo que hace un trabajo de 25 J en 1,2 cm:  $F = 25 \text{ J} / 0,012 \text{ m}$

$$F \cong 2,08 \times 10^3 \text{ N}$$

Es decir, esta parte es exactamente lo que está mostrado en el ejemplo de los soldados que atacan la puerta con un ariete, en el cual se dice que la energía cinética del ariete representa su capacidad de hacer trabajo empujando y rompiendo la puerta.

- b)** La fuerza media que impulsa al martillo, por otra parte se averigua de la misma manera que la que frena al clavo: si estimamos que el martillo es empujado a lo largo de 60 cm, tendremos

$$F \times 0,60 \text{ m} = 25 \text{ J} \rightarrow F = 25 / 0,60$$

$$F \cong 41,7 \text{ N}$$

- c)** Ahora veamos el asunto de la producción de calor.

El trabajo hecho por la fuerza de rozamiento, - 25 J, significa que desaparecen 25 J de energía mecánica. Por lo tanto, por una idea elemental de conservación, deben aparecer, distribuidos entre el clavo, la madera, y luego el ambiente, 25 J de energía no mecánica, a la cual llamaremos térmica, ya que se manifiesta exclusivamente a través de la elevación de la temperatura de las partes.

Hay que descartar cierta idea errónea según la cual, una parte de la energía disponible se transforma en calor y otra en trabajo: la misma energía que se emplea para hacer el trabajo hundiendo el clavo, los 25 J, se transfiere al clavo que a su vez los gasta haciendo trabajo contra el rozamiento (gasta todo, ya que alguna parte que no gastase, le debería quedar a él acumulada de alguna manera). Trabajo que se hace contra el rozamiento, por definición, mecánicamente, se aniquila, es decir, desaparece, y por conservación, debe aparecer todo como otro tipo de energía. En este caso térmica.

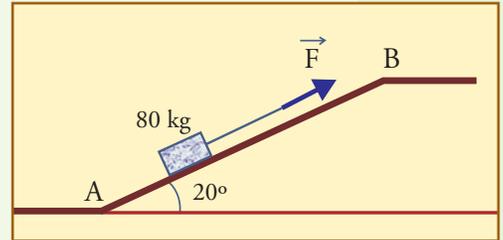
Ahora bien, suele haber problemas para decidir algunos detalles cuando se aplica el primer principio de la termodinámica a un sistema como el clavo solo, por lo que conviene analizar el sistema clavo+madera (también se podría incorporar el ambiente si se quisiera). Para el sistema clavo + porción de madera, tendríamos:  $W_{ext} = 25 \text{ J}$ , ya que es el trabajo hecho por la fuerza que aplica el martillo,  $Q = 0$ , inmediatamente después del golpe, ya que nadie suministra calor al sistema y no hemos considerado tiempo suficiente como para que haya podido escapar calor al ambiente o al resto de la madera (si esperamos cierto tiempo, será  $Q < 0$ , indicando que el sistema se está enfriando mientras el calor escapa disipándose), y por lo tanto  $\Delta E = 25 \text{ J}$ . Esta energía, que se manifiesta a través de una elevación de temperatura, podría ser denominada térmica -muchas veces se le dice calor, pero *no debe confundirse con el término Q*-. El término  $Q$  representa energía que entra o sale como calor, y serviría para explicar cómo se enfría el clavo, transfiriéndose calor al ambiente más frío. Para que hubiera un término  $Q$  positivo, en este problema, habría que calentar el clavo con algo independiente del golpe (por ejemplo, el martillo tendría que estar caliente y quedar apoyado contra el clavo; o alguien acercar un fósforo encendido).

## EJERCICIOS CAPÍTULO 6

### ▲ Ejercicio 6.1

Un cajón de 80 kg es arrastrado por un plano inclinado que forma  $20^\circ$  con la horizontal, por medio de una cuerda de la cual se tira con una fuerza de 400 N. El cuerpo se mueve con una velocidad constante de 0,5 m/s. No se desprecia el rozamiento.

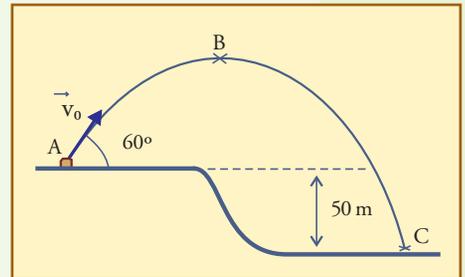
- Realice un diagrama de cuerpo libre del cajón mostrando las fuerzas actuantes sobre él, indicando a qué agente o interacción se debe cada una, y calcule sus valores.
- Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas actuantes en el trayecto AB, que tiene 100 m de longitud, y verifique el cumplimiento de la expresión:  $\sum W_i = \Delta E_c$ .
- Calculando la energía potencial verifique el cumplimiento de la expresión:  $W_{NC} = \Delta E_m$ .
- Si justo antes de B se corta la cuerda con la cual se tiraba del cajón, dibuje las fuerzas actuantes, explique cómo será el movimiento subsiguiente del carro, y calcule con qué energía y qué velocidad pasará el carro por el punto A.
- Explique qué condiciones deberían darse para que al cortarse la cuerda el cuerpo quedase detenido en ese lugar, en vez de descender.



### ▲ Ejercicio 6.2

Se arroja oblicuamente una piedra de masa  $m = 2$  kg, con una velocidad inicial de 30 m/s orientada como muestra la figura (no se considera el rozamiento):

- A partir de las características básicas de este movimiento, calcule la velocidad y la altura en el punto B. Explique qué leyes fundamentales aplica para ello.
- Considerando la energía potencial gravitatoria cero en A, calcule la energía total, y la potencial en B y en C. Calcule la velocidad en C.



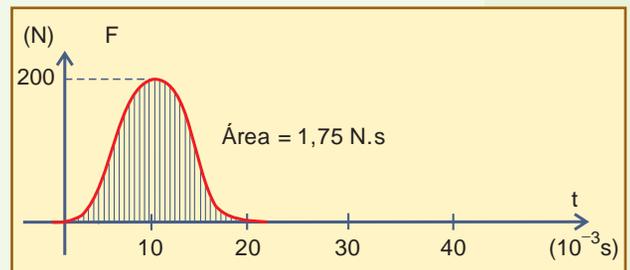
### ▲ Ejercicio 6.3

Una pelota de goma, de  $m = 150$  g, cae verticalmente desde el reposo, desde una altura de 3 m sobre el piso.

- Calcule la velocidad, energía cinética, y cantidad de movimiento con que la pelota llega al piso, inmediatamente antes de tomar contacto con él. Indique la relación de estos valores con el impulso aplicado y con el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria (peso) durante esta caída.

Suponga ahora que un dispositivo electrónico registra la fuerza que se desarrolla en el choque contra el piso (el cual es rígido y horizontal) y el registro obtenido es:

- Teniendo en cuenta esto, y sus resultados an-

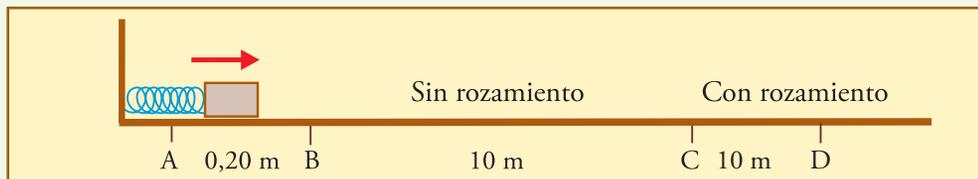


teriores, realice un diagrama vectorial cualitativo mostrando los vectores cantidad de movimiento de la pelota inmediatamente antes y después del contacto con el piso, y el impulso recibido por la misma durante ese lapso. Indique los módulos de estos vectores en su diagrama (calcule los que le haga falta). Interprete sus resultados opinando acerca de si este choque ha sido totalmente elástico, o plástico, o algo intermedio.

- c) Calcule la velocidad con que rebota la pelota, la energía cinética perdida, y la altura hasta la que subirá.

▲ **Ejercicio 6.4.**

Un cuerpo de 16 kg está en reposo en el punto A de una pista horizontal. Un resorte de constante elástica  $k = 10^4 \text{ N/m}$ , que está comprimido, se suelta y lo impulsa a lo largo de 0,20 m, hasta perder contacto con él en el punto B. El cuerpo puede moverse sin rozamiento desde B hasta C, pero si llega a C, allí comienza a actuar una fuerza de rozamiento constante de 50 N.

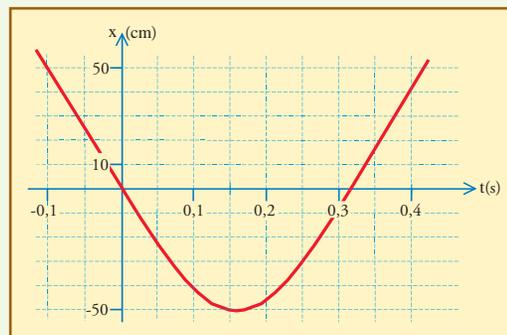


- a) Dibujar diagramas de cuerpo aislado mostrando todas las fuerzas actuantes en cada tramo (entre A y B, entre B y C, y desde C en adelante).  
 b) Calcule la velocidad con que el cuerpo pasa por B, C, y D. Grafique cualitativamente  $v(t)$ , y  $x(t)$  hasta que el móvil se detiene.  
 c) Calcule cuánto demora el móvil en recorrer cada tramo, y con eso indique en qué instante pasa por B, por C, y por D. Calcule también en qué instante y en qué lugar se detiene.

▲ **Ejercicio 6.5**

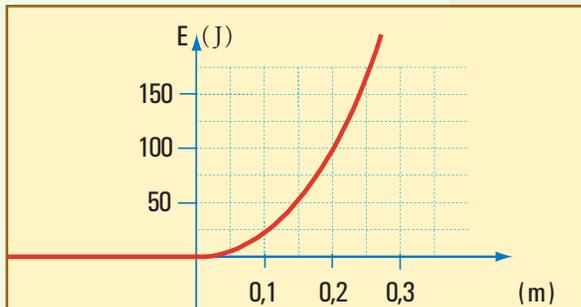
Un cuerpo de 20 kg viaja a lo largo del eje  $x$  sobre una superficie lisa horizontal y sin rozamiento, hasta que en  $t = 0$ , en  $x = 0$ , toma contacto con un resorte de constante elástica  $k = 2.000 \text{ N/m}$ , al cual comprime una cierta distancia, para luego ser impulsado en sentido contrario al inicial, como lo indica la gráfica  $x(t)$  mostrada.

- a) Calcule aproximadamente a partir de la gráfica la velocidad del cuerpo antes y después del contacto con el resorte.  
 b) Encuentre en la gráfica la distancia que se comprime el resorte y, haciendo consideraciones sobre las energías cinética y potencial, utilícela para corroborar su cálculo aproximado de la velocidad.  
 c) Indique en qué parte/s del intervalo mostrado en la gráfica, entre  $-0,1 \text{ s}$  y  $0,4 \text{ s}$ , el resorte hace trabajo positivo, y en qué parte/s hace trabajo negativo. Justifique con esquemas que muestren la dirección de la fuerza y del movimiento, en cada parte.



### ▲ Ejercicio 6.6

La gráfica  $E_p = E_p(x)$  indica la energía potencial de un cuerpo de masa  $m = 2 \text{ kg}$  que se mueve con velocidad  $v = 10 \text{ m/s}$  en la dirección del eje  $x$  hacia la derecha, y que en el punto  $x = 0$  comienza a comprimir un resorte de  $k = 5.000 \text{ N/m}$ . No se considera el rozamiento ni la acción de ninguna otra fuerza más que la que aplica el resorte.



- Interprete el significado de cada término en la expresión  $E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$ , y explique su relación con la gráfica.
- Determine cuánto se comprime el resorte hasta detener el movimiento del cuerpo, y muestre su resultado en la gráfica. Describa brevemente cómo continúa luego el movimiento.
- A partir de la gráfica calcule la energía cinética y la potencial del cuerpo cuando  $x = 15 \text{ cm}$ . Verifique aplicando la expresión  $E = E_c + \frac{1}{2} k x^2$ . Indique si sus cálculos valen para la ida, para la vuelta, o para ambas.
- Calcule la fuerza total actuante sobre el cuerpo cuando  $x = 15 \text{ cm}$ , a la ida, y a la vuelta. Muéstrela en un dibujo cualitativo de la situación.

### ▲ Ejercicio 6.7

En un parque de diversiones se encuentra el siguiente juego. Sobre una pista como la ABCD de la figura, el jugador debe lanzar una bola desde A, y gana si consigue que (la bola) no regrese, atrapada entre D y B.

La bola rueda sobre la pista, prácticamente sin disipar energía. Aquí vamos a ignorar la rodadura, que es irrelevante para la discusión, y vamos a considerar que la bola es un cuerpo de masa  $m = 2 \text{ kg}$ , que desliza sin rozamiento. Luego vamos a considerar el caso real, con un mínimo rozamiento.



- Calcule la velocidad con que debe ser lanzado el cuerpo en A, para que pase por B con una velocidad de  $0,2 \text{ m/s}$ , suponiendo que desliza idealmente sin rozamiento. Describa todo el movimiento subsiguiente. Calcule velocidades en B, C, etc.

Luego, para este mismo caso dibuje un diagrama de cuerpo aislado mostrando las fuerzas sobre el cuerpo en  $x = 175 \text{ cm}$ , en B, entre B y C, en C, y entre C y D, mientras el cuerpo pasa por allí hacia la izquierda. Explicar qué diferencia habría con las fuerzas luego, cuando el cuerpo vuelve, pasando hacia la derecha.

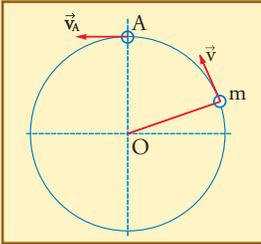
Explique especialmente las diferencias y similitudes entre las fuerzas que actúan sobre el cuerpo cuando pasa por B, y por C, hacia la izquierda y hacia la derecha.

- Repita el punto a), considerando ahora que existe un muy débil rozamiento. Tener en cuenta que en el caso real no hay un cuerpo deslizándose, sino una bola rodando,

si la bola y la pista son suficientemente lisas, esto puede asimilarse a un cuerpo deslizando bajo la acción de un rozamiento extremadamente débil. Explique si es posible ganar el juego, y qué debe hacerse para ello.

▲ **Ejercicio 6.8**

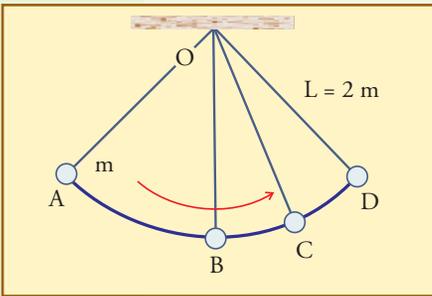
Se revolea un cuerpo de 2 kg de masa en el extremo de un hilo de 1,5 m de longitud, de manera que describe un movimiento circular en un plano vertical. Manteniendo fijo (lo más que se pueda) el extremo O del hilo se logra que el movimiento sea bien circular. El cuerpo pasa por el punto más alto, A, con una velocidad de 5 m/s.



- Dibuje la situación, mostrando las fuerzas actuantes. Razone para explicar si el movimiento puede ser uniforme (además de circular).
- Calcule la velocidad con que pasa el cuerpo por el punto más bajo, y por los puntos al mismo nivel horizontal que el centro O.
- Calcule la fuerza que tensiona el hilo en cada uno de estos puntos mencionados.

▲ **Ejercicio 6.9**

El péndulo de la figura, con un cuerpo de 4 kg suspendido de un hilo de 2 m de longitud, se suelta a partir del reposo en la posición A. El cuerpo tiene una velocidad de 4 m/s al pasar por B, y de 3 m/s al pasar por C, llegando a detenerse en D (para luego recomenzar en sentido inverso). No se consideran rozamientos.



- Considerando el sentido A, B, C, D, muestre cualitativamente las fuerzas actuantes sobre el cuerpo en los puntos A, B, C, y D. Explique, para cada una de estas fuerzas indicadas, si en el tramo AB, y luego en el BC, hace trabajo positivo, negativo, o nulo.

- Calcule la tensión del hilo cuando el cuerpo pasa por el punto B.

- Calcule la altura de los puntos

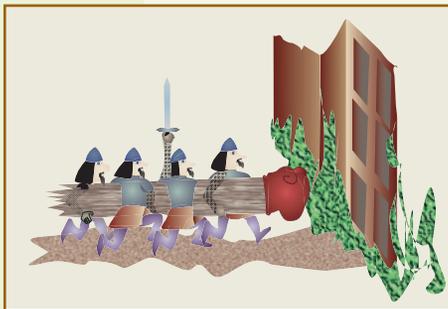
A y C con respecto al B, según las velocidades dadas en el enunciado.

- Considerando cero la energía potencial en A, complete la siguiente tabla con los valores de las energías faltantes.

	$E_p$	$E_c$	$E_{total}$
A	0		
B			
C			
D			

▲ **Ejercicio 6.10**

Considere la situación mostrada en la figura.



Explique cómo estos esforzados hombrecitos están aplicando las leyes de la Mecánica.

¿Cuáles son las razones por las cuales se necesita utilizar el ariete? Siendo que estos soldados deben cargar el pesado tronco, y que además son ellos mismos los que aplican la fuerza que empuja al ariete, ¿Por qué no ahorran el esfuerzo de cargar el tronco y por qué no aplican todas sus fuerzas directamente a la puerta? ¿Qué ganan con el ariete?

Ubique en la figura todos los vectores y elementos que tengan que ver con su explicación; desarrolle en el tiempo la acción de cada uno.

### ▲ Ejercicio 6.11

Considere un martillo de 1 kg de masa, que se utiliza para clavar verticalmente un clavo en una madera. Para cada golpe se impulsa el martillo hasta que adquiere una velocidad de 10 m/s, velocidad con la cual choca, y en 3 golpes hunde completamente el clavo, de 6 cm de longitud.

- a) Calcule la fuerza media que debió vencer el clavo para penetrar.
- b) Estime una longitud del recorrido del martillo mientras es impulsado, y con ella calcule la fuerza media que se le debió aplicar.
- c) Explique cómo es el juego de las energías durante el choque. Estime las cantidades o porcentajes de cada una: cuánto trabajo, cuánto calor, cuánta energía de otro tipo (¿cuál?)
- d) Explique y calcule cuáles serían todas las diferencias si el enunciado dijese que el clavo se clava horizontalmente.

### ▲ Ejercicio 6.12

Considere el texto: «Todo este equipo permitirá ahorrar 960 kilowatt-hora anuales en el consumo de cada vivienda. » (“**Uso rentable de la electricidad**”. Investigación y Ciencia. Noviembre de 1990. N° 170.)

Calcule la potencia representada por los 960 kWh anuales. Indique un artefacto doméstico que desarrolle esa potencia.

### ▲ Ejercicio 6.13

Considere el siguiente párrafo, tomado de “Máquinas térmicas”, John SANDFORT, EUDEBA, 1966: « WATT ... determinó que un caballo promedio podía levantar 112 libras a una altura de 196 pies en un minuto y podía continuar con ese ritmo de trabajo hasta ser reemplazado por un relevo; a esta cifra le sumó el 50 % para asegurarse de que los compradores no tuvieran quejas, llegando hasta cerca de 550 libras/pie/segundo. Este valor prevaleció, probablemente debido al prestigio de WATT, y es la definición del caballo de fuerza inglés (HP) actualmente en uso. »

Verifique el valor 550 del párrafo, y calcule el valor del HP en watts.

### ▲ Ejercicio 6.14

Considere los siguientes casos, y para cada uno discuta si se ha realizado trabajo, y dónde y cómo ha ocurrido transferencia o acumulación de energía. Aunque no conozca todos los detalles de cada mecanismo, dé razones para decir si se transfirió o no; o diga cómo piensa que se acumuló, o a dónde se podría haber ido.

1. Alguien dobla una varilla de mimbre, muy elástica (que al ser soltada recuperará su forma recta inicial).
2. Alguien dobla un caño de cobre de dimensiones y resistencia similar a las de la varilla anterior, pero éste no es elástico y no recuperará en absoluto nada de su forma inicial.
3. Alguien empuja a lo largo de 3 metros un carrito de supermercado cargado, de manera que éste, con muy buenas ruedas, adquiere gran velocidad y marcha hacia una góndola con botellas de vidrio.
4. Alguien empuja con gran fuerza un pesado escritorio a lo largo de 3 metros, y debido a que el rozamiento de éste con el piso es muy fuerte, el escritorio se detiene cuando se deja de empujarlo.

5. Un motor acciona una máquina bombeadora que aspira  $2.500 \text{ m}^3$  de agua de una cisterna y la eleva a un gran depósito 30 m más arriba.
6. El motor de un automóvil hace que éste viaje 500 m ascendiendo una cuesta de 60 m de altura. Al llegar a la parte alta el automóvil se detiene para que los pasajeros admiren el paisaje.
7. Un atleta lanza la jabalina en una competencia.
8. Un arquero tensa su arco al máximo, previo al lanzamiento de la flecha.
9. El arco que ha sido tensado lanza la flecha.
10. Un motor hace girar un generador de corriente eléctrica, el cual carga un acumulador de automóvil.
11. Un motor hace girar un generador de corriente eléctrica, el cual mantiene encendida una lámpara.
12. Un motor hace girar un generador de corriente eléctrica, el cual no está conectado a nada.

El siguiente paso en complejidad luego del movimiento de la partícula puntual, que constituye la máxima simplificación posible, consiste en estudiar el movimiento general de un cuerpo rígido, que siempre se puede considerar como la superposición de un movimiento de traslación más uno de rotación.

En este capítulo veremos cómo obtener las leyes que corresponden al movimiento de rotación a partir de las leyes para el movimiento de la partícula puntual, que también describen directamente el movimiento de traslación pura de los cuerpos rígidos.

Con estos elementos, también abarcamos la descripción de los movimientos de cualquier aparato o mecanismo que se pueda descomponer en partes rígidas, en cuyo caso podrán aplicarse estos conceptos a cada una de esas partes.

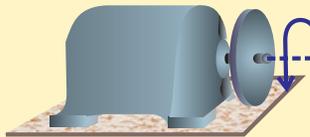
## 7.1. Generalidades sobre el movimiento de rotación

El movimiento de rotación es un movimiento de los cuerpos rígidos en el cual hay una recta denominada **eje de rotación** cuyos puntos permanecen fijos. Por la rigidez del cuerpo, los demás puntos describen movimientos circulares manteniendo todas sus distancias o posiciones relativas invariables.

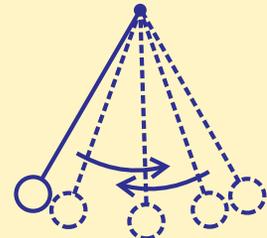
Este movimiento, además de poder ser uniforme o variado de diversas maneras, puede combinarse a su vez con otros movimientos, como el de traslación, o con otras rotaciones alrededor de otros ejes, pudiendo obtenerse una gran variedad de situaciones posibles.

El caso más simple posible se denomina **rotación pura**, y se da cuando *el eje permanece fijo*. Si además el eje contiene al centro

Fig. 7.1. Varios casos diferentes de rotación.



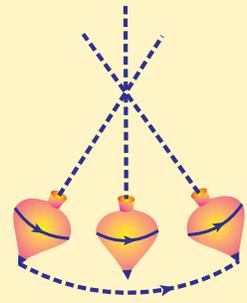
motor:  
Volante de máquinas rotatorias fijas:  
**ROTACIÓN PURA e INTRÍNSECA**



Péndulo:  
**ROTACIÓN PURA,  
NO INTRÍNSECA,  
OSCILATORIA**



Ruedas de bicicleta:  
**ROTACIÓN + TRASLACIÓN**



Trompo:  
**ROTACIÓN + ROTACIÓN del EJE  
(PRECESIÓN)**

de masa del cuerpo, se dice que la rotación es *intrínseca*: en un lenguaje coloquial, cuando un cuerpo ejecuta una rotación intrínseca, se dice que el cuerpo *rota sobre sí mismo*, ya que mantiene fijo el centro de masa (la palabra inglesa “spin”, que significa “retorcer”, o “girar algo sobre sí mismo”, se utiliza para este tipo de rotación a nivel de partículas atómicas).

Por otra parte, si el eje se mueve tenemos una rotación que no es pura; este movimiento puede ser simple, pero también puede llegar a ser muy complicado.

Un caso más bien simple es el de las ruedas de los vehículos cuando viajan en línea recta: la rueda gira alrededor de su eje, fijo respecto del vehículo, mientras éste se traslada. El resultado es la combinación de rotación con traslación. En la figura 7.1 se ilustran éste y algunos otros casos.

En este capítulo desarrollaremos, esencialmente, los conceptos que tienen que ver con la rotación pura.

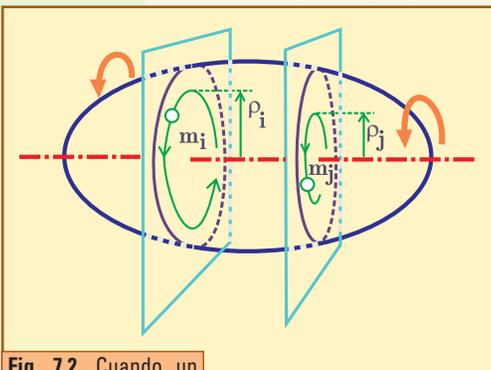
## Rotación pura

Consideremos un cuerpo rígido girando alrededor de un eje fijo. El cuerpo se considera integrado por partículas de masa  $m_i$ , cada una ellas describe una circunferencia de radio  $\rho_i$  en un plano que permanece fijo, perpendicular al eje, como se muestra en la figura 7.2.

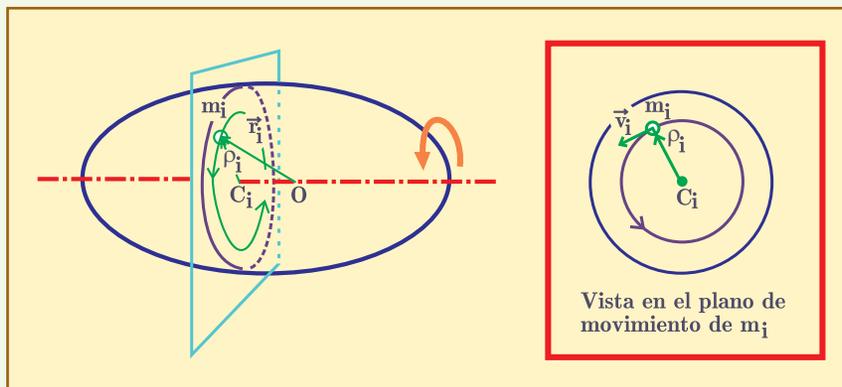
Es importante notar que cada punto material describe su propia circunferencia de centro  $C_i$  y radio  $\rho_i$ . El centro de cada circunferencia es el punto intersección del eje con el plano de movimiento de la partícula considerada, y en general no es el origen de las coordenadas.

El origen de las coordenadas  $O$  se fija arbitrariamente. Por ejemplo, en el caso de la figura 7.3, se fija en algún punto del eje, que podría ser también el centro de masa, aunque eso no es importante. El vector posición de la partícula  $i$  es  $\vec{r}_i$ , cuyo módulo en general no es igual al radio de la circunferencia descrita por ella, ya que éste es  $\rho_i$ , que es la distancia de la partícula al eje (tomada perpendicularmente).

Sólo para los puntos que giran en el mismo plano que contiene al origen de coordenadas  $O$ , se cumple que  $r_i = \rho_i$ .



**Fig. 7.2.** Cuando un cuerpo describe una rotación pura los puntos del eje permanecen inmóviles, mientras los otros describen circunferencias en planos perpendiculares al eje. Como se ilustra, el cuerpo en rotación no necesita tener simetría ni forma determinada.



**Fig. 7.3.** Cada partícula  $i$  describe, en un plano perpendicular al eje, una circunferencia cuyo centro  $C_i$  es la intersección de dicho plano con el eje. El radio de esta circunferencia es  $\rho_i$ , que resulta ser la proyección del vector posición  $\vec{r}_i$  sobre el plano del movimiento, y que indica también la distancia desde la partícula hasta el eje.

La condición de que el cuerpo sea rígido implica que, aunque cada punto material recorre su propia trayectoria circular con su propia velocidad lineal  $v_i$ , todos tienen la misma velocidad angular  $\omega$ , porque todos giran el mismo ángulo en el mismo tiempo. Si recordamos que, según (5.16),  $\omega = v / \text{radio}$ , para este caso tenemos:

$$\omega = \frac{v_i}{\rho_i} : \text{igual para todos los puntos del cuerpo} \quad (7.5)$$

## ■ 7.2. Momento de una fuerza con respecto a un eje

### Efecto de las fuerzas sobre la rotación

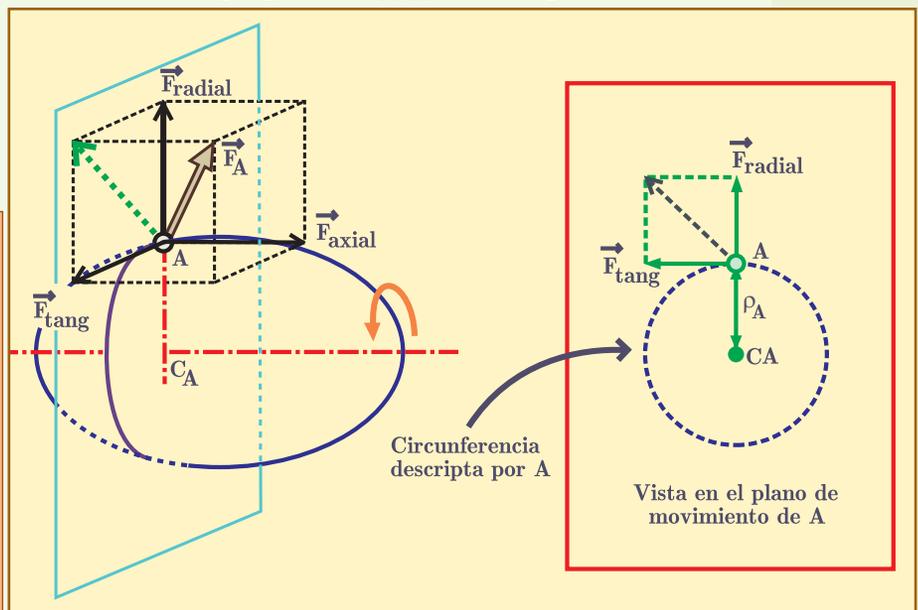
Una descripción dinámica de la rotación implica poder establecer cómo varía la velocidad de rotación en función de las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo.

Para esto, lo primero que hay que tener en cuenta es que: una fuerza sólo influye sobre un movimiento de rotación si se la aplica de manera de *tener componente en la dirección en la cual el eje permite el movimiento del punto sobre el cual actúa*.

Así es que, una fuerza aplicada sobre un punto A de un cuerpo en rotación pura, en el mismo sentido en que se mueve el punto, hará un trabajo positivo y aumentará la velocidad de la rotación, mientras que aplicada en sentido contrario hará trabajo negativo, y hará disminuir dicha velocidad.

De las consideraciones sobre el trabajo que la fuerza puede hacer se deduce que, dada una fuerza exterior cualquiera  $\vec{F}_A$  que se aplique en un punto A, *fuera del eje*, para el efecto sobre la rotación *sólo interesa la componente en la dirección tangencial a la circunferencia descrita por A*; las otras dos componentes,  $F_{\text{axial}}$ , paralela al eje, perpendicular al plano de la circunferencia descrita por A, y  $F_{\text{radial}}$ , en dicho plano, en la dirección de la recta que pasa por el centro de dicha circunferencia, no hacen trabajo y no tienen efecto sobre la rotación (figura 7.4).

**Fig. 7.4.** Se muestra el vector hueco  $\vec{F}_A$ , indicativo de una fuerza aplicada en A, y con flechas llenas, sus componentes axial, radial y tangencial. En línea de trazos también se muestra la proyección de  $\vec{F}_A$  sobre el plano del movimiento del punto A, vector cuyas componentes en ese plano también son  $\vec{F}_{\text{radial}}$  y  $\vec{F}_{\text{tang}}$ . Para considerar efectos sobre la rotación sólo interesa  $\vec{F}_{\text{tang}}$ . Se ilustra un cuerpo en rotación que no tiene simetría ni forma determinada.



Para el caso especial de una fuerza aplicada exactamente en algún punto del eje, queda claro que no puede influir sobre la rotación, ya que estos puntos no se mueven y, por lo tanto, la fuerza no hace trabajo (para estos puntos no hay dirección tangencial).

Es decir, en general la fuerza aplicada puede tener las tres componentes,  $\vec{F}_A = \vec{F}_{axial} + \vec{F}_{radial} + \vec{F}_{tang}$ , pero la única componente con posibilidades de influir sobre la rotación es la  $F_{tang}$ .

## Momento de una fuerza respecto de un eje

Ahora tratemos usar estas ideas para establecer una expresión para lo que denominaremos “momento de la fuerza con respecto a un eje”, concepto que representa el poder de la fuerza para modificar (producir, detener, etc.) la rotación de un cuerpo alrededor del eje. A veces, también le diremos *poder de rotación* de la fuerza con respecto al eje.

Para simplificar los razonamientos, consideremos una rotación orientada con el eje perpendicular al plano de la hoja, de manera que en nuestros esquemas veamos la rotación directamente hacia un lado u otro en el plano del papel. Para facilitar las ideas pensemos en un disco o plato redondo de radio  $R$  que tiene absoluta libertad de rotación alrededor del eje, que será el punto  $O$  en nuestros dibujos. Cualquier fuerza que apliquemos sobre un punto del disco podrá producir o no rotación, pero no logrará cambiar la ubicación del eje (éste está montado sobre cojinetes que le permiten girar pero no desplazarse).

Ahora bien, es claro que si una fuerza  $\vec{F}_T$  se aplica en  $A$  tangencialmente a la circunferencia de centro  $O$ , tiene el mismo poder de rotación que si se aplica tangencialmente en cualquier otro punto de esta circunferencia, como se sugiere en la figura 7.5(a).

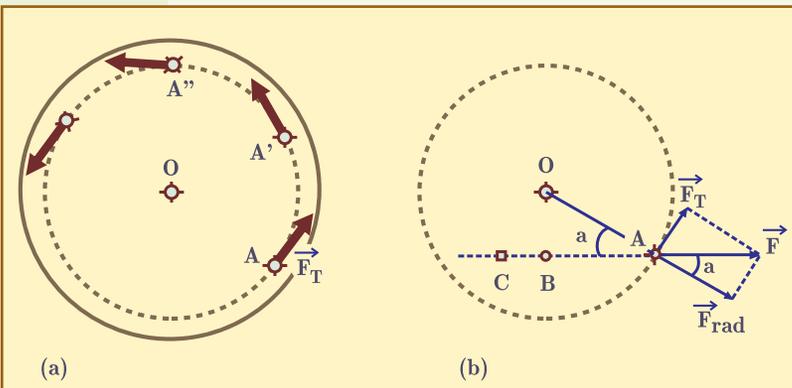
Por otra parte, si en  $A$  se aplica  $\vec{F}$  oblicuamente, para comparar su poder de rotación con el de  $\vec{F}_T$  sólo se necesita ubicarla angularmente con respecto a dicha circunferencia, y descomponerla según las direcciones radial y tangencial. La componente radial indicará una acción tendiente a desplazar el eje, que será equilibrada por las reacciones en los soportes del eje que impiden su desplazamiento, mientras que la componente tangencial expresará estrictamente la acción de la fuerza tendiente a producir rotación (figura 7.5(b)).

Ahora bien, dada una fuerza aplicada en  $A$  nos interesa saber cuánto debe valer una fuerza aplicada en *otro punto*, para equilibrar el poder de rotación de la primera, y para resolver eso es suficiente con advertir, en la figura 7.5, que  $\vec{F}$  podría ser equilibrada en todos

sus efectos, incluido su poder de hacer rotar, por  $-\vec{F}$  que se aplicara en cualquier punto  $B, C$ , etc, de la misma *recta de acción*.

Ahora, tracemos una circunferencia con centro en  $O$ , tangente a la recta de la fuerza en el punto  $B$  (figura 7.6), e imaginemos la fuerza  $-\vec{F}$  aplicada en  $B$  (la denominamos  $\vec{F}_B$ ). Esta fuerza actúa tangencialmente a su circunferencia, y tiene el mismo poder de rotación res-

**Fig. 7.5. (a)** Estas fuerzas aplicadas tangencialmente a la misma circunferencia tienen el mismo poder de rotación con respecto a  $O$  a condición de tener igual intensidad, independientemente del punto particular de la circunferencia sobre el que actúan. **(b)** si una fuerza se aplica oblicuamente, su poder de rotación está dado exclusivamente por su componente tangencial, independientemente de la existencia de la componente radial.



pecto de O que cualquier fuerza de módulo  $\vec{F}_B$  aplicada tangencialmente en cualquier punto de la circunferencia de radio OB. Además, ella puede equilibrar la acción de F aplicada en A, cuyo poder de rotación es el de  $\vec{F}_T$  (a la cual denominamos ahora  $\vec{F}_A$ ), aplicada tangencialmente en A o en cualquier punto de la circunferencia de radio OA.

Ahora bien, observando la figura 7.6, vemos que  $F_A / F = OB / OA$ , de donde se deduce que la relación entre los módulos de las fuerzas que hay que aplicar tangencialmente en puntos de dos circunferencias de diferente radio para tener el mismo poder de rotación está dada por:

$$F_A \times OA = F_B \times OB \quad (7.6)$$

Podemos decir que esta expresión define precisamente el poder de rotación de cada fuerza con respecto a O, ya que expresa una cantidad proporcional a la fuerza aplicada, tal que si comparásemos su valor para dos fuerzas cualesquiera orientadas de esta manera, aquélla para la cual este producto sea mayor, superará en poder de rotación a la otra.

En el lenguaje matemático se acostumbra a denominar “momento de la cantidad tal con respecto a un eje o punto”, al producto de esa cantidad por la distancia al eje o al punto, de manera que según la expresión que hemos hallado, al poder de rotación le corresponde precisamente la denominación “momento” (que no debe interpretarse como algo que tiene que ver con el tiempo o el instante).

De manera que, definimos el momento o poder de rotación con respecto a O de una fuerza  $\vec{F}$  aplicada en A formando un ángulo  $\alpha$  con la línea OA:

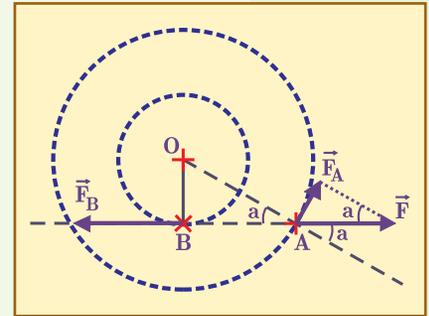
$$M_{F,O} = F \times OA \times \text{sen} \alpha \quad (7.7)$$

En donde,  $M_{F,O}$  significa el **momento de  $\vec{F}$  con respecto a O**, y se sobreentiende, en esta expresión y en las otras similares, que OA indica la longitud del segmento OA.

Teniendo en cuenta que, como se ve en las figuras 7.5 y 7.6,  $F \text{ sen} \alpha$  es  $F_T$ , la componente de  $\vec{F}$  tangencial a la circunferencia que puede describir el punto A alrededor del eje, y que  $OA \times \text{sen} \alpha$  es igual a la distancia OB entre el eje y la recta de acción de la fuerza, tenemos que son definiciones equivalentes del momento:

$$\begin{aligned} M_{F,O} &= F \times OB \\ &= F_T \times OA \end{aligned} \quad (7.7')$$

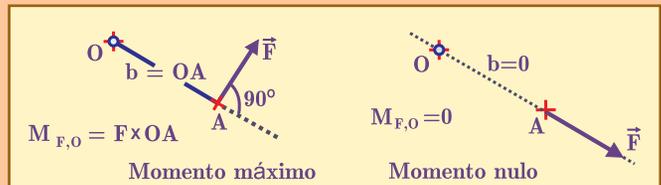
La distancia OB entre el eje y la recta de acción de la fuerza se denomina “brazo de palanca” de la fuerza respecto del eje, y utilizaremos para ella en general la letra b.



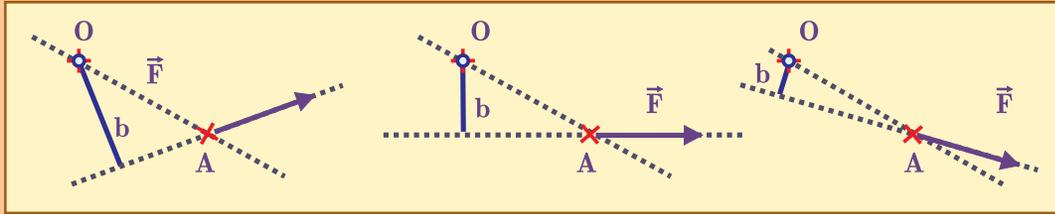
**Fig. 7.6.** Dada  $\vec{F}_B$  aplicada tangencialmente en B, para encontrar la fuerza que pueda equilibrar su poder de rotación aplicada tangencialmente en una circunferencia de mayor radio, debe prolongarse la tangente en B hasta cortar a la circunferencia mayor. En ese punto, denominado A, se proyecta tangencialmente  $-\vec{F}_B$  y se obtiene  $\vec{F}_A$ .

### Nota 1. Acerca del brazo de palanca

Cuando la fuerza se aplica en A de la manera más efectiva, tangencialmente a la circunferencia por la que se desplazará el punto A, resulta  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\text{sen} \alpha = 1$ , y el brazo de palanca coincide con OA. En este caso el momento vale  $F \times OA$ , que es el máximo valor que puede tomar para las distintas orientaciones posibles de la fuerza. El caso opuesto, de mínimo valor para la misma fuerza aplicada en el mismo lugar A, es cuando la fuerza está alineada con el centro O. En ese caso la distancia de O a la recta de acción de la fuerza es cero, ya que la recta pasa por O.



**Fig. 7.7.** Caso de momento máximo y de momento nulo, para una fuerza aplicada a distancia OA del punto eje O.



**Fig. 7.8:** Cuando la fuerza se aplica oblicuamente, el brazo de palanca debe buscarse como la distancia entre  $O$  y la recta de acción de la fuerza, tomada perpendicularmente a la recta (la distancia de un punto a una recta sólo tiene sentido entendida de esta manera).

### Nota 2. Acerca del sentido de la rotación

La rotación ocurre en el espacio, tiene orientación, y se puede describir con ayuda de ciertos vectores especiales (ver Anexo 7.2). Por ahora, en un planteo simple, digamos que, observando de manera de ver de frente el plano de la rotación (en el cual tienen lugar las circunferencias descritas por los puntos que giran), es decir viendo “de punta” el eje, se acostumbra a asignar signo  $+$  al sentido de rotación antihorario, y signo  $-$  al sentido horario.



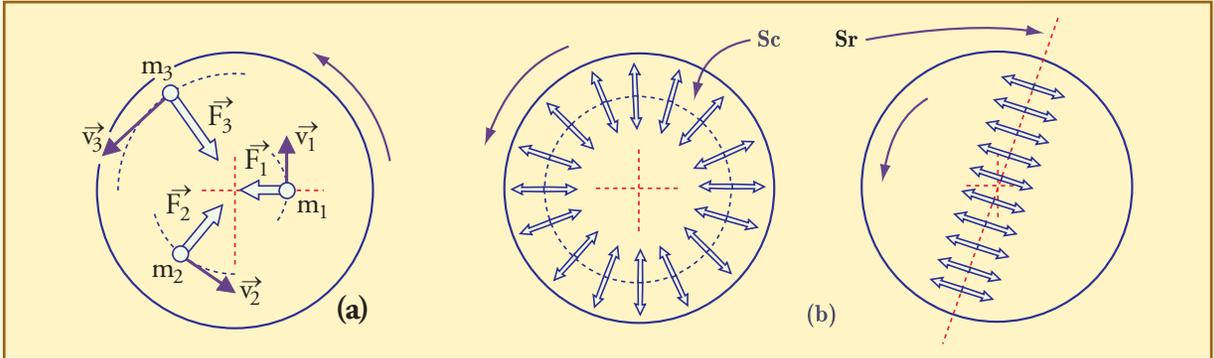
Por supuesto que esta asignación de signos es arbitraria, y puede ser modificada si se lo desea: una rotación horaria es vista como antihoraria desde detrás del plano.

## ■ 7.3. Leyes de la dinámica de la rotación pura

### Inercia de la rotación pura

Ahora bien, para establecer leyes de una manera lo más parecida posible a las que ya conocemos para los movimientos lineales, comencemos considerando el caso más simple, en el cual no se aplique ninguna fuerza exterior sobre los puntos del cuerpo fuera del eje. En este caso, una rotación no podrá iniciarse espontáneamente, ni tampoco detenerse: si no se aplican fuerzas con momento sobre un cuerpo rígido que está rotando, entonces, **por inercia, su rotación continuará**, manteniendo constante el valor de la velocidad angular.

Vale aclarar que, en este caso, necesariamente actúan fuerzas **interiores** sobre cada partícula del cuerpo, ya que cada una describe un movimiento circular, que para mantenerse requiere de la acción de una fuerza centrípeta. En el cuerpo rotante se desarrollan tensiones cuyo efecto es aplicar una fuerza centrípeta neta sobre cada partícula. Estas fuerzas, tanto la acción sobre cada partícula (centrípeta), como la reacción (centrífuga) de ella sobre las vecinas, tienen la dirección estrictamente radial, y por ello no tienen momento con respecto al eje, y no contribuyen de ninguna manera a iniciar, ni a mantener, ni a detener la rotación.



