# SISTEMAS TRIFÁSICOS

## 1.- Generación de un sistema trifásico de tensiones equilibradas

Si una espira rígida gira con velocidad $\omega$ constante en el seno de un campo magnético uniforme, se genera en la misma una tensión senoidal debido a que el flujo que la atraviesa tiene una variación senoidal en el tiempo. Igualmente se logra esa tensión permaneciendo fija la espira y girando los polos con velocidad angular $\omega$ constante. Este último procedimiento es el que se utiliza en la práctica en los alternadores.

Si a lo largo del diámetro interior del estator de un alternador se distribuyen uniformemente *3p* bobinas iguales, esto es, *p* grupos de *3* bobinas, siendo *p* el número de pares de polos del alternador y *3* el número de fases, y si la rueda polar es simétrica, al girar el rotor con velocidad angular $\omega_g$, se induce en cada bobina una tensión alterna senoidal de pulsación $\omega$, formando un sistema trifásico de tensiones equilibradas.

La pulsación de la tensión inducida será: $\omega = p\omega_g$, lo que quiere decir que en una máquina de *p* pares de polos basta una rotación de 1/p de vuelta, que equivale a 360/p grados geométricos, para obtener un periodo de la tensión inducida, esto es 360º eléctricos.

Las tensiones inducidas serán:

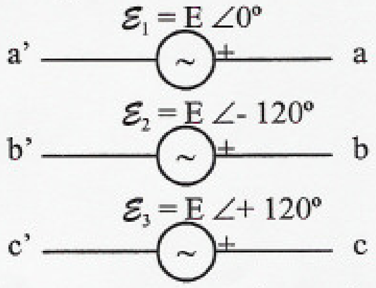
$$e_1(t) = \sqrt{2} \cos \omega t \cdot E$$
$$e_2(t) = \sqrt{2} \cos (\omega t - 2\pi/3)\, E$$
$$e_3(t) = \sqrt{2} \cos (\omega t - 4\pi/3)\, E$$

Expresándolas en el campo complejo, y tomando como origen de gases la tensión de la fase 1:

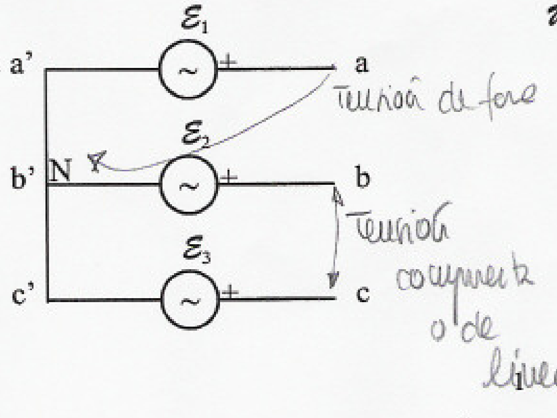
$$\mathcal{E}_1 = E \angle 0^\circ \qquad \mathcal{E}_2 = E \angle -120^\circ \qquad \mathcal{E}_3 = E \angle -240^\circ$$

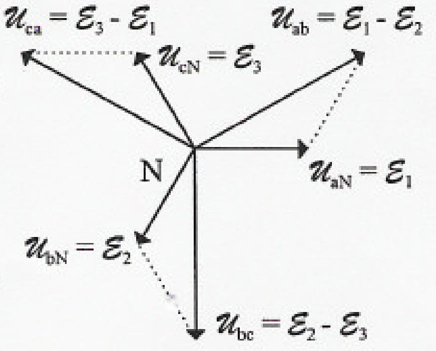
## 2.- Conexión de fuentes en estrella y en triángulo

En la Fig. se representa un sistema trifásico equilibrado de fuentes de tensión.



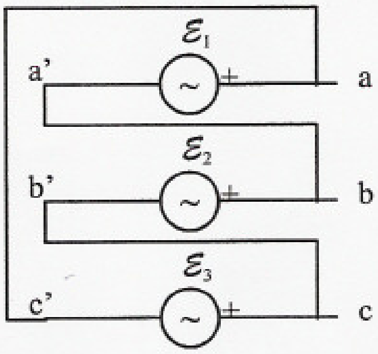

La conexión en estrella se obtiene uniendo en un punto común N, llamado neutro, los terminales a', b' y c' de polaridad de referencia negativa.

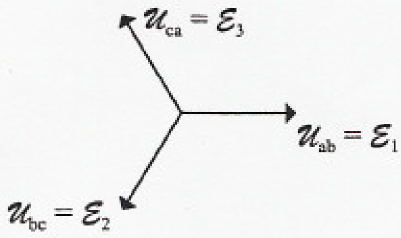



SD

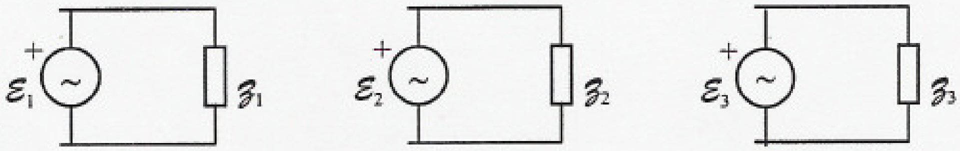
La conexión en triángulo se obtiene conectando sucesivamente los terminales de distinta polaridad.





