

三维有限元非线性导热计算程序 FemHC

刘瑜¹, 朱可可², 万秋里¹, 王成恩¹

(1. 上海交通大学机械与动力工程学院, 上海 200240;

2. 中国航空发动机集团有限公司沈阳发动机研究所, 沈阳 110015)

摘要: 介绍采用有限元法求解稳态和瞬态非线性导热方程的计算程序 FemHC, 明确求解导热问题所依据的控制方程和有限元离散方法, 描述 FemHC 的基本框架和核心类, 并通过典型导热问题验证 FemHC 计算的准确性。采用 FemHC 计算三维涡轮叶片的热传导, 结果表明 FemHC 可以用于实际涡轮叶片等复杂结构导热问题的计算。

关键词: 导热; 数值模拟; 非线性; 计算程序; 有限元

中图分类号: TP391.99; TB115.1 **文献标志码:** B

Three dimensional finite element program FemHC for nonlinear heat conduction calculation

LIU Yu¹, ZHU Keke², WAN Qiuli¹, WANG Cheng'en¹

(1. School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. AECC Shenyang Engine Research Institute, Shenyang 110015, China)

Abstract: The calculation program FemHC for solving steady state and transient nonlinear heat conduction equations by finite element method is introduced. The governing equation and finite element discretization method for solving the heat conduction problem are defined. The basic framework and core classes of FemHC is described. The calculation accuracy of FemHC is verified by typical heat conduction problems. The heat transfer of three-dimensional turbine blades is calculated by FemHC, and the results show that FemHC can be used to calculate the heat conduction problems of complex structures such as actual turbine blades.

Key words: heat conduction; numerical simulation; nonlinear; calculation program; finite element

0 引言

当在更严格和更复杂的条件下进行结构导热研究时, 非线性导热问题分析变得更加重要, 如涡轮叶片导热计算、功能梯度材料^[1]导热计算等。导热问题中存在各种非线性, 例如, 非线性热源和汇、非线性

边界条件(如边界上的辐射和非线性对流换热)、具有相变的导热和与温度相关的材料特性等。为解决这些非线性问题, 通常使用有限差分法^[2]、有限元法^[3]、有限体积法^[4]和边界元方法^[5]等。本文介绍一种新开发的基于有限元法求解温度相关各向同性材料热传导的程序 FemHC。

收稿日期: 2021-11-26 修回日期: 2022-01-17

基金项目: 国防科技基础加强项目(2020-JCJQ-ZD-193-11)

作者简介: 刘瑜(1984—), 男, 湖南临澧人, 博士, 研究方向为计算力学, (E-mail) liuyu0718@sjtu.edu.cn

1 非线性结构导热问题的有限元法

描述区域 Ω 中固体导热的控制方程为

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + Q \quad (1)$$

式中: T 为温度; ρ 为密度; C 为比热容; k_{ij} 是热传导张量分量; Q 为单位体积的内部热生成源项; 下标 i 和 j 满足爱因斯坦求和规则。所有的变量都可能是空间坐标 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 和时间 t 的函数。方程的求解需要指定合适的初值条件, 即

$$\begin{cases} T = f_T(s_k, t), & t \in \Gamma_T \text{ 且 } t > 0 \\ - \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_i = q_a + q_c = f_q(s_k, T, t) \end{cases} \quad (2)$$

式中: s_k 为边界上点的坐标; q_a 为应用通量, 一般给定具体的值; q_c 为对流换热通量,

$$q_c = h_c(s_k, T, t) (T - T_c) \quad (3)$$

式中: h_c 为对流换热系数。

以上边界条件包含固体与环境之间的热传导和对流传热。物性系数 ρ 、 C 、 k_{ij} 和 h_c 可以是温度的函数, 因而各方程可以是非线性的。

方程的初始条件为

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad (4)$$

初值问题的有限元求解分为 2 步: (1) 空间离散, 将控制方程的弱形式在典型的有限单元上进行离散, 得到关于温度的常微分方程, 即得到温度节点值的常微分方程组; (2) 采用合适的方法, 如有限差分法, 对第一步得到的常微分方程组进行时间离散, 得到关于 t_{n+1} 时刻节点值的代数方程组。定常问题可以不考虑时间项, 根据问题的非线性特点选择合适的迭代方法求解即可。

1.1 半离散有限元模型

将对流传热区域 Ω 离散为适合有限单元的集合, 在方程两侧乘以权函数 $\omega(x)$, 在单元 Ω_e 上进行积分, 对高阶导数项进行分部积分, 在边界积分中应用边界条件, 得到离散元弱形式为

$$0 = \int_{\Omega_e} \left(\omega \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - Q \right) + k_{ij} \frac{\partial \omega(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_e} (q_a + q_c) \omega d\Gamma \quad (5)$$

将温度 T 的有限元近似代入到弱形式中, 得到半离散的有限元模型。在选择 T 的近似时, 假设时间变化和空间变化可以分离, 即

$$T(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{n_e} T_{e,i}(t) \Psi_{e,i}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

式中: T_e 为节点的温度向量; n_e 为单元 Ω_e 的节点

数目。

将其表示为矩阵形式为

$$T(\mathbf{x}, t) = \Psi_e^T T_e \quad (7)$$

其中: Ψ_e^T 是单元 Ω_e 的插值函数向量,

$$\Psi_e^T = [\Psi_{e,1} \quad \Psi_{e,2} \quad \cdots \quad \Psi_{e,n_e}] \quad (8)$$