**Fig. 7.9.** Aún en el caso en que un cuerpo rota libremente, sin ninguna fuerza exterior aplicada, hay fuerzas sobre cada una de sus partículas constituyentes. Estas fuerzas son aplicadas sobre cada partícula por las partículas vecinas, y tienen la dirección hacia el centro, como se ilustra en (a) para tres partículas genéricas con vectores huecos. En (b) se ilustran las tensiones normales, de tracción, que aparecen tanto en cualquier superficie cilíndrica,  $S_c$ , como en cualquier plano radial que contenga al eje,  $S_r$ . El cuerpo podría romperse si estas tensiones se hicieran demasiado grandes, y a partir de ese momento, cada parte continuaría con un movimiento diferente.

• Ley del Impulso para las rotaciones

Consideremos ahora un cuerpo rígido con un eje que es mantenido fijo por cojinetes ideales sin rozamiento, que permiten al cuerpo ejecutar sólo rotaciones puras. Sobre este cuerpo se aplican varias fuerzas exteriores en distintos puntos, para lograr una rotación de determinadas características.

Si consideramos la masa  $m_i$  de una partícula cualquiera del cuerpo, podemos aplicarle la Ley del Impulso en la dirección tangencial, y decir que en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , su velocidad (tangencial)  $v_i$  sufrirá una variación  $\Delta v_i$  tal que:

$$F_i \Delta t = m_i \Delta v_i$$

En esta expresión,  $F_i$  es la resultante de todas las fuerzas tangenciales sobre la partícula  $i$ . Estas fuerzas son ejercidas por todas las partículas vecinas (según el principio de acción y reacción), más los agentes exteriores que actúen allí, si los hay. Notar que los agentes exteriores, en general, actúan sobre algunos puntos particulares, mientras que todas las partículas vecinas se ejercen fuerzas mutuas unas con otras; estas fuerzas son consideradas interiores para el cuerpo que rota, aunque sean exteriores para una partícula determinada.

$$\sum_{\substack{\text{ejercidas} \\ \text{por agentes} \\ \text{exteriores}}} F_{T;i} \Delta t + \sum_{\substack{\text{ejercidas} \\ \text{por otras} \\ \text{partículas}}} F_{T;i} \Delta t = m_i \Delta v_i$$

Ahora bien, como el cuerpo es rígido, la velocidad tangencial sólo puede cambiar porque cambie la angular, de manera que el miembro derecho puede ser escrito como  $m_i \rho_i \Delta \omega$ . Como nos interesa escribir este cambio en función de los momentos de las fuerzas actuantes, podemos multiplicar toda la expresión por  $\rho_i$ :

$$\Delta t \sum F_{T\text{ext};i} \rho_i + \Delta t \sum F_{T\text{int};i} \rho_i = m_i \rho_i \Delta \omega \rho_i \tag{7.8}$$

Ahora bien, en el primer término del miembro izquierdo está expresada la suma de los momentos de las fuerzas *exteriores* aplicadas sobre cada partícula. El resultado de esa suma es el momento total de las fuerzas exteriores que estén aplicadas sobre esa partícula,

si las hay, con respecto al eje. Si además nos planteamos *sumar ese resultado sobre todas las partículas*, simplemente tendremos el momento total de las fuerzas exteriores sobre el sistema completo con respecto al eje.

$$\sum_i (\sum F_{\text{ext},i} \rho_i) = M_{\text{total fuerzas exteriores}} \quad (7.9)$$

En cambio, en el segundo término del miembro izquierdo está expresada una suma que considera los momentos de las fuerzas sobre una partícula, debidas a sus vecinas. Estas fuerzas, por acción y reacción, *son opuestas a las que ella ejerce sobre sus vecinas*. De manera que si se suman todos estos términos sobre todas las partículas, el resultado, que es el momento neto debido a todas las fuerzas interiores, debe ser nulo.

Momento neto de fuerzas interiores

$$\sum_i (\sum F_{\text{int},i} \rho_i) = 0 \quad (7.10)$$

De manera que, sumando ambos miembros sobre todas las partículas obtenemos lo que podemos considerar como Ley del Impulso para una rotación pura:

$$M_{\text{fuerzas exteriores}} \Delta t = \Delta \omega \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (7.11)$$

Revisemos los términos de esta expresión, mientras la comparamos con la correspondiente al movimiento lineal:

$$\vec{F} \Delta t = \Delta(m\vec{v})$$

$$\vec{F} \Delta t = m \Delta \vec{v}$$

## ● Impulso angular

Sabemos que el momento de las fuerzas es el concepto que juega, para las rotaciones, el papel que las fuerzas juegan para los movimientos lineales. De manera que  $M \Delta t$ , es decir el momento de la fuerza, por el tiempo que actúa, juega el papel del impulso para las rotaciones, al cual denominaremos “impulso angular”, con respecto al eje correspondiente.

$$\text{Impulso angular} = M \Delta t \quad (7.12)$$

Vale decir que así como el impulso lineal es un vector con la orientación de la fuerza aplicada, el impulso angular tiene orientación en el espacio, que es la misma orientación del momento aplicado (es decir, con respecto al eje ubicado de determinada manera, con signo más para los impulsos en sentido antihorario, y signo menos para los horarios). En el Apéndice 7 se plantea cómo representar las rotaciones por medio de vectores para entender, de manera más sencilla, el concepto de orientación aplicado a rotaciones.

## ● Momento de inercia

Si en el movimiento lineal, hacemos el cociente entre el módulo del impulso aplicado, y el cambio en la velocidad sufrido por el cuerpo, tenemos una constante característica de la inercia del cuerpo, que es  $m$ :

$$m = \frac{F \Delta t}{\Delta v}$$

Decimos que  $m$  caracteriza la inercia (para el movimiento lineal), y hasta a veces, para dar énfasis, se dice que  $m$  es una medida de la inercia, porque a mayor masa, aplicando igual impulso, se logrará un cambio menor en la velocidad, y viceversa.

Si tratamos de aplicar estos conceptos al caso de la rotación, encontramos, a partir de (7.11), que el cociente entre el impulso angular aplicado, y el cambio en la velocidad angular es la siguiente expresión:

$$\frac{M \Delta t}{\Delta \omega} = \sum m_i \rho_i^2 \quad (7.13)$$

En el caso que nos ocupa, en el que el cuerpo es rígido, esta expresión da una constante para cada cuerpo con un eje elegido: se calcula a partir de su masa y sus medidas (veremos ejemplos), y no depende de que el cuerpo esté en reposo o no, es decir de la velocidad adquirida.

Esta constante, que debe expresar la inercia que ofrece el cuerpo para rotar alrededor del eje considerado, recibe, por razones de usos matemáticos la denominación oficial de “momento de inercia”, que simbolizaremos con “ $I$ ”:

$$I = \sum m_i \rho_i^2 \quad (7.14)$$

El momento de inercia es proporcional a la masa, como corresponde a la idea de inercia, pero además depende de que la masa esté distribuida cerca o lejos del eje. La diferencia esencial entre la inercia para el movimiento de traslación, y la inercia para el movimiento de rotación consiste en que, para dos cuerpos de la misma masa es necesario aplicar mayor impulso angular para iniciar o frenar la rotación del cuerpo que tiene la masa distribuida más lejos del eje, mientras que la distribución de la masa no interesa en el movimiento de traslación.

## • Cantidad de movimiento angular

Para el movimiento de rotación, el concepto correspondiente a la cantidad de movimiento está dado por la “cantidad de movimiento angular”, que designaremos con  $J$ .

Para este concepto vale aclarar que hay algunos aspectos complejos que no pretendemos abarcar, y que en este lugar nos vamos a limitar a los casos simples en los que *el eje de rotación es a la vez eje de simetría del cuerpo* (para otros casos habría que decir que lo que vamos a definir sería sólo una componente referida al eje, de un ente algo más complejo).

Teniendo en cuenta esta aclaración, para un cuerpo sólido en rotación pura definimos la cantidad de movimiento angular como *el momento de la cantidad de movimiento con respecto al eje*. Esto significa, para cada partícula del cuerpo, multiplicar el módulo del vector cantidad de movimiento,  $m v_i$ , por su brazo de palanca, o, distancia al eje,  $\rho_i$ .

Así, para todo el conjunto de partículas del cuerpo, tendremos:

$$\begin{aligned} J &= \sum m_i v_i \rho_i \\ J &= \sum m_i \omega \rho_i \rho_i \\ J &= \sum m_i \rho_i^2 \omega \end{aligned} \quad (7.15)$$

Es decir, sacando  $\omega$  factor común de la sumatoria, y utilizando la definición de momento de inercia (7.14):

$$J = I \omega \quad (7.16)$$

El concepto de momento de inercia nos permite escribir para la rotación, una expresión

sión totalmente similar a la del movimiento lineal. Con esta notación, volviendo a la expresión (7.11) de la Ley del Impulso para las rotaciones puras, encontramos que ésta también adquiere una forma totalmente similar a la de las traslaciones:

### Ley del Impulso de las rotaciones puras

$$\begin{aligned} M \Delta t &= \Delta J \\ M \Delta t &= I \Delta \omega \end{aligned} \quad (7.17)$$

#### Nota 3. Condición de equilibrio de los momentos

*En esta ley interviene el momento resultante de las fuerzas exteriores. Si este momento resultante es nulo, estamos en la situación de equilibrio de momentos, situación en la cual se conserva la cantidad de movimiento angular.*

*Cuando tenemos situaciones estáticas, obviamente además de estar equilibradas las fuerzas, deben estar equilibrados sus momentos con respecto a cualquier eje que se imagine, lo cual se conoce como "Condición de equilibrio de los momentos".*

*Como vimos en el Capítulo 3, el equilibrio de las fuerzas sólo tiene en cuenta las componentes de las mismas. La condición de equilibrio de los momentos, en cambio, es importante en cualquier sistema estático para determinar dónde debe aplicarse cada fuerza.*

## • Trabajo y energía cinética de rotación

Utilizando los conceptos desarrollados hasta aquí es posible escribir expresiones para el teorema del trabajo y la energía cinética en las rotaciones, adaptadas a las variables angulares, totalmente similares a las del movimiento lineal.

### Trabajo en una rotación pura

Ya sabemos que el trabajo hecho por una fuerza, en general, puede calcularse con la expresión (6.1):  $\bar{W} = F_T d$ . Si ahora nos referimos a una fuerza que se aplica sobre un punto de un cuerpo rígido que tiene un eje fijo, tenemos que el punto gira describiendo una circunferencia de radio  $\rho$ , y podemos escribir:

$$\text{Ángulo girado (en radianes):} \quad \Delta\theta = \frac{d}{\rho}$$

$$\text{Momento aplicado:} \quad M = F_T \rho$$

De manera que si en la expresión (6.1) multiplicamos  $F_T$  y dividimos  $d$ , ambos por  $\rho$ , nos queda una expresión que expresa el trabajo en términos de variables angulares:

$$\bar{W} = M \Delta\theta \quad (7.18)$$

Esta expresión no es imprescindible, ya que es totalmente equivalente a (6.1) y cualquiera de las dos puede aplicarse a una rotación. Pero tiene el valor conceptual, y hasta estético, de permitir escribir, para las rotaciones, expresiones en variables angulares, totalmente similares a las expresiones en variables lineales que hemos visto para el movimiento de traslación.

### Energía cinética en una rotación pura

“Tenemos que la energía cinética de cualquier sistema, y eso incluye a un cuerpo que rota, siempre puede ser expresada como:”

$$E_c = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Veamos cómo se puede reescribir esto mismo en términos de las variables angulares. Escribamos las velocidades en la sumatoria en función de la única velocidad angular,  $\omega$ , sustituyendo  $v_i = \omega \rho_i$ :

$$\sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 \rho_i^2}{2}$$

Si en esta expresión extraemos  $\frac{1}{2} \omega^2$  como factor común fuera de la sumatoria, llegamos a las expresiones buscadas:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i \rho_i^2 \\ E_c &= \frac{I \omega^2}{2} \end{aligned} \quad (7.19)$$

### ● Teorema del trabajo y la energía cinética

Si repetimos con las variables angulares el mismo procedimiento hecho en el Capítulo 6 con las variables lineales para demostrar este teorema, llegamos exactamente a la misma expresión  $W = \Delta E_c$ , escrita ahora como:

$$M \Delta \theta = \Delta \left( \frac{1}{2} I \omega^2 \right)$$

Donde  $M$  es el momento resultante de todos los momentos de las fuerzas exteriores con respecto al eje del cuerpo,  $W = M \Delta \theta$  es el trabajo resultante de todas las fuerzas exteriores, y  $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$ , es la energía cinética de rotación de este cuerpo.

## Casos de momentos de inercia

---

Para calcular el momento de inercia de un cuerpo a partir de sus medidas se debe aplicar la relación (7.14):  $I = \sum m_i \rho_i^2$ . Excepto para el caso 1, los métodos matemáticos para evaluar esta suma no están a nuestro alcance aquí, pero podremos resumir algunas ideas básicas importantes, y algunas expresiones para cuerpos de formas típicas.

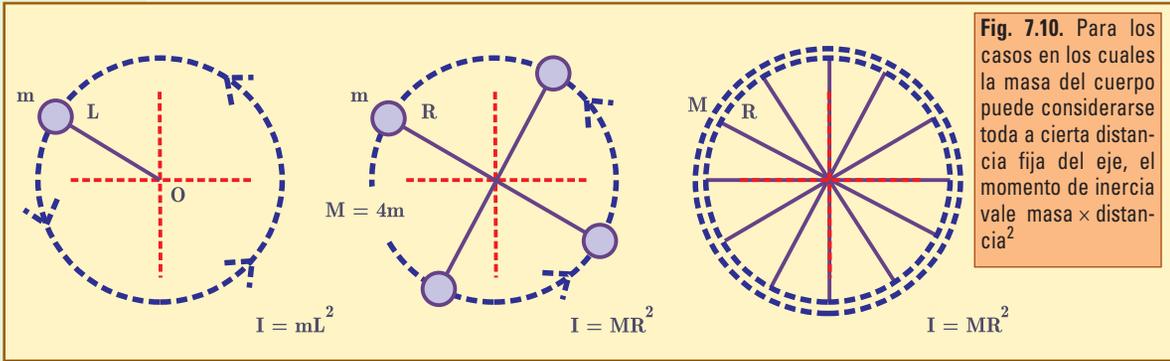
### Caso 1: Masa puntual en el extremo de una varilla

Cuando hay un cuerpo girando sujeto en el extremo de una varilla o de un hilo de longitud  $L$ , suponiendo que el cuerpo tiene un tamaño despreciable frente a  $L$ , y que la masa de la varilla o hilo es despreciable frente a la masa del cuerpo, tenemos un caso trivial en el cual, para la sumatoria planteada en (7.14), todas las partículas que pueden considerarse tienen aproximadamente la misma distancia  $L$  al eje. Por lo tanto,  $L^2$  resulta factor común de la suma de las masas, y queda:

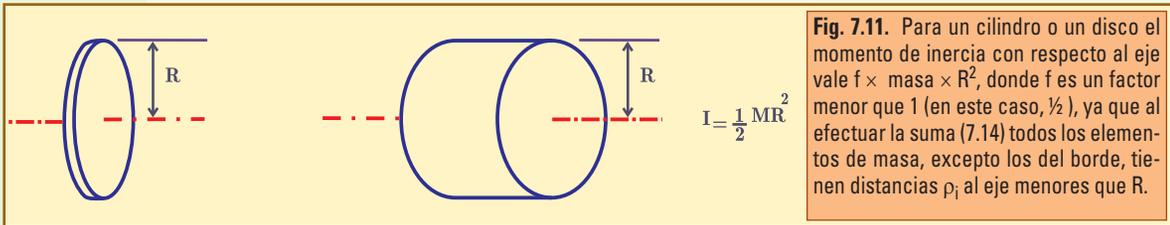
$$I = m L^2 \quad (7.20)$$

La misma idea también se aplica a cuerpos cuya masa se mantiene a distancia  $R$  (su-

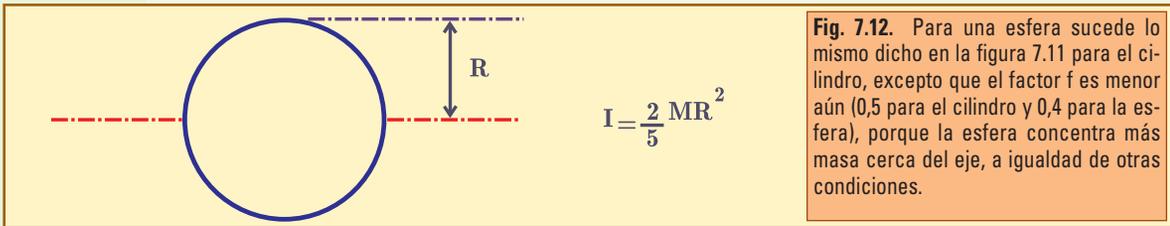
ficientemente grande) del eje, por medio de varillas o elementos cuya masa puede despreciarse, como el péndulo, cualquier objeto no muy grande que gira en el extremo de una cuerda, un anillo, una rueda de bicicleta y otros (figura 7.10).



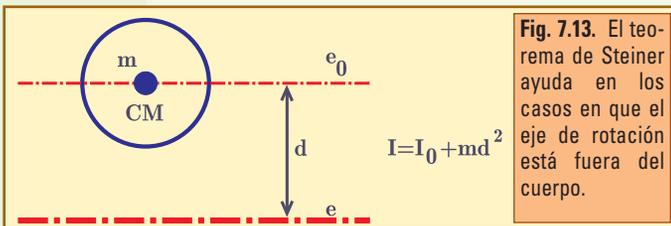
Caso 2: Cilindro, o disco, con respecto a su eje (7.21)



Caso 3: Esfera, con respecto a un eje que pasa por el centro (7.22)



Caso 4: Eje paralelo a otro con respecto al cual  $I$  es conocido (7.23)



Si se conoce el momento de inercia  $I_0$  con respecto al eje  $e_0$  que pasa por el centro de masa, el momento  $I$  con respecto a otro eje  $e$ , paralelo al anterior, a distancia  $d$  del mismo, vale (esto se conoce como “teorema de Steiner”) Fig. 7.13.

### • Ejemplo 1

Aplicar (7.23) a una esfera de 2 cm de radio y 300 g de masa que gira sujeta al extremo de un hilo de 60 cm de largo, y determinar cuánto error se hubiera introducido aplicando (7.20).

### • Desarrollo

Aplicamos (7.23), con  $d = 62$  cm. Para calcular  $I_0$  aplicamos (7.22):  $I_0 = 0,4 \times 0,30 \text{ kg} \times (2 \text{ cm})^2$   
 $I_0 \cong 0,48 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$

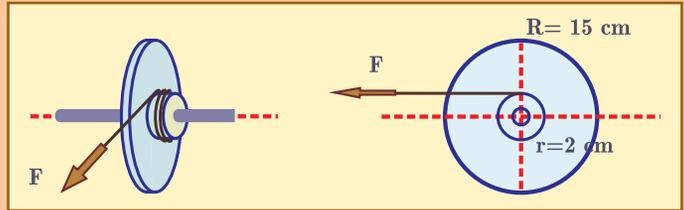
Ahora, aplicamos (7.23):  $I = I_0 + 0,30 \text{ kg} \times (62 \text{ cm})^2$   
 $I \cong 0,48 + 1.153,2 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$   
 $I \cong 1.153,7 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$

Se ve claramente que el segundo sumando corresponde a la expresión (7.20), y que  $I_0 \cong 0,48 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ , puede ser despreciado introduciendo un error  $< 0,05\%$ .

### • Ejemplo 2

Consideremos un volante de hierro ( $7.850 \text{ kg/m}^3$ ) de 30 cm de diámetro y 1,2 cm de espesor, montado sobre un eje también cilíndrico de hierro, de 2 cm de diámetro y 30 cm de longitud, montado sobre cojinetes perfectos sin rozamiento.

Unido rígidamente a este disco con este disco hay un pequeño tambor de 2 cm de radio en el que se enrolla un hilo que se utiliza para hacer girar el sistema por medio de una fuerza que tira de él.



a) Calcular el momento de inercia del disco. Explicar si es necesario considerar las contribuciones del eje y del tambor, o si pueden despreciarse.

b) Calcular el momento y el impulso angular aplicado al disco si se tira del hilo con una fuerza de 20 N durante 6 s.

c) Suponiendo que inicialmente el disco está en reposo, calcular la velocidad angular que adquiere en este proceso, y a partir de ella obtener la longitud de hilo desenrollada bajo la acción de la fuerza.

A partir de la longitud de hilo desenrollada calcular el trabajo hecho por la fuerza, y verificar que coincide con la energía cinética adquirida.

d) Explicar cómo es el movimiento luego de suspenderse la aplicación de la fuerza.

### • Desarrollo

a) Tanto para el disco, como para el eje y el tambor se aplica la fórmula (7.21) del cilindro. Es de prever que las contribuciones del eje y del tambor serán despreciables (lo que mostraremos con unos cálculos aproximados). Necesitamos las masas de cada parte.

$$M_{\text{disco}} = \text{densidad} \times \text{volumen}$$
$$M_{\text{disco}} = 7.850 \text{ (kg/m}^3) \times \pi \times (0,15 \text{ m})^2 \times 0,012 \text{ m}$$
$$M_{\text{disco}} \cong 6,66 \text{ kg}$$

$$M_{\text{eje}} = 7.850 \text{ (kg/m}^3) \times \pi \times (0,01 \text{ m})^2 \times 0,30 \text{ m}$$
$$M_{\text{eje}} \cong 0,74 \text{ kg}$$

No tenemos elementos para calcular la masa del tambor, pero veremos que no es necesaria porque no contribuirá apreciablemente al momento de inercia.

$$I_{\text{disco}} \cong \frac{6,66 \text{ kg} \times (0,15 \text{ m})^2}{2}$$

$$I_{\text{disco}} \cong 0,075 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

$$I_{\text{eje}} \cong \frac{0,74 \text{ kg} \times (0,01 \text{ m})^2}{2}$$

$$I_{\text{eje}} \cong 0,000037 \text{ kg}\cdot\text{m}^2,$$

totalmente despreciable frente al anterior. Asimismo, se puede estimar que el momento de inercia del tambor será comparable al del eje, tal vez menor y que, por lo tanto, no será necesario calcularlo.

- b) El brazo de palanca de la fuerza aplicada es el radio del tambor, 2 cm, como se ve en la figura. Entonces, el momento aplicado es:

$$M = 20 \text{ N} \times 2 \text{ cm}$$

$$M = 0,40 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

El impulso angular con respecto al eje resulta:  $M \Delta t = 0,40 \text{ N}\cdot\text{m} ; 6 \text{ s} = 2,4 \text{ J}\cdot\text{s}$ .

- c) A partir de la ley del impulso, sabemos que la cantidad de movimiento angular adquirida es igual al impulso angular aplicado:  $\Delta J = 2,4 \text{ J}\cdot\text{s}$ . Dado que inicialmente el disco estaba en reposo, ésta es la cantidad de movimiento angular final:

$$J(6\text{s}) = \Delta J$$

$$J(6\text{s}) = 2,4 \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$J(6\text{s}) = I \omega.$$

De manera que  $\omega = 2,4 \text{ J}\cdot\text{s} / 0,075 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$$\omega = 32 \text{ 1/s}.$$

Dado que la velocidad angular varía uniformemente de 0 a 32 1/s, la velocidad del hilo, que es la del contorno del tambor ( $v = \omega r$ ), pasa de 0 a 0,64 m/s, y su extremo recorre una distancia

$$d = v_m \Delta t$$

$$d = 0,32 \cdot 6$$

$$d = 1,92 \text{ m}$$

- d) El trabajo hecho por la fuerza resulta  $W = 20 \text{ N} \times 1,92 \text{ m}$

$$W = 38,4 \text{ J}$$

por otra parte, la energía cinética vale:  $E_c = \frac{0,075 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \times (32 \text{ (1/s)})^2}{2}$

$$E_c = 38,4 \text{ J (Hay total acuerdo)}.$$

- e) Por inercia, luego de suspenderse la aplicación de la fuerza, suponiendo que no hay rozamientos, la rotación continuará con velocidad angular constante de 32 radianes por segundo.

## La conservación de la cantidad de movimiento angular

A partir de la ley de Impulso para las rotaciones (7.17), es elemental plantear que si el momento resultante de las fuerzas exteriores es nulo, la cantidad de movimiento angular debe ser constante:

Si  $M = 0$ , entonces  $J = \text{constante}$ .

En el movimiento lineal, si la fuerza resultante es nula, debe conservarse la cantidad de movimiento  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Y dado que la masa es necesariamente constante, esto significa que debe conservarse  $\vec{v}$ .

En el movimiento angular hay una gran diferencia, porque  $J = I \omega$ , pero  $I$  puede variar si el cuerpo cambia de forma. Es decir, para cuerpos absolutamente rígidos que giran alrededor de un eje fijo, la conservación de  $J$  es lo mismo que la conservación de  $\omega$ . Estamos en un caso absolutamente similar a los casos de movimiento lineal.

Pero es fácil tener casos de movimientos de cuerpos formados por partes que pueden acercarse o alejarse, o acomodarse de diversas maneras, variando  $I$ . En estos casos,  $\omega$  debe variar automáticamente de manera de mantener constante el producto  $I \omega$ .

- Un ejemplo analizado: Acróbatas y patinadores

Cuando se tiene un cuerpo que puede deformarse acercando o alejando partes al eje, la ausencia de momento aplicado con respecto al eje de rotación, implica la conservación de la cantidad  $I \omega$ , y dado que  $I$  se puede disminuir (aumentar) acercando (alejando) partes al eje, resulta que se puede variar la velocidad angular, que es inversamente proporcional a  $I$ :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

Así tenemos el caso de patinadores que suelen iniciar giros alrededor de un eje vertical con los brazos abiertos, y luego logran aumentar enormemente la velocidad de rotación acercando los brazos al cuerpo para disminuir el momento de inercia.

Es notable en este caso (y en muchos otros similares), que si bien el sistema no está aislado de manera absoluta, lo está respecto de acciones referidas al eje de rotación, por ello se da este caso de conservación de  $J$ .

¡Pero no se conserva la energía cinética! Para verlo basta intentar con algunas cifras: por ejemplo, supongamos que  $I_2 = I_1 / 3$ , de manera que  $\omega_2 = 3 \omega_1$ . Si calculamos la energía cinética final:

$$\begin{aligned} E_{c2} &= \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \\ E_{c2} &= \frac{1}{2} (I_1/3) (3\omega_1)^2 \\ E_{c2} &= 3 E_{c1} \end{aligned}$$

¿De dónde salió la energía cinética extra? Del *trabajo de las fuerzas interiores*: el patinador debe aplicar una fuerza para vencer la fuerza centrífuga y acercar sus brazos o partes al eje. Realiza un trabajo positivo (a expensas de su reserva interna de energía) que se traduce en el aumento de energía cinética de rotación.

Además, es fácil calcular que la fuerza centrífuga aumenta mucho para las partes que se acercan al eje, porque aumenta su velocidad lineal, y también disminuye el radio, de manera que el acróbata debe aplicar una gran fuerza para acercar estas partes, y ello resulta en un gran aumento de energía cinética. ¡Todo puede terminar en un gran desastre si el artista no está muy bien entrenado para mantener cada parte en el lugar y con la alineación exacta!

- Actividad experimental ilustrativa

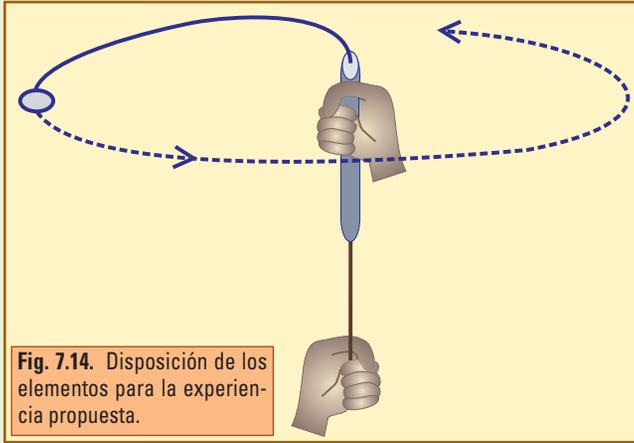
Conseguir un cordel fuerte de algo más de un metro de longitud y sujetar de un extremo algún cuerpo de unos 40 ó 50 gramos de masa (puede ser un llavero con dos o tres llaves).

Pasar el cordel por dentro de un tubo (puede ser el cuerpo de una birome) que habrá que sostener verticalmente en alto con una mano, revoleándolo suavemente de manera

que el cuerpo en el extremo describa un movimiento circular horizontal, como se muestra. Mientras tanto el otro extremo del hilo debe ser mantenido fijo con la otra mano.

Cuando el movimiento tenga una velocidad suficiente como para mantenerse suavemente sin necesidad de mover más el tubo, apretando fuertemente a éste para mantenerlo lo más inmóvil posible, se tira suave pero sostenidamente con la otra mano del extremo del hilo para ir acortando el radio de la circunferencia.

Es claro que la fuerza aplicada por el hilo al cuerpo está alineada con el centro, por lo que no aplica momento, y se debe plantear la conservación de la cantidad de movimiento



**Fig. 7.14.** Disposición de los elementos para la experiencia propuesta.

angular. Esta conservación, al disminuir el radio, se manifestará como un marcado aumento de la velocidad del cuerpo. El movimiento podrá llegar a transformarse en un giro vertiginoso, mientras el aumento de la fuerza centrífuga hará imposible mantener inmóvil el tubo, que se sacudirá violentamente por más fuerza que se aplique para impedirlo.

El efecto es muy notable a pesar del rozamiento que se hace muy fuerte en el borde del tubo. Para evitar accidentes se recomienda comenzar a experimentar con masas pequeñas y movimientos suaves.

## ■ 7.4. Rotación más traslación

El movimiento más general posible de un cuerpo sólido, siempre se puede expresar como una rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa, más una traslación pura con la velocidad del centro de masa.

Según la complejidad de cada situación, puede ocurrir que el eje de rotación se traslade paralelamente a sí mismo, o no; también la velocidad del centro de masa, tanto como la velocidad de rotación, pueden ser constantes, o variar de maneras complicadas.

En cualquier caso, siempre podremos tratar el movimiento aplicando las siguientes leyes:

### A) MOVIMIENTO LINEAL

Para cualquier movimiento de un cuerpo rígido, la parte del movimiento de traslación siempre se trata con la Ley del Impulso:

$$\vec{F}_R \Delta t = m \Delta \vec{v}_{CM}$$

Donde

$F_R$  es la resultante de todas las fuerzas exteriores

$m$  es la masa del cuerpo

$\vec{v}_{CM}$  es la velocidad del centro de masa

En el movimiento de traslación pura todas las partículas del cuerpo tienen la misma velocidad que el centro de masa,  $\vec{v}_{CM}$ . Esto equivale a decir que tenemos una única partícula con toda la masa, concentrada en el centro de masa. Es lo que hicimos al desarrollar todos los temas de dinámica de movimientos lineales, todo ello tiene vigencia para esto.

Además, sabemos que esta ley, referida al movimiento del centro de masa, es válida para cualquier sistema, sea rígido o no.

### B) MOVIMIENTO INTRÍNSECO

La parte del movimiento intrínseco de un cuerpo rígido siempre es una rotación, y se trata con la Ley del Impulso para las rotaciones:

$$M_{CM} \Delta t = \Delta J_{CM}$$

Donde

$M_{CM}$  es el momento total de las fuerzas exteriores con respecto al centro de masa

$J_{CM}$  es la cantidad de movimiento angular intrínseco, es decir con respecto al centro de masa.

### C) ENERGÍA CINÉTICA TOTAL

La energía cinética total (de un cuerpo sólido) siempre puede escribirse como la suma de dos términos:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

$$E_c = E_{cT} + E_{cR}$$

Donde:

$E_{cT} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$ , es la energía cinética de traslación, correspondiente a toda la masa  $m$  desplazándose con la velocidad del centro de masa, y  $E_{cR} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ , es la energía cinética de rotación, siendo  $I_{CM}$  el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa.

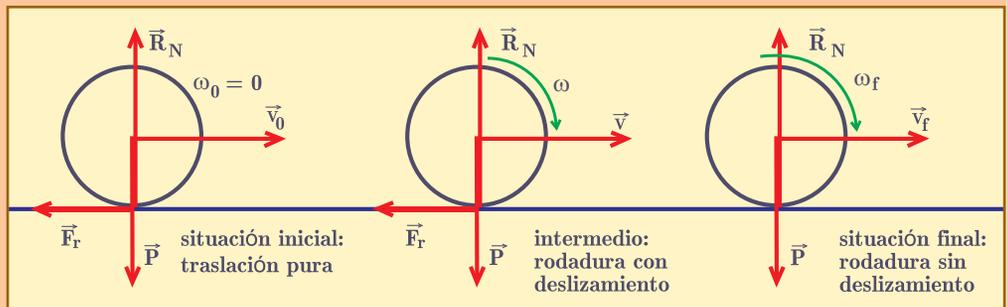
#### • Ejemplo

En un juego de bolos se arroja un bolo de 16 cm de diámetro y 2 kg de masa con una velocidad de 10 m/s. El bolo es arrojado horizontalmente, sin girar sobre sí mismo, y rasante con el piso (de manera que toma contacto inmediatamente con él, sin golpear). Así que inicialmente el movimiento es de traslación pura, y en el punto de contacto, donde el bolo desliza, actúa una fuerza de rozamiento de 2 N.

Describir todos los aspectos posibles del movimiento, con todos los cálculos correspondientes.

#### • Desarrollo

Inicialmente, desde que el bolo toma contacto con la pista, tenemos la acción de una fuerza de rozamiento constante, que a su vez es la fuerza resultante, ya



que en la dirección vertical el peso se equilibra con la reacción normal de la pista.

Dado que el bolo es un cuerpo rígido debemos considerar, por un lado el movimiento del centro de masa (que es simplemente el centro geométrico del bolo), y por otro lado la rotación alrededor del centro.

Para el movimiento del centro tenemos que considerar la acción de la fuerza resultante, que es el rozamiento, constante, de 2 N hacia atrás. Resulta que tenemos un MRUV, con aceleración

$$a = 2N / 2kg$$

$$a = 1 \text{ m/s}^2,$$

en sentido contrario al movimiento.

Por otra parte, para la rotación tenemos que considerar que sólo la fuerza de rozamiento tiene momento con respecto al centro. Dicho momento es constante, vale  $2 \text{ N} \times 0,08 \text{ m} = 0,16 \text{ N}\cdot\text{m}$ , y actúa en el sentido de hacer rodar el bolo hacia delante.

Esto nos dice que mientras el avance se va retardando uniformemente, la rotación se va acelerando uniformemente, de manera que el movimiento comienza siendo de traslación pura, pero continúa siendo una superposición de traslación retardada, con rotación acelerada, deslizando en el punto de contacto. Descrito desde un sistema en el que el centro del bolo esté en reposo, la parte inferior del bolo pasa hacia atrás con velocidad  $\omega R$  (cada vez mayor a medida que aumenta), y el piso pasa también hacia atrás a velocidad cada vez menor (a medida que el bolo se frena). En algún momento, esas velocidades se igualarán, y en ese instante desaparecerá el deslizamiento. En ese instante también deberá desaparecer la fuerza de rozamiento. Esto es muy notable, y para deducirlo haremos un razonamiento que se denomina "por el absurdo", y consiste en razonar mostrando que si suponemos que lo que queremos demostrar no sucede, entonces se llega a una conclusión absurda.

Es decir, para probar que la fuerza de rozamiento debe desaparecer en el instante en que la velocidad del centro se iguala con  $\omega R$ , supongamos que se llega a esa condición, y la fuerza de rozamiento no desaparece.

Entonces, como la fuerza de rozamiento actuante sobre la superficie inferior del bolo es un vector que apunta hacia atrás, concluimos que un instante después el bolo debería rotar más rápido, y avanzar más despacio (que lo que corresponde a la relación  $v = \omega R$ ). Esto significa que su superficie inferior debería deslizar hacia atrás respecto de la pista.

Pero si la superficie del bolo se deslizará hacia atrás respecto de la pista, ésta debería aplicarle una fuerza de rozamiento en sentido contrario, oponiéndose al deslizamiento, es decir hacia delante.

Como se ve, habríamos llegado a una contradicción, o absurdo, porque partimos de suponer que la fuerza continuaba actuando hacia atrás.

A partir del instante en que desaparece el rozamiento, el bolo continúa rodando y avanzando sin deslizar, uniformemente.

Estas consideraciones nos indican qué es lo que puede ser interesante calcular: ¿Cuál es la velocidad final que luego se mantendrá constante, cuánto tiempo debe transcurrir hasta que se llegue a la condición de rodadura sin deslizamiento, qué distancia se recorre en este proceso, cuánta energía se pierde por rozamiento?

Comencemos tratando de calcular la velocidad final.

La condición de rodadura sin deslizamiento es que la velocidad del centro sea igual a la velocidad del contorno del bolo con relación al centro,  $\omega R$  (les coloco el subíndice f porque estos serán los valores finales):

$$v_f = \omega_f R$$

Ahora bien, siendo  $t = 0$  el instante del contacto inicial con el piso, aplicamos Ley del Impulso para la velocidad del centro:  $m v(t) = m v_0 - F_r t$

Mientras tanto, aplicamos Ley del impulso de Rotación para la velocidad de rotación (inicial es nula):

$$I \omega(t) = M t$$

$$I \omega(t) = F_r R t$$

En el instante  $t_f$  en que se alcanza la condición de rodadura perfecta se deben cumplir:

$$v_f = \omega_f R$$

$$m v_f = m v_0 - F t_f$$

$$I \omega_f = F R t_f$$

Eliminando  $t_f$  y  $\omega_f$ , se obtiene:

$$v_f = v_0 \frac{1}{1 + \frac{I}{m R^2}} \Rightarrow v_0 \frac{1}{1,4} = 7,14 \text{ m/s}$$

Con este valor se obtiene directamente  $\omega_f = 89,3 \text{ 1/s}$ , y  $t_f = \frac{2 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}}{2 \text{ N}} \times \frac{0,4}{1,4}$   
 $t_f = 2,86 \text{ s}$ .

La distancia recorrida en ese tiempo es:  $d_f = \frac{1}{2} (v_0 + v_f) t_f$   
 $d_f = 24,5 \text{ m}$ .

La energía cinética inicial es de traslación pura:  $\frac{1}{2} m v_0^2 = 100 \text{ J}$ , mientras que la final es de traslación y rotación:  
 $\frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 = 51,0 \text{ J} + 20,4 \text{ J}$   
 $\frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 = 71,4 \text{ J}$ ,

de manera que la energía cinética perdida es 28,6 J.

Nótese que si multiplicamos la fuerza de rozamiento por la distancia recorrida mientras ella actúa obtenemos:  $2 \text{ N} \times 24,5 \text{ m} = 49 \text{ J}$ , que no es la energía perdida, sino sólo la energía cinética de traslación perdida. Esto se entiende porque dado que la bola rodaba, el deslizamiento entre las superficies nunca llegó a ser 24,5 m, y una parte del trabajo de la fuerza de rozamiento no se perdió en fricción, sino que se empleó en producir la rotación.

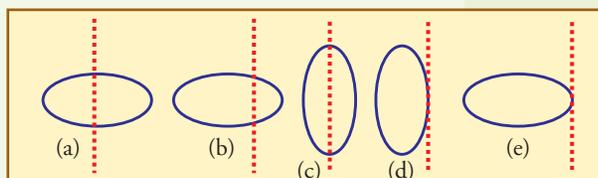
## EJERCICIOS CAPÍTULO 7

### ▲ Ejercicio 7.1

Considere el siguiente cuerpo, que es homogéneo y puede girar alrededor del eje, tal como se indica, en varias posiciones distintas.

Indique con respecto a cuál eje es máximo y con respecto a cuál es mínimo el momento de inercia.

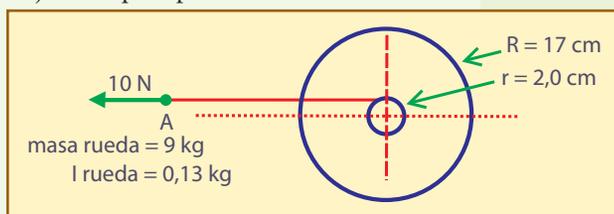
Si se cambia el material del cuerpo, construyéndolo de hierro, vidrio, o madera: ¿en qué caso será I mayor?



### ▲ Ejercicio 7.2

Se dispone de una rueda o volante de hierro de 17 cm. de radio y 9 kg. de masa, montada sobre un eje horizontal que descansa en unos cojinetes que oponen a la rotación un

momento de rozamiento de 0,010 N·m. Solidario con la rueda hay un tambor de 2 cm. de radio, en el cual hay enrollado un hilo de cuyo extremo A se tira con una fuerza  $\vec{F}_A$  de 10 N, como indica la figura:



- Calcule el momento neto aplicado con respecto al eje.
- Sabiendo que la densidad del hierro es  $7.850 \text{ kg/m}^3$ , verifique el valor del momento de inercia.
- Calcule la energía cinética de rotación adquirida por la rueda luego de desenrollarse 0,80 m. de hilo bajo la acción de la fuerza.  
 Calcule la velocidad angular y la cantidad de movimiento angular en ese momento.
- Explique lo que sucederá al suspenderse la aplicación de  $F_A$ .

▲ Ejercicio 7.3

Sobre una esfera maciza de  $m = 30 \text{ kg}$ , y radio  $R = 0,2 \text{ m}$ , que se encontraba inicialmente en reposo montada sobre un eje que pasa por su centro, se aplica adecuadamente durante 4 segundos una fuerza que la pone en rotación. Si la esfera adquiere una velocidad angular de 10 radianes/segundo, se le pide que:

- Calcule el momento de inercia de la esfera giratoria.
- Calcule el momento que actuó sobre la esfera con respecto al eje, y la cantidad de movimiento angular intrínseca adquirida por ésta.

▲ Ejercicio 7.4

Una centrifugadora cuyo rotor tiene forma aproximadamente cilíndrica, de radio  $R = 10 \text{ cm}$ , y masa  $m = 2 \text{ kg}$ , hace girar a éste, en régimen, a  $10^4 \text{ r.p.m.}$ , por medio de un motor de  $100 \text{ W}$ .

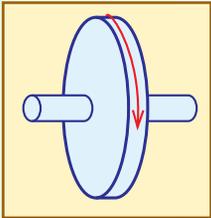
- Calcule el momento resistente que se opone a la rotación del rotor en régimen.
- Calcule la cantidad de movimiento angular y la energía cinética de rotación del rotor en régimen.
- Calcule la fuerza centrífuga sobre cualquier trozo de materia en la periferia de ese rotor, y compárelo con el correspondiente peso.

▲ Ejercicio 7.5

Un volante montado sobre cojinetes sin rozamiento, cuyo momento de inercia vale  $I = 0,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , rota con velocidad angular constante  $\omega = 30 \text{ rad/s}$ , con el sentido que se muestra.

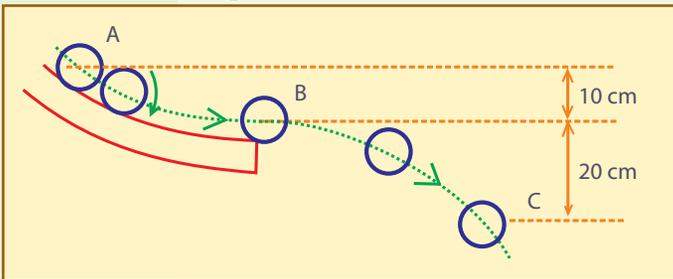
En un instante dado se le aplica un momento de frenado,  $M$ , hasta que la rotación se detiene luego de 3 segundos de actuar  $M$ .

- Calcule la cantidad de movimiento angular inicial del volante. Dibuje el vector axial correspondiente.
- Calcule el valor del momento aplicado  $M$ . Dibuje el vector axial correspondiente.



▲ Ejercicio 7.6

Una esfera maciza de 5 cm de diámetro y 600 g de masa baja rodando (sin deslizar) por una rampa, y luego cae libremente siguiendo una trayectoria parabólica. La figura muestra 5 posiciones sucesivas, en una vista lateral.



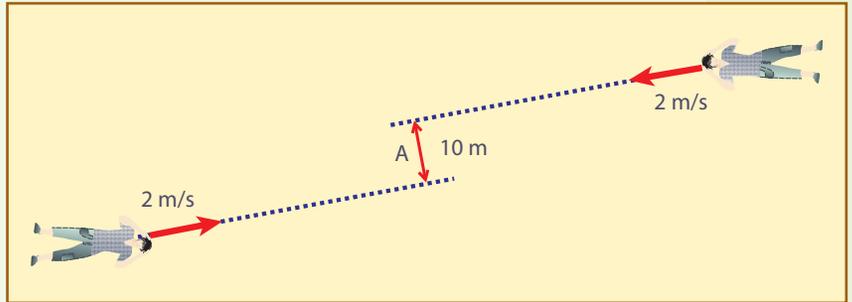
- Realice un diagrama de cuerpo aislado mostrando las fuerzas actuantes en un instante intermedio en la rampa, y en un instante intermedio en la caída libre. Analice el efecto de cada fuerza.
  - Suponiendo que la esfera parte en reposo desde A, y teniendo en cuenta las alturas indicadas en la figura, calcule las velocidades y energías cinéticas de traslación y rotación en B y en C.
- Analice si las velocidades cambiarían si se disminuyera la masa utilizando:
    - Una esfera de un material más liviano y del mismo tamaño.
    - Una esfera del mismo material y menor diámetro.
    - Una esfera hueca.

### Ejercicio 7.7

Dos astronautas de la estación espacial internacional que deben efectuar un reparación en el exterior parten desde puntos diferentes para reunirse en un punto A, pero calculan mal sus trayectorias, resultando que en la máxima proximidad pasarán a 10 m uno del otro, como se muestra.

Ellos no se preocupan por el error pues uno de ellos dispone de un cordel que lanza al otro, el cual consigue sujetarse, ambos se amarran, y cuando llegan a la máxima proximidad comienzan a tirar de él para acercarse.

Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento angular muestre que el método no es bueno, y que los astronautas difícilmente tendrán fuerza para acercarse a más de 4 m. Analice los peligros del procedimiento.