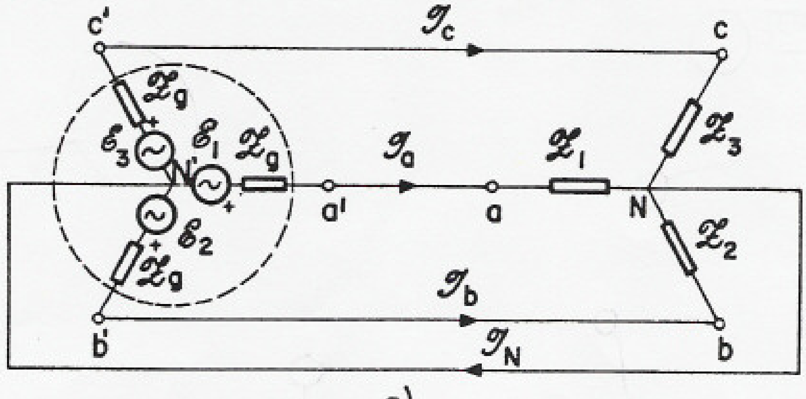

## 3.- Tensión simple o de fase y tensión compuesta o de línea. Intensidades de fase y de línea. Relaciones entre las mismas en sistemas equilibrados

Un sistema trifásico de fuentes de tensión puede utilizarse para suministrar corriente a tres cargas.

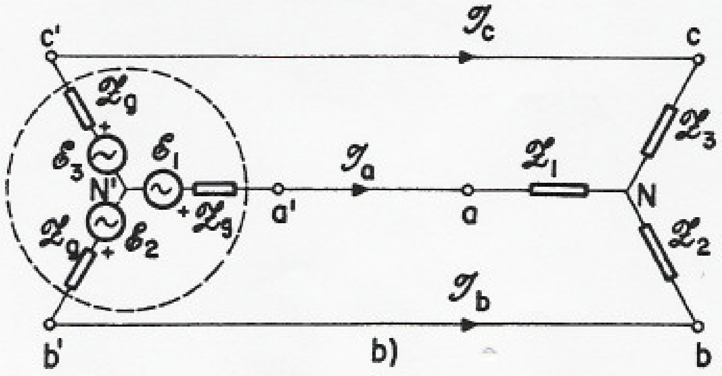


No es usual la conexión independiente, ya que requiere seis conductores para distribuir la energía a las cargas. La conexión de éstas en estrella o en triángulo permite una reducción de ese número de conductores.

En la Fig a) se representa la conexión Y-Y, con hilo neutro y en la Fig. b), sin hilo neutro. Los generadores incluyen la impedancia de los devanados donde se inducen las tensiones de cada fase.

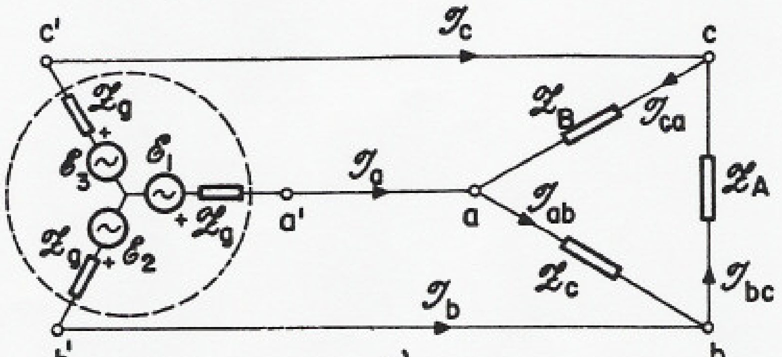


a)



b)

En la Fig c) se representa la conexión Y-Δ. También cabe considerar las conexiones Δ-Y, Δ-Δ.




c)

***Tensión simple o de fase*** es la que existe entre un hilo o terminal de fase y el punto neutro. Para las cargas en estrella, la tensión de fase es la que aparece en la correspondiente impedancia, por ejemplo, $\mathcal{U}_{aN}$ para $\mathcal{Z}_1$ en los dos casos representados.

Cuando existe hilo neutro, y en el supuesto de que la impedancia de ese hilo pueda considerarse despreciable, el generador y la carga tienen las mismas tensiones de fase, ya que en este caso N y N' están al mismo potencial.

***Tensión de línea*** es la que existe entre dos conductores de línea, es decir, entre dos fases. Si se considera que es nula la impedancia ofrecida por esos conductores, las tensiones de línea en la carga son idénticas a las que tienen en la salida del generador.

***Intensidad de línea*** es la corriente que circula por los conductores de la línea de conexión entre el generador y la carga.

***Intensidad de fase*** a la que suministra uno de los generadores del sistema o la que consume uno de los receptores de la carga.