令权函数 $\omega(\mathbf{x}) = \Psi_{e,i}(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \dots, n_e$), 并将温度的插值函数代入到弱形式中, 得

$$M_e(T_e) \dot{T}_e + K_e T_e = Q_e(T_e) - q_e(T_e) \quad (9)$$

其中: $\dot{T} = \frac{dT}{dt}$, 且

$$\begin{cases} M_{e,ij} = \int_{\Omega_e} \rho C \Psi_{e,i} \Psi_{e,j} d\Omega \\ K_{e,ij} = \int_{\Omega_e} k_{mn} \frac{\partial \Psi_{e,i}}{\partial x_m} \frac{\partial \Psi_{e,j}}{\partial x_n} d\Omega \\ Q_{e,i} = \int_{\Omega_e} \Psi_{e,i} Q(\mathbf{x}, t) d\Omega \\ q_{e,i} = \int_{\Gamma_e} (q_a + q_c) \Psi_{e,i} d\Gamma \end{cases} \quad (10)$$

采用有限元法对控制方程和边界条件离散并进行装配, 得到非线性常微分方程组

$$M\dot{T} + \hat{K}T = \hat{F} \quad (11)$$

单元系数矩阵和向量可以表示为向量形式

$$\begin{cases} M_e = \int_{\Omega_e} \rho C \Psi_e \Psi_e^T d\Omega \\ K_e = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_e}{\partial x_m} k_{mn} \frac{\partial \Psi_e^T}{\partial x_n} d\Omega \\ Q_e = \int_{\Omega_e} \Psi_e Q d\Omega \\ q_e = \int_{\Gamma_e} \Psi_e (q_a + q_c) d\Gamma \end{cases} \quad (12)$$

本文设计软件采用的方程形式是最一般的情形, 材料物性、边界条件和体积源项都是温度的函数。装配矩阵可以表示为

$$\begin{cases} M = \sum_e M_e \\ K = \sum_e K_e \\ F = \sum_e F_e \\ F_e = \Theta_e + q_e \end{cases} \quad (13)$$

在式(13)中, 求和在网格所有的单元上进行。一旦插值函数确定, 单元几何就确定, 可以得到全局装配方程为

$$M(\dot{T}) + K(T)T = F(T) \quad (14)$$

对边界面通量进行计算, 最终得到

$$M\dot{T} + \hat{K}T = \hat{F} \quad (15)$$

其中:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{C} \\ \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{Q} - \mathbf{q}_a + \mathbf{F}_h \end{cases} \quad (16)$$

式中: \mathbf{Q} 为源项; \mathbf{q}_a 为边界上指定的热流通量在边界上的积分; \mathbf{C} 为对流换热边界对刚度矩阵的贡献; \mathbf{F}_h 为对流换热边界对右端项的贡献。 \mathbf{C} 和 \mathbf{F}_h 的表达式为

$$\mathbf{C} = \sum_{\Gamma_s} \int_s h_c ds \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_h = \sum_{\Gamma_s} \int_s h_c T_c ds \quad (18)$$

式中: Γ_s 为对流换热边界。

1.2 非线性方程组的求解

根据是否为时间相关问题,可将非线性方程组的求解分为 2 类:稳态问题和瞬态问题。稳态问题可采用 Picard 迭代方法求解。瞬态问题要先对时间导数项进行离散,然后对每一时间步的非线性方程组采用 Picard 迭代。为增加稳定性,还可以采用松弛算法,具体细节见文献[6]。在程序中,线性方程组采用 BiCGStab 算法,并采用开源线性方程组求解器 Eigen^[7] 求解。

2 有限元程序的实现

为开发有限元计算涡轮叶片结构导热的程序,首先建立有限元计算框架。该框架具有如下特点:(1)可以统一处理一维、二维和三维问题;(2)能够根据具体问题灵活指定边界条件,将网格与求解过程完全解耦;(3)不限制有限单元类型,支持添加新的有限单元;(4)支持混合单元;(5)能够方便处理多区域问题(如果计算域不同区域具有不同的物性参数)和多物理场耦合问题。

2.1 统一处理一维、二维和三维问题

当前流行的 CAE 软件,如 FLUENT 和 OpenFOAM 等,不具有全维度模拟能力,FLUENT 只能处理二维和三维网格,OpenFOAM 只能处理三维网格。OpenFOAM 要计算一维和二维问题时,只能在三维网格上指定合适的边界条件模拟一维和二维问题。在程序开发和问题求解的初始阶段,往往要先从简单的一维和二维问题着手,在一维和二维问题取得满意的效果后再解决复杂的三维问题。如果算法能同时处理一维、二维和三维问题,那么可以为程序的开发和问题的求解提供很大便利。

以经典热传导方程为例,说明有限元法如何统一处理一维、二维和三维问题。其控制方程为

$$\begin{cases} q_{i,i} = l, & \text{in } \Omega \\ u = u_b, & \text{on } \Gamma_D \\ -q_i n_i = h, & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \quad (19)$$