# Apéndice 1

## Notación exponencial y cifras significativas

- Notación exponencial

A veces es necesario utilizar números que, por ser extremadamente grandes o pequeños, se escriben con muchos ceros. Por ejemplo: la distancia de la Tierra al Sol es 149.000.000.000 metros, y la masa del protón vale 0,000000000000000000000000000000166 kg. Si tuviéramos que operar con estos números escritos de esta manera tendríamos dos problemas serios: por un lado que es muy fácil cometer errores en la cantidad de ceros que se escriben, y por otro que las calculadoras comunes no admiten tantas cifras.

Estos inconvenientes se solucionan fácilmente reemplazando todo el conjunto de ceros a la izquierda o a la derecha, por la correspondiente multiplicación o división por potencias de diez. Para esto sólo hay que recordar que:

$$\begin{aligned}\underbrace{1\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 0}_{n\ \text{ceros}} &= 10^n \\ \underbrace{0,0\ 0\ \dots\ 0\ 1}_{n\ \text{ceros}} &= 10^{-n} \\ \underbrace{0,0\ 0\ \dots\ 0\ 1}_{n\ \text{ceros}} &= \frac{1}{10^n}\end{aligned}$$

Esto se llama “notación exponencial”, o “notación científica”.

Los mismos ejemplos con esta notación (se muestran varias posibilidades equivalentes):

Distancia de la Tierra al Sol:

$$149 \times 10^9\ \text{m} = 1,49 \times 10^{11}\ \text{m}$$

$$149 \times 10^9\ \text{m} = 0,149 \times 10^{12}\ \text{m}$$

$$149 \times 10^9\ \text{m} = 149 \times 10^6\ \text{km}$$

Masa del protón:

$$1,66 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 0,166 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

$$1,66 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 166 \times 10^{-29}\ \text{kg}$$

- Cifras significativas

Cuando un número expresa el resultado de una medición está afectado de cierta *incerteza experimental*, que depende de muchos factores tales como: la calidad del instrumento de medición, el cuidado y la pericia del operador que realiza la medida o lectura del instrumento, entre otros. Por eso, el número que expresa el re-

sultado de una medición o experimento puede tener algunas cifras que el experimentador juzga que son muy seguras, otras que son dudosas, y algunas otras que sabe que no tienen ningún sentido (por ejemplo, porque el procedimiento terminaba con un cálculo y el visor de una calculadora tenía 20 decimales).

Se denominan *cifras significativas* a aquellas que tienen realmente algún significado experimental, o sea, las que el operador juzga seguras más una que se puede estimar con cierto grado de aproximación.

Por ejemplo: al medir un objeto con una regla graduada al milímetro, podemos obtener 23,7 cm. En este caso, hemos expresado el resultado con tres cifras significativas, y no estamos afirmando que la cuarta cifra debería ser un cero, ni que no debería serlo. Con la misma regla podríamos haber *estimado* una cifra significativa más, y decir, por ejemplo, que el objeto mide 23,72 cm.

Si en cambio decimos que el resultado de la medición es 23,70 cm, estamos anunciando que vimos que el extremo del objeto llegaba exactamente hasta la 7ª marca después del 23. En este caso el cero es la cuarta cifra significativa, y si bien matemáticamente el número 23,7 es exactamente igual al 23,70, ambos *no son equivalentes como indicativos del resultado de una medición*.

### En la calculadora científica:

*Apretar la tecla “exp” seguida del exponente, luego de ingresar la parte numérica.*

*En el visor a veces aparece la letra e, reemplazando al número 10.*

*Así, por ejemplo la masa del protón se ingresaría apretando sucesivamente:*

1 , 6 6 exp +/- 2 7

*El visor mostrará: 1,66e(-27), lo que significa 1,66 multiplicado por 10<sup>-27</sup>.*

#### • Ejemplo

1) Utilizando potencias de 10, exprese una masa de 12.583 kg con tres cifras significativas de dos maneras diferentes.

2) Eligiendo el prefijo adecuado, exprese correctamente esta masa con tres cifras significativas, sin utilizar potencias de 10.

#### • Desarrollo

1) Utilizar tres cifras significativas significa que hay que prescindir de las dos últimas, en este caso reemplazándolas por potencias de 10, y redondeando el 5 a 6, porque la primera cifra eliminada es un 8.

De manera que podemos escribir, por ejemplo,  $126 \times 10^2$  kg. Y sobre esto tomado como base, podemos dividir el 126 por cualquier potencia positiva de 10, corriéndole la coma hacia la izquierda, y agregar esas potencias en el factor de la derecha, por ejemplo:  $0,126 \times 10^5$  kg.

2) Tenemos que buscar prefijos que indiquen más de  $10^2$  kg, por ejemplo, Mg, o Gg (dado que no podemos superponer prefijos, hay que colocarle prefijos al gramo, y no al kilogramo).

Dos posibilidades serían entonces: 12,6 Mg, ó 0,0126 Gg.

#### Reglas prácticas para expresar correctamente resultados experimentales, escribiendo sólo las cifras significativas:

1) No se deben agregar ceros a la derecha de la coma decimal sin justificación.

**Ejemplo:** una persona se pesa y lee en la escala de la balanza 82,7 kg. Esta lectura tiene tres cifras significativas, y no debe escribirse como 82,70 ni 82,700, ya que estos ceros no han sido leídos, y aunque lo hubieran sido no tendrían significado porque cambiarían en cuanto la persona ingiriera un poco de agua, o la perdiera con la transpiración, o entregara unas monedas que tenía en su bolsillo en el momento de pesarse.

Si se desea expresar este valor en gramos (se lo debe multiplicar por 1.000) lo correcto no es decir 82.700 gramos, sino que, recurriendo a la notación exponencial puede escribirse:

$82,7 \times 10^3$  gramos, o bien:  $827 \times 10^2$  gramos,  
o bien:  $0,827 \times 10^5$  gramos, etc.

2) No se deben escribir todas las cifras que aparecen en el visor de la calculadora.

**Ejemplo:** si para alguna finalidad cualquiera, a la persona del ejemplo anterior le dicen que averigüe la tercera parte de su peso, al dividir 82,7 por 3 la calculadora indicará: 27,566666666666666...

En este caso el número deberá limitarse a las cifras con significado, que son tres: 27,6 kg (la última cifra se redondea al valor más próximo).

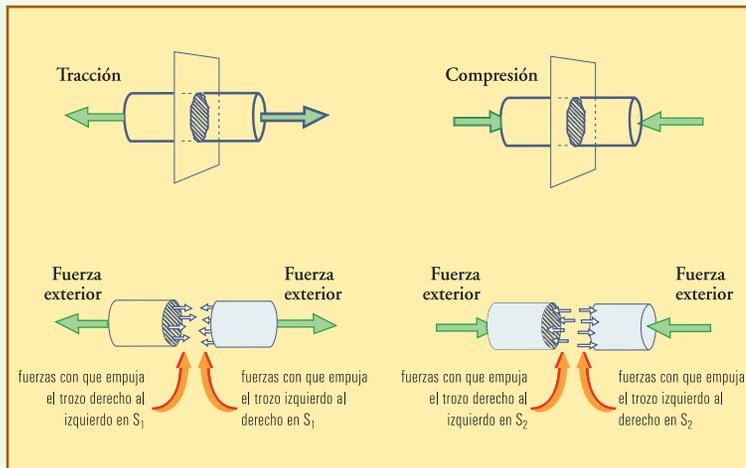
## Tipos de esfuerzo y tensiones

Cuando la fuerza ejercida a través de una superficie es perpendicular a la misma, decimos que la tensión producida es *normal*, refiriéndonos exclusivamente al significado matemático del vocablo “normal”, como sinónimo de “perpendicular”. Si la fuerza actúa paralelamente a la superficie considerada la tensión se denomina *tangencial*; y todos los casos intermedios se describen en términos de las correspondientes componentes.

### • Tensiones normales

Las tensiones normales pueden ser de *tracción* o de *compresión*. El esfuerzo de tracción es el que tiende a alargar el material, y el de compresión es el que tiende a acortarlo (también suele denominarse *presión* a la compresión, y *tensión* a la tracción; para evitar confusiones conviene siempre aclarar lo que se quiere decir).

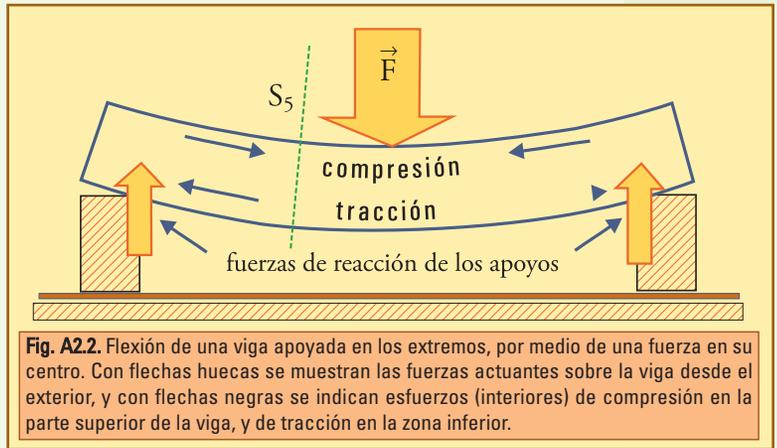
Es importante entender lo que muestra la figura A2.1: las tensiones de tracción (o de compresión) están en todo el interior del cuerpo traccionado (o comprimido). En cualquiera de las infinitas secciones transversales imaginables la fuerza está distribuida actuando como lo indica el principio de acción y reacción: la parte que queda de un lado de la sección, tira (o empuja) de la parte que queda del otro lado. De esta manera el sólido transmite la fuerza que un cuerpo le aplica en un extremo, a cada una de sus partes, y finalmente al cuerpo que esté en el otro extremo.



**Fig. A2.1.** Tensiones de tracción actuando a través de secciones como  $S_1$ , y de compresión a través de  $S_2$ . Para cada cuerpo se lo puede considerar dividido en partes en la sección indicada, y abajo se muestra el diagrama de cuerpo libre de cada parte de cada cuerpo. En cada sección se han dibujado pequeños vectores representativos de las fuerzas distribuidas, y esto es válido para cada una de las infinitas secciones transversales imaginables.

En la figura A2.5 puede verse además como se distribuyen las tensiones en secciones que no son transversales para un caso de compresión. Esta figura sirve para alertarnos sobre la complejidad de estos temas, que sólo estamos tratando a nivel de presentación elemental.

Un caso en el cual son importantes las tensiones de tracción y compresión es el de *flexión*. La figura A2.2 muestra un cuerpo sometido a *flexión*. Es relativamente fácil ver que en una varilla que se flexiona hay una parte que debe estirarse y que la opuesta debe acortarse, de tal manera que una sección transversal cualquiera como S5 está sometida principalmente a tensiones normales, de tracción en una parte y de compresión en otra.



## • Tensiones tangenciales

Las tensiones **tangenciales** describen cómo se distribuyen las fuerzas que actúan paralelamente a una superficie. El caso que más nos interesará en las aplicaciones es el del rozamiento, que ilustramos en la figura A2.3.

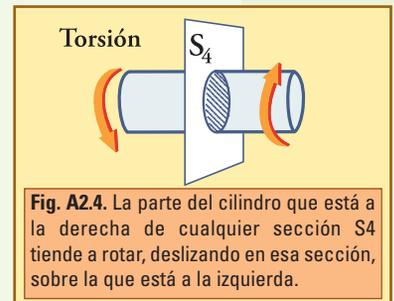
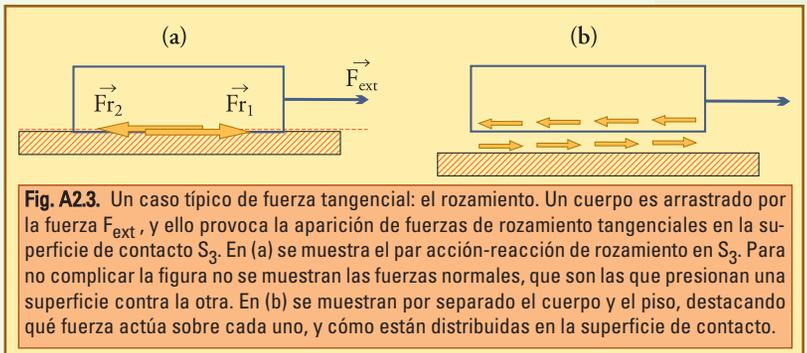
La fuerza de rozamiento siempre se distribuye como una tensión tangencial en la superficie a lo largo de la cual se trata de arrastrar un cuerpo: el cuerpo que el agente quiere arrastrar hacia la derecha, aplica una fuerza (de rozamiento)  $F_{r1}$  sobre el piso, tendiendo a arrastrarlo en ese mismo sentido (hacia la derecha), y por acción-reacción el piso aplica la misma fuerza de rozamiento, a través de la misma superficie, pero hacia la izquierda ( $F_{r2} = -F_{r1}$ ) al cuerpo, tendiente a impedir su deslizamiento. Estas fuerzas, divididas por la superficie de contacto, dan la tensión tangencial de rozamiento.

Las tensiones tangenciales también aparecen en los esfuerzos de **torsión**, en las secciones como  $S_4$  en la figura A2.4. La denominación de “torsión” se refiere claramente al efecto de retorcer. El que éstas sean tensiones *tangenciales* se deduce del hecho de que lo que está de un lado de la sección en cuestión tiende a rotar, deslizando en esa sección  $S_4$ , sobre la que está del otro lado.

La capacidad de una fuerza para flexionar y torsionar está dada por lo que se denomina “momento de la fuerza”, que veremos en el capítulo de rotaciones.

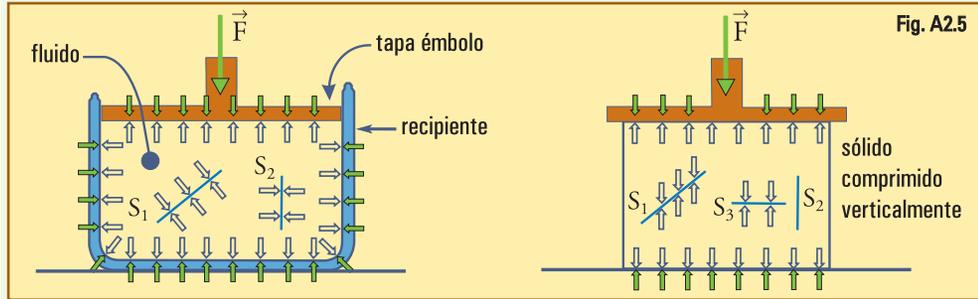
## • Tensiones isotrópicas

Un caso interesante es el de los fluidos. Los fluidos deben ser contenidos por recipientes, de manera que al ser presionado un fluido en alguna dirección, él presionará en todos los lugares de las paredes, perpendicularmente en cada lugar, y por acción-reacción recibirá presión de la misma manera. Si se supone que en algún elemento de su-



**Fig. A2.5.** La fuerza  $F$  se aplica por medio de una tapa émbolo adecuada sobre un fluido contenido en un recipiente a la izquierda, y sobre un sólido de forma similar, a la derecha (las flechas negras representan acciones exteriores, y las blancas, interiores). En el fluido aparecen presiones normales sobre las paredes y sobre cualquier superficie interior, tal como  $S_1$  o  $S_2$ . En el sólido sólo actúan presiones verticales, normales en las superficies horizontales como  $S_3$ , pero con componentes tangenciales sobre superficies oblicuas como  $S_1$ . En el sólido no hay tensiones actuando sobre superficies verticales como  $S_2$ .

perficie de la pared no actúa una fuerza conteniendo al fluido, existiría un hueco por el cual el fluido se escurriría. Esto también vale para cualquier elemento de superficie que se considere en el seno del fluido, ya que siempre podría imaginarse una pared hipotética que contuviera al fluido pasando por ese lugar. Por otra parte, si imaginásemos que por un momento existieran tensiones tangenciales a lo largo de una superficie, nada podría impedir el deslizamiento que tenderían a producir estas tensiones, así tendríamos que las porciones de fluido deslizarían, y el sistema estaría *fluyendo*. En estas condiciones existen tensiones tangenciales en los fluidos, las que constituyen el *rozamiento fluido*, o *viscoso*, por lo cual estas tensiones también se denominan viscosas. Cuando el fluido llega finalmente al reposo, ya no puede haber fuerzas tangenciales.



De manera que ésta es una presión esencialmente normal, que se denomina hidrostática debido a que corresponde a los líquidos estáticos, y sus características generalmente son resumidas en el enunciado conocido como “Principio de PASCAL”:

**Los fluidos transmiten presiones en todas direcciones y sentidos, y éstas actúan siempre perpendicularmente a la superficie que se considere.**

Vale destacar que, como se muestra en la figura A2.5, si se considera un elemento de superficie con cualquier orientación en el interior del fluido, deberá haber fuerza aplicada perpendicularmente por el fluido sobre él, desde ambos lados, en sentidos opuestos (acción-reacción). Esta manera particular de actuar la presión se denomina *isotrópica*, que significa “igual en cualquier dirección”. En la práctica estas presiones son casi siempre de compresión, y se denominan presiones positivas, pero pueden ser de tracción, en cuyo caso se suelen denominar negativas

## • Resumen de propiedades mecánicas de los materiales

El tema propiedades mecánicas de los materiales es muy vasto y escapa a los objetivos de este libro, pero es importante tener un vocabulario mínimo sobre el tema, para lo cual será suficiente con la siguiente descripción básica.

- **Dureza:** es la capacidad de cada material de rayar o marcar a otros, sin ser marcado por ellos. Debido a que las mediciones de dureza son las más sencillas, muchas veces son utilizadas para identificar materiales y para controlar el estado mecánico de estructuras.
- **Ductilidad:** es la plasticidad de un material frente a esfuerzos de tracción, es decir la capacidad para alargarse permanentemente sin romperse. Esta propiedad permite estirar los metales transformándolos en alambres.
- **Maleabilidad:** es la plasticidad frente a esfuerzos de compresión, es decir la capacidad para aplastarse el material permanentemente. Esta propiedad permite forjar y laminar los metales transformándolos en chapas.
- **Fragilidad:** un material frágil es el que se rompe sin muestras de deformación plástica; ésta es la propiedad opuesta a la plasticidad. Los materiales muy duros tienden a ser frágiles, y la característica distintiva podría decirse que es la poca resistencia a los choques.
- **Tenacidad:** ésta es una combinación de resistencia elevada con gran capacidad de deformación permanente sin romperse. La resistencia de un material a los choques se suele tomar como índice de su tenacidad.

Estas propiedades mecánicas tienen que ver con la composición química del material, pero también dependen de una serie de procedimientos de fabricación, que determinan cómo es la estructura cristalina, cómo se distribuyen en ella los distintos componentes, etc.

Un ejemplo muy conocido de combinación de propiedades lo constituye el “hormigón armado”. Debido a que el cemento de construcción (cemento “portland”) resiste muy bien la compresión, pero es frágil y no resiste casi nada a la tracción, las estructuras de hormigón que deben soportar esfuerzos de flexión deben ser “armadas” con varillas o alambres de acero, de gran tenacidad, en las partes en las que se desarrollan los esfuerzos de tracción que el hormigón solo no podría soportar. Los hierros se ubican a lo largo, en las zonas de mayores esfuerzos de tracción.

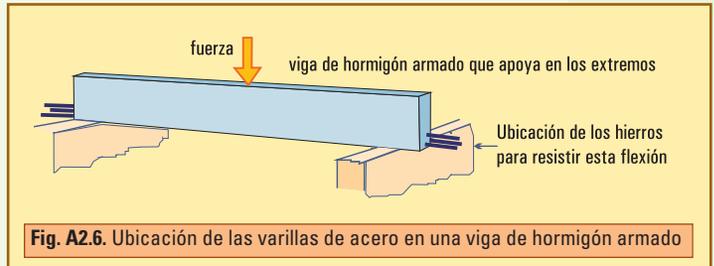


Fig. A2.6. Ubicación de las varillas de acero en una viga de hormigón armado

## Apéndice 3

# Centro de masa

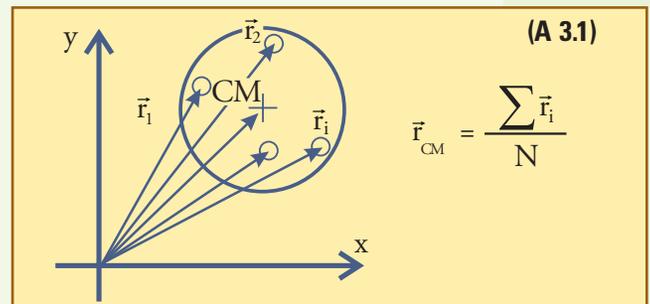
El punto que promedia la ubicación de la masa se denomina *centro de masa* (CM), y dado que la acción de la gravedad es proporcional a la masa, es natural esperar que coincida con el centro de gravedad CG, cosa que efectivamente ocurre, y utilizaremos cuando necesitemos, aunque sólo lo demostraremos bastante más adelante.

La forma conceptualmente más simple de definir el punto que promedia la ubicación de la masa de un cuerpo, consiste en descomponer el cuerpo en muchas partículas iguales de masa  $m_0$ . Si aquí utilizamos la letra  $N$  para designar al número de tales partículas, y  $\vec{r}_i$  es el vector posición de la partícula  $i$ , entonces el vector posición promedio, que define la ubicación del CM (A3.1).

Para encontrar una expresión más útil y general tratemos ahora de hallar el CM de un cuerpo compuesto por partes de diferente forma y masa.

Para poder aplicar (A3.1) consideremos que todas las partes están a su vez integradas por partículas iguales de masa  $m_0$ . Entonces la parte 1, de masa  $m_1$ , está formada por  $N_1 = m_1/m_0$  partículas, la parte 2, de masa  $m_2$ , está formada por  $N_2 = m_2/m_0$  partículas, etc. El centro de masa de cada parte,  $CM_1, CM_2$ , etc., se puede encontrar con (A3.1) limitando la suma a las partículas de esa parte; y para encontrar el centro de masa de todo el cuerpo se plantea la suma sobre todas las partículas de todas las partes, como sigue (para las partículas de cada parte se escriben índices  $i_1, i_2$ , etc., que van desde 1 hasta  $N_1, N_2$ , etc.).

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{N_1} \vec{r}_{i_1} + \sum_{N_2} \vec{r}_{i_2} + \dots}{N_1 + N_2 + \dots}$$



Ahora bien, si a cada término del numerador lo multiplicamos y dividimos por el número de partículas de la parte correspondiente, podemos identificar fácilmente el vector posición del CM de esa parte:

$$\text{Numerador} = N_1 \frac{1}{N_1} \sum_{N_1} \vec{r}_{i_1} + N_2 \frac{1}{N_2} \sum_{N_2} \vec{r}_{i_2} + \dots$$

$$\text{Numerador} = N_1 \vec{r}_{CM1} + N_2 \vec{r}_{CM2} + \dots$$

De manera que la expresión del centro de masa del cuerpo completo también queda:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{N_1 \vec{r}_{CM1} + N_2 \vec{r}_{CM2} + \dots}{N_1 + N_2 + \dots}$$

Y ahora, multiplicando numerador y denominador por  $m_0$ , el resultado no se altera, y se tiene:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{N_1 m_0 \vec{r}_{CM1} + N_2 m_0 \vec{r}_{CM2} + \dots}{N_1 m_0 + N_2 m_0 + \dots}$$

Pero cada producto  $N m_0$  es la masa de la parte correspondiente:  $N_1 m_0 = m_1$ ,  $N_2 m_0 = m_2$ , etc., de manera que finalmente tenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_{CM1} + m_2 \vec{r}_{CM2} + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \quad (\text{A3.2})$$

Y esta es la expresión más general: para un cuerpo compuesto de partes de masa  $m_i$ , cada una con el CM indicado por el vector  $\vec{r}_i$ , la ubicación del centro de masa está dada por:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad (\text{A3.3})$$

**Ejercicio:** como caso particular de esta expresión, obtener (A3.1) si todas las partes son partículas de igual masa ( $m_i = m_0$ ).

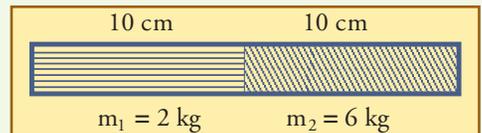
Como detalle práctico conviene recordar que todas estas expresiones vectoriales deben calcularse independientemente para cada coordenada. Así en dos dimensiones, las componentes del vector  $\vec{r}_{CM}$  son las coordenadas del centro de masa, dadas por:

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \quad (\text{A3.3'})$$

Si el cuerpo tiene un eje de simetría, entonces se puede simplificar el tratamiento ubicando un eje ( $x$ , por ejemplo) coincidiendo con el eje de simetría: el CM estará también sobre este eje, y sólo habrá que calcular la componente  $x_{CM}$ .

### • Ejemplo

Hallar el centro de gravedad del siguiente cuerpo compuesto de dos partes homogéneas de distinto material:



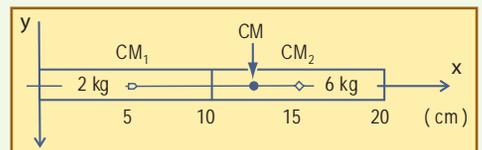
### • Desarrollo

Este ejemplo se presta especialmente para elegir un eje  $x$  a lo largo del eje longitudinal del cuerpo, con el origen en el extremo izquierdo. Así tendremos dos elementos homogéneos, con centros respectivamente en  $x_1 = 5 \text{ cm}$ , y  $x_2 = 15 \text{ cm}$ , ambos en  $y = 0$ . Con esta elección de ejes resulta:

$$x_{CG} = \frac{2 \text{ kg} \times 5 \text{ cm} + 6 \text{ kg} \times 15 \text{ cm}}{8 \text{ kg}}$$

$$x_{CG} = \frac{(10 + 90) \text{ kg} \cdot \text{cm}}{8 \text{ kg}}$$

$$x_{CG} = 12,5 \text{ cm}$$



Por otra parte, la ubicación de CG respecto del eje vertical es trivial:  $y_{CG} = 0 \text{ cm}$ .

## Apéndice 4

# Movimiento oscilatorio armónico

En el tratamiento del movimiento circular hemos recurrido a una manipulación esencialmente geométrica de los vectores: hemos mostrado el vector velocidad tangente a la circunferencia en cada lugar, y el vector fuerza apuntando hacia un costado perpendicularmente para lograr que el móvil se desvíe continuamente de la línea recta. Para averiguar el módulo de este vector fuerza hemos aplicado la Ley del Impulso, recurriendo para ello al dibujo de un triángulo formado por los vectores correspondientes. Ahora bien, las operaciones vectoriales que indica la Ley del Impulso, también pueden hacerse analíticamente, con cada componente por separado, o sea, proyectando todos los vectores sobre el eje  $x$ , y también, independientemente, sobre el  $y$ .

En ese caso se obtienen expresiones para cada eje, que son válidas independientemente de lo que suceda en el otro eje. Así, un movimiento circular uniforme proyectado sobre un eje es un movimiento oscilatorio, y podría no haber razones a priori para que estas oscilaciones estén emparentadas con las oscilaciones elásticas, pero veremos que sí lo están, y su descripción nos será de gran ayuda.

### • Descripción cartesiana del movimiento circular uniforme

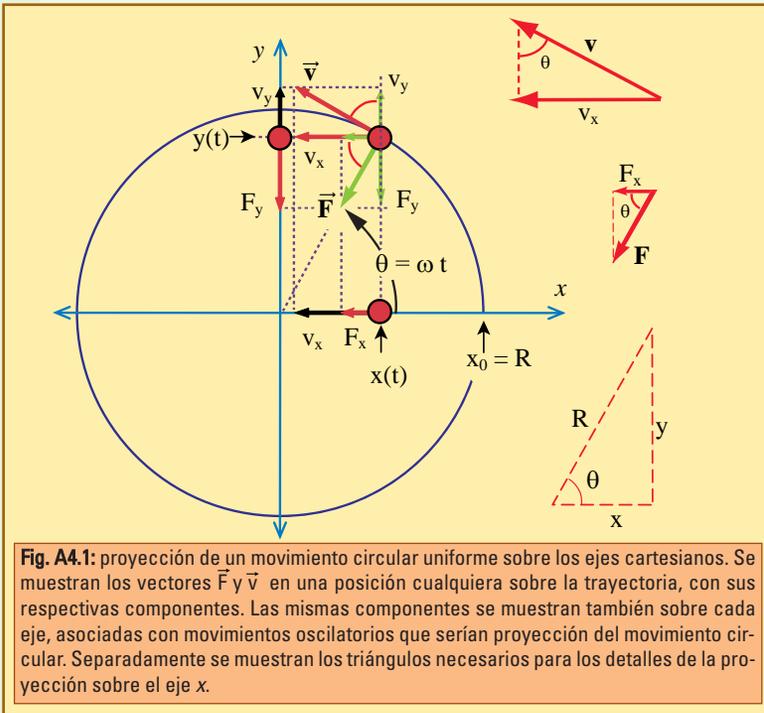
Proyectaremos un movimiento circular uniforme sobre ejes cartesianos  $(x,y)$  con origen en el centro de la circunferencia (*ver figura A4.1*).

Analicemos en detalle para el eje  $x$ . A partir de los triángulos destacados en esta figura podríamos obtener:

$$\frac{F_x}{F} = -\cos(\omega t) \quad \frac{v_x}{v} = -\text{sen}(\omega t) \quad \frac{x}{R} = \cos(\omega t) \quad (\text{A4.1})$$

De la última expresión, podemos obtener la expresión para  $x(t)$ :

$$x(t) = R \cos(\omega t) \quad (\text{A4.2})$$



**Fig. A4.1:** proyección de un movimiento circular uniforme sobre los ejes cartesianos. Se muestran los vectores  $\vec{F}$  y  $\vec{v}$  en una posición cualquiera sobre la trayectoria, con sus respectivas componentes. Las mismas componentes se muestran también sobre cada eje, asociadas con movimientos oscilatorios que serían proyección del movimiento circular. Separadamente se muestran los triángulos necesarios para los detalles de la proyección sobre el eje x.

Ahora bien, si efectuamos el cociente entre las expresiones correspondientes, encontramos que aunque  $F_x$  y  $x$ , dependen del tiempo, su cociente no lo hace:

$$\frac{F_x}{x} = \frac{-F \cos(\omega t)}{R \cos(\omega t)}$$

$$\frac{F_x}{x} = -\frac{F}{R}$$

$$\frac{F_x}{x} = \text{constante negativa}$$

$$\frac{F_x}{x} = -k$$

Vemos que el movimiento proyectado sobre el eje x se realiza bajo la acción de una fuerza hacia el origen, de valor directamente proporcional a la distancia al mismo, que es precisamente la ley de fuerza que da lugar a las oscilaciones elásticas.

Esto nos permite utilizar los elementos del movimiento circular para obtener propiedades de las oscilaciones elásticas, sin recurrir a elementos de matemática más complejos.

Ahora decimos que esta constante de proporcionalidad es la constante  $k$  del resorte sujeto al extremo del cual este cuerpo podría oscilar con la misma frecuencia de este movimiento circular:

$$k = \frac{F}{R} \tag{A4.3}$$

$$k = \frac{m\omega^2 R}{R}$$

$$k = m\omega^2$$

De donde, razonando al revés, decimos:

Si tenemos un cuerpo de masa  $m$  oscilando a lo largo del eje x en el extremo de un resorte de constante elástica  $k$ , al estar sometido a una fuerza  $F_x = -kx$ , deberá realizar las mismas oscilaciones que corresponden a proyectar sobre el eje x un movimiento circular uniforme de radio  $R$  igual a la amplitud de la oscilación, y velocidad angular dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{A4.4}$$

Obviamente, este movimiento circular es imaginario, no existe más que como una ayuda para visualizar su proyección coincidiendo con las oscilaciones que tratamos de explicar, en el extremo del resorte.

De manera que la expresión de  $x(t)$  para la oscilación elástica, efectivamente debe ser la función armónica (A4.2). El período de la oscilación, lógicamente, debe coincidir con el tiempo demorado por el movimiento circular en completar una vuelta:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{A4.5}$$

Es importante notar que la frecuencia (o el período) sólo dependen de  $k$  y de  $m$ : el período aumenta con  $m$ , que representa la inercia, y disminuye si aumenta  $k$ , que representa la dureza, o rigidez, del resorte. Si a un cuerpo que oscila sujeto a un resorte determinado, se le cambia la amplitud o la velocidad inicial, no cambiará el período.

Además, este movimiento circular imaginario también sirve para obtener  $v_x(t)$  como proyección de la velocidad tangencial sobre la circunferencia. Esto permite obtener fácilmente relaciones como:

$$v_{\text{máx}} = \omega x_{\text{máx}} \quad (\text{A4.6})$$

que se justifica fácilmente si se tiene en cuenta que la velocidad con la que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio en la oscilación rectilínea,  $v_{\text{máx}}$ , es simplemente la velocidad lineal del móvil en el movimiento circular, ya que se proyecta en su verdadera magnitud en los instantes que corresponden. En la figura A4.1, esos son los instantes en que el móvil cruza el eje vertical.

**Nota. Las funciones seno y coseno.**

Por último vale aclarar que si proyectamos el MCU sobre el eje  $y$ , también encontraremos un movimiento rectilíneo oscilatorio de exactamente las mismas características (para él también se cumplirán (A4.3,4,5, y 6)).

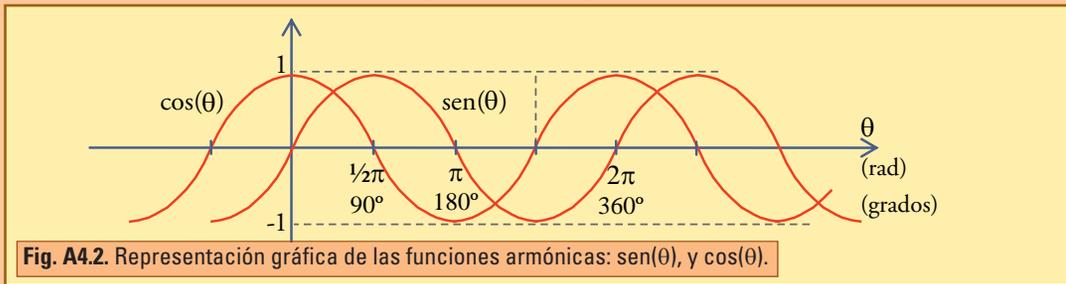
En cambio no se cumpliría (A4.2), ya que en el triángulo en el que  $x$  es el cateto adyacente al ángulo  $\theta$ , y es el cateto opuesto, y cumple con  $y/R = \text{sen}(\theta)$ , de manera que:

$$y(t) = R \text{sen}(\omega t) \quad (\text{A4.7})$$

Vemos que si la oscilación sobre un eje queda descrita por la función  $\cos(\omega t)$ , la oscilación sobre el otro queda descrita por  $\text{sen}(\omega t)$ . Es decir, ambas oscilaciones tienen las mismas características físicas, ambas están descritas por funciones armónicas, y sólo difieren en los instantes en los que pasan por los distintos lugares de su trayectoria: el movimiento proyectado sobre  $y$  pasa por su máxima elongación cuando el proyectado sobre  $x$  pasa por el origen, y viceversa.

Como conclusión general podemos decir que la elongación en una oscilación elástica en función del tiempo, no importa cómo se llame,  $x(t)$ ,  $y(t)$ , o de otra forma, siempre estará dada por una función armónica, que indistintamente puede ser  $\text{cte} \times \text{sen}(\omega t)$ , o  $\text{cte} \times \cos(\omega t)$  - y también podría ser una combinación de ambas, si hubiésemos proyectado sobre cualquier diámetro oblicuo, pero no entraremos en tanto detalle aquí.

Por último revisemos las características de las funciones  $\text{sen}(\theta)$ , y  $\cos(\theta)$ .



**Fig. A4.2.** Representación gráfica de las funciones armónicas:  $\text{sen}(\theta)$ , y  $\cos(\theta)$ .

Según se muestra en la figura A4.2, ambas son similares, oscilan entre -1 y 1, con la única diferencia de que la gráfica del seno es la del coseno corrida  $1/4$  de período ( $90^\circ$ ) hacia la derecha: la del coseno pasa por el máximo positivo en  $\theta = 0$ , mientras que la del seno pasa por cero en  $\theta = 0$ , y pasa por su máximo positivo en  $\theta = 90^\circ$ .

• **Ejemplo**

Un cuerpo de masa 5 kg está sujeto al extremo de un resorte de constante  $k=500$  N/m, sobre una superficie horizontal sin rozamiento, etc. El cuerpo es desplazado de manera de estirar el resorte 4 cm, y en  $t=0$  se lo suelta.

Calcular el período, y la frecuencia de las oscilaciones que tienen lugar, escribir la función  $x(t)$  y dibujarla. Calcular también la velocidad máxima.

• **Desarrollo**

$$\omega = \sqrt{\frac{500N/m}{5kg}}$$

$$\omega = \sqrt{100 \frac{\frac{kg \cdot m}{s^2} / m}{kg}}$$

$$\omega = 10 \frac{1}{s} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{10 \frac{1}{s}}{2\pi}$$

$$f = 1,59 \frac{1}{s}$$

$$f = 1,59 \text{ Hz}$$

$$T = 1/f$$

$$T = 1/1,59$$

$$T = 0,63s$$

En cuanto a la función  $x(t)$ , en una situación simplificada como es ésta sólo debemos elegir entre la función seno y la función coseno. Para ello lo más fácil es mirar la condición inicial: ésta debe ser una oscilación que comienza desde una máxima elongación positiva ( $x_0=4\text{cm}$ ), en  $t=0$ .

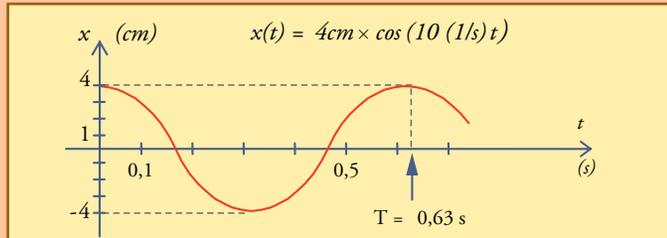
Y analizando cada función vemos que:

- La función seno comienza en cero ( $\text{sen}(0) = 0$ ), y va aumentando durante el primer cuarto de período. Por lo tanto es claro que no puede corresponder a nuestro caso.
- La función coseno comienza en uno ( $\text{cos}(0) = 1$ ), y va disminuyendo durante el primer cuarto de período. Es decir comienza en el máximo valor positivo, y éste es precisamente el caso.

Por lo tanto corresponde elegir coseno.

Y por último, si se desea conocer la velocidad máxima, que es la que siempre tendrá el móvil al pasar por la posición de equilibrio, se puede aplicar (A4.6):

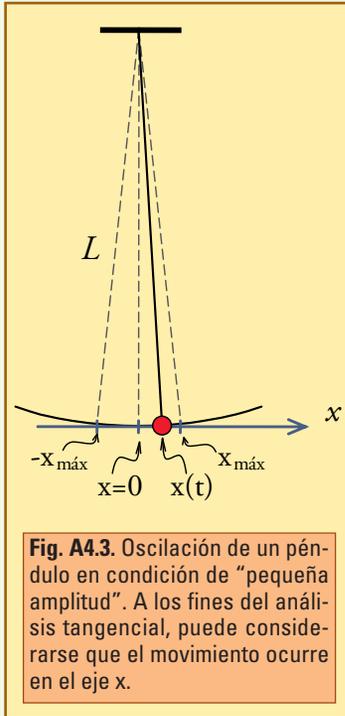
$$v_{\text{máx}} = \omega x_{\text{máx}} = 10 [1/s] \times 4/\text{cm} = 40 \text{ cm/s.}$$



• **Aplicación: cálculo del período de un péndulo ideal**

Consideremos una oscilación de muy pequeña amplitud. El movimiento limitado a un arco tan pequeño no se distinguirá esencialmente de un movimiento rectilíneo. Si ubicamos un eje cartesiano horizontal fijo,  $x$ , con origen en la parte más baja de la trayectoria, las componentes tangenciales de todos los vectores involucrados coincidirán con las correspondientes componentes  $x$ .

Elegimos  $x$  positivo hacia la derecha. La fuerza tangencial, que ahora es  $F_x$ , vale  $P \text{ sen}\theta = m g \text{ sen}\theta$ , y se



orienta hacia  $x = 0$ ; si escribimos  $\sin\theta = x/L$ , entonces obtenemos que la fuerza obedece a la misma ley que en el caso del resorte:

$$F_x \cong -mg \frac{x}{L} = - \underbrace{\left( \frac{mg}{L} \right)}_{cte=k} x(t) \quad (\text{A4.8})$$

Vemos que en esta aproximación la masa oscila a lo largo del eje  $x$  exactamente como si hubiese un resorte de constante elástica  $k = mg/L$ .

A través de esta conclusión, podemos trasladar cualquiera de las relaciones referidas al resorte, simplemente haciendo corresponder los elementos de los dos movimientos. Por ejemplo, si reemplazamos  $k = mg/L$  en la expresión (A4.5) para el período de las oscilaciones elásticas obtenemos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (\text{A4.9})$$

Esta expresión es la que se conoce como 3era ley del péndulo, e indica que el período de estas oscilaciones es independiente de la masa, tal cual debía ser, según hemos dicho al estudiar el péndulo.

Debemos decir dos cosas importantes de esta expresión:

- Si bien la expresión es válida estrictamente para oscilaciones de pequeña amplitud, en la práctica sirve muy bien para oscilaciones de cualquier amplitud. Las diferencias sólo pueden registrarse midiendo con muy buena precisión.

- Esta expresión nos provee de un método cómodo y preciso para

determinar el valor de la intensidad del campo gravitatorio. La medición del período se puede hacer con gran precisión simplemente dejando transcurrir muchos períodos (sólo hay que contar bien). La longitud debe medirse con cuidado.

## Apéndice 5

# El trabajo de las fuerzas interiores

El teorema del trabajo y la energía cinética relaciona el trabajo de la fuerza resultante con la energía cinética de un cuerpo que se puede asimilar a una partícula puntual. Así tenemos un caso muy simple, que sirve para guiar muchos razonamientos, pero que en su simplicidad puede generar algunas ideas engañosas.

Para superarlas es necesario revisar algunos detalles de casos más generales.

Pensemos entonces en un sistema formado por varias partes rígidas, sobre las cuales actúan tanto fuerzas ex-

teriores como interiores (algunas partes pueden estar unidas o vinculadas entre sí de diferentes maneras, algunas uniones pueden ser elásticas, y también puede haber rozamientos).

Tenemos  $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_{int} + \sum \vec{F}_{ext}$ , y por lo que ya hemos dicho al estudiar las leyes de la dinámica sobre que  $\sum \vec{F}_{int} = 0$ , resulta que  $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_{ext}$ , y en el movimiento del centro de masa (CM) sólo intervienen las fuerzas exteriores:

$$m_{total} \Delta \vec{v}_{CM} = \vec{F}_R \Delta t = \sum \vec{F}_{ext} \Delta t$$

A partir de este resultado, un análisis superficial puede sugerir, erróneamente, que las fuerzas interiores tampoco deberían modificar la energía cinética de cualquier sistema, cuando en realidad lo único que no pueden modificar es el movimiento del centro de masa.

Efectivamente, si tratamos de calcular el trabajo realizado por todas las fuerzas, encontramos una diferencia muy grande con el procedimiento para calcular el impulso: *no es lo mismo el trabajo de la fuerza resultante, que la suma de todos los trabajos de todas las fuerzas!*

Para ver esto supongamos cada fuerza aplicada en un lugar particular, y calculemos el trabajo total en un cierto movimiento:

$$W_{total} = \sum F_{ext,i} d_i \cos \alpha_i + \sum F_{int,j} d_j \cos \alpha_j$$

Donde  $d_i$  o  $d_j$  son las distancias recorridas por cada uno de los puntos sobre los que está aplicada cada fuerza, y  $\alpha_i$ ,  $\alpha_j$  los correspondientes ángulos (entre cada fuerza y el desplazamiento del punto sobre el que actúa).

En un caso general, los desplazamientos son todos distintos. Son necesariamente iguales solamente en dos casos: en el de una partícula puntual, o en el del movimiento de traslación pura de un cuerpo rígido.

En estos casos, efectivamente todos los  $d$  son iguales y salen factor común de la sumatoria, quedando el resultado más simple:

$$W_{total} = (\sum F_{ext,i} \cos \alpha_i + \sum F_{int,j} \cos \alpha_j) d = F_{R(tangencial)} d$$

Según este resultado, la suma de los trabajos de todas las fuerzas es igual al trabajo de la fuerza resultante, y además es igual al trabajo de las fuerzas exteriores actuantes sobre el sistema. Todo esto suena tan bien, que es muy fácil equivocarse y creer que tiene validez general, pero sólo la tiene para estos dos casos citados, y para *casí ninguna otra situación*.

En general, la suma de todos los trabajos de las fuerzas aplicadas no es igual al trabajo de la fuerza resultante: los trabajos de todas las fuerzas aplicadas se pueden calcular cuando se conocen todos los movimientos de las partes donde están aplicadas, mientras el trabajo de la fuerza resultante **ni siquiera puede ser calculado** porque *la fuerza resultante es una abstracción* que no está aplicada realmente en algún lugar definido.

Lo que se hace es definir (arbitrariamente y porque permite obtener un resultado interesante) el trabajo de la fuerza resultante considerada aplicada en el CM. A ese trabajo lo denominamos  $W_{FR}$ , y no es igual al trabajo de las fuerzas exteriores (ya que  $\vec{F}_R$  es la resultante de ellas, pero ellas están aplicadas en otros puntos), ni es igual al trabajo de todas las fuerzas (ya que las fuerzas interiores son totalmente independientes de  $\vec{F}_R$ ).

Definiendo de esta manera el trabajo de la resultante, *atribuyéndole el desplazamiento del CM*, recuperamos el resultado (6.4) de la partícula puntual:

$$W_{FR} = \Delta E_{cT} \quad (6.4')$$

Donde  $E_{cT} = \frac{1}{2} m_{total} v_{CM}^2$ , es la energía cinética de traslación. Nótese que para la partícula puntual, que consta de un único punto (el cual a la vez es su CM), no tiene sentido la rotación sobre sí misma, por lo que toda la energía cinética es de traslación.