En los sistemas en estrella, ya sean cargas o generadores, la intensidad de línea coincide con la de fase, esto es:

$$\mathcal{I}_L = \mathcal{I}_F$$

Para la conexión triángulo, por el contrario, es la tensión de línea la que coincide con la tensión de fase, es decir:

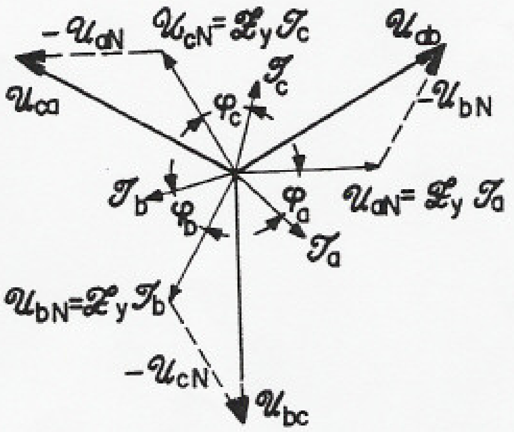
$$\mathcal{U}_L = \mathcal{U}_F$$

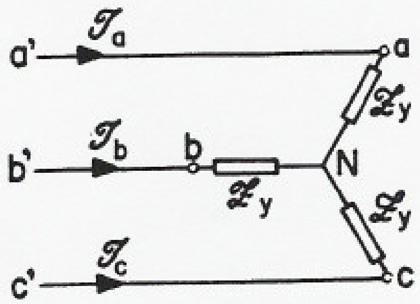
Un sistema trifásico se dice que es equilibrado cuando lo es la carga y el generador, esto es, cuando las impedancias que representan estos elementos en sus distintas fases son iguales entre sí y las fuentes de tensión del sistema están equilibradas. La línea de distribución ha de presentar también una misma impedancia por fase.

En los sistemas equilibrados, tanto las tensiones como las intensidades, ya sean las de fase o las de línea, forman un conjunto de magnitudes equilibradas. Los vectores a ellas asociados son de igual módulo y entre cada dos sucesivos hay una diferencia de fase constante.

*Relaciones entre magnitudes de línea y de fase en los sistemas equilibrados*

Sean tres impedancias de carga iguales, conectadas en estrella, a las que alimentamos mediante un sistema trifásico equilibrado de tensiones de secuencia directa.




El diagrama vectorial que se representa en la Fig. muestra que las intensidades de fase forman también un sistema equilibrado, puesto que:

$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c$ e $I_a = I_b = I_c$ ya que las impedancias en estrella son iguales entre si.

Las tensiones de línea serán: SD

$\mathcal{U}_{ab} = \mathcal{U}_{aN} + \mathcal{U}_{Nb} = \mathcal{U}_{aN} - \mathcal{U}_{bN} = U_{aN}\,(1 \angle 0° - 1 \angle -120°) = U_{aN}\,\sqrt{3}\,\angle 30°$

SI $\rightarrow U_{aN}\sqrt{3}\,\angle -30°$

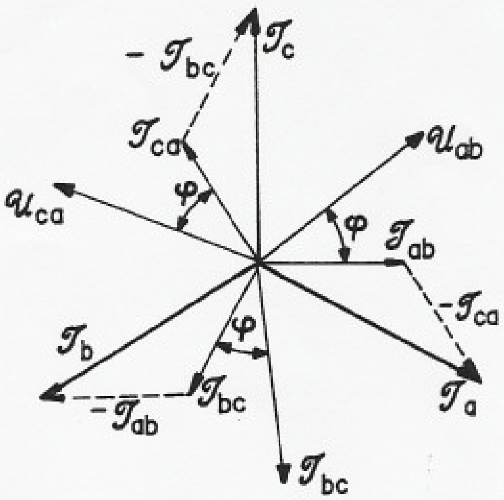
Por tanto, podemos escribir:

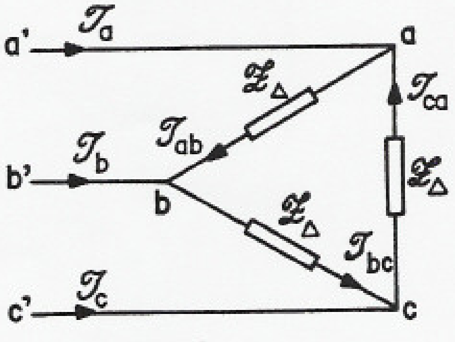
$$\mathcal{U}_{ab} = \mathcal{U}_{aN}\,\sqrt{3}\,\angle 30°$$
$$\mathcal{U}_{bc} = \mathcal{U}_{bN}\,\sqrt{3}\,\angle 30°$$
$$\mathcal{U}_{ca} = \mathcal{U}_{cN}\,\sqrt{3}\,\angle 30°$$

esto es: $U_L = \sqrt{3}\,U_F$

con adelanto de 30º de la tensión de línea respecto de la tensión de fase del mismo origen. Esto solo es valido para tensiones de línea tomadas en secuencia directa. Las mismas conclusiones obtenidas para las cargas se deducen para los generadores en Y.

Consideremos ahora el caso en que las tres impedancias de carga estén conectadas en triángulo y sea también positiva la secuencia de las tensiones de línea.



Las intensidades de fase que representamos en el diagrama vectorial, forman un mismo ángulo φ, igual al argumento de $\mathcal{Z}_\Delta$, con las respectivas tensiones.

Las intensidades de línea vienen dadas por:

$$\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_{ab} - \mathcal{I}_{ca}$$
$$\mathcal{I}_b = \mathcal{I}_{bc} - \mathcal{I}_{ab}$$
$$\mathcal{I}_c = \mathcal{I}_{ca} - \mathcal{I}_{bc}$$

o bien por:

$$\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_{ab}\, \sqrt{3}\ \angle\text{-}\ 30^\circ$$
$$\mathcal{I}_b = \mathcal{I}_{bc}\, \sqrt{3}\ \angle\text{-}\ 30^\circ$$
$$\mathcal{I}_c = \mathcal{I}_{ca}\, \sqrt{3}\ \angle\text{-}\ 30^\circ$$

esto es: $I_L = \sqrt{3}\ I_F$

con retraso de 30º de la intensidad de línea respecto de la intensidad de fase del mismo origen de referencia y de sucesión directa.