根据傅里叶定律,

$$q_i = -\kappa_{ij} u_{,j}, \quad \kappa_{ij} = \kappa_{ji} \quad (20)$$

式中: u 为温度; q 为热通量; κ 为热传导系数。控制方程的伽辽金有限元离散公式为

$$-\int_{\Omega} \omega_{,i} q_i d\Omega = \int_{\Omega} \omega l d\Omega + \int_{\Gamma_N} \omega h d\Gamma \quad (21)$$

式中: ω 为单元形状函数。

根据问题维度的不同,式(21)的积分对象不同:对于三维问题,其为体积分和边界上的面积分;对于二维问题,其为面积分和边界上的线积分;对于一维问题,其为线积分和边界上的点积分。因此,可以根据问题维度将体网格单元和组成边界的面,或者面网格单元和组成边界的线,或者线网格单元和组成边界的点都视为有限单元存储。将点统一以三维坐标存储,采用高斯积分公式对这些积分项进行近似计算。

以三维问题为例,对于体积分,有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \omega l(x,y,z) d\Omega &= \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \omega l(\xi,\eta,\zeta) j(\xi,\eta,\zeta) d\xi d\eta d\zeta &\approx \\ \sum_{i=1}^{n_{int}} (\omega l)_i j_i W_i & \end{aligned} \quad (22)$$

式中: $j = \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right)$; W 为高斯积分权重;下标 i 表示第 i 个积分点; n_{int} 表示高斯积分点的数目。

对于面积分,有

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_N} \omega h d\Gamma &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\omega} h(\xi,\eta) j(\xi,\eta) d\xi d\eta \approx \\ \sum_{i=1}^{n_{int}} (\hat{\omega} h)_i j_i \hat{W}_i & \end{aligned} \quad (23)$$

式中: $\hat{\omega}$ 为面单元的形状函数; \hat{W} 为面单元上高斯积分的权函数。

在程序中建立有限元空间时,除建立体单元的有限元,还需要建立边界上面单元的有限元;如果偏微分方程的求解算法需要考虑网格内面的面积分,还可以建立内面有限元。如此处理后,可以采用同样的方法计算体积分和面积分,因而可以统一处理一维、二维和三维网格,增加程序的灵活性和适用范围。

2.2 将网格与求解过程完全解耦

根据具体问题,灵活指定边界条件,将网格与求

解过程完全解耦。数值模拟往往需要考虑多种边界条件类型,如果在网格文件中包含所求解问题的具体边界条件,当需要改变边界条件类型时,需要在网格生成软件中更改,较为繁琐。为将网格与求解过程完全解耦,本软件设计单纯网格文件和边界条件文件。

2.2.1 单纯计算网格文件

网格输入依赖于3个文件,分别是网格节点文件 node.txt、网格单元文件 element.txt 和网格边界文件 boundary.txt。将某二维计算域 $(1,5) \times (1,1)$ 均匀分割为9个线性四边形单元,网格文件截图见图1~3。网格边界文件是在计算域划分网格时得到的,与具体的问题无关,因而可将网格文件与求解过程解耦。

```
$Node
16 //节点总数
1 -1 -1 //网格节点编号 x-坐标 y-坐标
2 1 -1
3 3 -1
4 5 -1
5 -1 -0.333333
6 1 -0.333333
7 3 -0.333333
8 5 -0.333333
9 -1 0.333333
10 1 0.333333
11 3 0.333333
12 5 0.333333
13 -1 1
14 1 1
15 3 1
16 5 1
```

图1 网格节点文件

```
$Element
9 //单元总数
1 3 1 2 6 5 //单元编号 单元类型 单元节点编号
2 3 2 3 7 6
3 3 3 4 8 7
4 3 5 6 10 9
5 3 6 7 11 10
6 3 7 8 12 11
7 3 9 10 14 13
8 3 10 11 15 14
9 3 11 12 16 15
```

图2 网格单元文件

```
$Boundary
12 //边界面元总数
1 1 1 1 2 //边界面元编号 边界面元所在的边界编号 边界面元单元类型
边界面元节点编号
2 1 1 2 3
3 1 1 3 4
4 2 1 13 14
5 2 1 14 15
6 2 1 15 16
7 3 1 1 5
8 3 1 5 9
9 3 1 9 13
10 4 1 4 8
11 4 1 8 12
12 4 1 12 16
```

图3 网格边界文件

2.2.2 边界条件文件

程序求解需要根据具体问题指定相应的边界条件,由 boundaryType.txt 指定,相应的文件示例截图见图4。对于具有多个变量的偏微分方程,不同的变量在同一边界上一般会有不同的边界条件。为此,每个变量都需要存储边界条件。存储的边界条

件数据分为2类:(a) Dirichlet 边界,存储的基本数据包含 Dirichlet 边界的体单元编号和该体单元在 Dirichlet 边界上的节点编号,可以用 C++ 的容器 map 存储;(b)需要进行面积分的边界,存储的数据是边界面元对应的有限元空间的编号。

```
$Boundary type
4 //待指定边界条件的网格边界数
1 0 0 1 //边界编号(与网格边界文件对应) u-边界条件 v-边界条件
w-边界条件 p-边界条件
2 0 0 1
3 0 0 1
4 1 1 1
```

图4 边界条件文件

这样处理的优点是可以将网格生成与方程求解分开,同时可以对不同变量灵活指定边界条件,容易增加求解变量,添加新的边界条件也容易。当然,就导热计算而言,只需指定温度边界条件即可。