Por otra parte, en el próximo capítulo mostraremos que, para un cuerpo rígido la energía cinética total puede escribirse como la suma de la de traslación más la de rotación, y teniendo eso en cuenta, las expresiones simples más útiles en general, además de (6.4') son:

$$W_{total} = \Delta E_{c_{total}}$$

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

Donde:

$W_{total}$  es el trabajo de todas las fuerzas exteriores e interiores.

$W_{NC}$  es el trabajo de todas las fuerzas no conservativas exteriores e interiores

$E_{c_{total}}$  es la suma de todas las energías cinéticas de traslación y de rotación de todas las partes del sistema.

$E_m$  es la energía mecánica total: cinética de traslación más rotación, más potencial, de todas las partes del sistema.

## Apéndice 6

# Principio de conservación de la energía

Desde el siglo XVIII comenzaron a inventarse y fabricarse las *máquinas de vapor*, que a partir de la combustión del carbón hacían trabajo en grandes cantidades, respondiendo a necesidades sociales y de mercado. De la mano de esas máquinas llegó la llamada “Revolución Industrial”, y paralelamente se fue desarrollando el concepto de *energía*, que no puede atribuirse a una persona, sino a muchos científicos y pensadores que trabajaron de manera más o menos independiente a lo largo de los siglos XVIII y XIX. Casi todos ellos estaban estimulados por los logros prácticos de ingenieros e inventores.

Hay justas razones para atribuir a James Prescott JOULE (físico inglés, 1818-1889), y a Julius Robert von MAYER (médico alemán, 1814-1878), independientemente, el mérito del “descubrimiento” de la **conservación de la energía**. Ambos, por muy diferentes caminos, enunciaron en 1842, de distinta manera, las bases de este principio fundamental. El trabajo de JOULE, rigurosamente ajustado a los procedimientos científicos tradicionales, sirvió inmediatamente de base para los desarrollos posteriores, mientras que el trabajo del desafortunado MAYER, tal vez más especulativo y audaz, pero menos ajustado a la tradición de la Física, fue desacreditado, y recién después de su muerte, reconocido en todo su valor.

A pesar de las controversias que aún hoy existen acerca del justo valor de cada una de estas contribuciones, así como de otras muchas que no podríamos mencionar aquí, es posible decir, casi sin dudas, que el primer trabajo científico suficientemente difundido en el que se establece completamente el concepto de energía tal cual ahora se lo trata en la llamada física “clásica”, es el trabajo publicado en 1847 por Hermann Luis Friedrick von HELMHOLTZ (médico y físico alemán investigador de procesos fisiológicos, 1821-1894), con el título “Über die Erhaltung der Kraft”, título que ahora traducimos como “Sobre la Conservación de la Energía”.

Es importante decir que este título significa textualmente “Sobre la conservación del Kraft”. El vocablo alemán *kraft* es más adecuado para designar fuerza que energía. HELMHOLTZ investigaba en sus trabajos fisiológicos las “fuerzas vitales”, concepto muy amplio y algo vago, que a partir de la publicación de su trabajo permitió definir con precisión esa nueva (o vieja) cosa llamada energía. Así resultó un concepto nuevo, definitivamente distinto del concepto físico de fuerza. De este nuevo concepto tratan estas páginas.

### ■ A6.1.- Algunas ideas fundamentales acerca de la energía

La historia está llena de fallidos intentos e ilusiones de lograr máquinas que trabajen sin consumir nada, llamadas máquinas de “*movimiento perpetuo*”. Y tantos han sido los inventores, y tan ingeniosos pero siempre fracasados los inventos, que ya en 1775 la Real Academia de Ciencias de París perdió la paciencia y emitió una resolución diciendo que no examinaría más trabajos relacionados con máquinas de movimiento perpetuo. A pesar de esto los intentos han seguido hasta nuestros días, y es seguro que en algún lugar, *en este mismo momento*, hay personas tratando de desarrollar alguna ingeniosa y quimérica máquina de éstas.

Estas máquinas suelen ser de todo tipo, y en general es difícil descubrir la razón específica por la que no funcionan. El inventor nunca se convence de que su máquina no funcionará, y pasa su vida perfeccionándola y creyendo que luego de la próxima modificación va a tener éxito. Pero lo que capacita a cualquier científico actual para descartar una máquina de éstas, por ingeniosa que sea, es la teoría de la energía.

¿Qué es la energía? En mecánica hemos podido definir con facilidad qué es el trabajo, y a partir de eso hemos podido definir la energía como algo que representaba en ciertas circunstancias la capacidad para hacer trabajo, a través de expresiones de la forma  $W_{\text{hecho por el sistema}} = -\Delta E$ .

Sin embargo, la mecánica no permite enunciar que la energía mecánica deba conservarse en los casos reales, ni permite enunciar en general si pueden o no existir los “móviles perpetuos”. La mecánica tropieza básicamente con el problema de que las fuerzas de fricción eliminan energía mecánica y producen elevación de temperatura, lo que sugiere que, de existir una teoría completa de la energía, ella debe incluir los fenómenos térmicos y, por lo tanto, no es posible dentro de la mecánica.

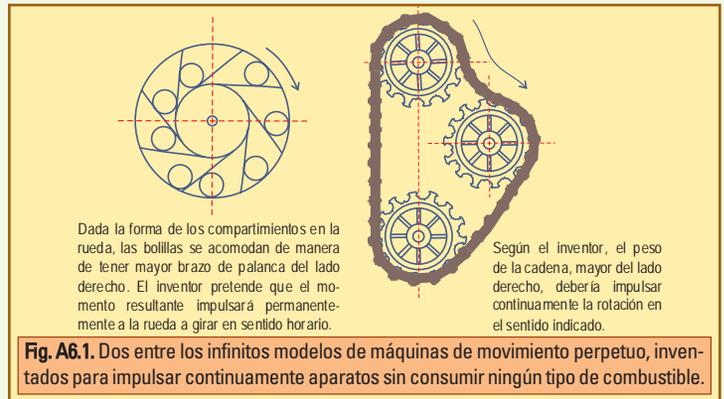
Eso es efectivamente lo que ocurrió. Para que se desarrollara la teoría de la energía fue necesario que aparecieran primero los aparatos capaces del proceso inverso, es decir, obtener trabajo a partir del calor, que fueron las llamadas *máquinas térmicas*. Las primeras máquinas térmicas fueron las máquinas de vapor, y tratando de explicarlas y mejorarlas se desarrolló la Termodinámica, que reúne los aportes de la ciencia de lo térmico, con la de la dinámica. En este espacio nació la teoría de la energía, es decir: **el principio de conservación de la energía**.

Pero no fue sencillo. La teoría de la energía destruye la posibilidad de existencia del móvil perpetuo, pero la imposibilidad de la existencia de éstos no construye la teoría de la energía: debieron transcurrir alrededor de 70 años desde la mencionada resolución de la Academia, antes de que se pudiera enunciar el principio de conservación de la energía.

Sin pretender dar una definición estricta, y teniendo en cuenta que una parte de la energía puede transformarse en calor, vamos a partir de la idea básica de que la energía es *una propiedad de los sistemas* que se puede concebir como la *cantidad de trabajo o de calor* que el sistema puede generar a expensas de ella.

Así es que la energía no existe como una misteriosa entidad sola y separada de la materia, sino que siempre es la energía de algún sistema que se puede reconocer independientemente. En el mundo moderno reconocemos más o menos fácilmente que:

- Una cierta masa de combustible líquido que cargamos en el tanque de un automóvil (junto con el aire que se requerirá para su combustión), tiene una gran cantidad de energía que se requiere para que el motor trabaje.
- Una bolsa llena de carbón o leña (junto con el aire que se requiere para su combustión), contiene una gran cantidad de energía que se empleará en producir calor –ya sea para un asado, o ya sea para calentar otra cosa–.
- Una pila eléctrica nueva, está “cargada” de cierta cantidad de energía que se requiere para accionar diversos juguetes o mecanismos, y que puede seguir entregando mientras sus elementos estén en condiciones de sustentar la correspondiente reacción química en su interior.
- La batería o acumulador eléctrico de un automotor contiene normalmente una cierta cantidad de energía que podrá utilizarse para hacer arrancar el motor, encender las luces, etc.
- El agua en un embalse, en función de su altura, contiene energía “potencial gravitatoria” que puede entregar a turbinas acopladas a generadores de electricidad, al accionarlas luego de descender por conductos adecuados. Esta energía es distribuida por la red de distribución de energía eléctrica para los más diversos usos.



- Una gran masa de aire en movimiento puede contener una gran cantidad de energía (cinética) que podría emplearse en el accionamiento de los antiguos molinos de viento, o de los actuales molinetes acoplados a bombas de agua o a generadores de electricidad, así como también puede manifestarse en la destrucción de galpones, árboles, y edificaciones diversas durante temibles fenómenos meteorológicos.

La conservación de la energía, implica que no puede ser creada ni destruida. Cada sistema sólo puede hacer una cantidad limitada de trabajo o dar una cantidad limitada de calor, hasta agotar su disponibilidad de energía. Por otra parte, esa energía que el sistema pierde no desaparece del universo, sino que ha sido transferida a otros sistemas en estos procesos, y en ellos seguirá existiendo íntegramente.

Pero revisemos cómo fueron generándose las ideas.

## ■ A6.2.- La revolución industrial y las máquinas de trabajar

Los primeros pasos de la revolución industrial fueron dados cuando el ingeniero inglés Thomas SAVERY ideó una máquina capaz de extraer el agua que diariamente brotaba de las paredes de las minas de carbón y se acumulaba en las galerías, anegándolas. SAVERY obtuvo en 1698 una patente para la que él llamó “*máquina de fuego*”. Ésta era una máquina sin partes móviles, que aprovechaba el cambio de volumen en la condensación del vapor de agua, con un sistema de válvulas y cañerías, para succionar el agua de las minas y descargarla afuera.

Desde hacía mucho tiempo había molinos que utilizaban la fuerza del viento, o la de las caídas de agua, es decir, máquinas que aprovechaban algún fenómeno natural, que ya contenía algo en movimiento, para producir otros movimientos. Pero esto era algo nuevo: por primera vez las máquinas hacían trabajo mecánico a partir del calor obtenido del fuego.

Las primeras máquinas eran tremendamente imperfectas, y aún así resultaban económicamente convenientes. Muchas personas ingeniosas se dedicaron a perfeccionarlas, y les fueron incorporando partes móviles.

Uno de los grandes fabricantes fue NEWCOMEN. En 1739 se construyó en su fábrica, una máquina para bombear agua de una mina de carbón en Francia, desde una profundidad de 27 metros, que realizó en 48 horas la tarea que previamente había requerido una semana con el trabajo de 50 hombres y 20 caballos operando en turnos de 24 horas al día.

El ingeniero escocés James WATT (1736-1819), comenzó con máquinas de aspecto similar a las de NEWCOMEN, y desarrolló inventos tan decisivos para su aplicación a la industria, que muchas de sus máquinas se vendían con un contrato que exigía el pago periódico de una suma equivalente a un tercio de lo que ahorran por sustituir una máquina de NEWCOMEN.

Mientras los inventores y los inventos se multiplicaban, la ciencia buscaba explicaciones. Se sabía que el trabajo nunca se hace solo ni gratis. Los nuevos hechos simplemente confirmaban esa experiencia y permitían ver que, en general para poder hacer trabajo se necesitan principalmente dos cosas:

- 1) Tener algo que pueda hacer el trabajo, por ejemplo, los caballos y todo el sistema de bombeo que pueden accionar, las nuevas máquinas de bombeo recién inventadas, la rueda de paletas ubicada en un lugar con caída de agua, o el aparato que sea (algún tipo de *motor*, en el mundo moderno).
- 2) Suministrar algo que se va consumiendo proporcionalmente a la cantidad de trabajo que se va realizando.

Por ejemplo, forraje y agua (y aire) para los caballos, carbón (y aire) para las máquinas de fuego, un cierto caudal de agua para la rueda de paletas, etc. Eso que se suministra, a medida que es utilizado, se transforma de manera de perder las propiedades que eran esenciales para el proceso. Por ejemplo, el alimento de los caballos se digiere y se transforma en residuos y excrementos que ya no pueden alimentarlos, el oxígeno utilizado en la respiración de los caballos o en la combustión del carbón se combina para formar productos que ya no pueden sustentar la combustión o la respiración, lo mismo le sucede al carbón, y por último, el agua de la rueda de paletas, una vez que ha pasado por ella impulsando su movimiento, se encuentra en la parte baja del río, habiendo perdido la *altura*, que era lo que la capacitaba para mover la rueda.

El perfeccionamiento de las máquinas mostró que cada vez se podía hacer más trabajo con la misma cantidad de carbón, y se planteó una pregunta fundamental:

*¿Cuánto trabajo puede producirse a partir de una cierta cantidad de carbón?*

No fue fácil responder a estas preguntas, porque existía la complicación adicional de que también había gran controversia acerca de la *naturaleza del calor*.

Otras importantes preguntas de la época eran: *¿Qué es el calor? ¿Por qué tiene esa capacidad de hacer que las máquinas generen trabajo?*

Se trabajó mucho para aprender acerca de la “fuerza motriz del fuego”, y gradualmente se fue acuñando el concepto de energía. Aquí no podremos seguir todo el derrotero que siguió la génesis de este concepto, pero sí revisaremos algunas ideas básicas sobre el calor.

## ■ A6.3.- Ideas acerca del calor

### Un poco de calórico.

Una de las cuestiones que hubo que resolver para lograr el desarrollo de la teoría de la energía fue que la naturaleza del calor, uno de los actores principales del proceso, era motivo de gran controversia.

La idea predominante en la época era que había un fluido llamado “calórico” cuya presencia daba a los cuerpos la calidad de *calientes*. Este fluido era pensado como *material*—concepto asociado fundamentalmente con la idea de algo que no se podía crear ni destruir— y podía penetrar dentro de los cuerpos materiales que al impregnarse de él se calentaban, y al perderlo se enfriaban.

Según estas ideas la cantidad  $Q$  de calórico que se suministra a un cuerpo se traduce en una variación  $\Delta T$  de su temperatura, está dada por:

$$Q = C_e \times m \times \Delta T \quad (\text{A6.1})$$

Donde  $m$  es la masa del cuerpo, y  $C_e$  una constante que depende de la sustancia, denominada calor específico.

### Nota 1. El calórico

*Podríamos preguntarnos por qué desenterrar ahora un concepto ya perimido como el del calórico. La respuesta es que el calórico era una idea teórica que funcionaba muy bien, y permitió grandes logros. La teoría actual de las máquinas térmicas fue desarrollada por Sadi CARNOT (1796-1832) utilizando el calórico. Para modernizarla, basta con sustituir el término “calórico”, por el término moderno “entropía”. Haremos una aproximación más simple sustituyendo “calórico” por “calor”, sin pensar que es un fluido material, sino una especie de “pseudofluido”, cuya cantidad se conserva en los fenómenos como la conducción térmica.*

### Nota 2. El termómetro y la temperatura.

*La temperatura es una variable intensiva que caracteriza el estado del cuerpo desde el punto de vista térmico. Es esencial distinguir el calor, variable extensiva, proporcional a la cantidad de masa que se calienta, de la temperatura, que es independiente de la cantidad de materia, por eso calificada como intensiva. Por ejemplo: la temperatura de 1 cm<sup>3</sup> y de 1 litro de agua hirviendo es la misma.*

*Resulta que algunas propiedades de algunos sistemas, como el estado de dilatación, o el valor de la resistencia eléctrica, o el color (en el caso de cuerpos incandescentes) permiten construir indicadores del valor de la temperatura, llamados termómetros. Para cada caso habrá un tipo de termómetro que indicará el valor de la temperatura, y este valor estará referido a alguna escala (la más usual entre nosotros es la “Celsius”, también llamada “centígrada”). Este valor es uno de los “parámetros indicadores del estado del sistema”. En los sistemas más simples, en los fenómenos puramente térmicos, éste podrá ser el único parámetro interesante o relevante para describir su estado.*

### Unidades

La expresión (A6.1) permite definir unidades para el calor (o calórico), eligiendo cualquier sustancia particular, que en general siempre fue el agua.

Una *caloría* es la cantidad de calor que se debe suministrar a un gramo de agua pura en estado líquido, a presión normal (1 atm), que está a 14,5°C de temperatura, para que aumente su temperatura hasta 15,5°C. Se puede verificar experimentalmente que de manera aproximada, en un rango de temperaturas más o menos amplio, y mientras se tomen precauciones para que el agua no se evapore, una caloría que se suministre a un gramo de agua eleva su temperatura en aproximadamente 1°C, independientemente de que ello ocurra cerca o lejos del valor 15 °C. Dentro de este orden de aproximación, la cantidad de calor necesaria para calentar una masa  $m$  de agua es proporcional a la variación  $\Delta T$  de su temperatura, y resulta la siguiente expresión general:

$$Q = 1 \text{ (cal/g}\cdot\text{°C)} \times m \times \Delta T \quad (\text{A6.2})$$

Antiguamente esta expresión definía la cantidad de calórico que se le debía suministrar al agua para aumentar su temperatura en  $\Delta T$ . Actualmente define la cantidad de energía que se le debe suministrar como calor al agua para eso mismo, y a través de la idea de que la energía se conserva, como veremos enseguida, esta expresión define la cantidad de energía que almacena el agua en este proceso. Así tenemos una unidad para la energía, emergente de procesos puramente térmicos, que luego veremos cómo se relaciona con la unidad SI, el joule.

### El calorímetro

El instrumento que mide cantidades de calor es el calorímetro. Consiste esencialmente en un recipiente con un termómetro y con una cierta masa de agua. Dentro de esa masa de agua se sumerge algún sistema o cuerpo en el que ocurre determinado proceso durante el cual el agua recibe (o entrega) cierta cantidad de calor y varía consecuentemente su temperatura. Según la variación de temperatura registrada por el termómetro, aplicando la fórmula (A6.2) se calcula la cantidad de calor recibida por el agua, que es la entregada por el sistema.

### El calor y la fricción

En 1798 el conde RUMFORD (Benjamín THOMSON, 1753-1814) realizó una serie de experiencias, intrigado por lo intenso del calor que se producía al horadar los cañones de grueso calibre de la artillería del ejército de Baviera, a cargo de cuya reestructuración técnica estaba designado. Llegó a la conclusión de que la **fricción** parecía ser una **fente inagotable de calor**: éste se seguiría produciendo mientras continuara habiendo **movimiento con fricción**.

Esto fue fundamental para comprender que no era razonable la idea del calórico como un fluido contenido en los cuerpos, que se transfería de unos a otros conservándose. Más bien, todo parecía indicar que:

El calor se puede producir ilimitadamente a partir de la fricción, mientras dure el movimiento con fricción, durará la producción de calor.

Los experimentos de RUMFORD sirvieron para mostrar que había que desechar la idea del calórico, pero no bastaron para establecer una teoría suficientemente completa que permitiera sustituirlo, de manera que el trabajo realizado contra las fuerzas de fricción se siguió considerando *trabajo aniquilado*, y la teoría del calórico continuó gozando de buena salud por bastante tiempo.

Pero lenta y trabajosamente se fue imponiendo la interpretación *mecanicista* del calor, según la cual, lo que se detecta *macroscópicamente* como aumento de temperatura, es el incremento de la intensidad de *los movimientos microscópicos caóticos* de átomos y moléculas. Esto permite interpretar los procesos con fricción diciendo que en ellos una cierta cantidad de energía mecánica de un movimiento macroscópico, pasa a incrementar la energía de las vibraciones de los movimientos microscópicos caóticos, manifestándose como una elevación de temperatura. De este modo, el trabajo contra las fuerzas de fricción no debería considerarse aniquilado, sino que algo de él, la escurridiza energía, continuaría difundándose con el calor.

Si además tenemos en cuenta que las máquinas de vapor son un ejemplo de sistema en que el suministro de calor capacita al sistema para hacer trabajo, podemos decir que claramente el flujo calorífico transporta energía. Este es un transporte que ocurre de forma *térmica*, que es la forma esencialmente *no mecánica*, ya

que ocurre simplemente por la diferencia de temperatura entre lugares próximos, sin que medie ningún tipo de fuerza, desplazamiento, ni deformación.

### Conducción térmica

Cuando dos sistemas de diferente temperatura se ponen en contacto (o se aproximan suficientemente) tiene lugar el flujo de calor, desde el sistema de mayor hacia el de menor temperatura. Este fenómeno se denomina conducción térmica, y tiene lugar entre dos puntos en los que hay diferencia de temperatura, dentro o no de un mismo sistema. El flujo de calor ocurre al calentar las partes más frías a expensas de las más calientes, tendiendo a llevar todo al equilibrio térmico, es decir a una situación de temperatura uniforme (y puede existir aún sin contacto entre los cuerpos materiales, ya que en ese caso el calor puede fluir por radiación).

Si designamos con  $Q$  a la cantidad de energía que ingresa de esta manera al sistema (o que sale, si su signo es negativo), podemos plantear:

$$Q = \Delta E \quad (\text{A6.3})$$

Donde  $E$  sigue siendo esa propiedad del sistema denominada energía, que en estos procesos puramente térmicos, debe ser una función de la temperatura.

Las experiencias calorimétricas, con mediciones en fenómenos puramente térmicos, muestran y muestran muy bien que esa entidad llamada calórico se conservaba: un cuerpo que había sido calentado sólo se enfriaba en la medida en que transfería su calor a otro. Se podía medir muy bien que si se suministraba  $Q_0$  a un cuerpo, el cual cedía cantidades  $Q_i$  a varios otros cuerpos, cuando se calculaba la suma total, siempre se encontraba todo el  $Q_0$  inicial.

De manera que la conservación del calórico viene a ser la conservación de la energía, restringido a fenómenos puramente térmicos.

Los experimentos de RUMFORD muestran que no vale la conservación del calórico cuando intervienen fenómenos mecánicos, y permiten que entendamos que es posible considerar la conservación de otro ente más general, denominado energía, que puede ingresar, almacenarse, o salir de un sistema tanto en forma térmica como mecánica, y también, según las condiciones, transformarse de una forma a otra.

## ■ A6.4.- La conservación de la energía

La conservación de la energía implica dos cosas: que no puede ser creada, y que no puede ser destruida. Las razones para enunciar que la energía no puede ser creada, emergen de toda la experiencia relacionada con la **necesidad** de suministrar algo que tenga energía para poder producir trabajo o calor. Si hubiera algún proceso por el cual la energía pudiera crearse, entonces este proceso podría agregarse a la máquina usuaria de esa energía, y el conjunto no requeriría ya de alimentación. Habríamos cumplido el sueño de los inventores del móvil perpetuo.

Ahora bien, la imposibilidad de construir un móvil perpetuo, la experiencia cotidiana de que todas las cosas o procesos tienden a detenerse cuando se deja de impulsarlos o de suministrarles aquello que los alimenta, *parece* sugerir que la energía, al menos en parte, finalmente desaparece.

Pero hemos visto que ello no es necesariamente así: la disipación no consiste en que la energía desaparezca en un sentido absoluto, sino en que desaparezca de las partes en las cuales se la estaba utilizando, para diluirse cada vez más en movimientos microscópicos caóticos en un ambiente infinito, en el cual finalmente se hace casi imposible detectarla.

Este discurso sirve para sugerir que tal vez sea razonable pensar que la energía se puede conservar, pero no prueba que lo haga.

Hicieron falta infinidad de trabajos que sería imposible considerar, hasta que se logró elaborar completamente el tan buscado concepto de energía, tal que su cantidad total  $E$  en un sistema sólo puede ser variada por transferencia con otros sistemas según la siguiente expresión, que particulariza el Principio de Conservación de la Energía para los procesos fundamentales de realizar trabajo y suministrar calor:

$$E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = W_{(\text{realizado sobre el sistema})} + Q_{(\text{entregado al sistema})} \quad (\text{A6.4})$$

Este enunciado fundamental se conoce también como “Primer principio de la termodinámica”.

### Nota Práctica

*Cuando un cuerpo empuja a otro, dado que las fuerzas que cada uno aplica al otro son mutuamente opuestas y de igual módulo (Principio de acción y reacción) el cuerpo que empuja hace exactamente la misma cantidad de trabajo, positiva, que el otro hace negativa, y así resulta que a través de la superficie de separación, la misma cantidad de energía que un cuerpo entrega, lo recibe el otro. El proceso de hacer trabajo transfiere energía, sin crearla ni destruirla. Toda la que abandona a uno de los cuerpos, ingresa al otro.*

*De la misma manera, si dos cuerpos con distinta temperatura son puestos en contacto, el flujo calorífico que se establece entre ellos, se considera positivo para el sistema que gana energía, y con signo negativo para el otro. De manera que este proceso también conserva la energía: toda la que abandona un cuerpo, ingresa al otro.*

*Obviamente (A6.2.4) indica que para cualquier sistema completamente aislado (aislado dinámicamente:  $W = 0$ , y aislado térmicamente:  $Q = 0$ ), la energía se conserva de manera absoluta.*

### Equivalente mecánico del calor

Unos ingredientes fundamentales para poder desarrollar el concepto de energía y de su conservación, fueron los trabajos independientes y simultáneos de MAYER y JOULE.

Las experiencias de JOULE consistieron en determinar la elevación de temperatura que resultaba de cierta masa de agua, luego de hacer determinada cantidad de trabajo mecánico sobre ella agitándola continuamente con unas paletas. Realizando cuidadosas mediciones en gran cantidad de diversas condiciones, Joule determinó que se lograba el mismo efecto agregando calor al agua directamente por contacto con un cuerpo más caliente, que haciendo trabajo mecánico sobre ella, en la proporción de (expresado aquí en unidades SI.):

4,16 N·m de trabajo, por cada caloría

Independientemente MAYER calcula, sobre la base de ciertas especulaciones teóricas y de resultados experimentales que, « el calentamiento de un peso dado de agua desde 0 °C hasta 1°C corresponde a la caída de igual peso de agua desde 365 metros ». Eso expresado en joules, es decir en N·m, es tanto como 3.580 J por cada grado por cada kg de agua, es decir 3,58 J por caloría).

En ese momento estos resultados sirvieron de apoyo a la naciente idea de energía, y probaron que **calor y trabajo**, dos cosas muy distintas, son **equivalentes** para elevar la temperatura de los cuerpos. Traduciendo a unidades actuales los resultados de JOULE y MAYER, tendríamos que, 4,16 N·m (según JOULE), y 3,58 N·m (según MAYER), producen el mismo efecto que 1 caloría. Actualmente se acepta el valor **4,185 J : 1 cal**, y se lo denomina “equivalente mecánico del calor”.

A partir de que se enuncia la idea completa de energía, el equivalente mecánico del calor no es más que la relación entre dos unidades distintas de energía: el joule y la caloría. En nuestro lenguaje actual podemos enunciar lo siguiente:”

Calor y trabajo son las dos maneras fundamentales de transferir energía, el trabajo es la forma mecánica, empujando a lo largo de una distancia, y el calor es la forma no mecánica propiamente dicha por simple contacto entre cuerpos de diferentes temperaturas.

### Degradación de la energía.

A partir de la vida práctica sabemos que todo lo que se usa se estropea, envejece y llega un momento en que no sirve más, y por lo que vemos en la misma vida práctica, eso también pasa con la energía. Por ejemplo: mientras tenemos combustible en el tanque del automóvil, sabemos que podremos utilizar su energía para que el motor haga trabajo; ahora bien, después de gastar todo el combustible, aunque el Primer Principio de la Termodinámica nos asegure que la energía no ha desaparecido, que ahora está íntegramente toda distribuida con el calor en el motor y el ambiente (desparramada en varios kilómetros, posiblemente), el sentido común nos indica, muy sabiamente, que si queremos que

el motor siga funcionando tendremos que cargar más combustible, porque no podríamos reunir jamás todo ese calor para utilizar su energía otra vez.

Éste es un caso en que a partir del conocimiento común se llega a una idea básicamente correcta, que también fue enunciada por la Termodinámica con el nombre de “Segundo Principio de la Termodinámica”. Este principio, nos enseña que una cosa es la cantidad de energía, que se conserva siempre, y otra cosa es la posibilidad de su aprovechamiento, que inexorablemente va disminuyendo a medida que se la utiliza.

De alguna manera, este fenómeno tiene que ver con que toda situación en la que se *produce* calor es un ejemplo de aumento del grado de desorden de los movimientos a nivel atómico o molecular. En el estado inicial la energía existía tanto como en el final, pero en el estado final la energía está *menos aprovechable* porque está repartida en infinidad de movimientos microscópicos caóticos.

En Termodinámica se logra definir de manera precisa el grado de caos del movimiento molecular, y se le da el nombre de “*entropía*” a la variable que lo representa matemáticamente. Las leyes dicen que a medida que se produce calor, la entropía aumenta; y a medida que el calor se difunde llevando un sistema al equilibrio térmico, la entropía también aumenta. Y una vez que la entropía aumenta, nunca disminuye. Cuanto más entropía hay, menos aprovechable y más degradada, está la energía.

La termodinámica concluye que no sólo no es posible el movimiento perpetuo, sino que tampoco es posible una máquina térmica que pueda transformar en trabajo toda la energía que la alimenta.

## Apéndice 7

# Vectores axiales

Una rotación queda determinada en el espacio si se indica el eje y el sentido de rotación alrededor del mismo.

La ubicación del eje determina al mismo tiempo todos los planos, perpendiculares a él, en los cuales se desplazan los puntos del cuerpo en rotación, así como los centros de todas las trayectorias circulares de éstos.

Esto significa que el problema de indicar una rotación en el espacio es equivalente al problema de indicar su eje, y uno de dos sentidos posibles asociados con él.

De manera que si, por medio de alguna convención asociamos (arbitrariamente) un sentido de circulación alrededor del eje, con un sentido a lo largo del mismo, podremos utilizar un vector para indicar variables de la rotación, de la siguiente manera:

- Con la dirección del vector indicamos exactamente la dirección del eje.
- Con una convención arbitraria decimos que cada sentido del vector indica un sentido de giro alrededor del mismo.

Hay dos convenciones posibles para asociar el sentido del vector con el sentido de la rotación que representa, y éstas serían: o la convención “dextrógira” (que significa “del giro a derechas”, o “de la mano derecha”), o la convención “levógira”, o “siniestrógira” (que significa “del giro a izquierdas”, o “de la mano izquierda”).

Los vectores utilizados para representar variables angulares se denominan vectores axiales (axial significa

“perteneciente o relativo a un eje”). Utilizaremos siempre la convención dextrógira, que es la siguiente:

Si se toma el vector axial con la **mano derecha**, con el pulgar apuntando como el vector, los dedos al cerrarse, quedan indicando el sentido de circulación correspondiente alrededor del mismo.

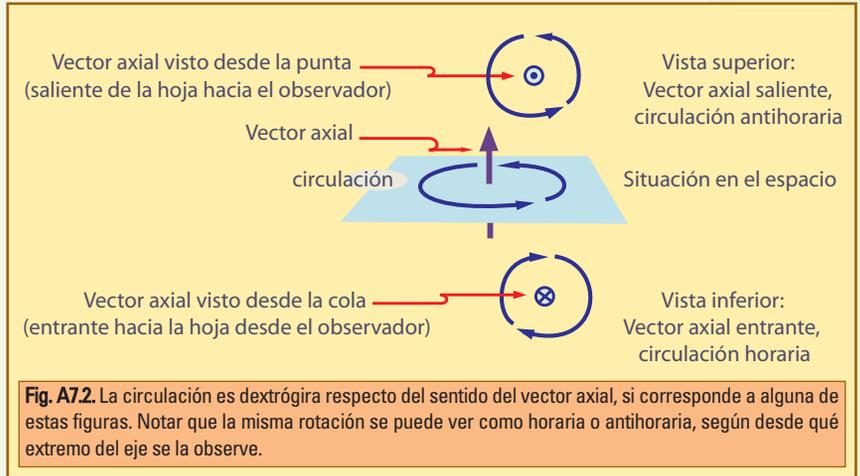


**Fig. A7.1.** Convención dextrógira.

Otra forma de definir esta misma convención dextrógira es decir que observando el plano de la rotación desde el lado desde el cual la rotación se ve con el sentido antihorario, se debe ver el vector correspondiente salir hacia el observador. Se ilustra en la figura A7.2.

Debe tenerse siempre presente que:

- Un vector axial no indica en absoluto algo que ocurra a lo largo del mismo, hacia uno u otro de sus extremos, sino que indica rotación alrededor del mismo, en uno u otro sentido de circulación.
- Una vez que elegimos una convención, ya sea la dextrógira, o la levógira, para representar una circulación con un vector axial, decimos que este sentido de circulación es dextrógiro o levógiro con respecto al sentido del vector axial.



**Fig. A7.2.** La circulación es dextrógira respecto del sentido del vector axial, si corresponde a alguna de estas figuras. Notar que la misma rotación se puede ver como horaria o antihoraria, según desde qué extremo del eje se la observe.

Con ayuda de los vectores axiales, entonces definimos:

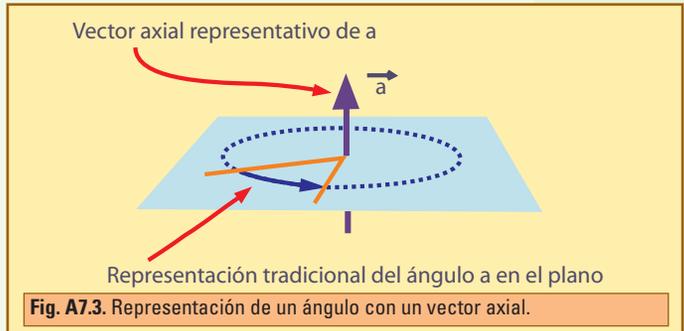
**Los ángulos se representan con vectores axiales:**

La **velocidad angular** y la **cantidad de movimiento angular**, se representan con **vectores axiales**.

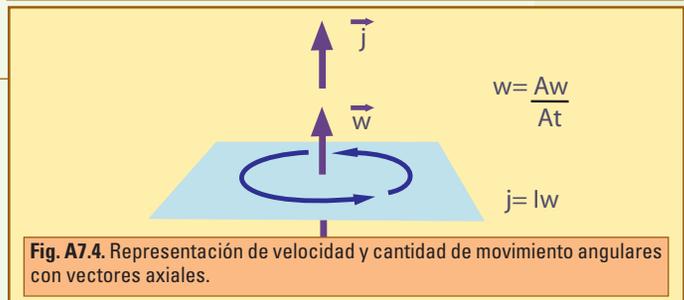
La velocidad angular se define dividiendo el desplazamiento angular por el tiempo, de manera que si el desplazamiento angular se expresa con un vector:  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ , entonces la velocidad angular resulta el correspondiente vector axial. Si además consideramos que la cantidad de movimiento angular (en una rotación pura, y para los casos simples en que el eje es eje de simetría) se define como el producto del momento de inercia por la velocidad angular, también tendremos naturalmente un vector axial para representar la cantidad de movimiento angular  $\vec{J}$ .

**El momento de las fuerzas aplicadas se representa con un vector axial**

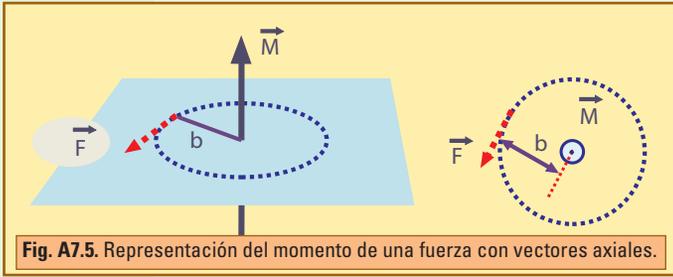
Si se considera una fuerza actuando en el plano de una rotación, podemos representar el momento con un vector axial cuyo módulo es  $M = F b$ , cuya dirección es la del eje, es decir perpendicular al plano, y con



**Fig. A7.3.** Representación de un ángulo con un vector axial.



**Fig. A7.4.** Representación de velocidad y cantidad de movimiento angulares con vectores axiales.



el sentido dado por la convención dextrógira:

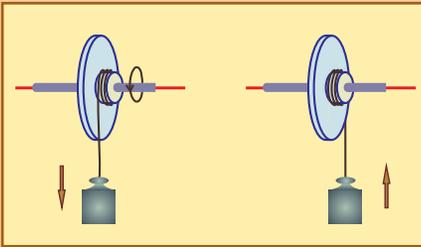
Como aplicación de estos conceptos podemos escribir la Ley del Impulso de las rotaciones puras con ayuda de los vectores axiales correspondientes:

$$\vec{M} \Delta t = I \Delta \vec{\omega} = \Delta \vec{J}$$

Fig. A7.5. Representación del momento de una fuerza con vectores axiales.

#### • Ejemplo

Considerar un volante de hierro montado sobre un eje cilíndrico de hierro, con cojinetes perfectos sin rozamiento. Solidario con este disco hay un pequeño tambor en el cual se enrolla un hilo de 1 m de longitud, del que pende una pesa de masa  $m = 1$  kg.



1) Considerar la situación ilustrada en (a), cuando el hilo lleva desenrollados 60 cm, habiendo partido la pesa desde una situación inicial en reposo, con el hilo totalmente enrollado. Dibujar los vectores axiales momento aplicado sobre el disco, velocidad angular y cantidad de movimiento angular del disco, en el instante considerado.

2) Considerar la situación ilustrada en (b), luego de que el hilo se desenrolló totalmente, y por estar sujeto al tambor, ha comenzado a enrollarse en sentido contrario debido a que el disco, por inercia, ha continuado girando. Dibujar los vectores axiales torque aplicado sobre el disco, velocidad angular y cantidad de movimiento angular del disco, en el instante considerado.

#### • Desarrollo

1) Dado que el disco parte del reposo, la velocidad y la cantidad de movimiento angulares que adquiere, tienen el mismo sentido que el momento aplicado, y según la regla de la mano derecha, son tres vectores sobre el eje, hacia la derecha:  $\rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{J} \rightarrow \vec{M}$

2) Ahora el momento aplicado cambia de sentido, tendiendo a frenar la rotación, que continúa con el mismo sentido anterior. Por lo tanto los vectores son:  $\rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{J} \leftarrow \vec{M}$

# Apéndice 8

## Movimiento orbital

Hasta aquí siempre hemos utilizado las coordenadas cartesianas para ubicar la posición de puntos en el espacio, pero existen otras formas de hacer lo mismo, como por ejemplo dar su distancia al origen, y los ángulos que ubican el vector posición con respecto a direcciones elegidas de referencia. Este tipo de coordenadas suelen denominarse “polares”, o “esféricas”.

Nos limitaremos aquí a movimientos en el plano, porque así bastará con un solo ángulo para ubicar un punto.

Consideremos entonces una partícula de masa  $m$  moviéndose en el plano de la hoja. Perpendicularmente al plano del movimiento se elige arbitrariamente un eje, cuya intersección con la hoja es el punto  $O$ , origen de las coordenadas polares.

A medida que la partícula se mueve, la ubicamos con su distancia al origen,  $r$ , y el ángulo  $\theta$  con la dirección de referencia. Aunque un movimiento sea rectilíneo, si no está alineado exactamente con el origen el ángulo  $\theta$  irá cambiando, de manera que visto desde  $O$ , el movimiento tiene una velocidad angular  $\omega = \Delta\theta / \Delta t$ .

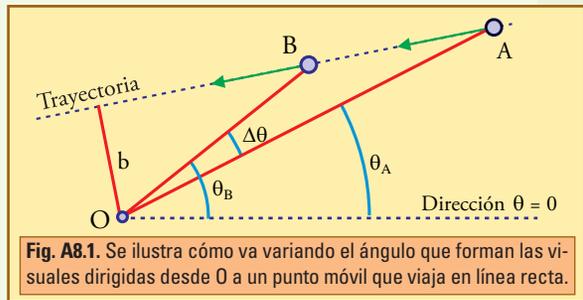
Es claro que en este caso no esperamos que la velocidad angular sea constante o que tenga una expresión simple. No estamos tratando de simplificar algo, sino de mostrar una forma de tratar el tema. Un movimiento rectilíneo se complica bastante cuando es descrito en coordenadas polares, pero el movimiento de traslación de un planeta en órbita, en cambio, se analiza naturalmente de esta forma, y ello es causa de que, cuando se hable de un movimiento de traslación de una partícula descrito con respecto a un centro se utilice la denominación “movimiento orbital”, aún cuando no exista órbita.

Así es que denominamos *velocidad angular orbital* a la que considera cómo cambia el ángulo con que se ubica la partícula vista desde el punto origen o eje elegido, para distinguirla de la intrínseca, que se refiere al ángulo que giran las partículas del cuerpo con respecto a su centro de masa.

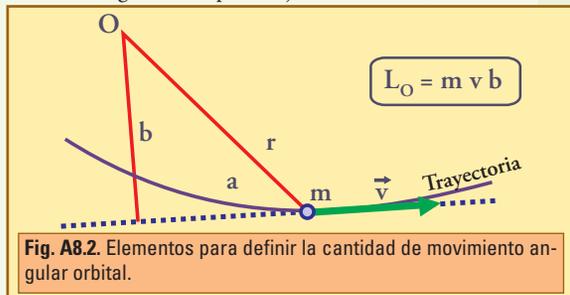
Y de este modo podemos aplicar al movimiento de traslación, eligiendo un punto eje de referencia, todos los conceptos referidos a las rotaciones.

### Cantidad de movimiento angular orbital

De la misma manera que para cualquier rotación, se define la cantidad de movimiento angular orbital con respecto al eje  $O$ ,  $L_O$ , de una partícula de masa  $m$  y velocidad  $v$ , como el momento de la cantidad de movimiento, esto es producto del módulo de la cantidad de movimiento lineal  $m v$ , por el brazo de palanca  $b$  (distancia desde la recta del vector cantidad de movimiento hasta  $O$ ) Fig. A8.2.



**Fig. A8.1.** Se ilustra cómo va variando el ángulo que forman las visuales dirigidas desde  $O$  a un punto móvil que viaja en línea recta.



**Fig. A8.2.** Elementos para definir la cantidad de movimiento angular orbital.

Si aplicamos la Ley del Impulso para Rotaciones tenemos:

$$M_O \Delta t = \Delta L_O$$

Donde  $M_O$  es el momento resultante de todas las fuerzas exteriores con respecto al centro  $O$ .

### Nota 1. Velocidad Areal

Si se considera un pequeño desplazamiento  $AA' = v \Delta t$ , de la partícula, se encuentra que  $AA'$  es la base del triángulo  $AA'O$ , cuya altura es  $b$ , de manera que, para el área de este triángulo, tenemos

$$\text{Area} = \frac{1}{2} AA' b$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} v b \Delta t$$

Y comparando con la expresión de  $L_O$ , tenemos:

$$L_O = 2 m \frac{\text{Area}}{\Delta t}$$

Es decir, salvo un factor constante, la cantidad de movimiento angular orbital representa la velocidad areal del movimiento, que es el área barrida en la unidad de tiempo por la línea desde la partícula al centro.

### Nota 2.

Siguen valiendo las expresiones (todos los subíndices se agregan para dejar claro que se habla con respecto al centro  $O$ ):

$$L_O = I_O \omega_O$$

$$I_O = m r^2$$

$$\omega_O = \Delta\theta / \Delta t$$

En particular el ángulo  $\Delta\theta$  en radianes se puede calcular proyectando el segmento  $AA'$  sobre la dirección perpendicular a  $\vec{v}$ , obteniéndose:  $\Delta\theta = \frac{AA' \cdot \text{sen}\alpha}{r}$ .

Todas estas expresiones son muy naturales y sencillas si  $r$  es constante (movimiento circular alrededor de  $O$ ), pero pueden ser complicadas para aplicar a otros casos.

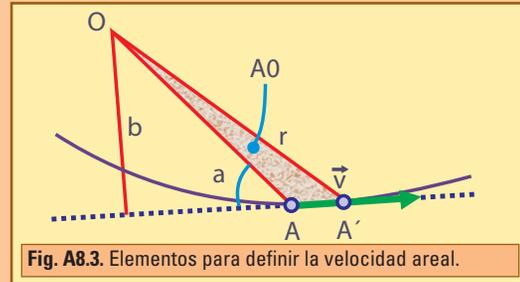


Fig. A8.3. Elementos para definir la velocidad areal.

## • Fuerzas centrales y Ley de las Áreas

Cuando se da el caso de cuerpos mantenidos en órbita por la fuerza de gravedad, se tiene que la fuerza apunta exactamente hacia el astro central, de manera que su momento es nulo con respecto a dicho astro, y por lo tanto el cuerpo que está en órbita deberá mantener constante su cantidad de movimiento angular orbital con respecto al punto central.

Esta es una característica común de todas las fuerzas alineadas con el centro, ya sean atractivas o repulsivas, que por esto se denominan fuerzas centrales.

Según lo que hemos dicho, entonces, la conservación de  $L_O$  implica que se mantiene constante el producto  $v \times b$ , y también implica que se mantenga constante la velocidad areal.

Este último enunciado es una de las leyes de KEPLER del movimiento planetario, conocida como la Ley de las Áreas. Esta ley había sido enunciada fenomenológicamente por Johanes KEPLER (1571-1630), y luego del desarrollo de la dinámica se entendió que representaba la conservación de la cantidad de movimiento angular, y que era una consecuencia directa de que la fuerza actuante fuese central, es decir alineada con el centro.