Ha de observarse que si los generadores están también conectados en triángulo, para las intensidades de fase suministradas por ellos se verificará:

$$\mathcal{I}_{ab} = \mathcal{I}_{b'a'}$$
$$\mathcal{I}_{bc} = \mathcal{I}_{c'b'}$$
$$\mathcal{I}_{ca} = \mathcal{I}_{a'c'}$$

## 4.- Noción de fase y secuencia de fases

***Fase.-*** Cada una de las partes de un circuito en que se genera, se transmite o se utiliza una de las tensiones del sistema.

***Secuencia de fases.-*** Es el orden en que se suceden las correspondientes tensiones. Hay que recordar que los vectores asociados a las funciones senoidales se representan en la posición correspondiente a un instante determinado, por ejemplo, t = 0, pero son unos vectores rotatorios que giran con velocidad angular constante ω en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

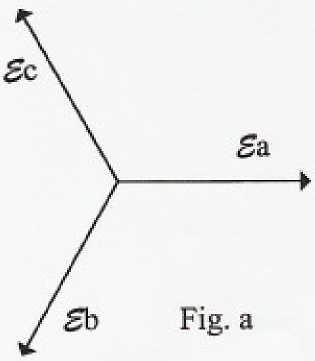



Fig. a

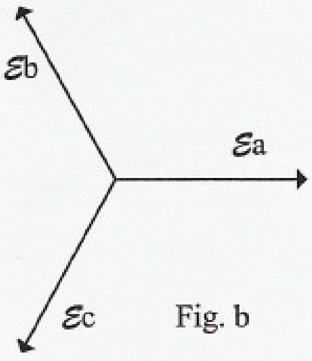



Fig. b

En la Fig.a) el orden en que los vectores van coincidiendo con el eje que pase por el origen es *a, b, c*, y en este caso, se dice que el sistema trifásico, tal y como le hemos numerado, es de *secuencia positiva* o *secuencia directa.*

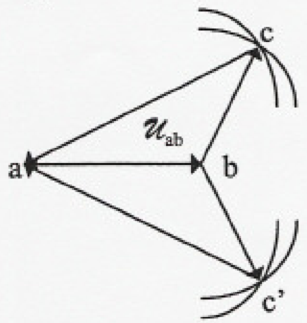
En la Fig. b) se representa un sistema trifásico equilibrado de *secuencia negativa* o *inversa.* Nótese que la secuencia de fases expresa el orden en que se suceden los máximos de los valores instantáneos de las tensiones.

Hay que tener en cuenta que este concepto es relativo, pues para determinar la secuencia en un punto de la red lo primero que tenemos que hacer es marcar los conductores y luego determinar experimentalmente el orden en que se suceden las tensiones. Si ocurre que éstas se suceden en el orden convencional de las marcas, el sistema de tensiones es de secuencia directa, y si no ocurre así es de secuencia inversa, es decir basta cambiar dos marcas cualesquiera, para tener la secuencia contraria.

Aún así, el concepto de secuencia, a veces denominado secuencia de fases, es útil. El orden de sucesión de fases de un sistema polifásico es causa de que este produzca un campo rotativo en un sentido u otro. También se producen resultados distintos en los sistemas desequilibrados al aplicarse en ellos fuentes de secuencia contrarias, en este caso, de sistemas desequilibrados, los vectores del diagrama correspondiente no son de igual módulo, no están separados por igual ángulo o se dan las dos circunstancias simultáneamente.

## 5.- **Determinación de la secuencia de fases**

La medición del valor eficaz de las tensiones de línea de un sistema trifásico permite determinar las diferencias de fase entre unas y otras tensiones. Estas tensiones forman un triángulo, ya que $\Sigma\mathcal{U} = 0$, y si tomamos como referencia de fases una de las tensiones, por ejemplo, $\mathcal{U}_{ab}$, conocidos los tres lados, podemos construir el triángulo y calcular sus ángulos, de los que se deducen inmediatamente los argumentos o ángulos de fase de las otras tensiones.

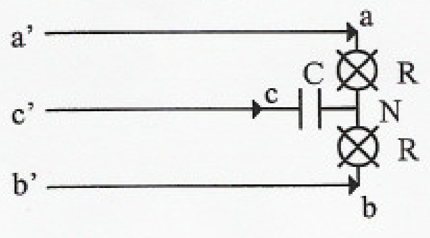



Sin embargo, los arcos de circunferencia trazados desde a y b con radios iguales, $U_{ab}$ y $U_{bc}$, se cortan en dos puntos distintos c y c'. Aunque, geográficamente, uno y otro triángulos son iguales, físicamente dan lugar a interpretaciones y a resultados distintos.