2.3 程序框架的核心部分

程序采用 C++ 语言编写,主要应用 C++ 的面向对象和标准模板库部分。程序编写的基本原则是尽量采用小类和类的组合,避免编写巨类。其核心类如下。

(a) 节点类 Node。Node 类存储网格节点的坐标。

(b) 有限元空间类 FESpace。为灵活添加有限元空间,有限元空间类设计为抽象基类。该类用于计算有限元形状函数及其导数,存储高斯积分点坐标和积分权重等。基类的派生类生成具体的有限元空间。

(c) 单元类 Element 及其集合 ElementSet。Element 类存储单元类型、单元节点编号等。Element 类还存储指向有限元空间基类的智能指针,在建立具体单元时对有限元空间进行构造。程序不限制有限单元的类型,支持混合单元,可以根据需要添加合适的单元。ElementSet 是 Element 的集合,包含对 Element 进行操作的成员函数。

(d) 边界类 Boundary。Boundary 类存储边界单元、边界单元所在的体单元的编号和边界条件类型。

(e) 有限元节点上存储变量编号类 FemIndex。FemIndex 类建立单元节点上所存储变量的编号与单元节点编号的关系。为灵活处理多物理场耦合问题的变量存储和调用,可以对所有的变量统一进行编号,也可以对某一变量单独进行编号。

(f) 方程装配类。方程装配类包括装配有限元离散得到的左端项矩阵 BiLinearForm 和右端项向量 LinearForm。这2个类被设计为抽象基类,方程中具体的左端项矩阵和右端项向量为相应基类的派生

类。稀疏矩阵以压缩行形式或压缩列形式存储。

(g)控制文件类 ControlFile。控制文件类的功能包括读入求解器控制参数、读入初始条件和边界条件、读入物性函数。该类能够将文本文件中读入的字符串解析为数学函数,从而避免 hard-coding。在程序中使用开源字符串解析库 exprtk^[8]。该库采用 C++ 编写,使用时不需要安装第三方库,具有较快的字符串解析速度。程序所采用的输入文本文件中导热系数和源项的字符串表达形式实例见图 5。

```
#multizone-kappa //指定用分段函数表示的物体导热系数, tem为温度
0
if (tem < 300)
r := 10;
else if (tem < 400)
r := 10+0.1*tem;
else if (tem < 500)
r := 20+0.2*tem;
else
r := 40+0.3*tem;
#end

#temperature-source //源项函数, x,y,z为坐标值, t为时间
r := exp(2*x)*((5*pi*pi*sin(t) + cos(t))*sin(pi*y) -
10*pi*sin(t)*cos(pi*z) + 125*pi*pi*sin(pi*z/2)-500*pi*cos(pi*z/2));
```

图 5 exprtk 字符串解析实例

由此可见,exprtk 与常规的函数表达形式十分接近,exprtk 读入这些字符串后将其解析为数学函数。核心类之间的关系见图 6。

3 程序验证和应用

为验证所采用算法及其程序实现的准确性,对若干算例进行计算,并与分析解或参考解进行比较,然后应用该程序对三维涡轮叶片的导热进行数值模拟。

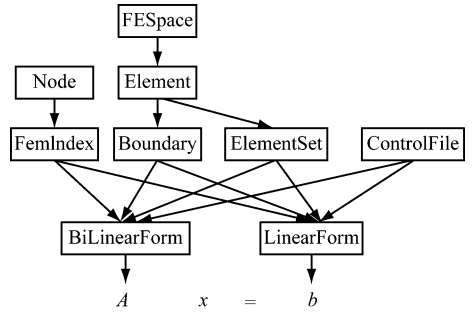


图 6 核心类之间的关系

3.1 二维矩形条传热问题

以长宽比为 2:1 的矩形条的传热问题为例,建立传热系统的二维模型。矩形内有加热源项,左侧有热流流进,右侧温度恒定,上侧施以对流换热冷却,下侧为绝热壁面。利用格林函数可以得到该问题的定常精确解。用于测试的相关参数如下:矩形长 0.10 m、宽 0.05 m,材料的热传导系数为 0.4 W/(m·K),体积加热源项为 $Q = 1.353 \times 10^5$ W/m³。边界条件设定为:左侧热流密度为 3 500 W/m²,右侧壁面给定温度 25 °C。计算时对网格进行逐次细化,采用 1 阶和 2 阶四边形单元进行计算,并估计有限元的精度阶。左下角点 P_1 、上侧壁面中点 P_2 和左上角点 P_3 等 3 个测点有限元计算网格收敛性见表 1,估计的精度阶见表 2,可见计算结果符合有限元的理论精度。2 阶四边形单元计算得到的温度场见图 7。