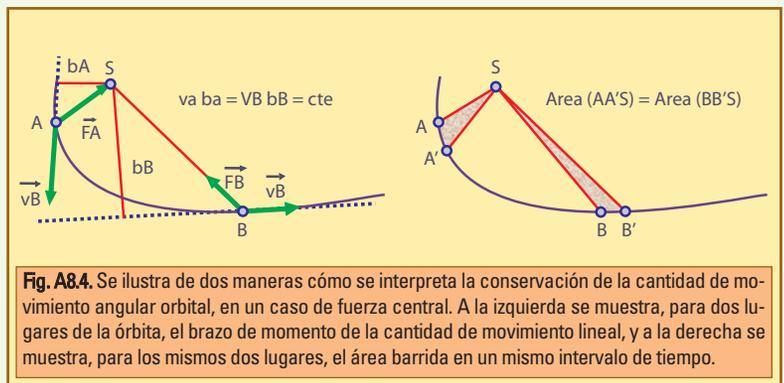


Fig. A8.4. Se ilustra de dos maneras cómo se interpreta la conservación de la cantidad de movimiento angular orbital, en un caso de fuerza central. A la izquierda se muestra, para dos lugares de la órbita, el brazo de momento de la cantidad de movimiento lineal, y a la derecha se muestra, para los mismos dos lugares, el área barrida en un mismo intervalo de tiempo.

# Resoluciones, desarrollos y comentarios



## RESOLUCIONES, DESARROLLOS Y COMENTARIOS

### CAPÍTULO 1

#### ▲ Ejercicio 1.1.

Las dimensiones de la densidad lineal de masa deben ser M/L (masa dividido longitud). Obviamente eso no puede sumarse con una fuerza (de dimensiones  $M \times L \times T^{-2}$ ), de manera que podemos descartar la opción que tiene la suma  $F + \mu$ . La correcta debe dar L/T, que es la dimensión de la velocidad.

Veamos cada una:

$$\text{Dimensión de } (\sqrt{\mu F}) = \{M \times L^{-1} \times M \times L \times T^{-2}\}^{1/2}$$

$$\text{Dimensión de } (\sqrt{\mu F}) = \{M^2 \times T^{-2}\}^{1/2}$$

$$\text{Dimensión de } (\sqrt{\mu F}) = M/T,$$

que no es L/T,  $\rightarrow$  Incorrecta.

$$\text{Dimensión de } \left(\sqrt{\frac{\mu}{F}}\right) = \{M \times L^{-1} / M \times L \times T^{-2}\}^{1/2}$$

$$\text{Dimensión de } \left(\sqrt{\frac{\mu}{F}}\right) = \{T^2 \times L^{-2}\}^{1/2}$$

$$\text{Dimensión de } \left(\sqrt{\frac{\mu}{F}}\right) = T/L,$$

que no es L/T,  $\rightarrow$  Incorrecta.

$$\text{Dimensión de } \left(\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = \{M \times L \times T^{-2} / M \times L^{-1}\}^{1/2}$$

$$\text{Dimensión de } \left(\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = \{L^2 \times T^{-2}\}^{1/2}$$

$$\text{Dimensión de } \left(\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = L/T, \rightarrow \text{dimensión correcta.}$$

$$\text{Dimensión de } \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = \{M \times L \times T^{-2} / M \times L^{-1}\}^{1/2} / L$$

$$\text{Dimensión de } \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = \{L^2 \times T^{-2}\}^{1/2} / L = T^{-1},$$

que no es L/T,  $\rightarrow$  Incorrecta.

#### ▲ Ejercicio 1.2

En principio el valor que debemos expresar es: 934.000 hPa, pero así escrito tiene 6 cifras significativas, y debe ser expresado con tres. Para que las cifras significativas sean tres, podríamos escribir  $934 \times 10^3$  hPa, o  $934 \times 10^5$  Pa, pero en estos casos estamos utilizando potencias de diez, de manera que lo que falta es elegir prefijos adecuados. Los prefijos adecuados, para no tener que agregar ceros a la derecha de las tres cifras dadas, son los que simbolizan factores mayores de  $10^3$ . Podría ser M, G, T, etc.

Es decir que una respuesta correcta es: 93,4 MPa, y otra: 0,0934 GPa.

### CAPÍTULO 2

#### ▲ Ejercicio 2.1

a)  $\vec{A} = (-20; 5)$  (todas las figuras están juntas al final).

Las componentes están dadas:  $A_x = -20$ ,  $A_y = 5$ .

$$\text{Módulo: } A = \sqrt{(-20)^2 + 5^2}$$

$$A \cong 20,6.$$

Ángulo con eje x (en 2° cuadrante):

$$\alpha = \arctg \frac{5}{20}$$

$$\alpha = \arctg(0,25)$$

$$\alpha \cong 14^\circ.$$

Ángulo con eje y (en 2° cuadrante):

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\beta \cong 76^\circ.$$

b)  $\vec{B} = -5 (5; -10)$

$$B = (-25; 50).$$

Componentes  $B_x = -25$ ,  $B_y = 50$ .

$$\text{Módulo: } B = \sqrt{(-25)^2 + 50^2}$$

$$B \cong 55,9.$$

Ángulo con eje x (en 2° cuadrante):

$$\alpha = \arctg \frac{50}{25}$$

$$\alpha = \arctg(2)$$

$$\alpha \cong 63,4^\circ$$

Ángulo con eje y (en 2° cuadrante):

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\beta \cong 26,6^\circ.$$

c)  $\vec{C} = 1/5 (30; -60)$

$$C = (6; -12). \text{ Componentes } C_x = 6, C_y = -12.$$

$$\text{Módulo: } C = \sqrt{6^2 + (-12)^2}$$

$$C \cong 13,4.$$

Ángulo con eje x (en 4° cuadrante):

$$\alpha = \arctg \frac{12}{6}$$

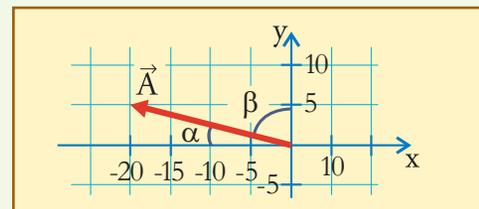
$$\alpha = \arctg(2)$$

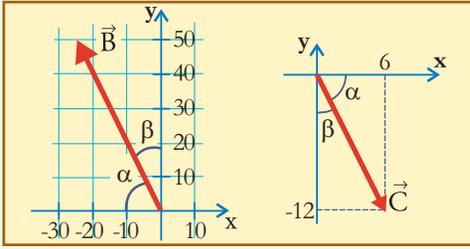
$$\alpha \cong 63,4^\circ$$

Ángulo con eje y (en 4° cuadrante):

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\beta \cong 26,6^\circ.$$





**▲ Ejercicio 2.2**

El ángulo que forma  $\vec{A}$  con el eje horizontal es  $140^\circ - 90^\circ = 50^\circ$ , de manera que

$$A_x = 30 \times \cos 50^\circ$$

$$A_x = 19,3, \text{ y}$$

$$A_y = 30 \times \sin 50^\circ$$

$$A_y = 23,0.$$

El ángulo que forma  $\vec{D}$  con el eje horizontal es  $100^\circ + 50^\circ = 150^\circ$ , de manera que  $D_x = 35 \times \cos 150^\circ$

$$D_x = -30,3,$$

$$D_y = 35 \times \sin 150^\circ$$

$$D_y = 17,5.$$

En cuanto a  $\vec{F}$ , por estar sobre el eje  $y$ ,

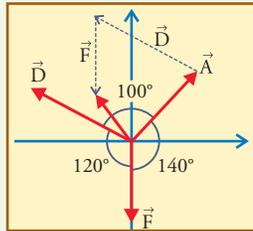
$$\vec{F}_x = 0, \text{ y } \vec{F}_y = -24.$$

De manera que la suma es

$$\vec{A} + \vec{D} + \vec{F} = (19,3; 23,0) + (-30,3; 17,5) + (0; -24)$$

$$\vec{A} + \vec{D} + \vec{F} = (-11,0; 16,5)$$

El resultado de la suma cualitativa está representado por el vector hueco en la siguiente figura, que no se hace estrictamente a escala, pero que trata de mostrar aproximadamente los ángulos y los tamaños relativos de los vectores. Vemos que el resultado es un vector cuya componente  $x$  es negativa y tiene una longitud aproximada parecida a la mitad de  $\vec{F}$ , y componente  $y$  positiva, un poco menor que la de  $\vec{D}$ . Si observamos los resultados del cálculo analítico vemos que concuerdan bien con estas afirmaciones.



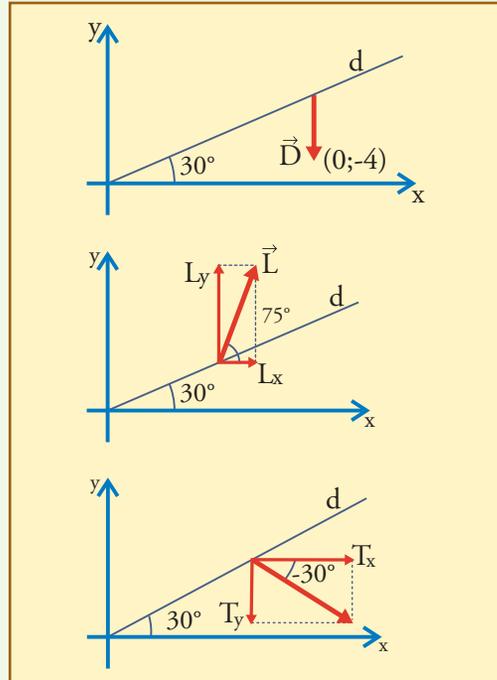
**▲ Ejercicio 2.3**

a) Para las componentes horizontales y verticales interesan los ángulos con los ejes ( $x, y$ ), de las figuras. Para  $\vec{D}$ , que apunta según el eje vertical hacia abajo, la descomposición es trivial:  $D_x = 0, D_y = -4$ . Para  $\vec{L}$  el ángulo con la horizontal es  $75^\circ$ , de manera

que  $L_x = L \times \cos 75^\circ$   
 $L_x = 0,52, \text{ y}$   
 $L_y = L \times \sin 75^\circ$   
 $L_y = 1,93.$

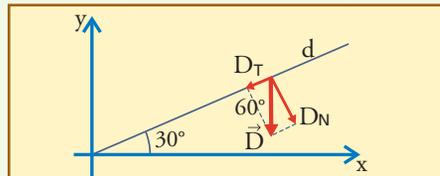
Para  $\vec{T}$  el ángulo con la horizontal es  $-30^\circ$ , de manera

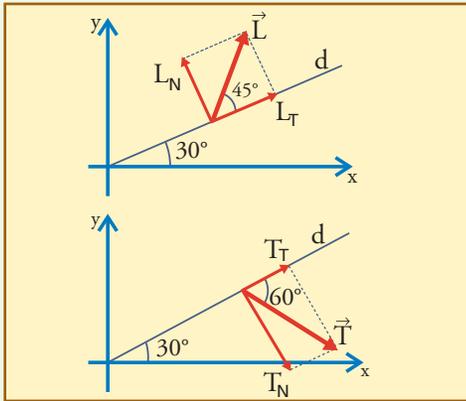
que  $T_x = T \times \cos 30^\circ$   
 $T_x = 4,33, \text{ y}$   
 $T_y = -T \times \sin 30^\circ$   
 $T_y = -2,5.$



Nótese especialmente que las componentes  $y$  de los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{T}$  son negativas aunque estos vectores están situados arriba del eje  $x$ . Esto es porque el signo de cada componente de un vector indica *hacia dónde apunta*, no dónde está. Para que todo se vea claramente, hay que imaginar el vector trasladado hasta que quede dibujado naciendo en el origen.

b) Ahora interesan los ángulos con la recta  $d$ . Utilizamos el subíndice  $T$  para las componentes tangenciales, y  $N$  para las normales. Aquí no estableceremos ninguna convención para los signos, por lo que consideraremos positivas a todas las componentes.





$$D_T = 4 \cos 60^\circ \quad D_N = 4 \sin 60^\circ$$

$$D_T = 2 \quad D_N = 3,46$$

$$L_T = 2 \cos 45^\circ \quad L_N = 2 \sin 45^\circ$$

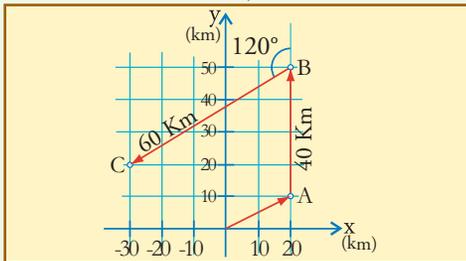
$$L_T = 1,41 \quad L_N = 1,41$$

$$T_T = 5 \cos 60^\circ \quad T_N = 5 \sin 60^\circ$$

$$T_T = 2,5 \quad T_N = 4,33$$

#### ▲ Ejercicio 2.4

Comencemos con un dibujo de la situación.



a) y b) Los vectores desplazamiento son los que han quedado dibujados. Las componentes de los dos primeros, además están dadas en el enunciado:  $\vec{D}_1 = (20 \text{ km} ; 10 \text{ km})$ , y  $\vec{D}_2 = (0 \text{ km} ; 40 \text{ km})$ . Para  $\vec{D}_3$ , en cambio, están dados el módulo y el ángulo con el eje y, de donde se deduce:

$$D_{3x} = -D_3 \cos 30^\circ$$

$$D_{3x} \cong -52 \text{ km}$$

$$D_{3y} = -D_3 \sin 30^\circ$$

$$D_{3y} \cong -30 \text{ km}$$

Entonces  $D_3 \cong (-52 \text{ km} ; -30 \text{ km})$ .

$$\text{Los módulos son: } D_1 = \sqrt{20^2 + 10^2}$$

$$D_1 \cong 22,4 \text{ km},$$

$$D_2 = 40 \text{ km}, D_3 = 60 \text{ km}.$$

Para los vectores posición tenemos que  $\vec{A}$  es dato:  $\vec{A} (20 \text{ km} ; 10 \text{ km})$ .

$$\vec{B} \text{ se obtiene sumando } \vec{D}_2 : \vec{B} = \vec{A} + \vec{D}_2$$

$$\vec{B} = (20 \text{ km} ; 50 \text{ km}).$$

Por último,  $\vec{C}$  se obtiene sumando  $\vec{D}_3$  a  $\vec{B}$ :

$$\vec{C} = \vec{D}_3 + \vec{B}$$

$$\vec{C} \cong (-32 \text{ km} ; 20 \text{ km}).$$

Los módulos representan la distancia de cada punto al origen:

$$A = D_1$$

$$A = 22,4 \text{ km}$$

$$B = \sqrt{20^2 + 50^2}$$

$$B = 53,9 \text{ km}$$

$$C = \sqrt{32^2 + 20^2}$$

$$C = 37,7 \text{ km}.$$

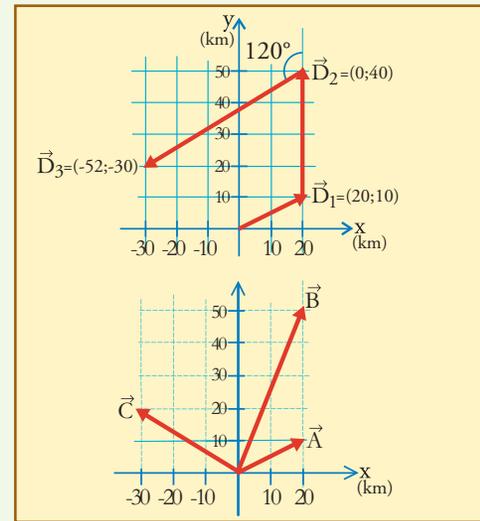


Figura 1

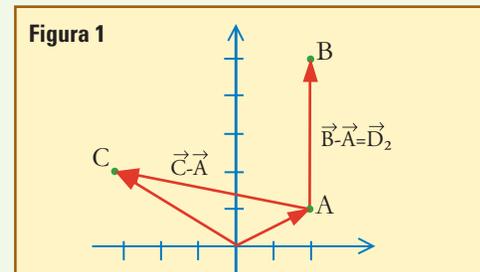
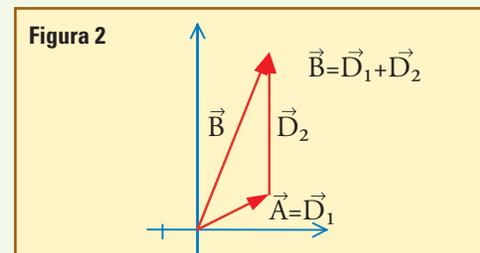


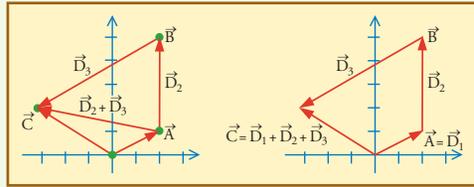
Figura 2



c) En la figura 1 se muestran las diferencias:  $\vec{B} - \vec{A}$ , que indica tanto el desplazamiento  $\vec{D}_2$ , como la posición de  $\vec{B}$  con respecto a  $\vec{A}$ , y  $\vec{C} - \vec{A}$ , que indica tanto el desplazamiento que llevaría desde el punto  $\vec{A}$  hasta el  $\vec{C}$ , como la posición de  $\vec{C}$  con respecto a  $\vec{A}$ .

En la figura 2 se muestra la suma  $\vec{D}_1 + \vec{D}_2$ , que es la posición del punto  $\vec{B}$ , final, con respecto al origen, o sea el vector  $\vec{B}$ .

En estas dos figuras se muestran las sumas  $\vec{D}_2 + \vec{D}_3$ , y  $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$ . Por ser sumas de desplazamientos, ambas indican la posición del punto final respecto del inicial en cada caso.



$$\text{d) } \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3 = \vec{C}$$

$$\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3 = (-32 \text{ km} ; 20 \text{ km}),$$

por ser la suma de los tres desplazamientos sucesivos, es la posición del punto final respecto del inicial.

$|\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3|$  es el módulo del vector anterior, 37,7 km, o sea, es la distancia desde el punto final al inicial.

$|\vec{D}_1| + |\vec{D}_2| + |\vec{D}_3|$  es la suma de los módulos de cada desplazamiento, o sea que es la suma de las distancias recorridas: 22,4 km + 40 km + 60 km = 122,4 km.

Es la distancia total recorrida a lo largo del camino.

e) Todas estas cosas han sido calculadas en diversos puntos del ejercicio. Ahora sólo resta saber ordenar algunas ideas.

e1) Son correctas 1, 4, 5, y 6. No son correctos 2 y 3, porque *estas vectores no son fuerzas*. Confundir vectores desplazamiento con fuerzas sería un error grosero que no debe cometerse (ver ejercicio 2.8). Tampoco es correcta la 7 (aunque representa un error más leve), porque la distancia se define como un escalar, no como un vector. La distancia entre 2 puntos es el módulo del vector que indica la posición de uno respecto de otro.

e2) El resultado de la operación  $(\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3)$ , es un vector, y también es un desplazamiento. Por lo recién dicho, no es una fuerza, y tampoco una distancia.

e3) Sólo 1 es correcta (ver (d) también).

### ▲ Ejercicio 2.5

a) La distancia H-O es el módulo del vector  $\vec{r}_a$ , de manera que sus componentes son:

$$x_a \cong 0,957 \times 10^{-10} \times \cos 104,5^\circ$$

$$x_a \cong -0,240 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$y_a \cong 0,957 \times 10^{-10} \times \sin 104,5^\circ$$

$$y_a \cong 0,927 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Entonces:

$$\vec{r}_a \cong (-0,240 \times 10^{-10} \text{ m} ; 0,927 \times 10^{-10} \text{ m})$$

$$\vec{r}_a \cong (-0,240 ; 0,927) \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\vec{r}_b \cong (0,957 ; 0,000) \times 10^{-10} \text{ m}$$

$\vec{r}_a - \vec{r}_b \cong (-1,197 ; 0,927) \times 10^{-10} \text{ m}$ . Es la posición del protón  $H^{(a)}$  respecto del  $H^{(b)}$ .

$\vec{r}_b - \vec{r}_a \cong (1,197 ; -0,927) \times 10^{-10} \text{ m}$ . Es el vector opuesto al anterior. Es la posición del protón  $H^{(b)}$  respecto del  $H^{(a)}$ .

b)  $r_a = r_b \cong 0,957 \times 10^{-10} \text{ m}$ , es la distancia H-O.

$$|\vec{r}_a - \vec{r}_b| = |\vec{r}_b - \vec{r}_a|$$

$$|\vec{r}_a - \vec{r}_b| = \sqrt{1,197^2 + 0,927^2} \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$|\vec{r}_a - \vec{r}_b| \cong 1,514 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Es la distancia entre los protones.

c)  $\vec{r}_a$  representa la posición de  $H^{(a)}$  con respecto a O, y  $\vec{r}_a - \vec{r}_b$  representa la posición con respecto al otro protón ( $H^{(b)}$ ).

d) La operación vectorial:  $\vec{r}_a +$  vector posición de  $H^{(b)}$  con respecto a  $H^{(a)} = \vec{r}_b$ , es analíticamente:

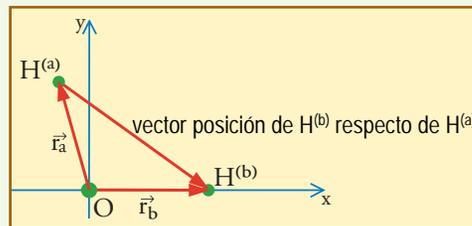
Eje x:

$$-0,240 \times 10^{-10} \text{ m} + 1,197 \times 10^{-10} \text{ m} = 0,957 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Eje y:

$$0,927 \times 10^{-10} \text{ m} + (-0,927 \times 10^{-10} \text{ m}) = 0,000 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Gráficamente:



### ▲ Ejercicio 2.6

a) Estas distancias son los módulos de los vectores posición:

$$r_A = \sqrt{2^2 + 3^2} \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$r_A = 3,61 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$r_B = \sqrt{2^2 + 1^2} \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$r_B = 3,24 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Y para los ángulos indicados en la figura tenemos:

$$\text{tg} \alpha = 3/2 = 1,50 \Rightarrow \alpha = 56,3^\circ$$

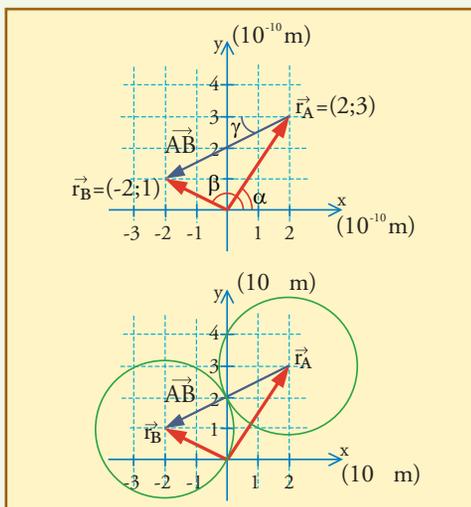
$$\text{tg} \beta = -1/2 = -0,50 \Rightarrow \beta = 153,4^\circ$$

b) y c)  $\vec{AB} = (-2 - 2 ; 1 - 3) \times 10^{-10} \text{ m} = (-4 ; -2) \times 10^{-10} \text{ m}$ ; éste es el vector que indica el desplazamiento pedido.

$$\text{Su módulo, } AB = \sqrt{4^2 + 2^2} \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$AB = 4,47 \times 10^{-10} \text{ m}$$

indica la distancia que habría que desplazar A, y la dirección (correspondiente al 3<sup>er</sup> cuadrante), estaría dada por el ángulo  $\theta$  que se muestra en la figura, dado por:  $\text{tg} \theta = 1/2 \Rightarrow \theta \cong 26,6^\circ$  (o si referimos el ángulo al eje  $x'$ , sería  $206,6^\circ$ ).



Para que se diera la situación propuesta en (c), mostrada en la figura de la derecha, el radio de cada esfera debería ser la mitad de la distancia AB, y por lo tanto, su diámetro debería ser igual precisamente a esa distancia:  $4,47 \times 10^{-10}$  m.

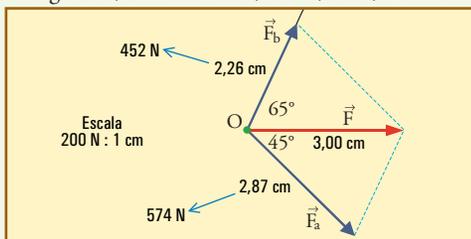
d) Que  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$ , se muestra dibujando  $\vec{AB}$  a continuación de  $\vec{r}_A$ , y mostrando que su punta señala exactamente el mismo punto que  $\vec{r}_B$ .

Para mostrar que  $\vec{AB}$  es la posición de B con respecto a A, se dibujan ejes x, y, con el origen en A. En este sistema la posición de B quedará señalada por el vector  $(-4; -2)$   $\times 10^{-10}$  m, que es precisamente  $\vec{AB}$ .

### ▲ Ejercicio 2.7

Elegimos una escala 200 N : 1 cm, con la cual la fuerza del enunciado se dibujará de 3 cm de largo. Esta fuerza es la resultante de las fuerzas con las cuales cada cuerda tira de O, que son las que hay que averiguar.

De manera que trazando paralelas a cada cuerda por el extremo de  $\vec{F}$  (cuidado: respetar los ángulos), la descomponemos según las direcciones de éstas, y obtenemos, a lo largo de la cuerda a, un vector de 2,87 cm de longitud, que representa una fuerza de 574 N, y a lo largo de b, un vector de 2,26 cm, o sea, 452 N.



### ▲ Ejercicio 2.8

Es claro que toda fuerza (en física, o mecánica) es un vector, en función de que, como hemos visto, es un ente con orientación en el espacio.

Pero además, también es claro que hemos estudiado varios elementos o conceptos que son vectores, y no son fuerzas, como los siguientes:

Vector posición. Indica la ubicación (de un punto) en el espacio.

Vector desplazamiento. Indica el cambio, o diferencia entre dos posiciones.

Vector velocidad. Indica la orientación y rapidez de un movimiento.

Está claro que todos estos elementos, (y muchos otros que veremos) no son fuerzas porque no indican una acción que un cuerpo ejerza sobre otro tendiendo a desplazarlo.

Es importante reflexionar sobre el significado de cada concepto que se estudia y utiliza. Afirmar que todo vector es una fuerza, es un tremendo error, consistente en confundir entre sí todos los entes de naturaleza vectorial, ignorando las particularidades de cada uno.

Lamentablemente, es un error bastante difundido y contra el que tratamos de alertar en este ejercicio: caer en esta confusión significa tener una imagen completamente superficial de los problemas estudiados, en la que se ha sustituido el significado de muchos conceptos diferentes, por un mismo símbolo con el cual se los representa. Es un grave error revelador de una metodología totalmente superficial, que rehuye el necesario esfuerzo de interpretación que requiere cada situación.

### ▲ Ejercicio 2.9

a) El vector desplazamiento es

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\vec{AB} = (80 \text{ m}; 60 \text{ m}).$$

Su módulo es la distancia entre A y B:

$$d_{AB} = \sqrt{80^2 + 60^2}$$

$$d_{AB} = 100 \text{ m}.$$

Esa es la distancia recorrida en 4 s, de manera que en cada segundo se recorren  $100/4 = 25$  metros. La definición (2.1) dice eso mismo de la siguiente manera:

$$v = d_{AB}/\Delta t$$

$$v = 100 \text{ m}$$

$$v = 25 \text{ m/s}.$$

b) Según (2.3):

$$\vec{v} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t}; \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \left( \frac{80 \text{ m}}{4 \text{ s}}; \frac{60 \text{ m}}{4 \text{ s}} \right) = (20 \text{ m/s}; 15 \text{ m/s})$$

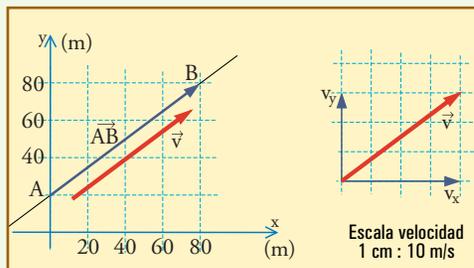
La coincidencia en dirección y sentido de los vectores desplazamiento y velocidad se muestra comparando

$\Delta y/\Delta x$  con  $v_y/v_x$  (que son iguales); en la figura además se muestra lo mismo con el vector  $\vec{v}$  dibujado al lado de la trayectoria.

$$c) v = \sqrt{20^2 + 15^2}$$

$$v = 25 \text{ m/s.}$$

Vemos que coincide con  $d_{AB}/\Delta t$ .



## CAPÍTULO 3

### ▲ Ejercicio 3.1

- a) Fuerza resultante normal: *nula*, y fuerza resultante tangencial: *dirigida en sentido contrario a la velocidad*.  
 b) Fuerza resultante tangencial: *nula*, y fuerza resultante normal: *constante*.

### ▲ Ejercicio 3.2

- a) Si una partícula se desplaza libremente en el espacio (sin que actúen sobre ella fuerzas de ningún tipo) a lo largo de una recta **a**, y no estamos en alguna situación tramposa (por ejemplo, que el sistema de referencia se mueva de alguna manera especial), estamos en las condiciones exactas del Principio de Inercia, por lo cual su velocidad necesariamente debe ser constante, como lo dice la segunda opción presentada.

Acerca de las demás opciones podemos decir:

La afirmación de que su velocidad *puede ser constante*, si bien no implica un hecho inexacto, indica que se desconoce un principio fundamental como el de inercia, ya que deja abierta la posibilidad de que en algunos casos de fuerza resultante nula, la velocidad pueda cambiar. Es una afirmación que sólo podría ser admitida como recurso retórico en algún contexto determinado, y no en general.

La afirmación de que la velocidad puede variar, simplemente implica desconocer las ideas básicas de la física. Una persona que hace esta afirmación está en las mismas condiciones de alguien que no ha estudiado física, y además está mostrando no tener alguna idea definida de lo que puede pasar, ya que deja la puerta abierta a cualquier posibilidad (que la ve-

locidad disminuya o aumente o no varíe).

La afirmación de que la velocidad debe disminuir cuando no actúan fuerzas sobre el móvil, es una vieja y típica idea *aristotélica*. Es una idea influida por el conocimiento de sentido común, y aunque puede indicar que no se ha estudiado física, también puede indicar que las ideas estudiadas en física aún no hayan sido adecuadamente integradas en un esquema de pensamiento, y están conviviendo con ideas erróneas originadas en el sentido común. Es un proceso natural, frente al que debemos estar atentos para que el esquema de ideas no se estacione en una convivencia de ideas contradictorias, sino que evolucione hasta un estadio final en el que esta opción sea claramente rechazada con fundamentos adecuados.

La afirmación de que la velocidad debe aumentar no merece mucho comentario porque está en desacuerdo tanto con la física como con el sentido común. Una persona que elija esta opción probablemente está tratando de llamar la atención, o de producir algún conflicto, o simplemente no leyó bien el enunciado.

- b) En todos los casos hay que aplicar una fuerza estrictamente normal (perpendicular), es decir sin componente tangencial. La fuerza debe ser aplicada hacia el lado hacia el cual se desea producir la desviación, y debe:
- Ir cambiando de dirección junto con el movimiento, para mantenerse exactamente perpendicular a la trayectoria en cada instante,
  - Mantener el módulo constante para que la curva siempre sea un arco de circunferencia, es decir, mantenga siempre la misma curvatura constante,
  - Suspenderse en el instante en que el móvil pasa por el punto en el que deseamos que termine la trayectoria curva. A partir de allí, libre de fuerzas, el movimiento continuará en línea recta en la dirección que tiene en ese lugar.

Es decir, si le llamamos  $F_0$  al módulo de la fuerza que se debe aplicar (hacia la izquierda) en el caso b (circunferencia completa de radio  $R_0$ ), durante un tiempo  $T_0$ , entonces:

Para el caso **c**, debe aplicarse una fuerza del mismo módulo  $F_0$ , hacia la derecha, durante la mitad del tiempo ( $T_0/2$ ).

Para el caso **d**, debe aplicarse una fuerza del módulo mayor que  $F_0$ , hacia la derecha, durante un tiempo  $T_0/8$ .

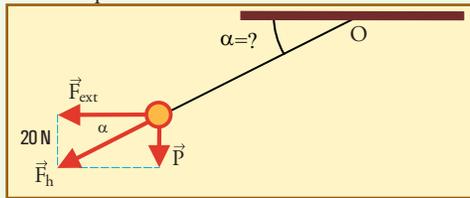
Para el caso **e**, debe aplicarse una fuerza del módulo menor que  $F_0$ , hacia la derecha, durante un

tiempo  $T_0/2$ .

Vale aclarar que no tenemos aún elementos para calcular cuánto mayor o menor que  $F_0$  debe ser el módulo de las fuerzas correspondientes a los casos d y e. Cuando los tengamos (Capítulo 5) podremos calcular que para el caso d el módulo de la fuerza debe ser  $2F_0$ , y para el e,  $\frac{1}{2}F_0$ . En cambio sí podemos calcular el tiempo que debe aplicarse, porque sabemos calcular la longitud de los arcos de circunferencia recorridos, siempre con la misma velocidad.

### ▲ Ejercicio 3.3

a) Del dibujo se advierte que la fuerza que tira del hilo,  $\vec{F}_h$ , es la resultante entre el peso y  $\vec{F}_{ext}$ , y que esta fuerza hace girar el hilo alrededor de O hasta que se alinea con ella, siendo ésta, por lo tanto, la posición de equilibrio.



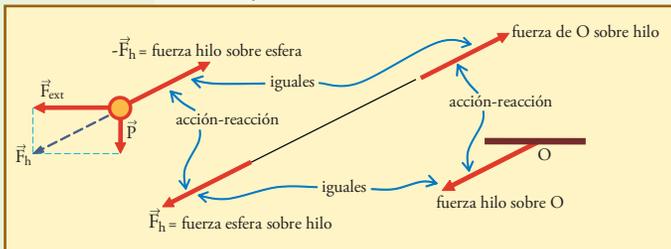
Esto significa que  $F_h$  forma con la horizontal el mismo ángulo  $\alpha$  que el hilo, y por lo tanto podemos aplicar:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{F_{ext}}, \quad \text{y} \quad F_h = \sqrt{P^2 + F_{ext}^2}$$

Con lo cual siendo  $P = m g \cong 14,7 \text{ N}$ , resulta  $\operatorname{tg} \alpha \cong 0,735$ ,  $\alpha \cong 36,3^\circ$ ,  $F_h \cong 24,8 \text{ N}$ .

b) y c) La reacción a  $\vec{F}_{ext}$  no se muestra pues habría que dibujarla sobre el agente que tira de la esfera, y la reacción a  $\vec{P}$ , que tampoco se puede mostrar, estaría en el centro de la Tierra.

### ▲ Ejercicio 3.4



El cuerpo al pasar por E (y por cualquier otro punto en su movimiento libre) sólo tiene contacto con el hilo. Eso significa que sobre él, además de la acción de la gravedad, sólo puede haber una fuerza de contacto aplicada por el hilo. La fuerza aplicada por el campo gravitatorio es el peso, vertical hacia abajo,

igual en cualquiera de las posiciones, independiente del reposo o del movimiento. La fuerza aplicada por el hilo sólo puede ser alineada con el hilo, *tirando del cuerpo hacia el punto de suspensión* (ya que el hilo no puede empujar). De manera que la única figura que puede ser correcta es la (b).

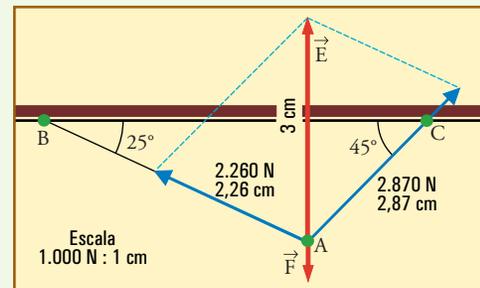
Si se encuentra la fuerza resultante dibujando el paralelogramo con estas dos fuerzas de la figura (b), se encuentra que la resultante es hacia atrás y hacia arriba. Esto se entiende porque la resultante debe tener una componente normal hacia la izquierda con respecto al movimiento (es decir hacia arriba en la figura), para producir la trayectoria curvada hacia la izquierda, y debe tener una componente tangencial hacia atrás para ir frenando el movimiento, como ocurre en todo el tramo desde D hasta G. Todos los detalles de esto se estudiarán en el capítulo 5.

Elegir alguna de las figuras que muestran un vector hacia delante, corresponde a un pensamiento aristotélico, según el cual un movimiento hacia delante sólo podría ocurrir si hubiese una fuerza hacia delante; y eso a su vez *revelaría que no se entiende lo que es una fuerza*, ya que se pensaría que puede haber fuerza hacia delante sin que haya alguien que la aplique.

### ▲ Ejercicio 3.5

a) Elegimos una escala 1.000 N : 1 cm, con la cual la fuerza del enunciado se dibujará de 3 cm de largo. Luego dibujamos la fuerza equilibrante de ésta,  $\vec{E}$ , de 3 cm, hacia arriba, con origen en A. Esta fuerza es la resultante de las fuerzas con las cuales cada cuerda tira de A, que son las que hay que averiguar.

De manera que trazando paralelas a cada cuerda por el extremo de  $\vec{E}$  (cuidado: respetar los ángulos), la descomponemos según las direcciones de éstas, y obtenemos, a lo largo de la cuerda AC, un vector de 2,87 cm de longitud, que representa una fuerza de 2.870 N, y a lo largo de AB, un vector de 2,26 cm, o sea, 2.260 N.



Se recomienda especialmente **no cometer el error de atribuir a cada vector la longitud de la correspondiente cuerda**.

b) Por ser un sistema de tres fuerzas que tiran de A en equilibrio, debemos plantear:

$$\vec{F} + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} = \vec{0}$$

Por ser una suma vectorial, debe efectuarse con cada componente por separado. Es decir que en realidad tenemos dos ecuaciones:

$$F_x + F_{ABx} + F_{ACx} = 0$$

$$F_y + F_{ABy} + F_{ACy} = 0$$

Esto es un sistema de dos ecuaciones. Podríamos resolverlo si tuviese dos incógnitas. Pero así escrito tiene cuatro:  $F_{ABx}$ ,  $F_{ACx}$ ,  $F_{ABy}$  y  $F_{ACy}$ .

No obstante, dado que los ángulos son datos, podemos escribir estas incógnitas en función de los módulos de las fuerzas:

$$F_{ABx} = -F_{AB} \cos 25^\circ ; F_{ABy} = F_{AB} \sin 25^\circ ;$$

$$F_{ACx} = F_{AC} \cos 45^\circ ; F_{ACy} = F_{AC} \sin 45^\circ$$

Sustituyendo en las dos ecuaciones tenemos:

$$F_x - F_{AB} \cos 25^\circ + F_{AC} \cos 45^\circ = 0$$

$$F_y + F_{AB} \sin 25^\circ + F_{AC} \sin 45^\circ = 0$$

Ahora el sistema se puede resolver, pues sólo tiene dos incógnitas. Una forma de hacerlo es la siguiente:  
Paso 1: Tomamos la primera ecuación, en la cual, considerando que  $F_x = 0$ , se obtiene:

$$F_{AB} = F_{AC} \frac{\cos 45^\circ}{\cos 25^\circ}$$

Paso 2: Sustituimos  $F_{AB}$  en la segunda ecuación, en la cual, además pasamos  $F_y$  al miembro derecho:

$$F_{AC} \frac{\cos 45^\circ}{\cos 25^\circ} \sin 25^\circ + F_{AC} \sin 45^\circ = -F_y = 3.000 \text{ N}$$

De donde se despeja:

$$F_{AC} = \frac{3000}{\frac{\cos 45^\circ}{\cos 25^\circ} \sin 25^\circ + \sin 45^\circ}$$

$$F_{AC} = 2.893 \text{ N}$$

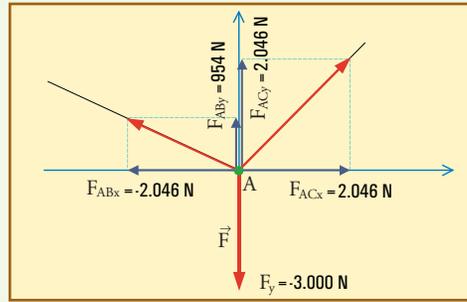
Y con este valor en la expresión de  $F_{AB}$  obtenida en el paso 1:

$$F_{AB} = 2.893 \frac{\cos 45^\circ}{\cos 25^\circ}$$

$$F_{AB} = 2.257 \text{ N}$$

Obsérvese la buena aproximación que se logró con el método gráfico.

Si ahora calculamos todas las componentes de las fuerzas, podemos hacer una interpretación interesante en el diagrama vectorial, que nos servirá para muchas situaciones parecidas:

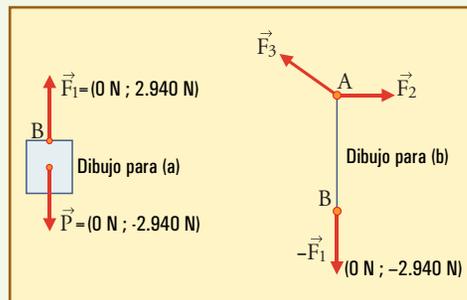


Vemos en la figura cómo se logra el equilibrio en cada eje:  $F_{ACx}$  se equilibra con  $F_{ABx}$ , mientras que  $F_y$  es equilibrada por la suma de las componentes y:  $954 + 2.046 = 3.000$ .

### ▲ Ejercicio 3.6

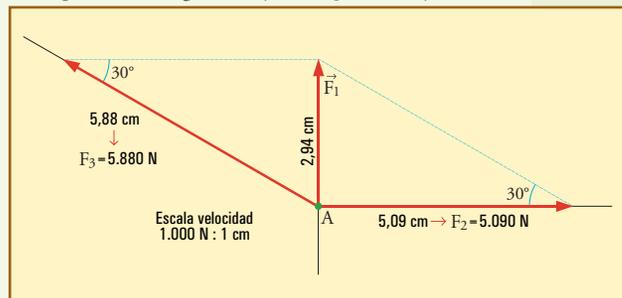
a) y b)  $P = m g \cong 2.940 \text{ N}$ ;

por equilibrio  $F_1 = P \cong 2.940 \text{ N}$ ; los valores de  $F_2$  y  $F_3$  no pueden indicarse hasta que los calculemos en el punto c); hasta aquí sólo puede saberse que su resultante debe ser  $\vec{F}_1$ .



c) Elegimos una escala 1.000 N : 1 cm, con la cual el peso, y  $\vec{F}_1$  se dibujarán de 2,94 cm de largo.

De manera que dibujamos en  $\vec{F}_1$ , y trazando paralelas a cada cuerda por su extremo (cuidado: respetar los ángulos), la descomponemos según las direcciones de éstas, y obtenemos,  $F_2 = 5.090 \text{ N}$ , y  $F_3 = 5.880 \text{ N}$  (hubiera sido equivalente la figura dibujando  $\vec{F}_1$  hacia abajo).



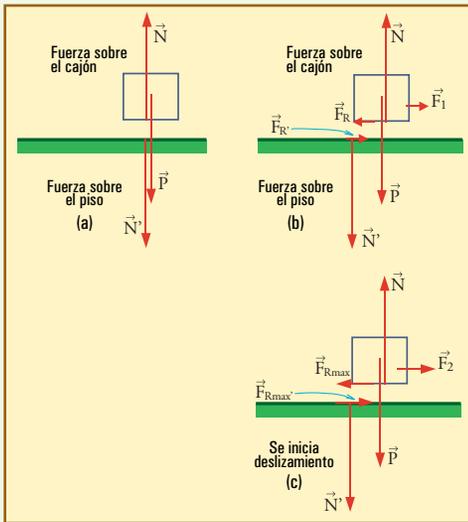
d) Podríamos plantear  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  por componentes, pero dado que vemos en la figura un triángulo rectángulo, resulta más fácil plantear relaciones trigonométricas simples:

$$\frac{F_1}{F_2} = \operatorname{tg}30^\circ \rightarrow F_2 = F_1 / \operatorname{tg} 30^\circ = F_2 = 5.092 \text{ N}$$

$$\frac{F_1}{F_3} = \operatorname{sen}30^\circ \rightarrow F_3 = F_1 / \operatorname{sen}30^\circ = F_3 = 5.880 \text{ N}$$

### ▲ Ejercicio 3.7

El procedimiento para los puntos a), b), y c), es exactamente igual a lo que se ha hecho en los ejemplos desarrollados: en a) tenemos simplemente un cuerpo apoyado sobre el piso, sin fuerzas horizontales, en b) se agregan dos fuerzas horizontales en equilibrio sobre el cuerpo, *ambas de valor  $F_1$*  (la que aplica el agente hacia la derecha, y el rozamiento,  $\vec{F}_R$ , hacia la izquierda), y en c) se repite la situación, con ambas fuerzas horizontales de valor  $F_{R\text{máx}}$  (podemos pensar que  $F_2$  supera a  $F_{R\text{máx}}$ , pero sólo lo hace levemente, por lo que desde el punto de vista práctico, son iguales).



Ahora bien, lo importante, y lo que se debe encontrar al hacer la experiencia, es que  $F_2$  es *mucho menor* que  $P$ . Por ejemplo, para este caso  $P$  vale casi 400 N, y  $F_2$  puede ser alrededor de 30 ó 50 N.

Con este ejercicio se espera revisar la idea superficial de que hay que superar al peso, para mover un cuerpo. El peso actúa en dirección vertical, y habría que superarlo para levantar al cuerpo, pero no para moverlo horizontalmente. Recordar la independencia de los movimientos y acciones en los distintos ejes. Lo que hay que superar es el rozamiento, y éste no tiene nada que ver con el peso. Puede ser proporcional a éste, pero la constante de proporcionalidad

(cuando existe) puede ser bastante menor que 1!

### ▲ Ejercicio 3.8

- a)  $k =$  pendiente  
 $k = 40 \text{ N} / 20 \text{ cm}$   
 $k = 2 \text{ N/cm}$   
 $k = 200 \text{ N/m}$

Dado que  $x$  indica desde un extremo al otro del resorte, el valor de  $x$  para el cual la fuerza es nula indica la longitud de equilibrio, o sea, 30 cm.