Para el triángulo abc, las tensiones $\mathcal{U}_{ab}$, $\mathcal{U}_{bc}$, $\mathcal{U}_{ca}$, son de secuencia inversa o negativa, y en cambio, para el triángulo abc' tales tensiones son de secuencia directa o positiva. Los argumentos de las tensiones complejas son bien distintos en uno y otro caso, por lo que las intensidades en un sistema trifásico de receptores conectados a los terminales a, b, c es diferente según sea la secuencia de fases de las tensiones. Este hecho constituye el fundamento de ciertos dispositivos que sirven para conocer esta rotación o secuencia de fases.

***Determinación con dos lámparas y un condensador***

La estrella representada en la Fig. está formada por las resistencias iguales R de dos lámparas de incandescencia de las mismas características y por el condensador C.

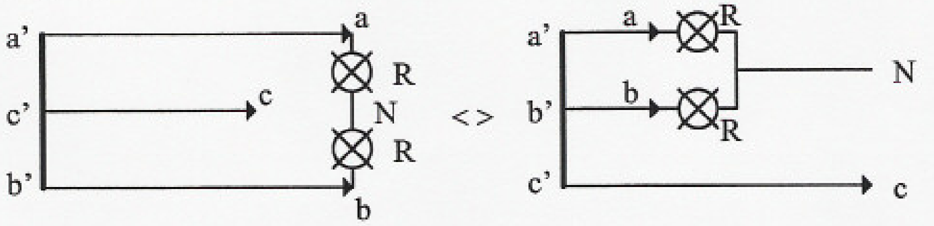


Las intensidades de corriente que circulan por una y otra lámpara y, por consiguiente, sus intensidades luminosas, son muy diferentes, circunstancia que nos permite conocer la secuencia de fases.

En efecto, construyamos el triángulo equilátero de las tensiones de línea, y determinemos el punto N que define las tensiones en los lados de la estrella.

Para ello, construyamos el equivalente según Thevenin de todo el circuito trifásico respecto de los bornes c y N del condensador C.

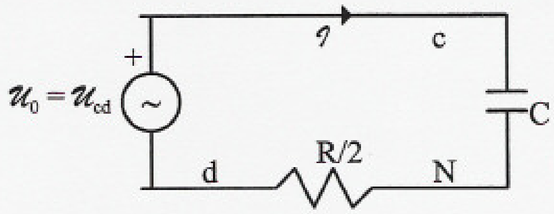
Para calcular la impedancia de entrada o impedancia Thevenin cortocircuitamos los terminales a', b', c'.



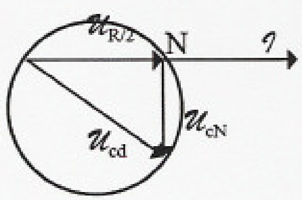

$$Req = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2}$$

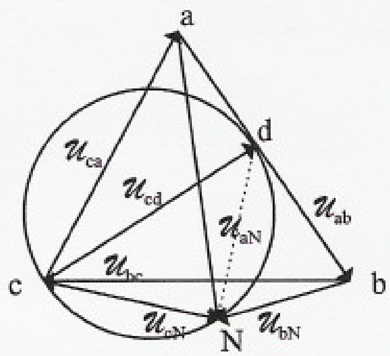
La tensión a circuito abierto o tensión equivalente Thevenin $\mathcal{U}_0$, viene definida por $\mathcal{U}_{cd}$. El punto d es el medio del ab y representa el potencial de N en esas condiciones, ya que entonces la tensión $\mathcal{U}_{ab}$ queda dividida en dos partes iguales por las lámparas en serie.

Tenemos por tanto definido el equivalente Thevenin respecto a los terminales del condensador C




La tensión en la resistencia R/2 y la tensión en el condensador C del circuito de esta Fig. están en cuadratura. Por tanto, estando la intensidad adelantada en fase respecto de la tensión $\mathcal{U}_{cd}$, el lugar geométrico de los puntos N, es una semicircunferencia de diámetro $\mathcal{U}_{cd}$. Para un punto cualquiera de esta circunferencia, exceptuados por los extremos de su diámetro, que corresponde a C = ∞ y C = 0, es siempre: $U_{aN} > U_{bN}$.

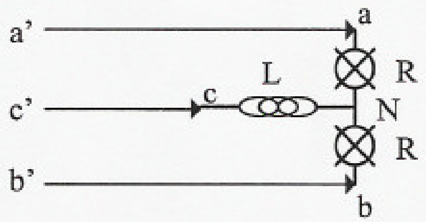


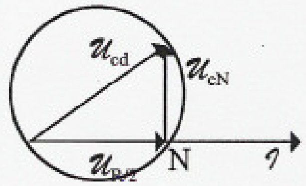

Llegamos a la conclusión de que la tensión aplicada a la lámpara que brilla más, va en adelanto de fase respecto de la tensión que hay en la lámpara que brilla menos.

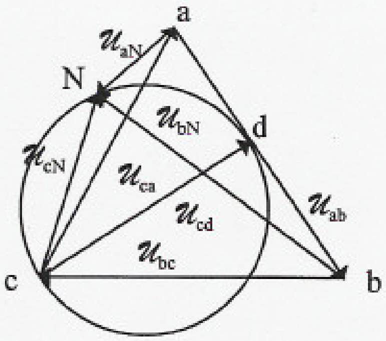
***Determinación con dos lámparas y una bobina***

La estrella representada en la Fig. está formada por las resistencias iguales R de dos lámparas de incandescencia de las mismas características y por la bobina L.