表 1 有限元计算网格收敛性计算结果

网格划分($n \times n$)		P_1		P_2		P_3
		温度/°C	热流量 q_x /W	温度/°C	热流量 q_x /W	温度/°C
4 节点 单元	5 × 5	855.578 414 662 833	3 120.598 794 373 05	127.902 443 273 651	5 534.926 506 397 87	226.597 088 740 594
	10 × 10	854.392 352 389 129	3 300.658 531 428 85	128.250 438 575 136	5 864.497 103 444 72	231.078 541 313 293
	20 × 20	854.099 392 734 004	3 398.875 140 750 62	128.219 236 337 846	6 027.584 495 003 43	233.177 687 843 624
	40 × 40	854.026 403 092 412	3 449.244 353 948 06	128.212 283 268 754	6 109.844 277 916 00	234.001 536 079 911
	80 × 80	854.008 167 546 402	3 474.597 610 273 51	128.210 572 342 570	6 151.162 285 433 0	234.289 174 033 595
	160 × 160	854.003 593 222 992	3 487.295 733 152 54	128.210 142 829 896	6 171.866 269 495 36	234.382 147 023 013
	320 × 320	854.002 434 371 263	3 493.647 479 984 80	128.210 035 306 676	6 182.226 099 956 00	234.410 696 861 675
9 节点 单元	5 × 5	854.003 092 069 066	3 483.370 623 049 32	128.214 906 493 041	6 187.651 423 751 08	232.413 411 213 376
	10 × 10	854.001 987 397 602	3 497.795 456 584 33	128.209 757 225 188	6 191.835 228 499 26	233.821 515 388 913
	20 × 20	854.002 086 752 995	3 499.720 285 128 0	128.209 994 014 630	6 192.402 625 678 32	234.260 144 267 377
	40 × 40	854.002 094 963 566	3 499.964 900 587 39	128.210 002 983 666	6 192.551 040 041 92	234.380 920 173 604
	80 × 80	854.002 066 371 677	3 499.995 610 549 78	128.210 000 501 744	6 192.587 765 266 54	234.412 111 891 120
	160 × 160	854.002 047 480 089	3 499.999 450 857 74	128.209 998 997 716	6 192.583 604 027 08	234.419 961 363 569
	320 × 320	854.001 918 518 984	3 499.999 931 059 03	128.209 981 249 368	6 192.611 390 531 9	234.421 898 604 899
	精确解	854.002	3 500.00	128.210	6 192.60	234.423

表2 4节点单元有限元解的精度阶估计结果

网格划分($n \times n$)	P_1		P_2		P_3
10 × 10	2.013 80	0.928 482	2.927 05	1.003 220	1.226 49
20 × 20	2.002 89	0.979 104	2.130 34	0.991 547	1.425 27
40 × 40	1.996 75	0.994 497	2.016 22	0.995 671	1.563 03
80 × 80	1.984 30	0.998 604	1.996 15	0.997 915	1.655 05
160 × 160	1.952 75	0.999 651	2.002 58	0.998 965	1.711 84
320 × 320	1.874 95	0.999 912	2.016 29	0.999 021	1.731 41

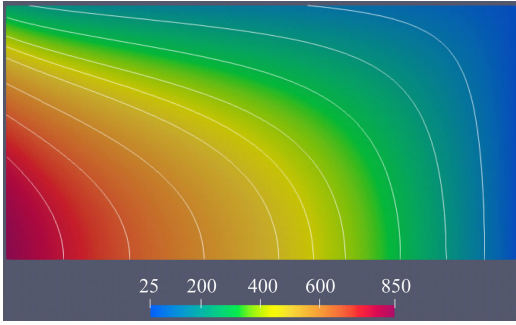


图7 2阶四边形单元计算得到的温度场,K

3.2 直条的瞬态导热

直条长度 5 m, AISI 304 无缝钢管。初始温度为 300 K。直条左边界指定温度 900 K, 右侧指定 Neumann 条件。热扩散系数 $\alpha = \kappa/\rho C_p$ 为温度的函数 $\alpha(t) = aT + b$, 其中, $a = 2.0 \times 10^{-6}$, $b = 0.0037$ 。

该问题本质上是一维问题, 首先采用一维网格计算。时间离散采用隐式 Euler 格式, 时间步长取 1。分别采用自由度为 200 的 1 阶单元和 2 阶单元计算, 得到 $x = 0.4$ 测点处的温度变化情况。采用二维网格进行计算, 取直条的宽度为 1, 采用自由度为 800 的 1 阶和 2 阶四边形网格, 计算测点 $x = 0.4$ 、 $y = 0.5$ 处的温度情况, 并与一维结果进行对比, 见图 8。一维计算和二维计算都与文献[9]参考解吻合很好。

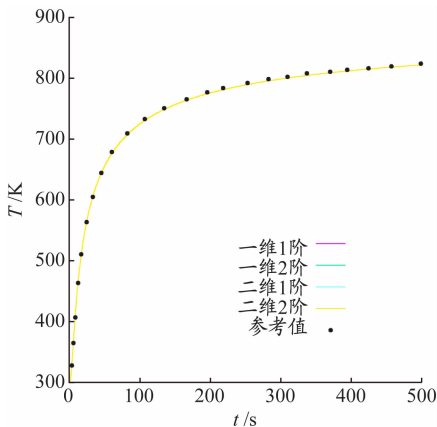


图8 一维和二维计算测点温度变化曲线

3.3 三维功能梯度材料模拟

研究具有指数函数物性系数的功能梯度材料的导热问题, 计算域为 $[0, L]^3$ 的立方体。材料的导热系数和热容系数沿 z 方向变化, 其变化方程为

$$\kappa(x, y, z) = 5e^{2z} \quad (24)$$

$$c(x, y, z) = e^{2z} \quad (25)$$

$$q(0, y, z, t) = 0; \quad q(1, y, z, t) = 0;$$

$$q(x, 0, z, t) = 0; \quad q(x, 1, z, t) = 0;$$

$$T(x, y, 0, t) = 0; \quad T(x, y, 1, t) = 0 \quad (26)$$

该问题的精确解为

$$T(x, y, z, t) = T_{\max} \frac{1 - e^{-2\beta z}}{1 - e^{-2\beta L}} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-\beta z} e^{-(n^2\pi^2/L^2 + \beta^2)\alpha t} \quad (27)$$