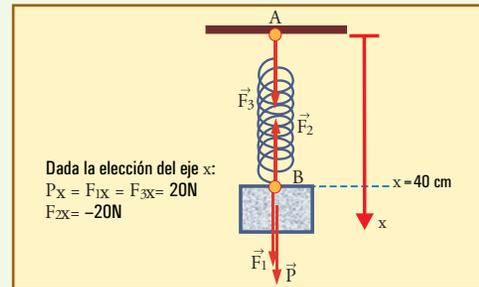
b) Dibujamos cuatro vectores verticales, todos del mismo módulo, igual a:

fuerza elástica =  $k \times (40 \text{ cm} - 30 \text{ cm})$

fuerza elástica = 20 N

Estos vectores son:  $\vec{F}_2$ , hacia arriba, es la fuerza elástica que aplica el resorte en B, como reacción frente a  $\vec{F}_1$ , con la cual el cuerpo tira de él hacia abajo en (también en B). Por otra parte,  $\vec{P}$  es la fuerza del campo gravitatorio aplicada hacia abajo en el centro del cuerpo, y  $\vec{F}_3$  es la fuerza elástica tirando hacia abajo del extremo A del resorte.

La forma correcta de decidir el valor de los módulos es:  $F_3 = F_2 = 20 \text{ N}$ , por la ley de Hooke.  $F_1 = F_2$  porque son un par acción-reacción, y  $P = F_2$  por el equilibrio de las acciones sobre el cuerpo.



c) La masa del cuerpo es  $m = P/g = 20 / 9,8 = 2,04 \text{ kg}$ .

d) Con los datos se puede calcular la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna:  $g_L \cong 1,63 \text{ N/kg} \cong (1/6) g$  (el cálculo está mostrado en la resolución del Ejercicio 3.10).

Sabemos que cuando cambiamos la ubicación del cuerpo (de la Tierra a la Luna, en este caso) no cambia la masa, y obviamente tampoco cambian las propiedades del resorte.

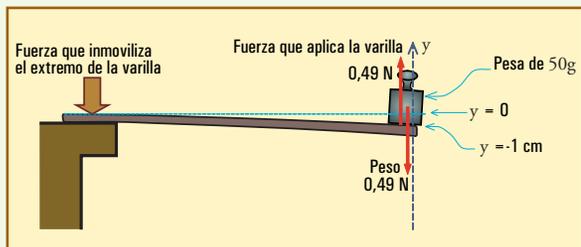
De manera que el peso en la Luna será menor:  $P' = m g_L = 3,33 \text{ N}$ , y el estiramiento del resorte también será proporcionalmente menor:  $\Delta x = 3,33\text{N} / 2(\text{N/cm}) = 1,66 \text{ cm}$ .

Dado que la longitud de equilibrio del resorte seguirá siendo 30 cm, tenemos que al suspenderle el cuerpo, en la Luna, se estirará hasta 31,66 cm.

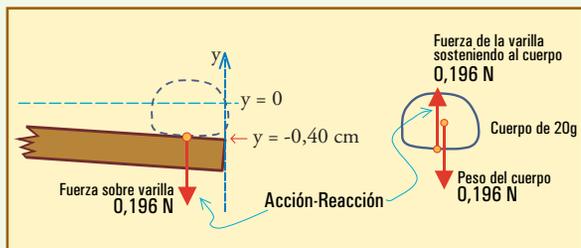
### ▲ Ejercicio 3.9

Aplicaremos la idea de que si la varilla es elástica, para deformaciones pequeñas en las cuales la curvatura no complique las ideas, el desplazamiento de la punta desde la posición de equilibrio será proporcional a la fuerza aplicada.

a) El peso del cuerpo es  $m g = 0,49 \text{ N}$ , y hace descender al extremo 1 cm, de manera que la constante elástica es:  $k = 0,49 \text{ N} / 0,01 \text{ m} = 49 \text{ N/m} = 0,49 \text{ N/cm}$ .



b) Peso del cuerpo de 20 g:  
 $0,196 \text{ N}$ ,  $|\Delta y| = F / k = 0,40 \text{ cm}$ .



### ▲ Ejercicio 3.10

a) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de cualquier planeta se calcula con la expresión:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Para el caso de la Luna

$$g_L = \frac{6,67 \times 10^{-11} (\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}) \times 7,4 \times 10^{22} \text{ kg}}{(1.738.000 \text{ m})^2} \cong 1,63 \text{ N/kg}$$

El campo gravitatorio significa la fuerza gravitatoria por unidad de masa de cualquier cuerpo situado en ese lugar. Es decir que en la Luna un cuerpo de 1 kg, pesa 1,63 N, unas 6 veces menos de lo que el mismo cuerpo pesaría en la Tierra.

b) La opción 1 es obviamente falsa, ya que el cálculo del punto anterior muestra que  $g_L$  sólo depende de la masa y el radio de la Luna. Es un concepto que no depende de la existencia de atmósfera (aunque paradójicamente la existencia de atmósfera depende de que exista un campo gravitatorio capaz de retenerla). La opción 2 también es falsa, ya que según lo dicho

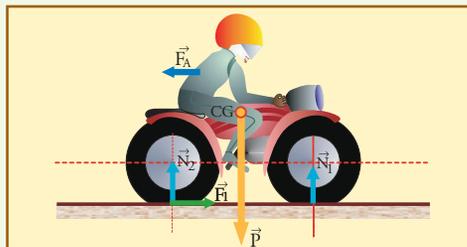
en a), en la Luna un cuerpo de 1 kg es atraído por la Luna misma, con una fuerza de 1,63 N.

La opción 3 es verdadera: la fuerza de atracción entre dos cuerpos cualesquiera está dada por la Ley de Gravitación Universal, y para el caso de dos cuerpos de 1 kg de masa cada uno, a 1 m de distancia uno de otro, se obtiene el valor  $6,7 \times 10^{-11} \text{ N}$ , independientemente de que los cuerpos estén en la Luna, en la Tierra, o en cualquier otra parte. Entre cuerpos de poca masa la fuerza es tan pequeña que es muy difícil percibirla.

## CAPÍTULO 4

### ▲ Ejercicio 4.1

a) Las fuerzas exteriores sobre el sistema considerado son:



• El peso,  $\vec{P}$ , de módulo igual a  $9,8 \times 180 = 1.764 \text{ N}$ , aplicado en el CG (es la resultante de la acción del campo gravitatorio distribuida por toda la masa del sistema),

• Las componentes normales de las reacciones del piso,  $\vec{N}_1$  y  $\vec{N}_2$ , aplicadas por el piso a las cubiertas a través de la superficie de contacto. Sus valores son tales que equilibran al peso:  $N_1 + N_2 = 1.764 \text{ N}$ . Además se ha indicado que  $N_2 > N_1$ , lo cual es un detalle que depende entre otras cosas de la ubicación del CG, y que, aunque no estamos en condiciones de calcular aún, es interesante mencionar.

• La resistencia que el aire opone al avance, distribuida en toda la superficie del sistema, cuya resultante denominamos  $\vec{F}_A$  y dibujamos ubicada en un punto cualquiera (no es fácil determinar la ubicación de ese punto, y no interesa aquí). El módulo de  $\vec{F}_A$  se obtiene de la tabla: para este sistema viajando a 70 km/h,  $F_A = 200 \text{ N}$ ,

• y por último, la fuerza impulsora,  $\vec{F}_1$ , que es la fuerza de fricción entre goma trasera y suelo, reacción de éste ante la fuerza motriz que la goma le aplica hacia atrás.

• No hay fuerza tangencial sobre la rueda delantera a menos que se apliquen los frenos.

$\vec{F}_1$  debe valer lo mismo que  $\vec{F}_A$ : 200 N, porque

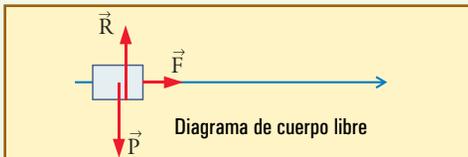
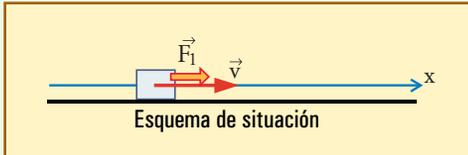
según la Ley del Impulso, para que la moto viaje a velocidad constante, como en este caso, las fuerzas deben estar en equilibrio.

b) Las fuerzas tangenciales que resultan contra el piso se muestran en el siguiente esquema de la rueda trasera,  $\vec{F}_m$  es la acción motriz de la rueda sobre el piso, empujando hacia atrás, para provocar la reacción  $\vec{F}_1$ , del piso sobre la rueda, impulsando al sistema hacia adelante. Ambas fuerzas son mutuamente acción y reacción, se deben al rozamiento entre goma y suelo, y deben valer lo mismo, o sea 200 N.



#### ▲ Ejercicio 4.2

a) Las fuerzas actuantes sobre el cuerpo son: el peso,  $\vec{P} = (0; -m g) \cong (0 \text{ N}; -392 \text{ N})$ , la reacción de la mesa, que equilibra al peso, ya que ambas son las únicas fuerzas verticales, o sea  $\vec{R} \cong (0 \text{ N}; 392 \text{ N})$ , y la fuerza aplicada por un agente externo,  $\vec{F} = (80 \text{ N}; 0 \text{ N})$ .

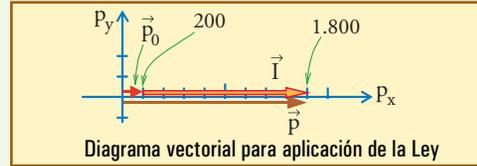
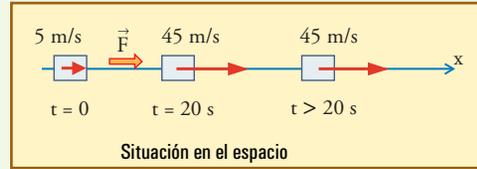


Claramente  $\vec{F}$  es también la resultante, de manera que es la única que hay que considerar para el movimiento.

b)  $\vec{I} = \vec{F} \times 20 \text{ s} = (1.600 \text{ N s}; 0 \text{ N s})$ . Se advierte que en el eje vertical todo será nulo en este problema, de manera que podemos simplificar la notación trabajando sólo con las componentes x:  $I_x = F_x \times 20 \text{ s} = 1.600 \text{ N s}$ . (El dibujo va en el diagrama en el punto c)

c) Para  $t = 0$ ,  $p_{0x} = 40 \text{ kg} \times 5 \text{ m/s} = 200 \text{ kg m/s}$ . Aplicamos la Ley: para  $t = 20 \text{ s}$ ,  $p_x = p_{0x} + I_x = 200 \text{ kg m/s} + 1.600 \text{ N s} = 1.800 \text{ kg m/s}$ .

Dado que  $p = m v$ , entonces la velocidad en  $t = 20 \text{ s}$ , es  $v_x = p_x / m = 1.800 \text{ (kg m/s)} / 40 \text{ (kg)} = 45 \text{ m/s}$ .



d) Es claro que luego de los 20 segundos, al ser nula la fuerza resultante (recordar que es un caso ideal, sin rozamiento) la velocidad debe mantenerse constante, y el cuerpo continúa indefinidamente viajando a 45 m/s.

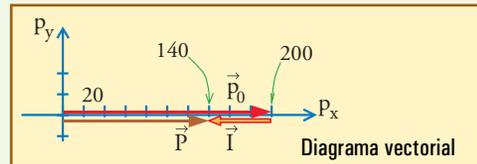
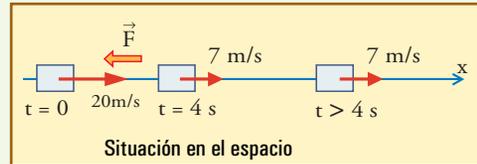
#### ▲ Ejercicio 4.3

Aprovechando lo visto en el ejercicio anterior, nos ahorraremos el análisis de las fuerzas verticales, ya que sabemos que estarán en equilibrio y no influirán en nada. También consideraremos el movimiento a lo largo de x, o sea que consideraremos sólo componentes x de los vectores.

a) Ahora tenemos: cantidad de movimiento inicial:  $p_{0x} = 20 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s} = 200 \text{ kg m/s}$ . Impulso aplicado en 4 s:  $I_x = -15 \text{ N} \cdot 4 \text{ s} = -60 \text{ N s}$ .

Aplicación de la ley:

$p_x = 200 \text{ kg m/s} - 60 \text{ N s} = 140 \text{ kg m/s}$ . Luego el movimiento continúa con velocidad constante que vale:  $v = v_x = p_x / m = 7 \text{ m/s}$ .



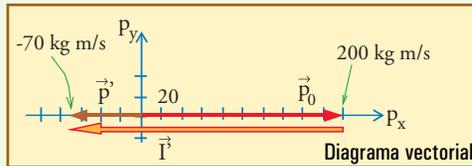
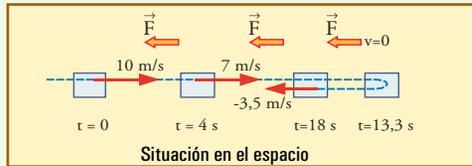
b) Para detener el cuerpo hay que mantener la fuerza aplicada hasta que p sea cero:

$p_x = p_{0x} + I_x = 0$ . Entonces  $I_x = -200 \text{ N s}$ , y para ello:  $\Delta t = I_x / F_x = -200 / (-15) = 13,3 \text{ s}$ .

c) Si continúa aplicada la fuerza después de que el

móvil se detiene, se reiniciará el movimiento en sentido contrario. Para  $t' = 18$  s podremos calcular la cantidad de movimiento  $p'_x$  tanto multiplicando la fuerza por 18 s y restándola de la cantidad de movimiento inicial, como multiplicando la fuerza por 4,7 s, que es el tiempo transcurrido desde el instante de reposo (13,3 s):

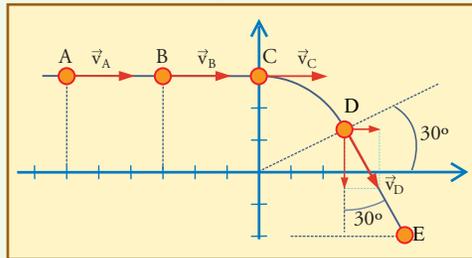
$p'_x = 200 \text{ kg m/s} - 270 \text{ Ns} = -70 \text{ kg m/s} \equiv -15 \text{ N} \times 4,7 \text{ s}$ .  
La velocidad es:  $v'_x = -70/20 = -3,5 \text{ m/s}$ .



Luego de los 18 segundos, el movimiento continuará libre de fuerzas, es decir manteniendo la velocidad de  $-3,5 \text{ m/s}$  indefinidamente (mientras dure la situación ideal).

#### ▲ Ejercicio 4.4

a) Según los datos todos los vectores velocidad tienen módulo igual a  $6 \text{ m/s}$  (excepto en E, en donde vale cero). Al dibujarlos sobre la trayectoria podremos ver más fácilmente sus componentes.

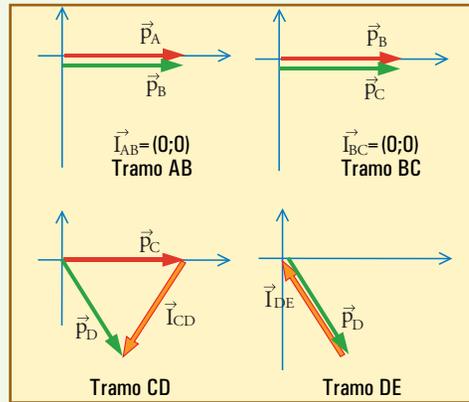


Efectivamente vemos que:  $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = (6 \text{ m/s}; 0 \text{ m/s})$ . Para las componentes de  $\vec{v}_D$  es muy fácil equivocarse, y para evitarlo es necesario observar bien la figura. En ella vemos que  $\vec{v}_D$  forma  $30^\circ$  con la dirección vertical, y no con la horizontal, de manera que:

$$\vec{v}_D = (6 \text{ sen } 30^\circ; -6 \text{ cos } 30^\circ) = (3 \text{ m/s}; -5,2 \text{ m/s}).$$

Por último,  $\vec{v}_E = (0 \text{ m/s}; 0 \text{ m/s})$ .

b) El módulo del vector impulso puede deducirse fácilmente a partir de las figuras:



En los dos primeros tramos es nulo.

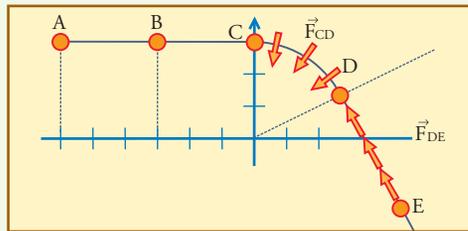
En el tramo CD, dado que entre los vectores  $\vec{p}_C$  y  $\vec{p}_D$ , que son de igual módulo, quedan  $60^\circ$ , la figura que se forma es un triángulo equilátero, y por lo tanto el impulso vale lo mismo que los otros lados, es decir,  $1.200 \text{ Ns}$ .

En DE, como se ve, el módulo del impulso debe ser igual al de  $\vec{p}_D$ , es decir,  $1.200 \text{ Ns}$ .

c) Desde A hasta C, no hay fuerza resultante actuando sobre el móvil (como corresponde a un viaje uniforme en línea recta), y por ello el impulso aplicado es nulo.

En CD, debe haber una fuerza (resultante) aplicada hacia la derecha respecto del movimiento, perpendicularmente en cada lugar, para producir la desviación sin variar la rapidez. Nótese que la orientación de los vectores fuerza dibujados es, en promedio, la del vector  $\vec{I}_{CD}$ .

Por último, en DE, debe haber fuerzas aplicadas de manera tal que la resultante actúe en sentido contrario al movimiento, alineada con la trayectoria (tal como  $\vec{I}_{ED}$ ).

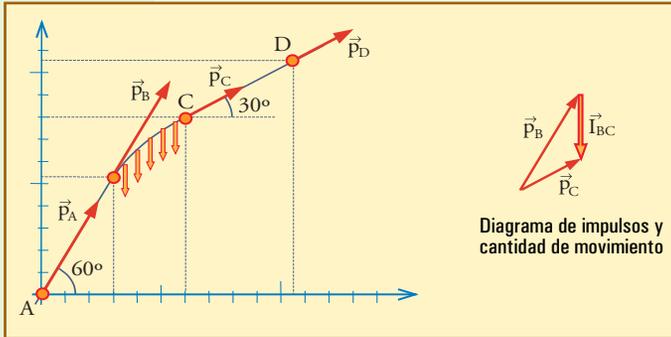


#### ▲ Ejercicio 4.5

a) En todo el tramo AB, incluidos A, y B, tenemos que la cantidad de movimiento es un vector orientado a  $60^\circ$  del eje x, con un módulo igual a  $3 \text{ kg} \times 30 \text{ m/s} = 90 \text{ kg m/s}$ . De manera que  $\vec{p}_A = \vec{p}_B = (90 \text{ cos } 60^\circ; 90 \text{ sen } 60^\circ) = (45 \text{ kg m/s}; 78 \text{ kg m/s})$ .

En todo el tramo BC hay un cambio en el vector cantidad de movimiento que inicialmente es  $\vec{p}_B$ , y finalmente,  $\vec{p}_C$ .

En todo el tramo CD, incluidos C, y D, tenemos que la cantidad de movimiento es el vector  $\vec{p}_C$  orientado a  $30^\circ$  del eje x, con un módulo igual a  $3 \text{ kg} \times 17,3 \text{ m/s} = 51,9 \text{ kg m/s}$ . De manera que  $\vec{p}_C = \vec{p}_D = (45 \text{ kg m/s}; 26 \text{ kg m/s})$ .



b) Sólo en el tramo BC hay una fuerza resultante, capaz de cambiar la cantidad de movimiento que inicialmente es el vector  $\vec{p}_B$  (que es el mismo  $\vec{p}_A$ ), hasta que llegue a ser el vector final,  $\vec{p}_C$ .

De manera que el vector impulso aplicado es  $\vec{I}_{BC} = \vec{p}_C - \vec{p}_B = (0; -52) \text{ kg m/s}$ . En la figura anterior se muestra el diagrama vectorial con esta operación, y sobre la parte BC de la trayectoria se han dibujado varios vectores representativos de la fuerza resultante, supuesta constante, que apunta como  $\vec{I}_{BC}$ .

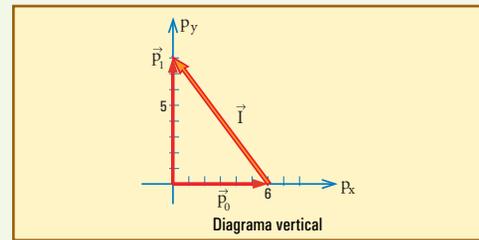
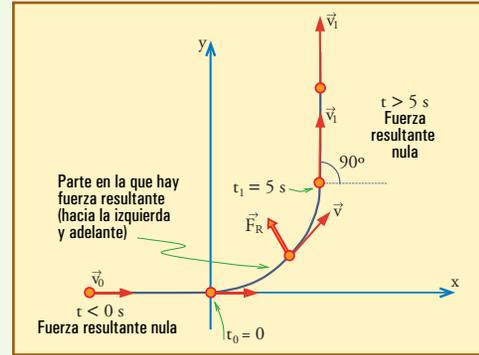
#### ▲ Ejercicio 4.6

a) La condición inicial corresponde a un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio, es decir, con resultante nula. La acción de la gravedad está siempre equilibrada por la reacción de la superficie, y ninguno de ambos contribuye a la resultante. Para el movimiento sólo deberemos considerar las fuerzas horizontales actuantes.

En este plano horizontal podemos describir el movimiento con dos ejes cartesianos, (x, y). Arbitrariamente ubicamos el eje x en la dirección del movimiento inicial, de manera tal que en  $t_0$  el móvil pase por el origen.

A partir de ese instante, durante 5 segundos la trayectoria se curvará bajo la acción de una fuerza resultante no nula (siempre en el plano horizontal x,y), que deberemos determinar, y luego continuará con un movimiento rectilíneo, en una dirección paralela al eje y. Tanto la etapa inicial (antes de  $t_0$ ), como la final (después de  $t_1$ ), serán recorridas sin la acción

de fuerza resultante (que será nula).



b) La cantidad de movimiento inicial es:  $p_0 = (6 \text{ kg m/s}; 0 \text{ kg m/s})$ , y la final,  $p_1 = (0 \text{ kg m/s}; 8 \text{ kg m/s})$ , con lo cual, aplicando la Ley del Impulso, el impulso aplicado resulta:  $\vec{I} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 (6 \text{ N s}; 8 \text{ N s})$ .

Dividiendo el impulso por el tiempo que dura la aplicación de la fuerza, se obtiene  $\vec{F} = (-1,2 \text{ N}; 1,6 \text{ N})$ . El módulo de esta fuerza es  $(1,2^2 + 1,6^2)^{1/2} = 2 \text{ N}$ .

#### ▲ Ejercicio 4.7

a) Considerando que el camino es horizontal, tendremos que las fuerzas verticales estarán equilibradas (el peso se equilibra con la reacción del piso), y por lo tanto, la resultante será horizontal, y tendrá un módulo igual a la diferencia entre el módulo de la fuerza impulsora, y el de la fuerza resistente del aire:

$$F_R = F_I - F_a = 800 \text{ N} - c S v^2$$

De manera que inicialmente ( $v = 0$ ), la fuerza resultante vale 800 N, y su valor va disminuyendo a medida que aumenta v, ya que eso hace aumentar  $F_a$ .

En cada intervalo de tiempo esta fuerza aplica un impulso  $F_R \Delta t$  que hace aumentar la cantidad de movimiento, y con ello la velocidad. Pero a medida que la velocidad aumenta tenemos que  $F_R$  se hace más pequeño, y con eso también se hace cada vez más pequeño el aumento que sufre la velocidad en  $\Delta t$ .

De manera que la situación es que: la velocidad siempre aumenta porque la resultante siempre es hacia adelante (mientras  $F_a$  no llegue al valor 800 N), pero cada vez aumenta menos en el mismo tiempo, como

lo sugiere la siguiente gráfica.



Podemos prever que a medida que  $F_a$  se acerca mucho al valor de  $F_I$ , la diferencia entre ambas, que es el módulo de la fuerza resultante, se hace tan pequeña que tiende a desaparecer, y la velocidad, aunque siempre aumenta, lo hace tan lentamente que se requiere un tiempo cada vez más largo para poder detectar un mínimo aumento.

Tenemos así que la velocidad crece siempre, pero lo hace sin llegar nunca a un valor límite que no puede alcanzar. Este valor límite es el valor  $v_{lim}$  tal que si se lo alcanzara, la resistencia del aire tendría el mismo valor de la fuerza motriz, anulándose la fuerza resultante (con lo cual ya no podría haber aumento (ni disminución) de la velocidad).

Es decir, el valor límite de la velocidad es el que se da cuando  $F_I = F_a$ :

$$F_a = c S v_{lim}^2 = 800 \text{ N}$$

$$\text{Con lo cual: } v_{lim} = \sqrt{\frac{800 \text{ N}}{0,3 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^4} \cdot 2 \text{ m}^2}} = 36,5 \text{ m/s}$$

b) Algunas de estas preguntas ya han sido contestadas; pero veamos ahora más detalles.

La velocidad final **aumenta** con la fuerza aplicada, pero **no es directamente proporcional** a ella, ya que la denominación directamente proporcional se reserva para una forma específica de aumentar, que no es la que corresponde aquí.

Diríamos que la relación entre fuerza aplicada y velocidad final es “directamente proporcional”, si el cociente  $\frac{v_{lim}}{F_I}$  se mantuviese constante para cualquier valor de  $F_I$ . Esta condición a veces se enuncia diciendo: “si con doble fuerza se consigue doble velocidad”. También es mejor decir, “si  $v_{lim}$  y  $F_I$  varían en la misma proporción” (no importa si es doble, triple, o cualquier factor).

Para este caso eso no se cumple (para convencerse probar por ejemplo con  $F_I = 1.600 \text{ N}$ , se obtendrá  $v_{lim} = 51,6 \text{ m/s}$ , que no es el doble de  $36,5 \text{ m/s}$ ).

En este caso podemos decir que *el cuadrado de la velocidad* es proporcional a la fuerza, ya que (suprimiendo subíndices)  $\frac{v^2}{F} = \frac{1}{cS}$  constante independiente de  $F$ .

También podríamos decir, extrayendo la raíz cuadrada de la expresión anterior, que  $v$  es proporcional a la raíz cuadrada de  $F$ .

Pero lo importante es no confundir cualquier relación “creciente”, denominación que se aplica a los casos en que la variable dependiente aumenta cuando lo hace la independiente, con la relación directamente proporcional, que es un caso particular de las funciones crecientes.

En cuanto a si el automóvil se detendrá cuando la fuerza de rozamiento del aire alcance los  $800 \text{ N}$  que es el valor de la fuerza impulsora, ya hemos dicho que no: esa es la situación límite, final, a la cual tiende el proceso de aumentar la velocidad. Si se la alcanza, a partir de allí la velocidad no variará más. Es decir que no se detendrá ni comenzará a detenerse, sino que, por el contrario, se habrá alcanzado la situación de velocidad máxima posible, que se va a mantener de allí en adelante.

Esa es precisamente la situación de velocidad final constante, que se alcanza cuando se equilibran las fuerzas.

#### ▲ Ejercicio 4.8

a) Si ubicamos el eje  $x$  en la dirección inicial de marcha de la pelota, entonces tendremos (utilizamos primas para indicar después del choque):

$$\vec{v} = (10 \text{ m/s}; 0 \text{ m/s}) \rightarrow \vec{p} = (20 \text{ kg m/s}; 0 \text{ kg m/s})$$

$$\vec{v}' = (-9 \text{ m/s}; 0 \text{ m/s}) \rightarrow \vec{p}' = (-18 \text{ kg m/s}; 0 \text{ kg m/s})$$

Para obtener el impulso aplicado a la pelota por fuerzas exteriores, aplicamos la Ley del Impulso:

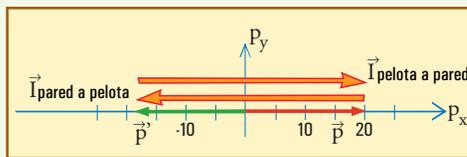
$$\vec{I}_{\text{pared a pelota}} = \vec{p}' - \vec{p} = (-18; 0) - (20; 0)$$

$$\vec{I}_{\text{pared a pelota}} = (-38 \text{ kg m/s}; 0 \text{ kg m/s})$$

(Notar que al *restar vectores opuestos*, se suman los módulos para obtener el módulo del resultado).

Dado que, por Acción y Reacción, mientras hubo contacto, la fuerza que aplicó la pared a la pelota fue exactamente opuesta a la que aplicó la pelota a la pared, tenemos que la pelota aplicó a la pared un impulso exactamente opuesto al que acabamos de calcular:

$$\vec{I}_{\text{pelota a pared}} = -\vec{I}_{\text{pared a pelota}} = (38 \text{ kg m/s}; 0 \text{ kg m/s})$$



Es decir, revisemos el procedimiento: en la Ley del Impulso aplicada a un móvil, siempre interviene el impulso que las fuerzas exteriores le aplican al móvil (en este caso pared a pelota). Luego obtenemos lo que tiene que ver con la acción del móvil sobre el exterior simplemente cambiando el signo a los vectores fuerza o impulso, es decir construyendo los vectores

opuestos a los que se obtienen de la aplicación directa de la ley.

b) Los datos propuestos con la nueva pelota más blanda nos permiten decir que antes y después del choque tenemos los mismos vectores cantidad de movimiento que en a), de manera que, aplicando una ley que es fundamental, y por lo tanto, incuestionable, obtendremos el *mismo impulso*.

Ahora bien, si la pelota es más blanda, se aplastará una distancia mayor durante el choque, demorando más tiempo en hacerlo, y luego en rebotar recuperando su forma inicial. De la fórmula  $F = I / \Delta t$ , obtenemos que, dado que el impulso es el mismo, la fuerza actuante debe ser *menor*.

#### ▲ Ejercicio 4.9

Utilizamos primas para indicar *después* del choque:

$$\vec{v} = (-10 \cos 35^\circ; 10 \sin 35^\circ) = (-8,2 \text{ m/s}; 5,7 \text{ m/s})$$

$$\rightarrow \vec{p} = (-4,10 \text{ kg m/s}; 2,85 \text{ kg m/s})$$

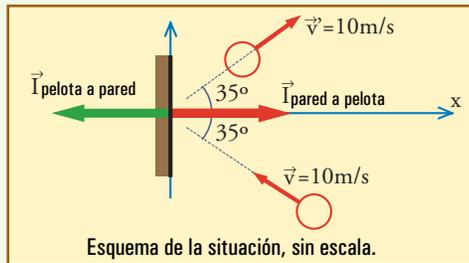
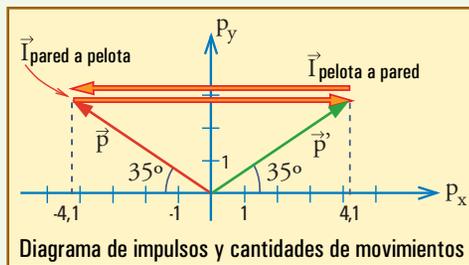
$$\vec{v}' = (10 \cos 35^\circ; 10 \sin 35^\circ) = (8,2 \text{ m/s}; 5,7 \text{ m/s})$$

$$\rightarrow \vec{p}' = (4,10 \text{ kg m/s}; 2,85 \text{ kg m/s})$$

$$\vec{I}_{\text{pared a pelota}} = \vec{p} - \vec{p}' = (4,10; 2,85) - (-4,10; 2,85)$$

$$\vec{I}_{\text{pared a pelota}} = (8,2 \text{ kg m/s}; 0 \text{ kg m/s})$$

$$\vec{I}_{\text{pelota a pared}} = -\vec{I}_{\text{pared a pelota}} = (-8,2 \text{ kg m/s}; 0 \text{ kg m/s})$$



#### ▲ Ejercicio 4.10

La opción correcta es b). Revisemos las ideas.

El movimiento es relativo, y las filmaciones toman como sistema de referencia fijo al satélite. Con respecto a este sistema, claramente la Tierra se mueve, pero este movimiento no es de ninguna manera absoluto, ya que filmado desde la Tierra se vería pasar

el satélite contra un paisaje terrestre que estaría fijo, y filmados desde la Luna, se vería en movimiento a ambos. Esto ya ha sido discutido en el texto y no necesita más comentarios.

Veamos lo de la ingravidez. Las filmaciones muestran que todos los cuerpos en el interior del satélite pueden permanecer en reposo (o al menos aproximadamente en reposo) en cualquier lugar en el que se los deje, sin necesidad de que algo o alguien los sostenga. Es decir, lo que llama la atención en este ambiente, esencialmente, es que los cuerpos no tienden a caer. No hay que sostenerlos para que se queden en cualquier lugar o posición.

O sea, es como si no hubiese gravedad. Y parece una prueba bastante concluyente.

Pero ya sabemos (ver texto en Capítulo 3, o resolución del Ejercicio 5.12) que a esa distancia de la Tierra sí debe haber gravedad (y bastante intensa), y eso nos obliga a revisar estas ideas.

Cuando un observador parado sobre el suelo ve caer un objeto, tenemos que el objeto está sometido a la acción de la gravedad, mientras que sobre el observador actúa además, la reacción del piso. Si no hubiese piso, el observador caería con el mismo movimiento del objeto, y no lo vería caer.

Ésta es la situación en la órbita: todos los cuerpos, nave, objetos y tripulantes, están sometidos únicamente a la acción de la gravedad. No hay ninguna fuerza que contrarreste o modifique esta situación (obviamente los motores de la nave no actúan mientras ésta permanece en órbita; en el mismo instante en que el motor aplicara un impulso sobre la nave, si lo hiciese, desaparecería la aparente ingravidez). Así es que todos los objetos en órbita junto con la nave están animados del mismo movimiento, con la misma velocidad, siguen la misma trayectoria, y cualquier filmación los muestra flotando en reposo, como si no hubiera gravedad (para más detalles consultar la resolución del Ejercicio 5.12).

La situación es totalmente equivalente a la de una caída libre. Imaginemos un grupo de científicos haciendo experimentos dentro de una cápsula que se deja caer libremente a lo largo de una gran distancia sin que aire ni nada que la frene, tal que se tienen varios minutos de caída absolutamente libre, y luego un sistema de frenado suave evita daños y catástrofes. En esta situación, mientras dure la caída libre, todos los cuerpos en el interior de la cápsula parecerán flotar, ya que, aunque estarán cayendo libremente, los observadores y el piso también lo harán exactamente de la misma manera.

Una filmación mostraría que todos flotan dentro de la cápsula, mientras que los objetos del exterior se mueven vertiginosamente hacia arriba!, y eso no habría probado, ni que la Tierra está subiendo, ni que se está en un lugar sin gravedad.

**Una experiencia sencilla** que cualquiera puede hacer para enriquecer estas ideas:

Perforemos una botella plástica en la pared lateral, cerca del fondo con un clavo caliente.

Llenemos la botella con agua, manteniendo tapado el orificio con un dedo.

Manteniendo la botella aproximadamente vertical (y sin colocarle tapa), destapemos el orificio permitiendo que brote un chorrito de agua. La velocidad con que brota el agua depende de la altura de agua por encima de él, y es una manifestación de la presión que se produce dentro de la botella por efecto del peso del agua, es decir, es una manifestación del campo gravitatorio.

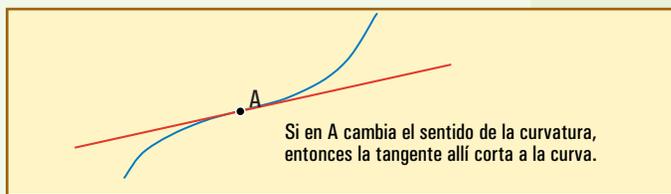
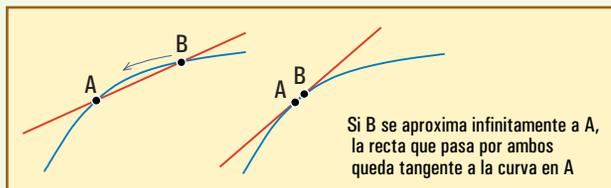
Enseguida soltemos la botella (que no se termine el agua). Veremos que, mientras dura la caída, el agua no sale por el orificio! Ha desaparecido la presión interior, como si hubiera desaparecido la gravedad. Pero no ha desaparecido, sino que, simplemente, la botella ya no sostiene al agua: cae con ella.

Lo mismo ocurre si lanzamos la botella hacia arriba: tanto durante la subida como durante la bajada, parecerá haber desaparecido la gravedad, y el agua no saldrá por el orificio.

#### Comentario al ejercicio sobre las tangentes.

Una recta que toca a una curva en un solo punto bien puede ser secante y no tangente, de manera que la primera definición es incorrecta, y conceptualmente muy pobre. El verbo “tocar” puede sonar como una especie de sugerencia de aproximación suave, pero formalmente sólo significa que tienen un punto en común (ya sea cortando o no).

La segunda definición muestra una intención de plantear conceptos más adecuados, pero no lo logra, porque sería válida sólo para ciertas curvas: fallaría en los puntos de inflexión (donde cambia el sentido de la curvatura), y también en los casos en que en el punto de tangencia la curva tuviese un segmento (pequeño o no) rectilíneo.



El procedimiento formal para definir la tangencia a una curva en un punto A, consiste en tomar una secante que pase por A y por B, e ir aproximando gradualmente B hasta que esté infinitamente próximo a A. Pero la idea esencial *no es que al final quede un único punto de contacto* (aunque ello pueda ser cierto casi siempre en las situaciones típicas), sino que la dirección de la recta quede *definida por los puntos infinitamente próximos* al punto de tangencia.

La idea que necesitamos para nuestros razonamientos en Física es la de una recta que indique la dirección del movimiento en el instante considerado, y ello significa la recta que se confunde lo mejor posible con la curva en el punto o zona de tangencia. Es decir que lo importante no es el contacto en un único punto, sino que recta y curva compartan *lo más aproximadamente que sea posible* la región de tangencia.

Esto nos dice que las opciones (3) y (4) son correctas.

## CAPÍTULO 5

### ▲ Ejercicio 5.1

a)  $\Delta x = \text{área} = \frac{1}{2} 2 \times 10^{-3} \text{ s} \times 1000 \text{ m/s} = 1 \text{ m.}$

b)  $F_x = \Delta p_x / \Delta t$

$$F_x = (0 - 0,020 \text{ kg} \times 1000 \text{ m/s}) / 2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

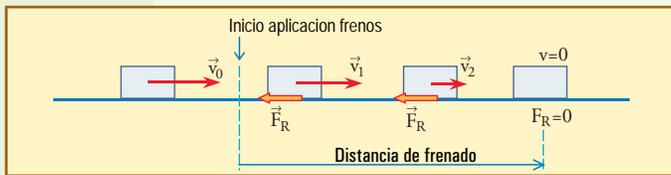
$$F_x = -20 \text{ kgm/s} / 2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$F_x = -10^4 \text{ N} \rightarrow F = 10^4 \text{ N}$$

c) El impulso comunicado por el proyectil al blanco, por Acción y Reacción, es el vector opuesto al que corresponde al impulso aplicado al proyectil para frenarlo, y por lo tanto es igual a la cantidad de movimiento inicial del proyectil: vector en la dirección inicial de avance, de módulo 20 kgm/s.

### ▲ Ejercicio 5.2

a) No se dibujan las fuerzas verticales, peso y reacción normal del piso, porque están siempre equilibradas y no intervienen directamente en el problema (intervendrían para determinar el valor posible de la fuerza de frenado (rozamiento piso-neumático), si fuera necesario, pero ésta es dato).



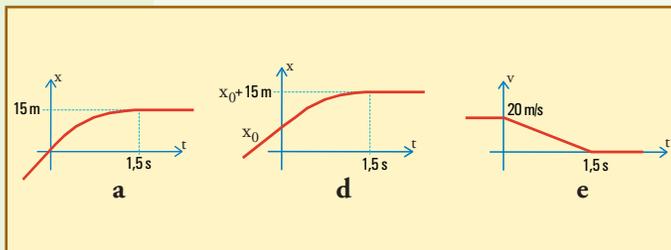
b) Este es un movimiento bajo una fuerza constante, es decir, uniformemente variado. Podemos aplicar  $d = v_m \Delta t$ .

La velocidad media para este movimiento es el promedio entre la inicial,  $v_0 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$ , y la final, cero. Es decir,  $v_m = 10 \text{ m/s}$ .

El tiempo que dura el frenado puede obtenerse de la Ley del Impulso:  $\Delta t = m v_0 / F = 900 \times 20 / 12.000 = 1,50 \text{ s}$ . De manera que resulta  $d = 10 \times 1,5 = 15 \text{ m}$ .

También se podría haber aplicado  $d = v^2 / (2 a)$ , con  $a = F / m = 12.000 / 900 = 13,33 \text{ m/s}^2$ .

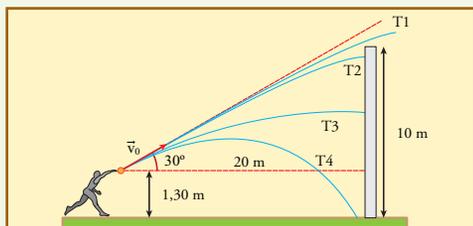
c) Los correctos podrían ser:



En los tres gráficos  $t = 0$  es el instante en que comienzan a aplicarse los frenos. En (d) los frenos comienzan a aplicarse en cualquier lugar  $x_0$ , mientras que en (a) se ubica el origen,  $x = 0$ , en ese lugar.

### ▲ Ejercicio 5.3

a) No se piden dibujos, pero haremos un esquema porque siempre es necesario para ordenar las ideas. En el siguiente esquema se muestran las trayectorias posibles del proyectil: T1 pasa por encima del muro sin tocarlo, T2 choca con el muro aún subiendo, T3 choca bajando, es decir después de pasar por el punto más alto, y T4 no llega al muro porque choca antes con el piso. Aún no sabemos cuál corresponderá a este caso.



Sabemos que éste es un caso en el cual tenemos movimiento horizontal uniforme, y movimiento vertical uniformemente variado con aceleración igual a  $g$  (hacia abajo).

Esto significa que conviene calcular las componentes de la velocidad inicial en las direcciones horizontal ( $x$ ) y vertical ( $y$ ), y trabajar con ellas para cada movimiento.

Calculemos  $\vec{v}_0$ , que es la velocidad final del proceso de impulsar la piedra, y a la vez velocidad inicial de la trayectoria libre hacia el muro. Dado que antes de ser impulsada la piedra está en reposo, el impulso que se le da,  $4 \text{ N}\cdot\text{s}$  en la dirección indicada, es igual a la cantidad de movimiento  $\vec{p}_0$  que adquiere, y por lo tanto, el módulo de la velocidad con la que abandona la mano es:  $v_0 = 4 \text{ N}\cdot\text{s} / 0,2 \text{ kg} = 20 \text{ m/s}$ .

De manera que  $v_{0x} = 20 \cos 30^\circ \cong 17,3 \text{ m/s}$

$v_{0y} = 20 \sin 30^\circ \cong 10 \text{ m/s}$ .

Ahora, sabiendo que el movimiento en  $x$  es uniforme, podemos calcular el tiempo que demora la piedra en llegar al muro,  $\Delta t = 20 / 17,3 \cong 1,16 \text{ s}$ , para luego calcular qué ha ocurrido en ese tiempo respecto del eje  $y$ .

Sabemos que en el eje  $y$  el movimiento será de subida y bajada. Tomamos  $t = 0$  en el instante de la partida, y el valor  $y = 0$  en el piso, de manera que la altura en el momento de llegar al muro será:

$$y_{\text{muro}} = 1,30 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_{\text{muro}} = 1,3 + 10 \times 1,16 - 9,8 \times 1,16^2 / 2 \cong 6,3 \text{ m}$$

Este resultado nos indica que la trayectoria fue T2 o T3.

b) Para saber cómo es el choque, y poder decir algo de la fuerza o el impulso que se aplica en él, debemos calcular el vector velocidad o el vector cantidad de movimiento del proyectil en el instante previo al impacto ( $t = 1,16 \text{ s}$ ).

Sabemos que la velocidad en  $x$  se mantiene constante, siempre igual a  $v_{0x}$ , es decir a  $17,3 \text{ m/s}$ . En el eje  $y$ , en cambio, por acción de la gravedad,

$$v_y = v_{0y} - g t$$

$$v_y = 10 - 9,8 \times 1,16 \cong -1,37 \text{ m/s} \text{ (el signo negativo nos indica que estamos en la trayectoria T3).}$$

De manera que el choque ocurre con

$$\vec{v} \cong (17,3 \text{ m/s}; -1,4 \text{ m/s}), \text{ o, multiplicando por } m,$$

$$\vec{p} \cong (3,46 \text{ kg m/s}; -0,27 \text{ kg m/s}).$$

Ahora bien, en general hay formas bastantes típicas de rebotar: el rebote tiende a ser bastante simétrico con respecto a la normal a la superficie (del muro en este caso), y con pérdida de alguna fracción del módulo de la velocidad, mayor o menor según los materiales constituyentes de los cuerpos que chocan. En función de la cantidad de movimiento inmediata-

mente después de rebotar,  $\vec{p}$ , podremos aplicar la Ley del Impulso para obtener  $\vec{I} = \vec{p}' - \vec{p}$ . Esto sirve tanto para determinar el impulso aplicado por el muro a la piedra, como el aplicado por la piedra al muro (ya que sólo hay que cambiarle signos).

Ahora bien, al tratar de hacer la resta  $\vec{p}' - \vec{p}$ , nos encontramos que:

- La componente perpendicular a la pared ( $p_x$  en este caso), cambia de signo (porque el cuerpo ha rebotado), de manera que la resta se transforma en una suma:  $|p'_x - p_x| = |p'_x| + |p_x|$ . Dado que  $p'_x$  puede valer cero si no hay rebote, o llegar a ser, en valor absoluto, igual que  $p_x$ , tendremos que  $I_x$ , en valor absoluto puede ir desde  $p_x$  hasta  $2 p_x$  (para nuestro ejemplo, desde 3,46 hasta casi 7 kg m/s).

- La componente paralela a la pared, por otra parte, no cambia de signo, ya que si el cuerpo incide desde un lado de la normal a la superficie, rebota hacia el otro lado de la normal, es decir, conservando el signo de esta componente paralela. En consecuencia la diferencia  $p'_y - p_y$  es una resta de cantidades parecidas, que siempre da un valor pequeño para  $I_y$ .