En este caso la intensidad está retrasada en fase respecto de la tensión $\mathcal{U}_{cd}$, el lugar geométrico de los puntos N, es una semicircunferencia de diámetro $\mathcal{U}_{cd}$. Para un punto cualquiera de esta circunferencia, exceptuados por los extremos de su diámetro, que corresponde a $L = \infty$ y $L = 0$, es siempre: $U_{bN} > U_{aN}$.

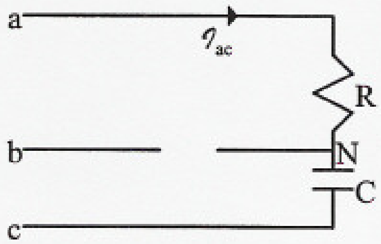



Llegamos a la conclusión contraria al caso anterior. En este caso la lámpara que brilla más es la que recibe la tensión $\mathcal{U}_{bN}$.

***Determinación con una resistencia y un condensador***

Esta conexión, permite caracterizar la secuencia de fases en fuentes de tensión equilibradas.




La intensidad $\mathcal{I}_{ac}$ va adelantada respecto a la tensión $\mathcal{U}_{ac}$ un ángulo $\varphi = \text{arc tg} \dfrac{\omega C}{R}$

Las tensiones en R y C están en cuadratura, por lo que en el diagrama vectorial, el lugar geométrico del potencial del punto N es una semicircunferencia. La intersección de esta con la dirección de $\mathcal{I}_{ac}$ dada por $\varphi$, determina ese punto N, ya que la tensión en R está en fase con la intensidad que por ella circula.

Se llega a la conclusión, como puede observarse en la Fig. a), que para la secuencia directa, es siempre: $U_{bN} < U_L$ y en la Fig. b) para la secuencia inversa $U_{bN} > U_L$. Siendo $U_L$, la tensión de línea. Una y otra tensión pueden medirse mediante un voltímetro.

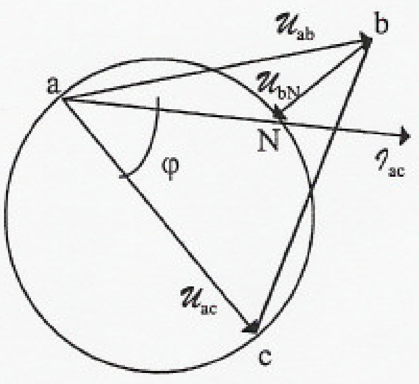


Fig a)

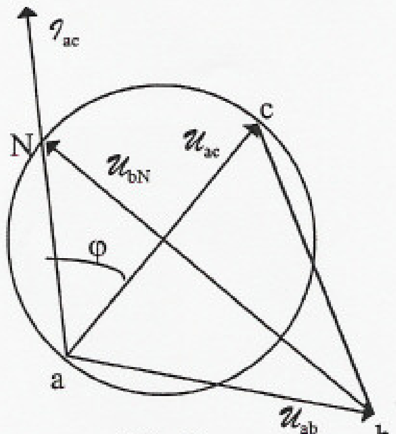
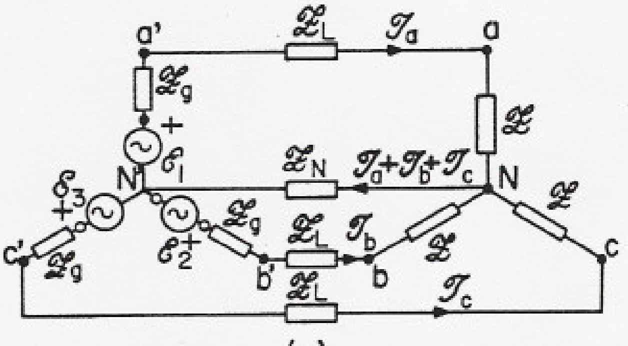


Fig. b)

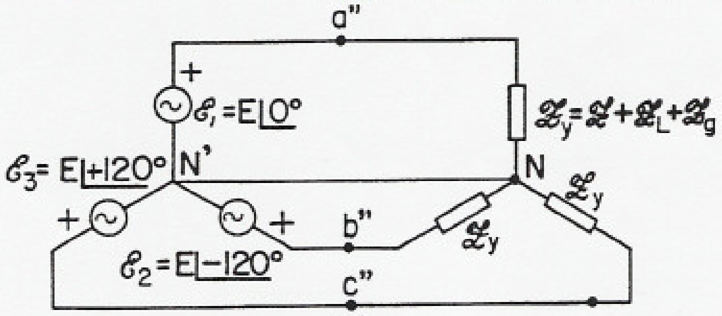
## 6.- Resolución de circuitos trifásicos equilibrados. Reducción a un problema monofásico

### 6.1.- Conexión estrella-estrella

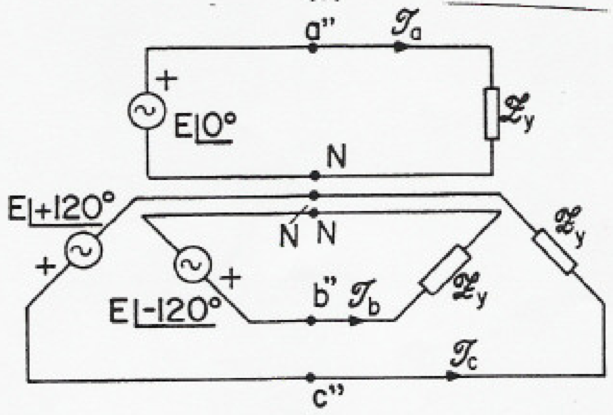
En el sistema trifásico equilibrado Y-Y que representamos en la Fig.