$$B_n = -\frac{2T_{\max} e^{\beta L}}{\beta^2 L^2 + n^2 \pi^2} \times \left(\beta L \sin(n\pi) \frac{1 + e^{-2\beta L}}{1 - e^{-2\beta L}} - n\pi \cos(n\pi) \right) \quad (28)$$

采用 1 阶六面体网格计算, 时间离散采用隐式 Euler 格式, 步长取 0.001。不同时刻, 直线 $(0.5, 0.5, z)$ 上的温度分布曲线见图 9, 有限元计算结果与精确解吻合很好。

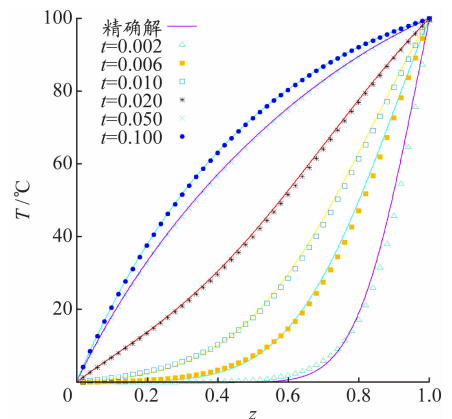


图9 直线(0.5,0.5,z)上的温度分布曲线

3.4 具有多种材料的物体导热计算

如果导热物体的不同部分采用不同的导热材料,而且不同材料的导热系数差别很大,那么温度计算就很困难。以建筑行业的标准算例^[10]为例,该算例计算墙横截面的导热,截面的长 500.0 mm、宽 47.5 mm。墙体由 4 种不同的材料组成,最大和最小导热系数分别为 230 和 0.029 W/(m·K)。

参照文献[10],多种材料物体的边界条件和不同材料的导热系数见图 10。上表面环境温度为 0 °C,表面热阻为 0.06 m²·K/W;下表面环境温度为 20 °C,表面热阻为 0.11 m²·K/W。表面热阻与换热系数的关系为

$$R = \frac{1}{h_c + h_r} \quad (29)$$

式中: R 为表面热阻; h_c 和 h_r 分别为对流换热系数和辐射换热系数。忽略辐射的影响,近似可得物体上、下表面换热系数分别为 16.667 和 9.090 9 W/(m²·K)。

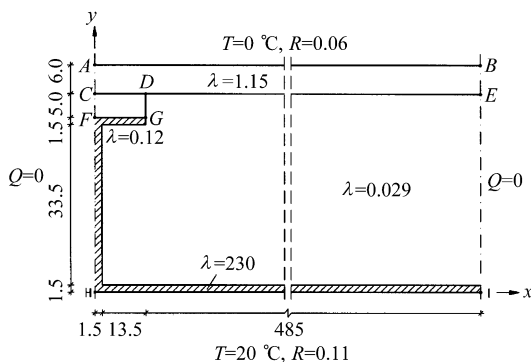


图 10 计算域和不同区域的导热系数和边界条件示意,mm

计算网格包含 11 636 个三角形单元、4 575 个四边形单元以及 53 208 个节点。温度场分布计算结果见图 11。不同测点的温度计算结果与参考解的对比见表 3。本文计算结果与参考解^[10]吻合很好,验证程序计算多区域问题的能力。

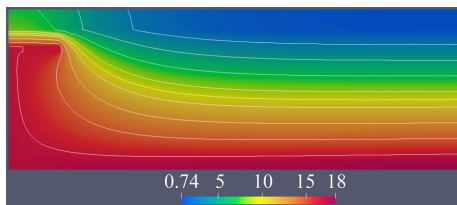


图 11 具有多种材料的物体的温度云图,°C

3.5 不含冷却流道的三维叶片的稳态导热计算

某不含冷却流道的三维叶片及其不同面上的边界条件设定见图 12,其计算网格见图 13,含有 67 617 个四面体单元、15 802 个节点。进行线性导热计算,叶片的导热系数为 12 W/(m·K)。计算得到的叶片表面温度云图见图 14,叶片内部切片温度

云图见图 15。

表 3 有限元计算的测点温度与参考解对比

测点编号	测点位置	计算结果/°C	参考解/°C
A	(0,0.047 5)	7.07	7.1
B	(0.500,0.047 5)	0.76	0.8
C	(0,0.041 5)	7.90	7.9
D	(0.015,0.041 5)	6.26	6.3
E	(0.500,0.041 5)	0.83	0.8
F	(0,0.036 5)	16.41	16.4
G	(0.015,0.036 5)	16.33	16.3
H	(0,0)	16.77	16.8
I	(0.500,0)	18.33	18.3