Es decir que aproximadamente, el impulso se puede determinar bastante bien, sin saber detalles exactos del choque. Para este caso, en una aproximación gruesa,  $\vec{I} \cong (5 \text{ ó } 6 \text{ kg m/s} ; 0 \text{ kg m/s})$ .

En cambio, hablar de la fuerza aplicada es más difícil, porque requiere que antes se conozca el impulso, y que además se sepa el tiempo que dura el contacto, ya que entonces  $F = I / \Delta t$ .

Todo esto se puede corroborar bastante revisando los ejercicios 4.8 y 4.9, en los que se puede calcular bien el impulso aplicado, que cumple con todo lo dicho aquí, pero queda claro que para iguales formas de rebotar actuará siempre el mismo impulso, con fuerzas más grandes si los cuerpos son más duros, y viceversa.

#### ▲ Ejercicio 5.4

a) La gráfica dice que inicialmente el cuerpo viaja hacia arriba con la máxima velocidad ( $\cong 20$  m/s), la cual va disminuyendo. A los 2 segundos deja de subir: se detiene por un instante, y luego la velocidad se hace negativa, es decir, el cuerpo comienza a descender, con una velocidad que crece negativamente hasta  $t = 4$  s. Es claro que estamos describiendo un cuerpo lanzado hacia arriba, que llega al punto más alto en 2 s, y cae, llegando al suelo presumiblemente en  $t = 4$  s. Si además calculamos la aceleración resulta  $\Delta v / \Delta t \cong -10 \text{ m/s}^2$ , valor muy cercano a  $g$ , que corresponde perfectamente con la opción 2.

b) La fuerza neta actuante sobre el móvil, ha sido

constante, ya que ha producido una variación uniforme en la velocidad, y orientada hacia abajo, porque la pendiente de la gráfica es negativa (y por todo lo dicho antes).

#### ▲ Ejercicio 5.5

a) Ya sabemos que estos vectores deben ubicarse tangencialmente en cada punto. Calculemos sus módulos.

En AB el movimiento es variado. La velocidad vale cero en A, y en B alcanza el valor  $v_B$  que mantendrá constante hasta D. Desde allí la velocidad disminuye hasta ser cero en E.

De manera que sólo faltaría calcular el valor  $v_B$ , que sería igual a  $v_C$  y a  $v_D$ . Pero sabemos que este valor también es igual a la velocidad media en BC, ya que en ese tramo el movimiento es uniforme.

Entonces:  $v_B = \frac{30 \text{ m}}{t_C - t_B} = \frac{30 \text{ m}}{7,5 \text{ s}} = 4 \text{ m/s}$  (aunque no se pregunta podemos verificar que en AB la velocidad media ( $40 \text{ m} / \Delta t_{AB}$ ) resulta la mitad de este valor, como corresponde al promedio entre  $v_A$  y  $v_B$ ).

Ahora podemos expresar cada vector velocidad como par ordenado (ver Fig. A y B):

$\vec{v}_A = \vec{v}_E = (0 \text{ m/s} ; 0 \text{ m/s})$  ;  $\vec{v}_B = \vec{v}_C = (4 \text{ m/s} ; 0 \text{ m/s})$  ;  
 $\vec{v}_D = (0 \text{ m/s} ; -4 \text{ m/s})$ .

b) El tramo CD se recorre uniformemente en un lapso  $\Delta t = \text{distancia} / v$ . La distancia es la longitud del arco CD,  $d_{CD} = \frac{1}{2} \pi R = \pi \times 30 \text{ m} / 2 = 47,1 \text{ m}$ , de manera que el tiempo demorado es:

$\Delta t_{CD} = 47,1 / 4 = 11,8 \text{ s}$ , y el instante en que llega el móvil a D es:  $t_D = 11,8 + 27,5 = 39,3 \text{ s}$ .

Para el tramo DE el movimiento es uniformemente variado, por lo cual  $v_m = \frac{1}{2} (v_D + v_E) = 2 \text{ m/s}$ ,

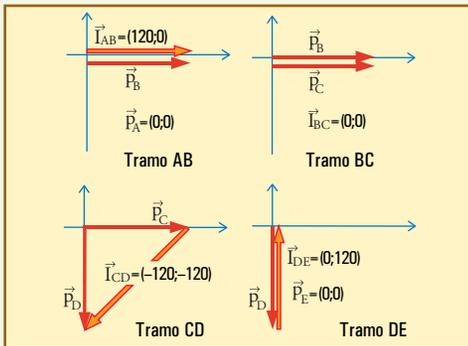
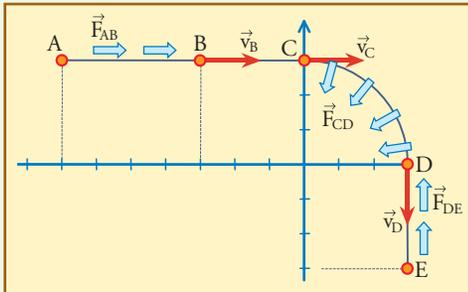
y  $\Delta t = \text{distancia} / v_m = 30 / 2 = 15 \text{ s}$ .

De manera que  $t_E = 39,3 + 15 = 54,3 \text{ s}$ .

c) En el tramo AB debe haber una fuerza neta alineada con la trayectoria (tangencial), hacia adelante, para hacer que se inicie el movimiento y que aumente la velocidad. El módulo de esta fuerza, según la Ley del Impulso, debe valer  $m v_B / \Delta t = 30 \times 4 / 20 = 6 \text{ N}$ . En el tramo BC la fuerza resultante debe ser nula, dado que el movimiento es rectilíneo y uniforme (no hay cambio en el vector  $\vec{p}$ ).

En el tramo CD debe haber una fuerza resultante hacia la derecha para producir la desviación, y sin componente tangencial, para que el módulo de la velocidad se mantenga constante. Además el módulo de esta fuerza debe ser constante para que la curva sea uniforme (arco de circunferencia). Es decir, esta fuerza debe ser la centrípeta, de valor  $m v^2 / R = 30 \times 4^2 / 30 = 16 \text{ N}$ .

En el tramo DE debe haber una fuerza neta alineada con la trayectoria (tangencial), hacia atrás, para producir el frenado. El módulo de esta fuerza, según la Ley del Impulso, debe valer  $m v_D / \Delta t = 30 \times 4 / 15 = 8 \text{ N}$ .



Vemos cómo todos los impulsos obtenidos, representados con flechas huecas, se relacionan directamente con las fuerzas halladas en c).

### ▲ Ejercicio 5.6

a) El impulso aplicado por  $F$  en los 12 segundos mostrados vale tanto como el área de la gráfica:

$$I(0 \rightarrow 12s) = \left(\frac{1}{2}\right) 9.000 \text{ N} \times 12 \text{ s} = 54.000 \text{ N}\cdot\text{s}$$

Como el móvil parte del reposo, y ésta es la fuerza resultante, éste debe ser también el valor de la cantidad de movimiento del móvil al final del intervalo, de manera que la velocidad debe ser:

$$v = 54.000 \text{ N}\cdot\text{s} / 1.000 \text{ kg} = 54 \text{ m/s}$$

b) Éste es un movimiento rectilíneo con velocidad siempre creciente en los primeros 12 s, aunque la fuerza disminuya después de  $t=6s$ , ya que siempre actúa en el mismo sentido que es el del movimiento. Atención porque es muy fácil confundirse: una cosa es que disminuya la fuerza que se aplica, y otra es lo que sucede con la velocidad!

La velocidad aumenta más rápidamente cerca de  $t=6s$ , que es donde la fuerza es mayor. Luego sigue aumentando pero más lentamente, hasta que en  $t=12s$  el movimiento (siempre rectilíneo) se hace uni-

forme, manteniendo el valor de la velocidad final adquirida, ya que desaparece la fuerza. La gráfica correspondiente a estas afirmaciones es la que se muestra al final.

c) El método seguido en (a) para calcular la velocidad final, puede aplicarse, con un poco de paciencia, para calcular la velocidad en cualquier instante. Por ejemplo, podemos calcular la velocidad cada 2 s, y obtenemos los valores que se muestran en la siguiente tabla, y graficados a continuación.

Intervalo (s)	Área (kg m / s)	$\Delta v$ (m / s)	$v_{\text{final}}$ (m / s)
0 → 2	3.000	3	3
2 → 4	9.000	9	12
4 → 6	15.000	15	27
6 → 8	15.000	15	42
8 → 10	9.000	9	51
10 → 12	3.000	3	54
12 → $t > 12$	0	0	54



Nótese que si bien no hemos podido expresar la velocidad como una función del tiempo, siempre podemos calcular su valor en cualquier instante.

### ▲ Ejercicio 5.7

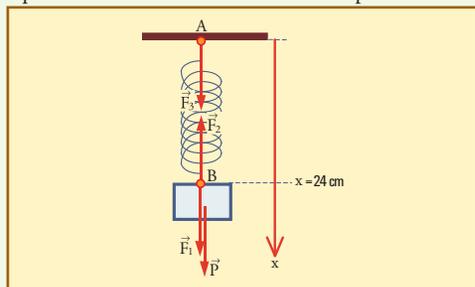
a) Dibujamos cuatro vectores verticales, todos del mismo módulo, igual a:

$$\text{fuerza elástica} = k \times (0,24 \text{ m} - 0,15 \text{ m}) = 36 \text{ N}$$

Estos vectores son:  $\vec{F}_2$ , hacia arriba, es la fuerza elástica que aplica el resorte en B, como reacción frente a  $\vec{F}_1$ , con la cual el cuerpo tira de él hacia abajo en (también en B). Por otra parte,  $\vec{P}$  es la fuerza del campo gravitatorio aplicada hacia abajo en el centro del cuerpo, y  $\vec{F}_3$  es la fuerza elástica tirando hacia abajo del extremo A del resorte.

La forma correcta de decidir el valor de los módulos es:  $F_3 = F_2 = 36 \text{ N}$ , por la ley de Hooke.  $F_1 = F_2$

porque son un par acción-reacción, y  $P = F_2$  por el equilibrio de las acciones sobre el cuerpo.



b) La masa del cuerpo es  $m = P / g = 36 / 9,8 = 3,67 \text{ kg}$ .

c) La respuesta correcta es la c3), dado que la posición de equilibrio,  $x = 24 \text{ cm}$ , tiene que ser el punto medio de la oscilación.

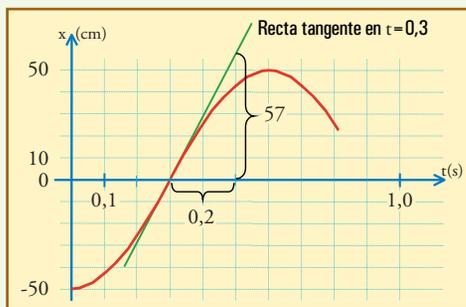
Si queremos elaborar un poco más la explicación, podemos decir que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo  $\vec{F}_2 + \vec{P}$  (en la figura anterior, cuyo módulo vale  $F_2 - P$ ), es una fuerza que actúa hacia arriba desde que soltamos al cuerpo en  $x = 30 \text{ cm}$ , hasta que el cuerpo llega a la posición de equilibrio,  $x = 24 \text{ cm}$ . Así tenemos que a lo largo de  $6 \text{ cm}$  ha actuado una fuerza *neta* hacia arriba impulsando al cuerpo. Aunque esta fuerza ha ido disminuyendo, siempre ha actuado hacia delante, porque  $F_2 > P$ , de manera que la velocidad ha aumentado hasta ese punto. Y en ese instante en que se anula la fuerza neta (justo  $F_2 = P$  en  $x = 24 \text{ cm}$ ), el cuerpo está con su máxima velocidad. Claramente no puede detenerse allí. Seguirá avanzando hacia arriba en contra de la fuerza neta que comenzará a actuar hacia abajo ( $F_2$  será menor que el peso mientras  $x$  sea menor que  $24 \text{ cm}$ ), y por lo que sabemos de estas oscilaciones, el cuerpo avanzará  $6 \text{ cm}$  más, después de la posición de equilibrio, es decir hasta  $x = 18 \text{ cm}$ .

### ▲ Ejercicio 5.8

a) En la gráfica podemos observar directamente que hay medio período desde  $t = 0$  hasta  $t = 0,6$ , de manera que  $T = 1,20 \text{ s}$ , y  $f = 1/T \cong 0,83 \text{ 1/s}$  ( $0,83$  ciclos/s).

b) En  $t = 0,2$  leemos  $x_1 = -25 \text{ cm}$ , y en  $t = 0,3$  leemos  $x_2 = 0,0 \text{ cm} \rightarrow \Delta x = 25 \text{ cm} \rightarrow v_m = \Delta x / \Delta t$   
 $v_m = 250 \text{ cm/s}$   
 $v_m = 2,5 \text{ m/s}$ .

c) Para esto trazamos la tangente en  $t = 0,3 \text{ s}$ , que es el punto de máxima pendiente, y determinamos su pendiente.



Vemos que los valores que pueden leerse son:

$\Delta x / \Delta t = 57 \text{ cm} / 0,2 \text{ s} = 285 \text{ cm/s} = 2,85 \text{ m/s}$ . Éste debe ser el valor de la velocidad instantánea máxima, que corresponde al instante  $t = 0,3 \text{ s}$  (y también a cualquier instante en el que el móvil pase por la posición de equilibrio). Vemos que hemos obtenido un valor un poco superior al de la velocidad media en la décima de segundo anterior (entre  $t = 0,2$  y  $0,3$ ), lo cual es muy razonable.

Comparemos con el valor dado por la expresión teórica:  $\omega \times \text{amplitud} = 2 \pi f \times 50 \text{ cm} \cong 262 \text{ cm/s}$ .

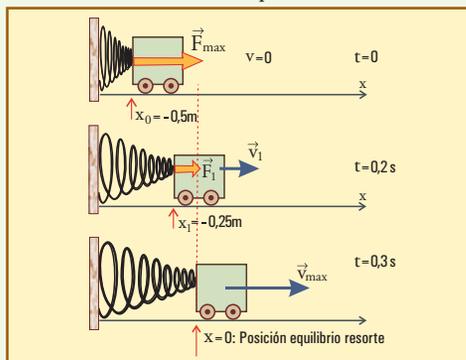
Vemos que hemos trazado la tangente con la inclinación un poquito exagerada, pero está dentro de lo razonable (10% de diferencia).

d) La fuerza aplicada por el resorte está dada por  $F_x = -kx$ . En  $t = 0,2 \text{ s}$  tenemos  $F_{1x} = -20 \times (-0,25) = 5 \text{ N}$  (signo más porque es en sentido positivo).

En  $t = 0,3 \text{ s}$ , tenemos  $x_2 = 0$ , con lo cual  $F_2 = 0$ .

e) Para  $t = 0,2 \text{ s}$ , tenemos  $x_1 = -0,25 \text{ m}$ , y  $v_x$  positiva. Dado que acabamos de calcular que  $F_{1x}$  (correspondiente a ese instante) es positiva, eso significa que la fuerza está haciendo aumentar la velocidad  $\rightarrow$  opción III. Esto está de acuerdo con el hecho de que una décima de segundo después la velocidad ha aumentado, llegando a su valor máximo.

Para  $t = 0,3 \text{ s}$ , tenemos fuerza nula, como acabamos de ver  $\rightarrow$  opción II. Aunque no se pida, siempre es útil ver estas cosas en un esquema:



### ▲ Ejercicio 5.9

a) Según la gráfica el período es  $T = 0,60$  s. Con este valor, sabiendo la constante elástica del resorte, aplicamos  $\omega^2 = k / m$ , para despejar

$$m = k / \omega^2 = k T^2 / 4 \pi^2 \cong 0,182 \text{ kg.}$$

b) Algo fácil es definir instante inicial al que corresponde al primer máximo:  $t_0 = 0,20$  s;  $x_0 = 3$  cm;  $v_0 = 0$  m/s.

Otra posibilidad un poco más complicada es:

$t_0 = 0$  s;  $x_0 \cong -1,6$  cm;  $v_0 =$  valor positivo que habría que calcular a partir de la pendiente de la gráfica en ese lugar (se obtiene aproximadamente 27 cm/s).

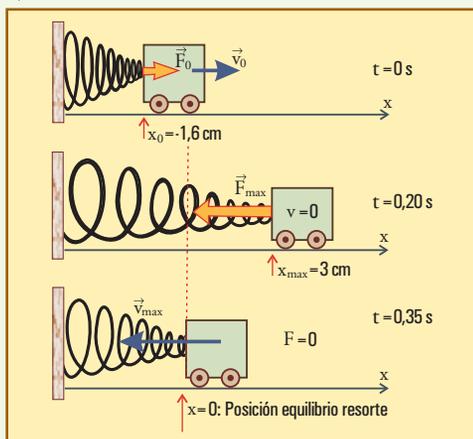
c) Los instantes de fuerza neta nula son los que corresponden a los pasajes por la posición de equilibrio,  $x = 0$ , es decir:  $t = 0,05$  s,  $0,35$  s,  $0,65$  s, etc.

Los instantes de fuerza neta máxima son los que corresponden a los pasajes por las máximas elongaciones, es decir:  $t = 0,20$  s,  $0,50$  s,  $0,80$  s, etc.

Los instantes de velocidad máxima son los de máxima pendiente en la gráfica, es decir los que corresponden a los pasajes por la posición de equilibrio,  $x = 0$ , es decir:  $t = 0,05$  s,  $0,35$  s,  $0,65$  s, etc.

Los instantes donde el cuerpo se detiene son los los pendiente nula en la gráfica, es decir los de máxima elongación:  $t = 0,20$  s,  $0,50$  s,  $0,80$  s, etc.

d)



e) Una forma de calcular la velocidad máxima es por medio de la pendiente de la gráfica (ver ejercicio anterior). Se obtiene aproximadamente un valor de 32 cm/s. Otra forma es aplicando

$$v_{\text{máx}} = \omega x_{\text{máx}} = (2 \pi / 0,60 \text{ s}) \times 3 \text{ cm} = 31,4 \text{ cm/s.}$$

Vemos que hay una excelente coincidencia.

f) Entre  $0,05$  s y  $0,35$  s. Esto es entre dos pasajes sucesivos por la posición de equilibrio, o sea, con la velocidad máxima, primero positiva, y luego negativa. Tenemos  $p_x(0,05) = 0,182 \text{ kg} \cdot 31,4 \text{ cm/s} = 0,0572 \text{ kg m/s}$ , y  $p_x(0,35) = -0,0572 \text{ kg m/s}$ .

Entonces  $I_x = -0,0572 \text{ kg m/s} - 0,0572 \text{ kg m/s} = -0,115 \text{ N}\cdot\text{s}$ . Entre  $0,35$  s y  $0,50$  s. Esto es entre un pasaje por la posición de equilibrio, y la subsiguiente detención en la máxima elongación.

Tenemos  $p_x(0,35) = -0,0572 \text{ kg m/s}$ , y  $p_x(0,50) = 0$ . Entonces  $I_x = 0 - (-0,0572 \text{ kg m/s}) = +0,0572 \text{ N}\cdot\text{s}$ .

Entre  $0,50$  y  $0,80$  s. Son dos instantes de velocidad nula, por lo tanto  $I_x = 0$  para este intervalo (hay un impulso positivo para llevar el móvil a la máxima velocidad, y luego el mismo negativo para frenarlo: el impulso total en el intervalo resulta nulo, aunque haya habido un cambio neto de posición).

Para la fuerza media desde una posición de equilibrio hasta volver a ella, consideramos el intervalo desde  $0,05$  s hasta  $0,35$  s (en valor absoluto):

$$F_m = I / \Delta t = 0,115 / 0,3 = 0,383 \text{ N.}$$

El valor máximo es  $F_{\text{máx}} = k x_{\text{máx}} = 20 \times 0,03 = 0,60 \text{ N}$ . En este proceso la fuerza va desde  $0$  N hasta un valor máximo de  $0,6$  N y vuelve a  $0$  N. No esperamos que el valor medio sea el promedio entre  $0$  y  $0,6$  (que sería  $0,3$  N), porque en este movimiento la fuerza no varía uniformemente. El valor  $0,383$ , resulta perfectamente esperable.

### ▲ Ejercicio 5.10

a) Sabemos que éste es un movimiento con aceleración constante en el eje vertical ( $y$ ), de valor  $a_y = -g = -9,8 \text{ ms}^{-2}$ . De manera que  $y_{\text{máx}} = \frac{1}{2} v_0^2 / g = 1,653 \text{ m}$  (consideramos la velocidad final igual a cero).

Sabiendo que la velocidad media es  $180/2 = 90 \text{ m/s}$ , el tiempo demorado es  $1,653/90 = 18,4$  s.

También puede calcularse el tiempo para que la velocidad llegue a cero, usando que varía linealmente:  $v_0/g = 18,4$  s.

b) Si el proyectil es lanzado oblicuamente, consideramos el movimiento como superposición de: un movimiento uniforme en  $x$ , con velocidad  $v = v_0 \cos 50^\circ$ , y un movimiento uniformemente variado en  $y$ , con velocidad inicial  $v_{0y} = v_0 \sin 50^\circ = 138 \text{ m/s}$ .

Con este dato, hacemos los mismos cálculos del punto anterior:  $y_{\text{máx}} = \frac{1}{2} v_{0y}^2 / g = 970 \text{ m}$ .

Tiempo hasta altura máxima:  $v_{0y}/g = 14,1$  s.

La velocidad en el punto más alto ahora ya no es cero, como lo era en a), porque aunque se anula  $v_y$ , la velocidad conserva su componente  $x$ :

$$v(y_{\text{máx}}) = v_{0x} = v_0 \cos 50^\circ = 115,7 \text{ m/s}$$

### ▲ Ejercicio 5.11

a) Para esto calculamos la componente  $y$  de  $v_0$ :

$$v_{0y} = v_0 \sin 60^\circ = 26 \text{ m/s.} \rightarrow h_B = \frac{1}{2} v_{0y}^2 / g = 34,4 \text{ m.}$$

b) En todos los puntos tenemos

$v_x = v_{0x} = 30 \cos 60^\circ = 15 \text{ m/s}$ . En cuanto a  $v_y$ , aplicamos  $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$ .

Para el punto A,  $\Delta y = 34,4 / 2 = 17,2 \text{ m} \rightarrow v_{Ay} = 18,4 \text{ m/s}$ .

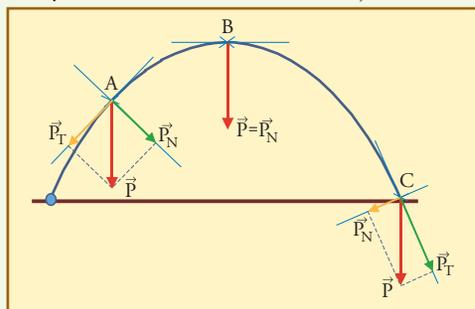
Para el punto B,  $\rightarrow v_{By} = 0 \text{ m/s}$ .

Para el punto C,  $\Delta y = 0 \rightarrow v_{Cy} = -v_{0y} = -26 \text{ m/s}$ .

De manera que  $\vec{V}_A = (15 \text{ m/s}; 18,4 \text{ m/s})$ ;

$\vec{V}_B = (15 \text{ m/s}; 0 \text{ m/s})$ ;  $\vec{V}_C = (15 \text{ m/s}; -26 \text{ m/s})$ .

c) La fuerza resultante sobre la piedra es el peso,  $\vec{P}$ , que es un vector constante vertical hacia abajo. Podemos ver que la componente tangencial es hacia atrás antes de B, haciendo disminuir la velocidad a medida que el cuerpo se acerca al punto más alto, nula allí, y hacia delante en la bajada, después de B, haciendo aumentar la velocidad. La componente normal, en cambio, siempre hacia la derecha, curva la trayectoria continuamente hacia abajo.



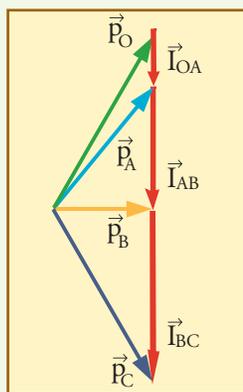
Ninguna de estas componentes es constante, y la curvatura tampoco lo es: la curva es una parábola, y no un arco de circunferencia.

e) Teniendo las velocidades, podemos calcular fácilmente las cantidades movimiento:

$\vec{p}_O = (30 \text{ m/s}; 52 \text{ m/s})$ ;  $\vec{p}_A = (30 \text{ m/s}; 36,8 \text{ m/s})$

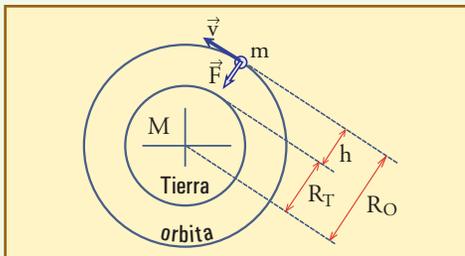
$\vec{p}_B = (30 \text{ m/s}; 0 \text{ m/s})$ ;  $\vec{p}_C = (30 \text{ m/s}; -52 \text{ m/s})$ .

El diagrama muestra que el impulso en cualquier tramo es un vector vertical, porque la fuerza resultante, el peso, lo es. El módulo de cada impulso es proporcional a la duración del tramo. El tramo OA dura bastante menos que el AB, porque aunque  $h_A = \frac{1}{2} h_B$ , la velocidad es mayor en OA que en AB.



### ▲ Ejercicio 5.12

a) Es importante entender que la *única fuerza actuante sobre el satélite* en este caso, es la gravitatoria, de módulo  $F = G M m / R_O^2$ , orientada hacia el centro de la Tierra.



Debemos considerar que el radio de la órbita es  $R_O = R_T + h \cong 7.370 \text{ km}$ .

b) Dado que la gravitatoria, por ser la única fuerza actuante en este MCU, debe ser la centrípeta, debemos plantear:

$$F = G \frac{M m}{R_O^2} = \frac{m v^2}{R_O},$$

de donde se obtiene:  $v = \sqrt{\frac{GM}{R_O}} \cong 7.370 \text{ m/s}$  (vemos que  $m$  se simplifica, y todo lo que vamos a calcular *es independiente de la masa de los cuerpos en órbita*).

El período del movimiento es:

$$T = 2 \pi R_O / v \cong 6.284 \text{ s} = 1^h 44^m 44^s.$$

c) El campo gravitatorio a distancia  $R_O$  del centro de la Tierra está dado por:

$$g' = \frac{GM}{R_O^2} = g_{\text{sup}} \times \left( \frac{R_T}{R_O} \right)^2$$

de lo que resulta:  $g' = 7,32 \text{ N/kg} \cong 75\%$  de  $g_{\text{sup}}$ .

Es decir, vemos 1.000 km sobre la superficie no es un gran alejamiento del centro de la Tierra, y como consecuencia de ello el campo gravitatorio sólo se debilita un poco, y la situación en la órbita está muy lejos de la condición de ingravidez que se percibe tan claramente en fotos y películas sobre el tema.

¿Cómo se entiende esto?

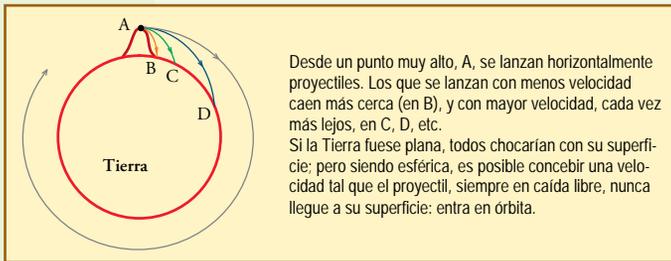
La ingravidez es **aparente**. La apariencia de ingravidez resulta del hecho de que tanto el satélite como sus pasajeros y todo su contenido, están animados del **mismo movimiento**. Como vimos en la fórmula para la velocidad (y para el período), todos los cuerpos grandes y pequeños viajarían de la misma manera, en la misma órbita, a la misma velocidad, *independientemente de su masa*.

Al estar todos los cuerpos en **reposo relativo** unos

respecto de los otros (aquí tenemos un ejemplo de cómo la idea de movimiento depende del sistema de referencia), si uno de ellos filmase a los otros, ellos se verían en reposo en la filmación, y *parecería que flotan*.

**Pero no flotan.** Están una situación que, dinámicamente, equivale a la **caída libre** de cualquier proyectil en ausencia de perturbaciones: de no ser por la gravedad, que los desvía continuamente curvando sus trayectorias hacia la Tierra, estos cuerpos, al igual que un proyectil, viajarían en línea recta.

Dado que la Tierra es redonda, es posible concebir un tiro que se inicie horizontalmente desde suficiente altura (donde ya no haya aire ni obstáculos), con una velocidad tal que el proyectil nunca se acerque al suelo. Esa caída libre especial constituiría una órbita circular. En esta órbita debe suceder lo mismo que en cualquier caída libre: si alguien salta desde un sitio medianamente alto sosteniendo una piedra u otro objeto pesado similar, mientras permanece en caída libre no puede sentir el peso del objeto. Como cae con la misma velocidad que éste, lo ve mantenerse inmóvil. Pero eso no es por ausencia de gravedad, sino porque *la gravedad hace que ambos adquieran la misma velocidad*, y así mantengan un estado de *inmovilidad relativa*.



Desde un punto muy alto, A, se lanzan horizontalmente proyectiles. Los que se lanzan con menos velocidad caen más cerca (en B), y con mayor velocidad, cada vez más lejos, en C, D, etc. Si la Tierra fuese plana, todos chocarían con su superficie; pero siendo esférica, es posible concebir una velocidad tal que el proyectil, siempre en caída libre, nunca llegue a su superficie: entra en órbita.

**d)** Esto parece complicado pero es muy sencillo. Si retomamos la expresión  $F = G \frac{M m}{R_o^2} = \frac{m v^2}{R_o}$ , y, en lugar de colocar valores

numéricos reemplazamos  $v$  en función del período,  $v_1 = 2 \pi R_o / T$ , despejando queda:  $\frac{T^2}{R_o^3} = \frac{4 \pi^2}{G M}$

Si el cociente entre dos variables se mantiene constante, esas variables son directamente proporcionales. En este caso  $T^2$  es directamente proporcional a  $R_o^3$ , que es lo que dice la ley en cuestión. La constante de proporcionalidad es  $4 \pi^2 / G M$ , sólo depende de la masa del astro central, que puede determinarse a partir de los datos correspondientes del cuerpo en órbita.

**e)** Cualquier habitante de otro planeta simplemente observando la Luna podría obtener los datos de la órbita, y sin conocer la masa de la Luna, podría obtener la masa de la Tierra despejando de esta ley:

$$M = \frac{4 \pi^2 R_o^3}{G T^2} \cong 6,03 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Vale saber que éste es el método que aplicamos para conocer la masa del Sol y de cualquier planeta o astro que tenga satélites en órbita a su alrededor.

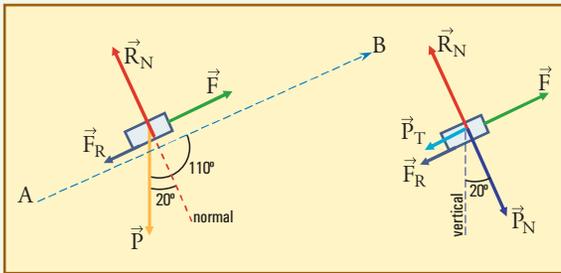
### Comentarios sobre las preguntas referidas al movimiento oscilatorio

- a)** Un cuerpo no tiene “fuerza de avance”. Eso no existe. Fuerza es lo que el resorte le aplica, en este caso tirando de él para frenarlo. Por Acción y Reacción el cuerpo tira del resorte hacia adelante con una fuerza de exactamente la misma intensidad en todo momento.
- b)** Una fuerza nunca puede igualar a una velocidad, ya que son cosas de diferente naturaleza y dimensión.
- c)** Vale el mismo comentario a).
- d)** Obviamente hay que aplicar la Ley del Impulso:  $m v_2 = m v_1 + I_{x(t_1 \rightarrow t_2)}$  e igualar esta expresión a cero.

## CAPÍTULO 6

### ▲ Ejercicio 6.1

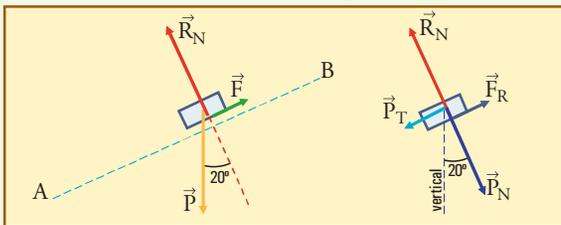
**a)** En la figura de la izquierda se muestran las fuerzas exteriores aplicadas sobre el cajón, que son:  $\vec{F}$ , la fuerza de 400 N con la que tira la cuerda en la dirección del plano;  $\vec{P}$ , el peso (acción del campo gravitatorio), de valor  $mg \cong 784 \text{ N}$ , vertical hacia abajo;  $\vec{R}_N$ , la parte normal de la reacción del plano, que debe valer tanto como  $P \cos 20^\circ \cong 737 \text{ N}$ , para equilibrar a  $P_N$ ; y  $\vec{F}_R$ , la acción del rozamiento, ejercida por el plano sobre el cajón, tangencialmente al plano (podemos decir que constituye la parte tangencial de la reacción del plano). Para averiguar el valor de  $\vec{F}_R$  tenemos que plantear el equilibrio de las acciones tangenciales, y para que ello se vea más claramente hemos agregado la figura de la derecha, equivalente a la anterior, reemplazando en la misma al peso, por sus componentes  $P_N$  y  $P_T$ . De manera que, según estos datos (velocidad constante que implica equilibrio de fuerzas tangenciales), observando la figura de la derecha deducimos fácilmente que  $F = P_T + F_R$ . Dado que  $P_T = P \sin 20^\circ \cong 268 \text{ N}$ , entonces  $F_R \cong 132 \text{ N}$ .



**b)**  $W_F = 400 \text{ N} \times 100 \text{ m} = 40 \times 10^3 \text{ J} = 40 \text{ kJ}$   
 $W_{RN} = 0 \text{ J}$  (fuerza perpendicular al desplazamiento)  
 $W_{FR} = -132 \text{ N} \times 100 \text{ m} = -13,2 \text{ kJ}$   
 $W_P = 784 \text{ N} \times 100 \text{ m} \times \cos 110^\circ$   
 $W_P = -268 \text{ N} \times 100 \text{ m} = -26,8 \text{ kJ}$   
 $\Sigma W_i = 40.000 - 13.200 - 26.800 = 0 = \Delta E_c$

**c)** Si definimos cero la energía potencial en A:  $E_{pA} = 0$ , entonces  $\Delta E_p = E_{pB} = P \cdot y_B$ . Dado que  $y_B = 100 \text{ m} \times \sin 20^\circ = 34,2 \text{ m}$ , resulta  $E_{pB} = 784 \text{ N} \times 34,2 \text{ m} = 26,8 \text{ kJ}$ .  
 Con esto,  $E_{mA} = E_{cA} + E_{pA} = \frac{1}{2} 80 \times 0,5^2 + 0 = 10 \text{ J}$ ;  
 $E_{mB} = E_{cB} + E_{pB} = 10 \text{ J} + 26,8 \text{ kJ}$  (vemos que la  $E_c$  es irrelevante aquí);  $\Delta E_m = 26,8 \text{ kJ} = W_F + W_{FR}$

**d)** Lo que sucede al cortarse la cuerda, desde el punto de vista de las fuerzas, es que desaparece la fuerza  $F$ , de  $400 \text{ N}$ , que tiraba tangencialmente hacia arriba. Eso inmediatamente se traduce en que se invierte el sentido de la fuerza de rozamiento, ya que el cuerpo deja de subir y tiende a deslizarse hacia abajo (por acción de  $P_T$ ). De manera que el diagrama de cuerpo aislado ahora muestra las siguientes fuerzas.



Dado que  $P_T$  supera al rozamiento (el rozamiento se invierte pero no aumenta de valor, y  $P_T$  no cambia), el cuerpo deslizará aceleradamente hacia la parte baja del plano. En todo el trayecto BA se harán los siguientes trabajos:  $W_{FR} = -132 \text{ N} \times 100 \text{ m} = -13,2 \text{ kJ}$ , y  $W_P = 268 \text{ N} \times 100 \text{ m} = 26,8 \text{ kJ}$ , de manera que  $\Delta E_c = \Sigma W_i = 26,8 - 13,2 = 13,6 \text{ kJ}$ . Dado que el cuerpo parte del reposo en B, éste es el valor de la energía cinética con que llega a A, y de allí que  $v_A = \sqrt{2 E_c / m} \cong 18,4 \text{ m/s}$ .

**e)** Para que el cuerpo quede detenido al cortarse la cuerda, debe darse que, durante la subida,  $F_R > P_T$ .

De este modo el cuerpo sube arrastrado por la cuerda que tira con  $F = P_T + F_R$ , pero al desaparecer  $F$ ,  $F_R$  se invierte, y  $P_T$  ahora no puede vencerla. Claro que ahora el equilibrio se alcanza con un nuevo valor de la fuerza de rozamiento,  $F_R' = P_T$ , menor que el que tenía en la subida.

### ▲ Ejercicio 6.2

**a)** Sabemos que en este movimiento se conserva la  $v_x$ , por lo cual calculamos  $v_{0x} = 30 \cos 60^\circ = 15 \text{ m/s}$ . En el punto más alto, B, tendremos  $v_B = 15 \text{ m/s}$ , y  $E_{cB} = 2 \times 15^2 / 2 = 225 \text{ J}$ .

Esto nos permite calcular la energía potencial y luego la altura en B, sin recurrir a las fórmulas del MRUV. Efectivamente, la energía cinética inicial es  $E_{cA} = 2 \times 30^2 / 2 = 900 \text{ J}$ .

De manera que la conservación de la energía mecánica implica:

$$E_{pB} - E_{pA} = E_{cA} - E_{cB}$$

$$E_{pB} - E_{pA} = 900 - 225$$

$$E_{pB} - E_{pA} = 675 \text{ J}$$

$$E_{pB} - E_{pA} = m g (h_B - h_A) \rightarrow h_B - h_A = 675 / (2 \times 9,8) = 34,4 \text{ m}$$

Ésta es la altura de B con respecto a A, y si tomamos  $h_A = 0$ , entonces  $h_B = 34,4 \text{ m}$ .

**b)** Con esta elección la energía total inicial vale lo mismo que la cinética allí,  $900 \text{ J}$ , y la potencial en B es la que ya ha sido calculada:  $E_{pB} = 675 \text{ J}$ .

En C tendremos un valor negativo:

$$E_{pC} = 2 \times 9,8 \times (-50) = -980 \text{ J}$$

La conservación planteada en C es:

$$E_{cC} + (-980 \text{ J}) = 900 \text{ J}, \text{ de donde se deduce que}$$

$$E_{cC} = 1.880 \text{ J}, \text{ y } v_C = (2 \times 1.880 / 2)^{1/2} = 43,3 \text{ m/s}$$

### ▲ Ejercicio 6.3

**a)** Podemos calcular la velocidad con que la pelota llega al piso aplicando  $v = \sqrt{2 g h} = 7,67 \text{ m/s}$ , pero también por conservación de  $E_m$ . Tomamos

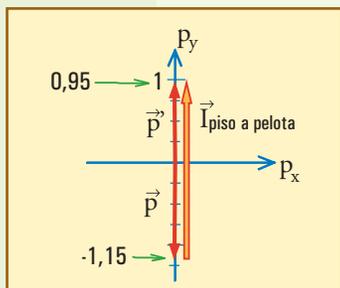
$E_p = m g h$ , y entonces  $E_{p_{inicial}} = 0,15 \times 9,8 \times 3 = 4,41 \text{ J}$ ; dado que en el piso  $E_{p_{final}} = 0$ , resulta que la energía cinética allí vale  $4,41 \text{ J}$ .

La cantidad de movimiento al llegar al piso es:  $p = 0,15 \times 7,67 = 1,15 \text{ kg m/s}$ , la cual debe ser igual al impulso aplicado por la fuerza peso durante la caída, es decir a  $P \times \Delta t$  (siendo  $\Delta t$  el tiempo que dura la caída).

Por otra parte, la energía cinética al llegar al piso, debe ser igual al trabajo hecho por la fuerza peso, es decir a  $P \times 3 \text{ m}$ .

**b)** El área de la gráfica mostrada nos da el valor absoluto del impulso (pelota-suelo, o suelo-pelota, es lo mismo). Si elegimos como siempre el eje y vertical

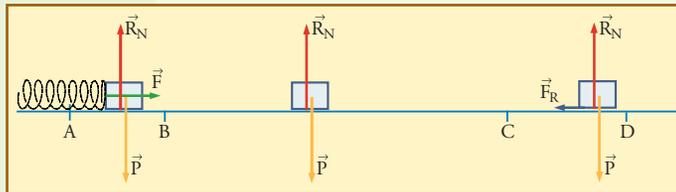
positivo hacia arriba, para este choque tenemos:  
 Antes  $p_y = -1,15 \text{ kg m/s}$   
 Durante el intervalo de  $0,02 \text{ s}$  que dura el contacto según la gráfica:  $I_y = 2,10 \text{ N}\cdot\text{s}$  (aplicado por el suelo a la pelota). Habría que sumar el impulso de la fuerza peso, ya que también actúa sobre la pelota en este proceso:  $-P \times \Delta t = 0,15 \times 9,8 \times 0,02 = -0,03 \text{ N}\cdot\text{s}$  (vemos que en un tiempo tan corto su efecto es prácticamente irrelevante, por lo cual no lo consideraremos aquí).  
 De manera que tomamos  $I_y = 2,10 \text{ N}\cdot\text{s}$ .  
 Después:  $p_y' = p_y + I_y = -1,15 + 2,10 = 0,95 \text{ kg m/s}$ .  
 Vemos que en valor absoluto  $p' < p$ , es decir que  $v' < v$ : el choque ha sido parcialmente elástico.



c)  $v' = 0,95 \text{ kg m/s} / 0,15 \text{ kg}$   
 $v' = 6,33 \text{ m/s}$ ;  
 $E_c' = 0,15 \times 6,33^2 / 2$   
 $E_c' = 3,00 \text{ J}$ ;  
 se han perdido  $4,41 - 3,00 = 1,41 \text{ J}$ .  
 La pelota subirá hasta que  $E_p$  valga  $3,00 \text{ J}$ , es decir  
 $h_{\text{final}} = 3,00 / (0,15 \times 9,8) = 2,04 \text{ m}$ .

### ▲ Ejercicio 6.4

a) Le llamamos  $\vec{F}$  a la fuerza que aplica el resorte,  $\vec{P}$  es el peso,  $\vec{R}_N$  es la reacción normal (perpendicular) del piso, y  $\vec{F}_R$  es la fuerza de roce, que viene a ser la parte tangencial de la reacción del piso.



b)  $v_B$  se calcula a partir de la energía cinética en B, que debe ser igual a la potencial del resorte en A (para llegar a esto se parte de la conservación entre A y B:  $E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$ , con  $E_{cA} = 0$ , y  $E_{pB} = 0$ ). De manera que  $E_{pA} = 10.000 \text{ (N/m)} \times (0,2\text{m})^2 / 2$

$$E_{pA} = 200 \text{ J};$$

$$v_B = (2 \times 200 / 16)^{1/2} = 5 \text{ m/s}.$$

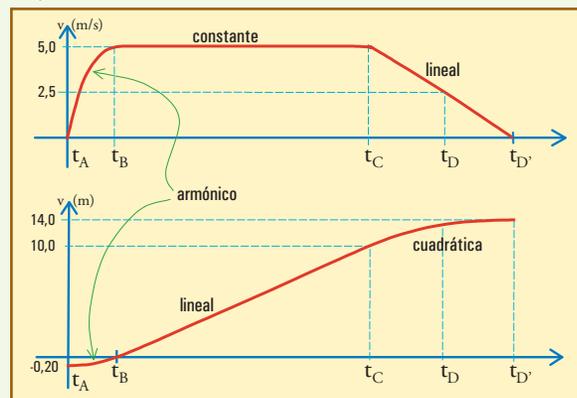
Entre B y C la resultante es nula, de manera que el movimiento es uniforme, y entonces  $v_C = v_B = 5 \text{ m/s}$ . Desde C en adelante la fuerza resultante es la de rozamiento, que va frenando al móvil, y en principio no sabemos si éste va a llegar a D. Una forma posible de averiguarlo es suponer que llega a D, y plantear la energía cinética allí:  $E_{cD} = E_{cC} - W_{CD}$ ; si obtenemos un valor positivo, ése es, y si obtenemos un

resultado negativo, absurdo porque  $E_c$  debería ser siempre positiva, es indicación de que el cuerpo se detuvo antes de ese punto.

Procedemos entonces:  $200 \text{ J} - 50 \text{ N} \times 3 \text{ m} = 50 \text{ N} \rightarrow$  sí llega a D, con  $50 \text{ J}$  de energía cinética,  
 $\rightarrow v_D = (2 \times 50 / 16)^{1/2} = 2,5 \text{ m/s}$ .

Otra forma posible consiste en calcular dónde se detiene en cuerpo (D'). Para esto planteamos  $E_{cD'} = 0 = E_{cC} - F_R d_{CD'} \rightarrow 50 \text{ N} \times d_{CD'} = 200 \text{ J} \rightarrow d_{CD'} = 200 / 50 = 4 \text{ m}$  (esto corrobora que sí llega a D, ahora hay que calcular la energía y velocidad allí, como hicimos antes).

A continuación están las gráficas pedidas. Son cualitativas porque es muy difícil mostrar en la misma escala  $20 \text{ cm}$  y  $10 \text{ m}$ . Por comodidad, colocamos el origen de  $x$  en el punto B.



c) Entre A y B, el movimiento es un cuarto de oscilación en el extremo de un resorte. Por lo tanto dura  $T/4 = \pi (m/k)^{1/2} / 2 \cong 0,0628 \text{ s}$

$$\rightarrow \text{si } t_A = 0, t_B \cong 0,0628 \text{ s}.$$

Entre B y C el movimiento es uniforme, con  $v = 5 \text{ m/s}$ ,  
 $\rightarrow \Delta t = 10\text{m} / 5(\text{m/s}) = 2 \text{ s}$ ; entonces  $t_C \cong 2,06 \text{ s}$ .