(a)



(b)



(c)

Consideramos las impedancias $\mathcal{Z}_g$, o interna del generador, $\mathcal{Z}_L$, o de los conductores de línea y $\mathcal{Z}_N$, o del hilo neutro, además del las impedancias $\mathcal{Z}$ de carga. Las ecuaciones circulares correspondientes a los lazos básicos definidos por cada fase y el hilo neutro son:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= (\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z})\,\mathcal{I}_a + \mathcal{Z}_N\,(\mathcal{I}_a + \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_c)\\ \mathcal{E}_2 &= (\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z})\,\mathcal{I}_b + \mathcal{Z}_N\,(\mathcal{I}_a + \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_c) \qquad (1)\\ \mathcal{E}_3 &= (\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z})\,\mathcal{I}_c + \mathcal{Z}_N\,(\mathcal{I}_a + \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_c)\end{aligned}$$

y siendo:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = 0 \qquad (2)$$

y puesto que se trata de un generador equilibrado, se verifica que:

$$0 = (\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z} + 3\,\mathcal{Z}_N)\,(\mathcal{I}_a + \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_c)$$

Luego:

$$\mathcal{I}_a + \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_c = 0 \qquad (3)$$

por lo que:

$\mathcal{U}_{NN'} = \mathcal{Z}_N\,(\mathcal{I}_a + \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_c) = 0$ cualquiera que sea el valor de la impedancia $\mathcal{Z}_N$

Si no hay hilo neutro, $\mathcal{Z}_N = \infty$, las ecuaciones (1) pueden escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= (\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z})\,\mathcal{I}_a + \mathcal{U}_{NN'}\\ \mathcal{E}_2 &= (\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z})\,\mathcal{I}_b + \mathcal{U}_{NN'} \qquad (4)\\ \mathcal{E}_3 &= (\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z})\,\mathcal{I}_c + \mathcal{U}_{NN'}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2) resulta que:

$$(\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z})\,(\mathcal{I}_a + \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_c) + 3\,\mathcal{U}_{NN'} = 0$$

por lo que, verificandose (3), se concluye que también es: $\mathcal{U}_{NN'} = 0$ (5)

Los puntos neutros de la carga y del generador en los sistemas trifásicos equilibrados están al mismo potencial, ya exista o no hilo neutro. Esto nos permite poner en cortocircuito los puntos N y N' sin que se altere en nada el régimen de intensidades en las distintas partes del sistema.

Esta situación se representa en la Fig. b), donde se han sustituido las impedancias en serie $\mathcal{Z}_g$, $\mathcal{Z}_L$ y $\mathcal{Z}$ por una impedancia $\mathcal{Z}_Y$ equivalente.

Teniendo en cuenta la condición (5) en las ecuaciones (4), obtenemos:

$$\mathcal{I}_a = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{Z}_Y}, \qquad \mathcal{I}_b = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{Z}_Y}, \qquad \mathcal{I}_c = \frac{\mathcal{E}_3}{\mathcal{Z}_Y}$$

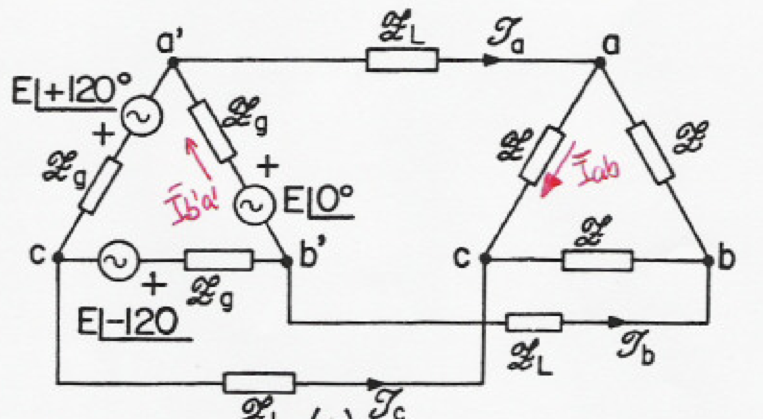
Es el mismo resultado que considerando aisladamente los tres circuitos monofásicos que se representan en la Fig. c), donde cada uno de ellos está formado con los elementos de una sola fase y con los puntos N y N' cortocircuitados.