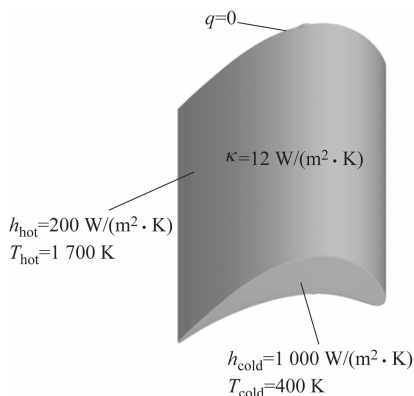


图 12 三维叶片导热边界条件

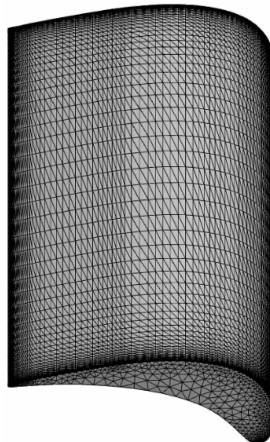
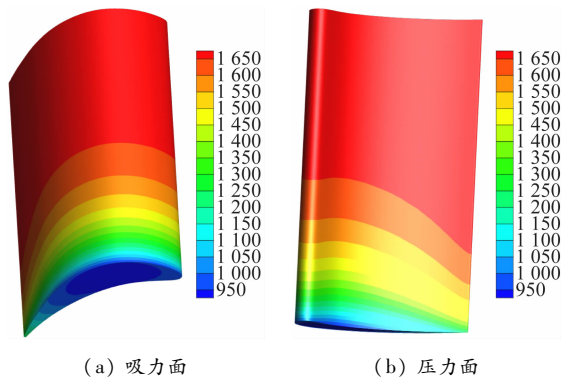


图 13 三维叶片导热计算网格



(a) 吸力面 (b) 压力面

图 14 三维叶片温度云图,K

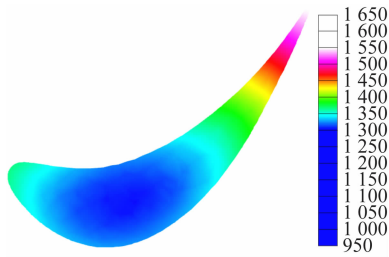


图15 叶片切片上的温度云图,K

3.6 含冷却流道的三维叶片的稳态导热计算

选取某含9个冷却流道的三维叶片,计算网格见图16,具有436952个四面体单元、90021个节点。叶片的导热系数是关于温度的分段线性函数,作为算例测试的导热系数函数为

$$\kappa(T) = \begin{cases} 10, & 0 \leq T < 300 \\ 10 + 0.1T, & 300 \leq T < 400 \\ 20 + 0.2T, & 400 \leq T < 500 \\ 40 + 0.3T, & T \geq 500 \end{cases} \quad (30)$$

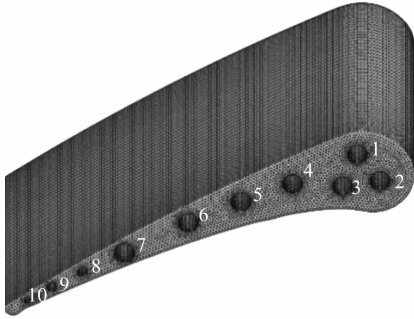


图16 带冷却流道的涡轮叶片计算网格

叶片叶身以及每个冷却流道指定对流换热边界条件,换热系数和换热温度各不相同。叶身上的换热温度和换热系数分别为1700K和200W/(m·K),冷却流道1~10表面的换热温度依次为400、500、600、700、800、900、950、1000、1050和

1100K,冷却流道1~10的换热系数依次为1000、1100、1200、1300、1400、1500、1600、1700、1800和1900W/(m·K),在其余边界上指定绝热边界条件。

计算得到叶片的温度云图见图17。计算在GNU/Linux系统上进行,处理器为AMD Ryzen5 3550H,其主频为2.10GHz,当残值小于 1×10^{-10} 时计算终止,所用时间为112s。本例说明程序指定复杂物性参数和处理任意多个边界条件的能力。

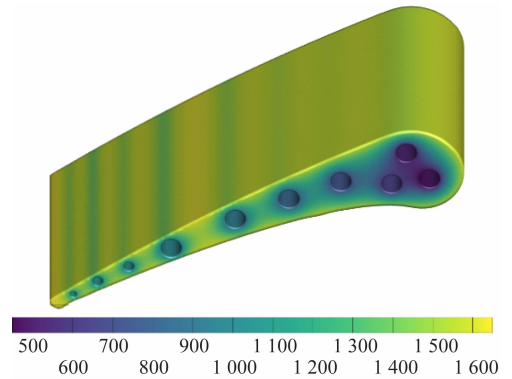


图17 带冷却流道的涡轮叶片温度云图,K

4 结束语

介绍有限元非线性导热计算程序FemHC所采用的算法和具体的实现细节。FemHC通过将网格与具体的问题解耦,可以灵活指定边界条件,通过字符串解析库实现物性参数、初始边值条件、源项函数和计算控制参数从外部文本文件中读取,大大增加程序的灵活性。通过若干算例验证FemHC在计算线性/非线性、稳态/瞬态计算中的准确性。通过三维涡轮叶片的导热计算,表明FemHC可以用于实际涡轮叶片的计算。

参考文献:

- [1] MALEK M, IZEM N, MOHAMED M S, et al. A three-dimensional enriched finite element method for nonlinear transient heat transfer in functionally graded material[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2020, 155: 119804. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119804.
- [2] LEI J, WANG Q, LIU X, et al. A novel space-time generalized FDM for transient heat conduction problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2020, 119: 1-12. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.003.
- [3] MENG Z, CHENG H, MA L, et al. The dimension splitting element-free Galerkin method for 3D transient heat conduction problems[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2018, 62(4): 40711. DOI: 10.1007/s11433-018-9299-8.
- [4] PRESTUNI D, FILIPPINI G, ZDANSKI P, et al. Fundamental approach to anisotropic heat conduction using the element-based finite volume method[J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2017, 71(4): 327-345. DOI: 10.1080/10407790.2017.1293966.
- [5] FENG W Z, GAO L F, DU J M, et al. A meshless interface integral BEM for solving heat conduction in multi-non-homogeneous media with multiple heat sources[J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2019, 104: 70-82. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2019.03.001.
- [6] REDDY J N, GARTLING D K. The finite element method in heat transfer and fluid dynamics[M]. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2010: 100-107.

(下转第62页)

波长的 $1/3$ 左右,计算结果即可满足一定精度要求。总之,通过构建二次单元可以提高计算效率。

需要说明的是,本文虽然仅讨论无限元方法在外域声场计算中的应用,但该方法同样适用于内域问题。另外,本文的计算方法可应用于工程结构

(如舰船与潜艇)的外域声场计算,虽然许多工作还有待深入,如无限元外部形状对计算的影响,以及考虑结构的材料属性时的结构与流体耦合问题等,这些问题都将在后续的工作中进行讨论。

参考文献:

- [1] ASTLEY R J, EVERSMA W. Wave envelope elements for acoustical radiation in inhomogeneous media[J]. Computers & Structures, 1988, 30(4): 801-810. DOI: 10.1016/0045-7949(88)90108-3.
- [2] BURNETT D S, HOLFORD R L. Prolate and oblate spheroidal acoustic infinite elements[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 158: 117-141. DOI: 10.1016/S0045-7825(97)00251-X.
- [3] ASTLEY R J, MACAULAY G J, COYETTE J P. Mapped wave envelope elements for acoustical radiation and scattering[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 170(1): 97-118. DOI: 10.1006/jsvi.1994.1048.
- [4] CREMERS L, FYFE K R. On the use of variable order infinite wave envelope elements for acoustic radiation and scattering[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 97(4): 2028-2040. DOI: 10.1121/1.411994.
- [5] 杨瑞梁, 汪鸿振. 声无限元进展[J]. 机械工程学报, 2003, 39(11): 82-89. DOI: 10.3321/j.issn:0577-6686.2003.11.013.
- [6] 庞福振. 船舶结构噪声截断模型数值预报方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2012.
- [7] 尹绪超. 声学无限元方法及其在水下航行器噪声预报中的应用研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2012.
- [8] 苏楠, 庞福振, 王毅娜, 等. 基于声学无限元法的加筋圆柱壳声振特性研究[J]. 船海工程, 2014, 43(2): 7-12. DOI: 10.3963/j.issn.1671-7953.2014.02.003.
- [9] 田正东, 苏楠, 姚熊亮. 基于映射声无限元法柱壳振动声辐射特性分析[J]. 中国舰船研究, 2014, 9(2): 42-47. DOI: 10.3969/j.issn.1673-3185.2014.02.008.
- [10] JIANG J, YANG H, CHEN G, et al. Numerical and experimental analysis on the vibration and radiated noise of the cylinder washing machine [J]. Applied Acoustics, 2021, 174: 107747. DOI: 10.1016/j.apacoust.2020.107747.
- [11] MOHEIT L, ANTHIS S, HEINZ J, et al. Analysis of scattering by finite sonic crystals in free field with infinite elements and normal modes[J]. Journal of Sound and Vibration, 2020, 476: 115291. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115291.
- [12] MOHEIT L, MARBURG S. Infinite elements and their influence on normal and radiation modes in exterior acoustics [J]. Journal of Computational Acoustics, 2017, 25(4): 1650020. DOI: 10.1142/S0218396X1650020X.
- [13] 吴健, 李泽成, 熊晨熙. 基于 Abaqus 的水下结构声辐射仿真方法[J]. 计算机辅助工程, 2015, 24(6): 37-41. DOI: 10.13340/j.cae.2015.06.007.
- [14] 杜功焕, 朱哲民. 声学基础[M]. 3版. 南京: 南京大学出版社, 2012: 202-207.

(编辑 陈锋杰)

(上接第 56 页)

- [7] GUENNEBAUD G, JACOB B. Eigen v3[EB/OL]. (2021-01-01)[2021-11-20]. <http://eigen.tuxfamily.org>.
- [8] PARTOW A. C++ mathematical expression library[EB/OL]. (2021-01-01)[2021-11-20]. <http://www.partow.net/programming/exprtk/>.
- [9] SOARES D, WROBEL L C. A locally stabilized explicit approach for nonlinear heat conduction analysis[J]. Computers & Structures, 2019, 214: 40-47. DOI: 10.1016/j.compstruc.2019.01.004.
- [10] BLOMBERG T. Heat conduction in two and three dimensions: Computer modelling of building physics applications[D]. Lund: Lund University, 1996.

(编辑 武晓英)