Entre C y D, o D', el movimiento es MRUV, la velocidad, por lo tanto disminuye de manera lineal, y podemos aplicar  $\Delta t = \Delta x / v_m$ . Entonces, hasta D,  $v_m = (5+2,5)/2 = 3,75 \text{ m/s}$ ,  $\Delta t_{CD} = 3\text{m} / 3,75(\text{m/s}) = 0,80 \text{ s}$ . Y desde D hasta D',

$$v_m = 2,5/2$$

$$v_m = 1,25 \text{ m/s}$$

$$\Delta t_{DD'} = 1/1,25$$

$$\Delta t_{DD'} = 0,80 \text{ s}.$$

De manera que  $t_D = 2,86 \text{ s}$ , y  $t_{D'} = 3,66 \text{ s}$ .

### ▲ Ejercicio 6.5

a) Dado que la posición de equilibrio del resorte está en  $x = 0$ , sólo hay contacto con él en los valores  $x < 0$ . En  $x > 0$ , es decir, antes de  $t = 0$  y después de  $t \cong 0,32 \text{ s}$ ,

el cuerpo se mueve libremente, y la gráfica es una recta, de pendiente negativa primero, y positiva después.

La pendiente de estas partes rectas es fácil de determinar, y podemos ver que se recorren 50 cm en 0,1 s, de manera que la velocidad pedida, en valor absoluto es  $v_0 = 0,50 \text{ m} / 0,1 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$ .

Es decir, para  $t \leq 0$ ,  $v_0 = -5 \text{ m/s}$ ; y para  $t \geq 3,15 \text{ s}$ ,  $v_f = 5 \text{ m/s}$ .

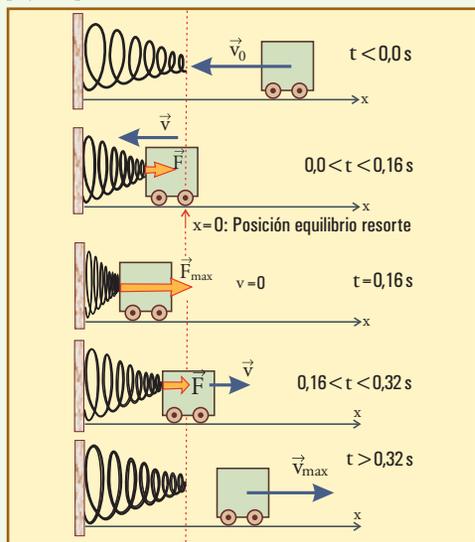
**b)** El resorte se comprime 50 cm. esto significa que llega a almacenar una energía  $E_p = 2000 \times 0,5^2 / 2 = 250 \text{ J}$ . Dado que ésta debe ser también la energía cinética del cuerpo antes y después, podemos calcular la velocidad correspondiente  $v = (2 E_c / m)^{1/2} = 5 \text{ m/s}$  (vemos que confirma exactamente el resultando anterior).

**c)** Para el intervalo propuesto podemos ver que:

Entre -0,1 s y 0,0 s, no hay contacto con el resorte ( $W = 0$ ).

Entre 0,0 s y 0,16 s, el resorte es comprimido, por lo cual hace trabajo negativo, quitando energía cinética al cuerpo. Éste es frenado por la fuerza, que actúa en sentido contrario al avance.

Entre 0,16 s y 0,32 s, el resorte se expande, haciendo trabajo positivo y dando energía al cuerpo. Éste es empujado por la fuerza en el mismo sentido del avance.



### ▲ Ejercicio 6.6

**a)** E es la energía mecánica total, expresada como suma de la cinética y la potencial del resorte. Para esta última se ha definido el valor cero para el resorte en equilibrio, que corresponde al cuerpo en todos los valores negativos de x. La gráfica para  $x > 0$  corresponde al término  $\frac{1}{2} k x^2 = 2.500 x^2$ , como se verifica fácilmente dando valores.

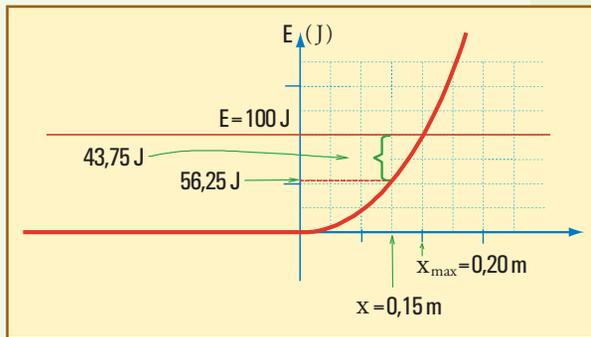
**b)** Si el cuerpo viaja por los x negativos con

$E_c = 2 \times 10^2 / 2 = 100 \text{ J}$  hacia el resorte, dado que allí  $E_p = 0$ , entonces  $E = 100 \text{ J}$ , es un valor que se mantendrá constante en todo el movimiento. De manera que el móvil llegará a comprimir el resorte hasta un lugar  $x_{\text{máx}}$  en el cual  $v$ , o sea  $E_c$ , se anule. En este punto se cumplirá  $E_p = 100 \text{ J} = 2.500 x_{\text{máx}}^2$ , de manera que podemos calcular  $x_{\text{máx}} = 0,2 \text{ m}$ .

En la gráfica se entiende claramente que este valor de x es la abscisa del punto de intersección entre la recta que indica el valor  $E = 100 \text{ J}$ , y la gráfica  $E_p(x)$ . Esto es interesante porque, dado que E se mantiene constante, y  $E - E_p$  es el valor de  $E_c$ , en la gráfica podemos leer la energía cinética del móvil en cada lugar, como la distancia (vertical) desde la gráfica  $E_p(x)$  hasta la recta horizontal que marca el valor de E. Donde estas líneas se intersectan resulta  $E_c = 0$ , el móvil se detiene, y no puede avanzar hacia donde  $E < E_p$ , ya que eso correspondería a una  $E_c$  negativa, que no puede existir.

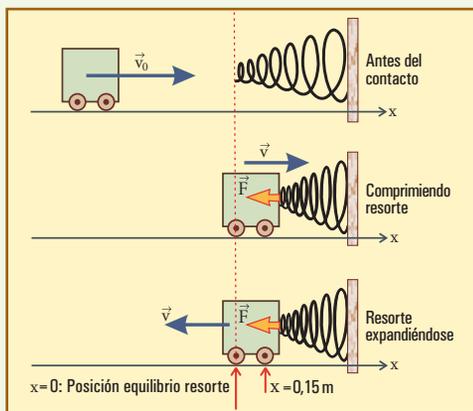
La gráfica, nos indica, entonces, con el lenguaje de la energía, lo que ya sabíamos por dinámica: el cuerpo retornará hacia los x negativos, e irá teniendo, en cada lugar, la misma energía cinética con que pasó antes hacia la derecha.

**c)** En la gráfica leemos en  $x = 0,15 \text{ m}$ , que  $E_p \cong 55 \text{ J}$  (es difícil leer con mucha exactitud), de manera que  $E_c$ , que es lo que falta para el valor  $E = 100 \text{ J}$ , vale  $\cong 45 \text{ J}$ . Si se aplica la fórmula se obtienen valores bastante parecidos ( $E_p = 2.500 \times 0,15^2 = 56,25 \text{ J}$ , y  $E_c = 43,75 \text{ J}$ ).



De manera que  $v^2 = 2 E_c / m = 43,75 \text{ m}^2/\text{s}^2$ , y por lo tanto  $v = \pm 6,62 \text{ m/s}$ . Hemos hecho el cálculo de esta manera para que se vea más claramente que, según la fórmula, la velocidad puede ser tanto positiva como negativa. De manera que el cálculo vale para la ida con el valor positivo, y para la vuelta con el negativo.

**d)** La fuerza tiene componente  $F_x = -k x = -750 \text{ N}$ , negativa tanto a la ida como a la vuelta.



### ▲ Ejercicio 6.7

Planteamos conservación de la energía mecánica:  $E = \frac{1}{2} m v^2 + m g y = \text{constante}$ , y calculamos su valor en B:

$$E = 2 \times 0,2^2 / 2 + 2 \times 9,8 \times 0,04 = 0,040 + 0,784 = 0,824 \text{ J.}$$

Dado que  $E_{pA} = 0$ , entonces

$$E_{cA} = 0,824 \text{ J, y } v_A = (2 \times 0,824 / 2)^{1/2} = 0,908 \text{ m/s}$$

(además sabemos que en este movimiento la velocidad puede ser calculada independientemente de la masa, a partir de  $v^2 = v_0^2 - 2 g \Delta y$ , que para este cálculo hubiese sido:  $v_A^2 = 0,2^2 - 2 \times 9,8 \times (-0,04) = 0,824$ , de donde se obtiene el mismo valor ya calculado).

A partir de que el cuerpo es lanzado en A con  $v_A = 0,908 \text{ m/s}$  hacia la izquierda, su velocidad disminuye (de módulo) en la subida, pasa por B con  $v_B = 0,200 \text{ m/s}$ , luego aumenta en la bajada hasta un valor máximo en C, dado por:

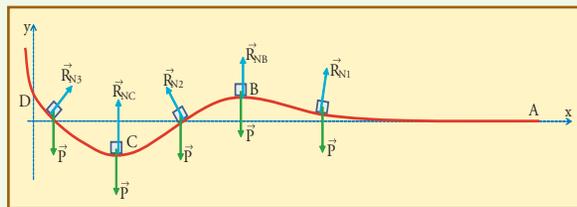
$$v_C^2 = 0,2^2 - 2 \times 9,8 \times (-0,10) = 2,000 \rightarrow v_C = 1,414 \text{ m/s,}$$

desde allí la velocidad disminuye y el cuerpo se detiene un poco más allá de D (en D tiene la misma velocidad que en B, ya que están a la misma altura), para volver luego pasando con las mismas velocidades en sentido contrario por todos los puntos.

Es claro que en este caso ideal, sin rozamiento, es *imposible ganar el juego*, dado que si el cuerpo pasa por B hacia la izquierda, luego pasará inexorablemente por allí hacia la derecha, con exactamente la misma velocidad. Sólo cabría la posibilidad de que el cuerpo no volviese si tuviese la energía exacta para llegar al punto B, y quedarse detenido allí, lo cual no sólo es de tan bajísima probabilidad que nunca ha ocurrido, sino que sería una situación inestable que podría revertirse espontáneamente.

Las fuerzas actuantes, esquematizadas en la figura siguiente, al no haber rozamiento, consisten sólo en el

peso y la reacción normal de la pista, absolutamente independientes de que el cuerpo pase por cada punto hacia la izquierda o hacia la derecha.



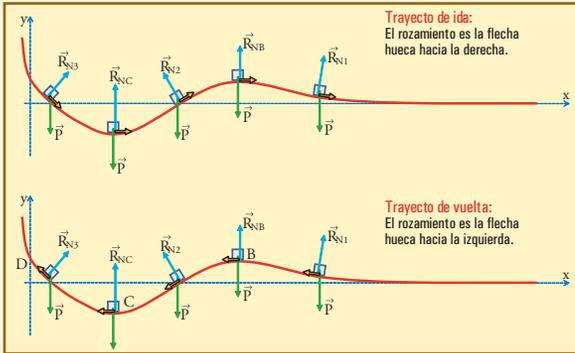
En la figura no se han mostrado las componentes del peso. Se ha tratado de respetar el tamaño de la reacción en cada lugar. La reacción normal de la pista no equilibra necesariamente a la componente normal del peso, ya que la resultante entre ambas es la fuerza normal correspondiente a la curvatura de la trayectoria, así tenemos que  $R_{N1}$ ,  $R_{NC}$  y  $R_{N3}$  son mayores, cada una, que la correspondiente  $P_N$ , mientras que  $R_{NB}$  es menor que  $P_N$ . A su vez, en B y en C,  $P_N = P$ .

**b)** Si hay rozamiento necesitamos saber cuánto vale para poder calcular las velocidades. Sin saber el valor, pero suponiendo que es muy débil, a priori podemos decir que, para que el cuerpo pase por B con  $v_B = 0,2 \text{ m/s}$ , deberíamos lanzarlo en A con  $v_A'$  levemente mayor que  $0,908 \text{ m/s}$  hacia la izquierda. Luego el movimiento continuará de manera muy parecida a lo que se describió, pero como el rozamiento continuamente hará disminuir su energía mecánica, pasará por cada lugar con una velocidad levemente menor, en valor absoluto, que la que hemos calculado. Es decir, pasará por C con  $v_C'$  algo menor que  $1,414 \text{ m/s}$  hacia la izquierda, si llega a D (puede no llegar) lo hará con velocidad menor que  $0,2 \text{ m/s}$ , se detendrá en un lugar más bajo que el lugar en el que se hubiese detenido sin rozamiento, y retornará, pasando por C con  $v_C'' < v_C' < 1,414 \text{ m/s}$ . Luego su velocidad disminuirá mientras sube hacia B. Si llega a B lo hará con  $v_B' < 0,2 \text{ m/s}$ , y desde allí se acelerará en la bajada, pero comenzará a frenarse levemente en la parte horizontal, llegando casi seguramente a A, pero con velocidad  $v_A'' < 0,908 \text{ m/s} < v_A'$ .

Esto nos indica que es posible ganar el juego gracias al rozamiento: es más fácil si el rozamiento es grande, más difícil si es pequeño, y sería imposible si no lo hubiese. Para ganar hay que lanzar el cuerpo con la mínima velocidad tal que le alcance la energía para pasar por B. Lo que le sobre de energía al pasar por B, *debe ser disipado por el rozamiento* en el trayecto  $B \rightarrow C \rightarrow \dots D \dots \rightarrow C \rightarrow B$ . Si el rozamiento no alcanza a disipar este exceso, el cuerpo no quedará atrapado

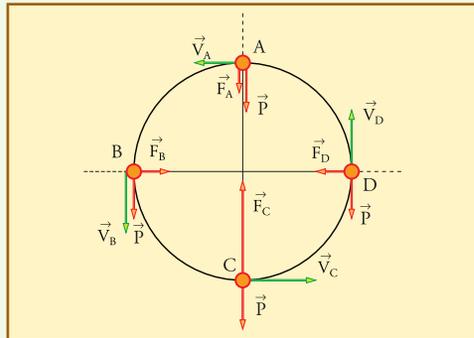
y pasará por B hacia A.

La gráfica de las fuerzas será exactamente la misma anterior, pero mostrando una pequeña fuerza de rozamiento siempre hacia atrás, que cambiará entre la ida y la vuelta.



### ▲ Ejercicio 6.8

a) Las fuerzas actuantes son exactamente las mismas que para el caso de un péndulo: el peso  $\vec{P}$ , que es un vector constante, y la fuerza del hilo  $\vec{F}$ , siempre a lo largo del hilo, hacia el centro O. En la figura están mostrados estos vectores fuerza (flechas huecas), junto con los vectores velocidad (flechas negras) en cuatro puntos de la trayectoria A, B, C, y D. Al igual que en el péndulo, es claro que el movimiento no puede ser uniforme, ya que la fuerza resultante tiene componente tangencial, que es la de  $\vec{P}$  (puesto que  $\vec{F}$  no tiene).



Otra forma de decir lo mismo, es desde el punto de vista de la energía: en este movimiento sólo trabaja la fuerza peso, de manera que la energía mecánica total se mantiene constante:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m g y = \text{cte.}$$

b) La velocidad en cualquier punto se puede calcular con  $v^2 = v_A^2 + 2 g (y_A - y)$ .

Así tendremos, para los puntos B y D ( $y_B = y_D = 0$ ):  $v^2 = 5^2 + 2 \times 9,8 \times 1,5 = 54,4 \text{ m}^2/\text{s}^2 \rightarrow v_B = v_D = 7,37 \text{ m/s}$ .

Para el punto más bajo, C ( $y_C = -1,5 \text{ m}$ ):

$$v^2 = 5^2 + 2 \times 9,8 \times 3 = 83,8 \text{ m}^2/\text{s}^2 \rightarrow v_C = 9,15 \text{ m/s.}$$

c) La componente normal de la fuerza resultante, en cada lugar, está dada por  $m v^2 / R$ , que es la expresión para la fuerza centrípeta.

Ahora bien, en este caso (tal como en cualquier péndulo), esa fuerza resulta de la composición de  $\vec{F}$  con la componente normal del peso.

Así resulta que en los puntos B, y D, en los que el peso no tiene componente normal (ver figura), tenemos  $F_B = F_D = 2 \times 7,37^2 / 3 = 72,53 \text{ N}$ .

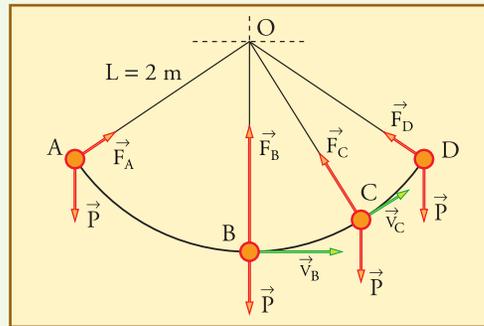
En cambio en A y en C, el peso es directamente normal, pero en A actúa hacia el centro y en C hacia fuera. De manera que tenemos:

$$F_A = m v_A^2 / R - P = 2 \times 5^2 / 1,5 - 2 \times 9,8 = 13,73 \text{ N}$$

$$F_C = m v_C^2 / R + P = 2 \times 9,15^2 / 1,5 + 2 \times 9,8 = 131,33 \text{ N}$$

### ▲ Ejercicio 6.9

a) Se muestran cualitativamente las fuerzas con flechas huecas (los otros vectores mostrados no son fuerzas). La fuerza del hilo claramente no hace trabajo en ningún tramo, ya que es siempre perpendicular al movimiento. La fuerza peso hace trabajo positivo en el tramo AB, dado que tiene componente tangencial en el mismo sentido del movimiento, y hace trabajo negativo en BC y en CD, porque su componente tangencial es hacia atrás en estos tramos.



b) Aplicamos (5.20):

$F_B = m v_B^2 / L + m g = 4 \times 4^2 / 2 + 4 \times 9,8 = 71,2 \text{ N}$  (notar que la fuerza centrípeta,  $m v_B^2 / L$ , que vale 32 N, es igual a  $71,2 \text{ N} - 39,2 \text{ N}$ , que es el módulo del vector resultante de  $\vec{F}_B + \vec{P}$ ).

c) Aplicamos  $v^2 = v_B^2 - 2 g (y - y_B)$ , y despejamos  $y - y_B$ , la altura respecto de B:  $y - y_B = (v_B^2 - v^2) / 2 g$ .

En A,  $v_A = 0$ ,

$\rightarrow y_A - y_B = v_B^2 / 2 g = 4^2 / (2 \times 9,8) = 0,816 \text{ m}$  (es la altura hasta la cual subiría un proyectil lanzado verticalmente con velocidad  $v_B$ , como corresponde a la conservación de la energía).

En C :  $y_C - y_B = (4^2 - 3^2)/(2 \times 9,8) = 0,357$  m.

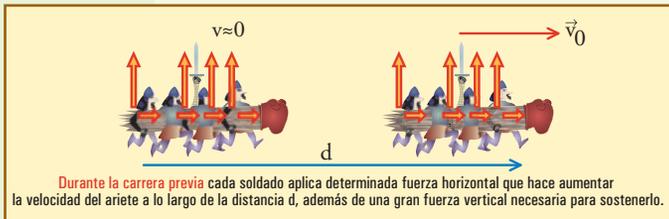
d) Considerando cero la energía potencial en A, los valores de las energías, en J, son (tener en cuenta que  $y_A - y_B = 0,816$  m ;  $y_A - y_C = 0,816 - 0,357 = 0,459$  m):

	$E_p$	$E_c$	$E_{total}$
A	0	0	0
B	-32	32	0
C	-18	18	0
D	0	0	0

### ▲ Ejercicio 6.10

Los soldados empujan al ariete a lo largo de una cierta distancia  $d$  hasta que adquiere una determinada velocidad  $v_0$  (la máxima con la cual ellos pueden correr cargándolo). En este proceso realizan un trabajo  $W = F_h \times d$ , donde  $F_h$  es la fuerza horizontal resultante que aplican al ariete para acelerarlo.

Además, los soldados aplican una considerable fuerza vertical para sostener al ariete contra la acción de la gravedad. La fuerza vertical podría ser muy grande y cansar a los soldados más que la  $F_h$ , pero eso puede evitarse con un mecanismo adecuado. Por ejemplo, en algunas películas suelen verse arietes que cuelgan de soportes que les permiten un movimiento pendular, y los soldados sólo se encargan de aplicarles rítmicamente fuerzas horizontales para golpear la puerta.



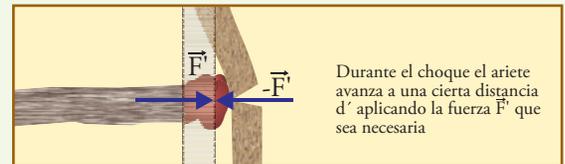
El ariete adquiere entonces una energía cinética  $E_{c0} = \frac{1}{2} m v_0^2 = W$ , y sólo podrá detenerse si una cantidad de trabajo  $W'$  igual es efectuado por una fuerza externa que le quite esa cantidad de energía. Es decir:

$$\text{detener ariete} \rightarrow W' = \Delta E_c = -E_{c0}$$

En este caso, quien le aplicará una fuerza al ariete en el sentido de detenerlo será la puerta, que debería impedir su avance. Pero la realización de un trabajo

negativo  $W'$  por parte de la puerta es una forma de decir que ella, mientras aplica la fuerza  $F'$  contra el avance, debe ceder la distancia  $d'$  tal que:

$W' = -F' d'$ , o lo que es lo mismo,  $F' \times d' = E_{c0} = F \times d$ . La fuerza  $F'$  que el ariete aplica es igual en módulo (acción y reacción) a la fuerza con que el portón resiste su avance. Será mayor contra los portones más resistentes (algo similar ya se vio en el Ejercicio 4.8). Cuanto más grande sea  $F'$ , más pequeña será  $d'$ , la distancia que el ariete avanza. Pero nunca será  $d' = 0$ , cosa que sí podría ocurrir si los soldados empujaran el portón directamente con sus manos (cuando el ariete choca, en realidad no interesa que ellos aún continúen aplicando la fuerza  $F_h$ , pues ella es muy pequeña comparada con  $F'$ ).



La puerta necesariamente cederá una cierta distancia  $d' = d \times F_h / F'$ . ¿Significa eso que infaliblemente el ariete romperá la puerta? No. La puerta puede ceder una cierta distancia elásticamente, y luego recuperar su forma inicial sin sufrir daño permanente. También podría suceder que se rompa el ariete, mientras a la puerta no le suceda nada grave.

Lo que los soldados logran con el ariete es compensar lo pequeño de la fuerza  $F_h$  que pueden aplicar, haciendo que ella actúe a lo largo de una gran distancia, de manera que gracias a la acumulación de la energía cinética y al teorema que dice que ella sólo puede disminuir haciendo trabajo (fuerza  $\times$  distancia), puede garantizarse que el ariete aplicará una fuerza  $F'$  tan grande como sea necesario para que la puerta (o el ariete o ambos) ceda una cierta distancia. Y la esperanza de los soldados invasores es que la puerta sufra daño permanente con la deformación  $d'$  infringida repetidas veces, mientras que la de los defensores es que el daño lo sufra el ariete (o los soldados atacantes) antes.

### ▲ Ejercicio 6.11

a) El planteo es muy similar al del ejemplo desarrollado en el texto. Designamos:

$t_0$ : instante de velocidad nula del martillo, inmediatamente antes de comenzar a ser impulsado hacia abajo.

$t_1$ : instante previo al contacto del martillo con el clavo

$t_2$ : instante en que clavo y martillo se detienen luego de penetrar (el clavo)  $6/3 = 2$  cm en la madera.

Según los datos  $E_c(t_1) = E_c = 1 \text{ kg} \times (10 \text{ m/s})^2/2 = 50 \text{ J}$ ,

de manera que si aplicamos  $W_{FR} = \Delta E_c + \Delta E_p$  para el sistema martillo entre  $t_1$  y  $t_2$ , obtenemos:  
 $\Delta E_c = -50 \text{ J}$ ;  $\Delta E_p = -9,8 \text{ N} \times 0,02 \text{ m} = -0,196 \text{ J}$   
 (vemos que es prácticamente irrelevante el peso del martillo aquí, razón por la cual en la práctica no se siente diferencia entre golpear vertical u horizontalmente; no obstante conservaremos el peso en todo el planteo).

$W_{FR} = -50 \text{ J} - 0,196 \text{ J} = -50,2 \text{ J}$  = trabajo de la fuerza con que la cabeza del clavo frena al martillo. Ahora bien, por acción-reacción, este último trabajo, cambiado de signo, es el que hace el martillo sobre el clavo hundiéndolo, que por lo tanto es también 50,2 J. Como además el clavo tiene velocidad nula tanto en  $t_1$  como en  $t_2$ , si le aplicamos la misma expresión obtenemos que  $W_{FR}$  sobre él es nulo en este intervalo, y por tanto, la fuerza media que lo empuja es igual en valor absoluto a la que lo frena, y podemos calcularla sabiendo que hace un trabajo de 50,2 J en 2 cm:  $F = 50,2 \text{ J} / 0,02 \text{ m} \cong 2,51 \times 10^3 \text{ N}$ .

**b)** La fuerza media que impulsa al martillo, por otra parte se averigua de la misma manera que la que frena al clavo: aplicamos  $W_{FR} = \Delta E_c + \Delta E_p$  para el *sistema martillo* entre  $t_0$  y  $t_1$ , y obtenemos:

$$F \times 0,80 \text{ m} = 50 \text{ J} - P \times 0,80 \text{ m} \rightarrow$$

$$F = 50/0,8 - P = 62,5 - 7,84 = 54,66 \text{ N}$$

(aquí el peso no fue tan irrelevante: martillando para abajo, el peso del martillo nos ayuda en la fase del impulso)

**c)** El trabajo hecho por la fuerza de rozamiento, -50,2 J, significa que desaparecen 50,2 J de energía mecánica (de los cuales 50 eran cinética y 0,2 potencial del martillo). Por lo tanto deben aparecer, distribuidos entre el clavo, la madera, y luego el ambiente, 50,2 J de energía no mecánica, a la cual llamaremos térmica, ya que se manifiesta exclusivamente a través de la elevación de la temperatura de las partes (estamos despreciando energía que se propaga con las vibraciones que se producen, el sonido, etc.).

**d)** El proceso de martillar horizontalmente es exactamente el mismo que el descrito en el ejercicio anterior, de golpear con un ariete.

Si analizamos los martillazos verticales, en cambio, aparece la contribución del peso. Ya vimos que durante el golpe prácticamente no hay diferencia entre considerar o no considerar el peso. En cambio en la fase del impulso podemos decir que, a la energía que le imprimimos al martillo, la gravedad le agrega la energía potencial del martillo, aumentando directamente la fuerza del impacto, o la profundidad que penetrará el clavo. A esa energía extra, por otra parte, la tenemos que suministrar nosotros en la fase de levantar el martillo.

### ▲ Ejercicio 6.12

Dado que 1 kWh = 3,6 MJ, tenemos que:  
 960 kWh = 3456 MJ; esa energía repartida en un año ( $365 \times 24 \times 3600 = 31,536 \times 10^6 \text{ s}$ ) representa una potencia de:  $3456 \times 10^6 / 31,5 \times 10^6 \cong 110 \text{ W}$ . Corresponde a la potencia de una lámpara de filamento fuerte, o un par de televisores pequeños, o, tal vez, un motor de licuadora. Mucho menos que una estufa, y mucho más que una lámpara de bajo consumo.

### ▲ Ejercicio 6.13

$$\frac{112 \text{ libras} \times 196 \text{ pies}}{60 \text{ segundos}} \cong 366 \text{ libras} \times \text{pie/segundo}$$

$$366 + \frac{1}{2} 366 \cong 549 \cong 550 \text{ libras} \times \text{pie/segundo}$$

Si definimos que este valor es 1 HP, para expresarlo en watts debemos traducir las libras a newtons, y los pies a metros.

Tomamos el valor dado en Capítulo 3,

1 libra = 0,4536 kg (tanto de fuerza como de masa), para este caso, de fuerza. Para traducirlo a newtons, debemos multiplicar por 9,8: 1 libra  $\cong 4,445 \text{ N}$ .

Por otra parte, tenemos 1 pie = 0,305 m, de manera que:  
 550 libras  $\times$  pie/segundo  $\cong 550 \times 4,445 \times 0,305 \cong 746 \text{ W}$

### ▲ Ejercicio 6.14

Vale aclarar que para todos los casos se explica lo que sucede con la energía a partir de un aparato o ser que hace un trabajo, sin considerar a expensas de qué energía ha sido hecho el trabajo, ni rastrear la energía hacia atrás en el tiempo.

También es importante aclarar que se han mencionado sólo las energías que se consideran importantes para cada caso, sin entrar en muchos detalles finos que podrían plantear demasiadas complicaciones.

1. Se realiza trabajo positivo sobre la varilla al doblarla, pero dado que ella puede realizar trabajo positivo al recuperar su forma, podemos pensar que acumuló gran parte de ese trabajo como energía potencial elástica.

2. Se realiza el mismo trabajo positivo sobre el caño de cobre que en el punto anterior sobre la varilla de mimbre. Pero ahora nada de ese trabajo se acumula como energía elástica. Sin embargo, el Principio de Conservación de la Energía nos asegura que esa cantidad de trabajo se ha acumulado como energía de algún tipo. Si no conocemos algún mecanismo especial por medio del cual el cobre acumule energía, debemos pensar que se acumuló como energía térmica, produciendo cierta elevación de temperatura del

cobre (y del ambiente cercano).

**3.** El trabajo es acumulado en su mayor parte como energía cinética del carro.

**4.** En este caso el trabajo realizado al empujar el escritorio no se acumula mecánicamente, ya que es disipado en su totalidad por el rozamiento. Se acumula como energía térmica del escritorio, piso y ambiente.

**5.** Una parte del trabajo hecho por el motor sobre la bombeadora, se disipa en rozamientos entre las partes mecánicas de la misma, otra parte en rozamientos con el agua, otra parte en rozamientos del agua con la cañería, y consigo misma (torbellinos), y otra parte, la útil, se acumula como energía potencial del agua en lo alto en el depósito. Todas las partes disipadas por el rozamiento desaparecen como energía mecánica, pero se acumulan como energía térmica, según la elevación de temperatura de las diversas partes intervinientes.

**6.** Parte del trabajo se transforma en energía potencial de todos los cuerpos que llegan a lo alto de la colina. Otra parte, incluida la que momentáneamente es energía cinética durante la marcha, ya no es más energía mecánica cuando el automóvil se detiene, y va a energía térmica de las partes y el ambiente.

**7.** El trabajo hecho sobre la jabalina se transforma casi íntegramente en energía cinética de la misma. Luego, a medida que ésta viaja, se va disipando una parte por el rozamiento, mientras una parte de la cinética juega transfiriéndose a potencial en la subida, y volviendo a cinética en la bajada. Al clavarse la jabalina toda la energía cinética que le resta es disipada por el rozamiento. Es decir que, finalmente, todo el trabajo hecho sobre la jabalina, es energía térmica de la jabalina y el ambiente.

**8.** El trabajo se acumula en gran medida en energía potencial elástica del arco. Alguna parte seguramente se ha disipado y es energía térmica de las partes.

**9.** La energía potencial almacenada en el arco, es el trabajo que éste hace sobre la flecha, y para él valen las mismas consideraciones que para la jabalina del punto anterior.

**10.** Una pequeña parte del trabajo hecho sobre el generador se disipa en rozamientos, otra parte se disipa en los conductores eléctricos, y la mayor parte se acumula como energía potencial electroquímica en los reactivos del acumulador. Toda la parte disipada se manifiesta en elevación de temperatura de las partes.

**11.** En este caso la parte que no se disipa en rozamientos ni en los conductores del generador, se disipa en la lámpara, irradiándose como energía de la luz y el calor correspondiente. Una parte de esta energía se manifiesta en la elevación de la temperatura de las partes de la lámpara, muy notable, pero a medida que transcurre el tiempo, esa parte no varía,

es decir no acumula más energía, la cual sin embargo sigue disipándose a ritmo constante. De manera que podemos pensar que la mayor parte de la energía viaja con la luz y el calor irradiados, mani-festándose como un aumento de la temperatura de partes cada vez a más lejanas del ambiente y los alrededores.

**12.** Si el generador no alimenta a nada, es decir, no entrega energía eléctrica a otros sistemas, entonces podemos asegurar que tampoco la está generando, y tampoco está tomando energía del motor. Esto, que puede asombrar, se entiende mejor cuando se conocen las leyes completas del funcionamiento de los generadores: por determinadas razones que tienen que ver con las fuerzas entre las corrientes eléctricas, la fuerza necesaria para producir la rotación del generador con determinada velocidad, aumenta proporcionalmente a las corrientes que circulan por sus conductores. Si no circula corriente porque el generador no está alimentando a otro sistema, entonces el motor no debe realizar trabajo sobre el generador, el cual podría mantenerse girando por inercia indefinidamente. Es decir, se detendría por el rozamiento, y el motor sólo debería proveer la energía que disipa el rozamiento. Mientras que, en cambio, cuando el generador alimenta eléctricamente a otro sistema, el motor que lo impulsa debe vencer una resistencia mecánica extra, que no se origina en el rozamiento sino en las corrientes con las que el generador alimenta a los sistemas correspondientes.

Así es como, en virtud de estas leyes de la electricidad, se entiende cómo el Principio de Conservación de la Energía explica la transferencia de energía en este tipo de sistemas.

## CAPÍTULO 7

### ▲ Ejercicio 7.1

Tenemos que en los casos (a) y (c) el eje pasa por el centro geométrico, el cual, dado que el cuerpo es homogéneo, es el centro de masa.

Aplicando teorema de Steiner, podemos decir, por un lado, que el momento de inercia es menor en el caso (a), que en el (b), y en éste menor que en el (e), y por otro lado, que en el caso (c) menor que en el (d).

Además, en el caso (c), que tiene la materia más cerca del eje, el momento de inercia es menor que en el (a), y por la misma razón, en el caso (d) es menor que en el (e).

Esto es suficiente para decir que el menor momento de inercia corresponde al caso (c), y el mayor al (e). A igualdad de forma y dimensiones, el mayor momento de inercia será el del material de más masa, o sea de

mayor densidad; para estos materiales, de hierro.

### ▲ Ejercicio 7.2

a) El brazo de palanca de  $\vec{F}_A$  es  $r$ , de manera que el momento aplicado por  $\vec{F}_A$  con respecto al eje es  $M_F = 10 \text{ N} \times 0,02 \text{ m} = 0,2 \text{ N}\cdot\text{m}$ , positivo por el sentido antihorario. Dado que además actúa el roce, con un momento  $M_{\text{roce}} = -0,010 \text{ N}\cdot\text{m}$ , el momento neto es  $M = 0,2 - 0,01 = 0,19 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

b) Sabemos que para el momento de inercia puede desprejarse la contribución del eje y del pequeño tambor en el que se enrolla el hilo. De manera que aplicando la fórmula para el momento de inercia de un cilindro o disco respecto de su eje, tenemos  $I = \frac{1}{2} m R^2 = 9 \times 0,17^2 / 2 = 0,13 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .

c) El trabajo hecho sobre el sistema por  $\vec{F}_A$  es  $10 \text{ N} \times 0,80 \text{ m} = 8 \text{ J}$ ; el trabajo hecho por el rozamiento es  $M_{\text{roce}} \Delta\theta$ , siendo  $\Delta\theta = 80 \text{ cm} / r = 40$  radianes  $\rightarrow W_{\text{roce}} = -0,40 \text{ J}$ . De manera que el trabajo neto ha sido  $8 \text{ J} - 0,40 \text{ J} = 7,6 \text{ J}$ , y éste debe ser el valor de la energía cinética de rotación adquirida, con lo cual la velocidad angular debe ser:

$$\omega = (2 E_c / I)^{1/2} = 10,8 \text{ 1/s.}$$

La cantidad de movimiento angular intrínseca es  $J = I \omega = 0,13 \times 10,8 = 1,40 \text{ J}\cdot\text{s}$ .

d) De no haber rozamiento, la rueda continuaría girando indefinidamente por inercia conservando la velocidad adquirida, pero habiéndolo, podemos decir que se frenará en un tiempo dado por  $\Delta t = \Delta J / M_{\text{roce}} = (0 - 1,4) \text{ J}\cdot\text{s} / (-0,01 \text{ N}\cdot\text{m}) = 140 \text{ s}$ .

### ▲ Ejercicio 7.3

a)  $I = (2/5) m R^2 = 0,4 \times 30 \text{ kg} \times (0,2 \text{ m})^2 = 0,48 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

b) Cantidad de movimiento angular intrínseco:

$$J = I \omega = 0,48 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \times 10 \text{ (1/s)} = 4,8 \text{ J}\cdot\text{s}$$

Para averiguar el momento aplicamos la Ley del Impulso para las rotaciones:

$$M \Delta t = \Delta J \rightarrow M = \Delta J / \Delta t = 4,8 / 4 = 1,2 \text{ N}\cdot\text{m}$$

### ▲ Ejercicio 7.4

a) La potencia suministrada puede escribirse como:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{M \Delta\theta}{\Delta t} = M \omega$$

En régimen el sistema ha alcanzado una velocidad angular a la cual el momento aplicado por el motor se equilibra con los rozamientos del sistema. Por lo tanto, el momento aplicado por el motor es lo mismo que el resistente:  $M = P / \omega$ .

Debemos escribir  $\omega$  en rad/s:

$$10^4 \text{ r.p.m.} = 10^4 \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ seg}}$$

$$10^4 \text{ r.p.m.} = \frac{10^4 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}}$$

$$10^4 \text{ r.p.m.} \cong 1047 \text{ 1/s.}$$

Entonces  $M = 100 \text{ W} / 1.047 \text{ (1/s)} = 0,0955 \text{ N}\cdot\text{m}$

b) Para la cantidad de movimiento angular,  $J = I \omega$ , y la energía cinética, necesitamos el momento de inercia.

$$I = \frac{1}{2} m R^2 = 2 \text{ kg} \times (0,1 \text{ m})^2 / 2 = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\text{Entonces } J = 0,01 \times 1047 = 10,47 \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = 0,01 \times 1047^2 / 2 = 5.481 \text{ J}$$

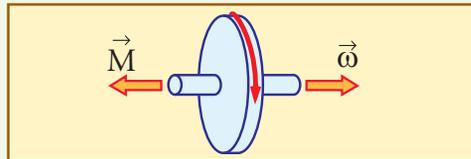
c) Tanto la fuerza centrífuga ( $F_c = m \omega^2 R$ ) como el peso de cualquier trozo de materia serán proporcionales a la masa, por lo cual podemos compararlos haciendo el cociente  $F_c / P$ :  $\frac{F_c}{P} = \frac{\omega^2 R}{g} \cong 11.200$

Es decir, y esto es lo que interesa en un proceso de centrifugado, es como si hubiésemos aumentado el campo gravitatorio en un factor 11.200.

### ▲ Ejercicio 7.5

a)  $J = I \omega = 0,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \times 30 \text{ rad/s} = 6 \text{ J}\cdot\text{s}$

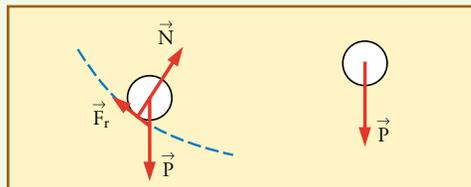
b)  $M = \Delta J / \Delta t = (0 - 6) / 3 = -2 \text{ N}\cdot\text{m}$  (el signo indica que el sentido es contrario al de la rotación inicial).



### ▲ Ejercicio 7.6

a) A la izquierda se muestran las fuerzas actuantes sobre la bolita mientras rueda en contacto con la rampa. Como se ve, ni el peso, ni la reacción normal de la pista aplican momento con respecto al centro de la bolita, y sólo el rozamiento  $\vec{F}_r$  lo hace, en el sentido de acelerar la rotación, y frenar la traslación (esta fuerza transfiere parte de la energía de traslación a rotación).

A la derecha se muestra la única fuerza actuante en la caída libre, el peso, como siempre, que no puede influir sobre la rotación, por lo cual la velocidad angular (intrínseca) se conservará desde que la bolita abandona la rampa.



b) Conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m g h = \text{constante.}$$

Consideramos altura cero en B:

$$E_{pA} = 0,600 \times 9,8 \times 0,10 = 0,588 \text{ J}; E_{pB} = 0 \text{ J}$$

$$E_{pC} = -1,176 \text{ J.}$$

Dado que en A la energía cinética es cero, podemos calcular allí la energía total  $E = 0,588 \text{ J}$ ; con este valor también tenemos la energía cinética en B (ya que  $E_{pB} = 0$ ):  $E_{cB} = 0,588 \text{ J}$ .

Ahora bien, este valor está repartido entre traslación y rotación:  $0,588 \text{ J} = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I \omega_B^2$

Para determinar cuánto vale cada término tenemos que considerar la condición de que la bolita rueda sin deslizar:  $\omega = v/R$ . Si sustituimos esto en la expresión de la energía cinética, queda:

$$E_{cB} = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_B^2}{R^2} = \frac{1}{2} \left( m + \frac{I}{R^2} \right) v_B^2$$

Si se tiene en cuenta que para una esfera  $I = (2/5) m R^2$ , queda

$$E_{cB} = \frac{1}{2} \frac{7}{5} m v_B^2 = \frac{7}{5} E_{cT(B)}$$

Es decir que en B, la energía cinética de traslación es  $5/7$  de la energía cinética total ( $0,420 \text{ J}$ ), y por ende, la de rotación debe ser  $2/7$  de la misma ( $0,168 \text{ J}$ ).

De manera que

$$v_B = \sqrt{2 \times 0,42 / 0,6} = 1,18 \text{ m/s}$$

$$\text{y } \omega_B = v_B / R = 47,33 \text{ rad/s}$$

Para el punto C decimos que la velocidad de rotación no ha cambiado desde B:

$$\omega_C = 47,33 \text{ rad/s}, E_{cR(C)} = 0,168 \text{ J}$$

y sólo ha aumentado la de traslación (en la medida en que ha disminuido la potencial):

$$E = 0,588 \text{ J} = E_{cT(C)} + 0,168 \text{ J} + (-1,176 \text{ J})$$

$$\text{Entonces: } E_{cT(C)} = 1,596 \text{ J}, \text{ y } v_C = 2,31 \text{ m/s.}$$

c) La inspección de la fórmula de la conservación de la energía,

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m g h = \text{constante}$$

habida cuenta de que  $I$  es proporcional a  $m$ , muestra que  $m$  se puede simplificar, y, como ya sabemos sobre todos estos movimientos, las velocidades no dependen de la masa. De manera que, con el cambio (c1), no variaría la velocidad.

Tampoco variaría la velocidad si se disminuyera el diámetro, dado que siempre tendríamos que  $I/R^2 = (2/5) m$ , y al sustituir eso llegaríamos exactamente a los mismos valores de velocidad.

Estamos tentados de pensar que nada afectaría a las velocidades, pero sin embargo, si la esfera fuese

hueca, cambiaría la relación  $I/R^2$  (en una esfera hueca, sería mayor que  $(2/5) m$ ).

Al efectuar los cálculos encontraríamos que la esfera rodaría con mayor proporción de energía de rotación frente a traslación, y eso haría que se obtenga menor velocidad de traslación (y de rotación).

### ▲ Ejercicio 7.7

El sistema debe conservar la cantidad de movimiento angular, y como para simplificar vamos a considerar que cada astronauta es una partícula puntual, (ambos de la misma masa  $m$ ), estamos hablando de la cantidad de movimiento angular orbital, que inicialmente es:

$$L = 2 m v_0 b$$

Ahora bien, si los astronautas simplemente esperan hasta estar a  $10 \text{ m}$  uno de otro, y en ese momento se sujetan con la cuerda para no alejarse más, continuarán con un movimiento circular uniforme de  $5 \text{ m}$  de radio, y  $2 \text{ m/s}$  de velocidad lineal cada uno. En este movimiento estarán girando con un período de  $2\pi R / v = 15,7$  segundos, y sentirán una fuerza centrífuga (que será igual a la que tensará la cuerda) de  $m v_0^2 / R = 64 \text{ N}$ , es decir, condiciones bastante suaves.

Pero a medida que tiren de la soga para acercarse, no podrán evitar que aumente la velocidad para conservar  $L = 2 m v R$ . Cuando hayan reducido su separación a  $5 \text{ m}$ , tendremos  $R = 2,5 \text{ m}$ , y  $v = 4 \text{ m/s}$ , estarán girando con un período de  $3,9$  segundos, y la fuerza centrífuga valdrá  $512 \text{ N}$ . Es decir la situación ya será incómoda: girarán muy rápido, y para acercarse tendrán que tirar de la cuerda con una fuerza que ya se acerca al valor del peso (en la Tierra) de cada uno.

Una persona no puede tirar con una fuerza mucho mayor que su peso en la Tierra, de manera que lo que se pueden aproximar no es mucho. Pero además lo logran a expensas de adquirir una tremenda velocidad de rotación. Si pongamos que logran llegar a  $3 \text{ m}$  uno de otro, tendremos:  $R = 1,5 \text{ m}$ ,  $v = 6,67 \text{ m/s}$ ,  $T = 1,4 \text{ s}$ , y  $F = 2370 \text{ N}$ . No sólo es una situación insostenible, sino que si se rompiese la cuerda (o si se soltasen y no estuviesen enganchados), cada uno se alejaría del otro con una velocidad bastante mayor que la inicial, y con una molesta rotación sobre sí mismo.

Podemos preguntarnos de dónde sale la energía cinética que adquieren: pues de su propio trabajo tirando de la cuerda. Tenemos aquí un ejemplo más de cómo una fuerza interior puede aumentar la energía cinética de un sistema aislado.