Dado que el sistema es equilibrado, una vez calculada $\mathcal{I}_a$, se puede escribir directamente:

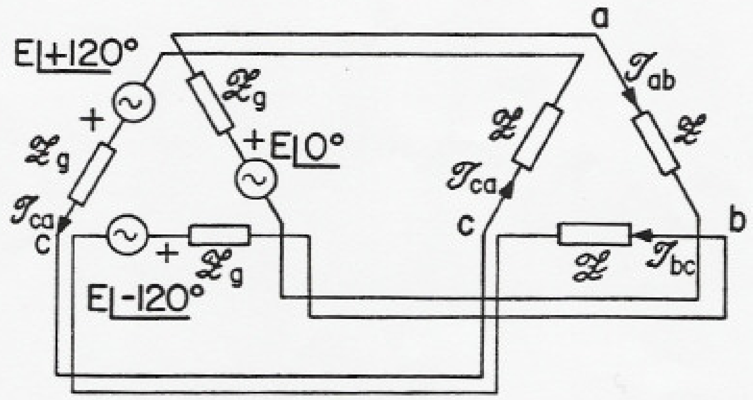
$$\mathcal{I}_b = \mathcal{I}_a\,(1\,\angle{-120^\circ}), \qquad \mathcal{I}_c = \mathcal{I}_a\,(1\,\angle{+120^\circ})$$

## 6.2.- Conexión triángulo-triángulo

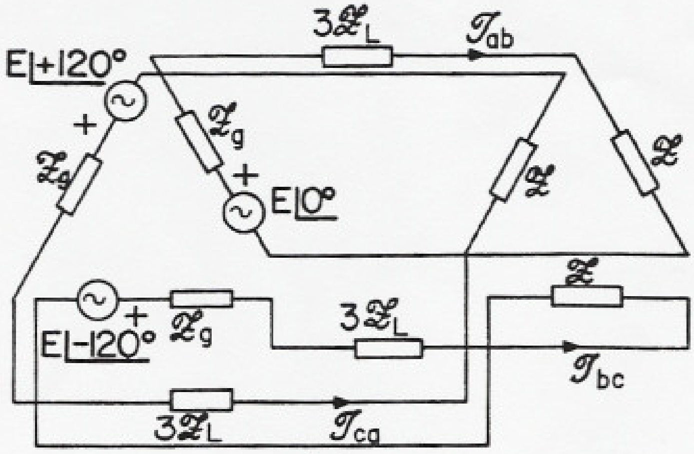
Consideremos ahora el sistema equilibrado Δ-Δ que se representa en la Fig.



(a)



(b)



(c)

Analizamos directamente el sistema equilibrado Δ-Δ representado en la Fig. a). Si no existieran las impedancias de línea $\mathcal{Z}_L$ sería:

$$\mathcal{U}_{ab} = \mathcal{U}_{a'b'}$$
$$\mathcal{U}_{bc} = \mathcal{U}_{b'c'}$$
$$\mathcal{U}_{ca} = \mathcal{U}_{c'a'}$$

Por ser equilibrado el sistema se verifica, exista o no $\mathcal{Z}_L$, que:

$$\mathcal{I}_{ab} = \mathcal{I}_{b'a'}$$
$$\mathcal{I}_{bc} = \mathcal{I}_{c'b'} \qquad (1)$$
$$\mathcal{I}_{ca} = \mathcal{I}_{a'c'}$$

Para $\mathcal{Z}_L = 0$, esas intensidades de fase de las ecuaciones (1) son las que circulan por los circuitos monofásicos que se representan en la Fig. b) y que se calculan inmediatamente:

$$\mathcal{I}_{ab} = \frac{E}{\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}}$$
$$\mathcal{I}_{bc} = \mathcal{I}_{ab}\,(1 \angle -120^\circ)$$
$$\mathcal{I}_{ca} = \mathcal{I}_{ab}\,(1 \angle +120^\circ)$$

Veamos ahora el efecto de la impedancia $\mathcal{Z}_L$. Para la malla correspondiente a la fase a-b, formada por la rama a-b de la carga, la rama a'-b' del generador y los conductores de línea que unen sus extremos homólogos, podemos escribir:

$$E \angle 0^\circ = \mathcal{Z}_g\,\mathcal{I}_{b'a'} + \mathcal{Z}_L\,\mathcal{I}_a + \mathcal{Z}\,\mathcal{I}_{ab} - \mathcal{Z}_L\,\mathcal{I}_b$$

de donde, teniendo en cuenta la primera de las ecuacuines (1), se verifica para la carga equilibrada en $\Delta$ y sistema de secuencia directa que:

$$\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_{ab}\,(\sqrt{3} \angle -30^\circ)$$
$$\mathcal{I}_b = \mathcal{I}_{bc}\,(\sqrt{3} \angle -30^\circ) = \mathcal{I}_{ab}\,(\sqrt{3} \angle -150^\circ)$$

resulta:

$$E \angle 0^\circ = (\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z})\ \mathcal{I}_{ab} + \mathcal{Z}_L\,(\sqrt{3} \angle -30^\circ - \sqrt{3} \angle -150^\circ)\,\mathcal{I}_{ab} = (\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z} + 3\,\mathcal{Z}_L)\ \mathcal{I}_{ab}$$

luego:

$$\mathcal{I}_{ab} = \frac{E \angle 0^\circ}{(\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z} + 3\,\mathcal{Z}_L)}$$

$$\mathcal{I}_{bc} = \frac{E \angle -120^\circ}{(\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z} + 3\,\mathcal{Z}_L)}$$

$$\mathcal{I}_{ca} = \frac{E \angle +120^\circ}{(\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z} + 3\,\mathcal{Z}_L)}$$

Estas intensidades son las que se obtienen en los circuitos monofásicos de la Fig. c). Cada uno de éstos comprende los elementos de la correspondiente fase más una impedancia igual a 3 $\mathcal{Z}_L$, la que representa el efecto producido por la impedancia e línea.