ROTISMI

GEAR TRAINS

Rotismi ordinari e epicicloidali

Simple Gear Trains

and

planetary gear trains

Rotismo

Def.: un rotismo è un meccanismo nel quale la trasmissione del moto avviene tramite ruote dentate.

a gear train is a mechanism in which the motion transmission is via gears

I rotismi possono essere:

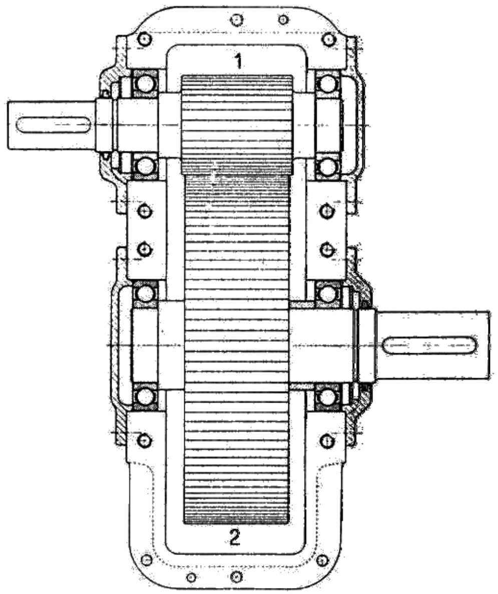
ordinario: gli assi di tutte le ruote sono fissi.

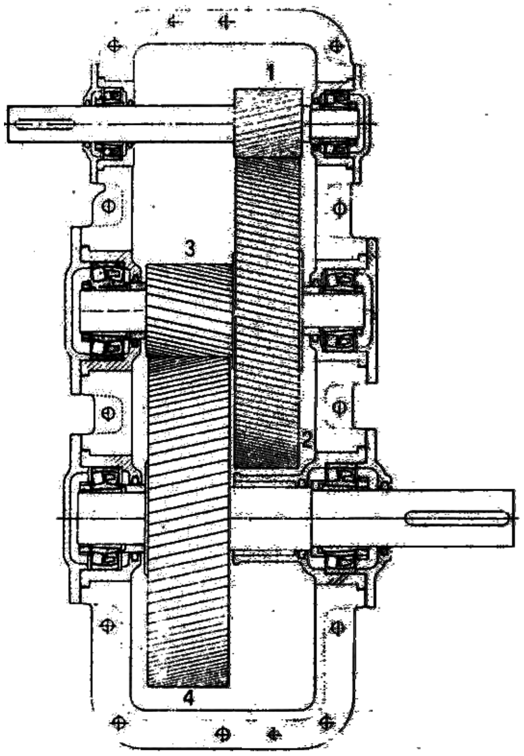
Simple or compound gear trains

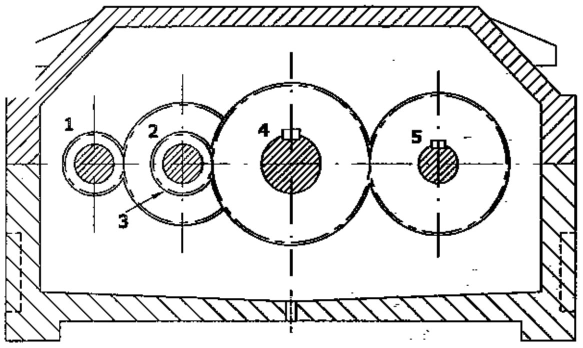
epicicloidale: alcuni degli assi delle ruote sono mobili.

Planetary gear trains

Rotismi ordinari **(Gear Trains: all gear shafts centerlines are stationary respect to an external frame).**







Rapporto di trasmissione **(Train ratio)**

$$\tau = (-1)^{n-1}\frac{\omega_n}{\omega_1} = (-1)^{n-1}\left|\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}\right|\left|\frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}}\right|\cdots\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right|$$

Nei rotismi ordinari nota la generica ω_i di una ruota si determinano tutte le altre velocità angolari e il rapporto di trasmissione τ del rotismo é definito in valore e in segno.

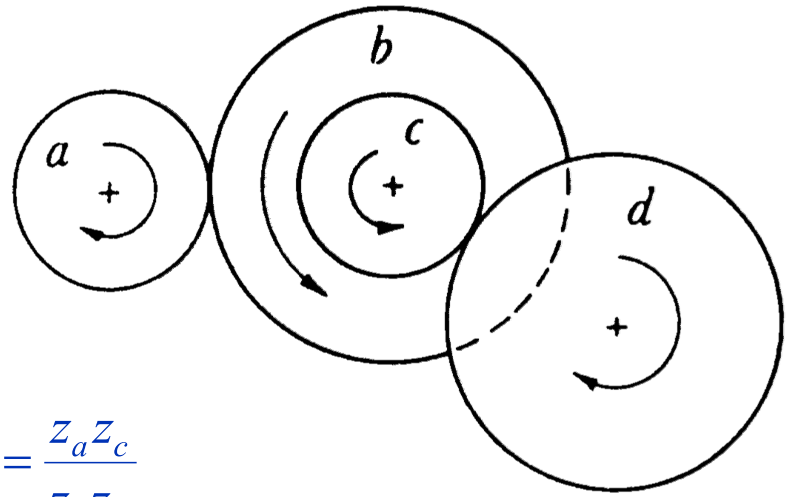
$\tau < 0$ fra due ruote dentate se girano in verso opposto.

$\tau > 0$ fra due ruote dentate se girano nello stesso verso.

In gear train ordinary note the generic ωi of a wheel are determined all the other angular speeds and the transmission ratio of the gearing τ is defined in value and sign.

τ <0 between two toothed wheels if running in the opposite direction.

τ> 0 between two toothed wheels if turning in the same direction

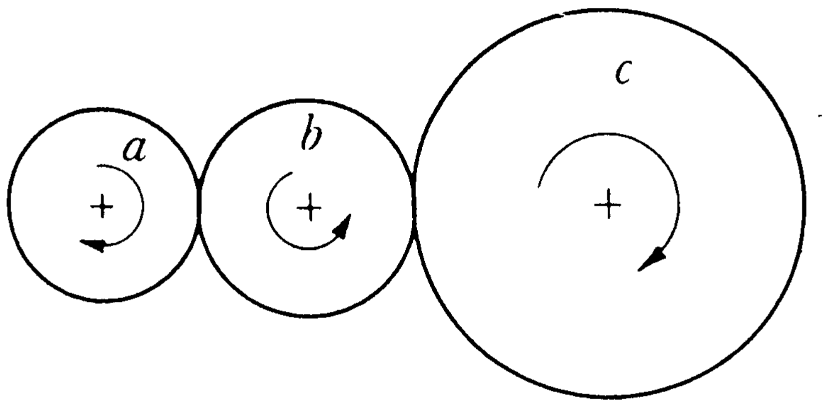


$$\tau_{a,b} = \frac{\omega_b}{\omega_a} = -\frac{z_a}{z_b} \qquad \tau_{c,d} = \frac{\omega_d}{\omega_c} = \frac{\omega_d}{\omega_b} = -\frac{z_c}{z_d}$$

$$\tau_{a,d} = \frac{\omega_d}{\omega_a} = \frac{\omega_d}{\omega_b}\frac{\omega_b}{\omega_a} = \tau_{a,b}\cdot\tau_{c,d} = -\frac{z_a}{z_b}\cdot\left(-\frac{z_c}{z_d}\right) = \frac{z_a z_c}{z_b z_d}$$

Ruota oziosa

idler gears

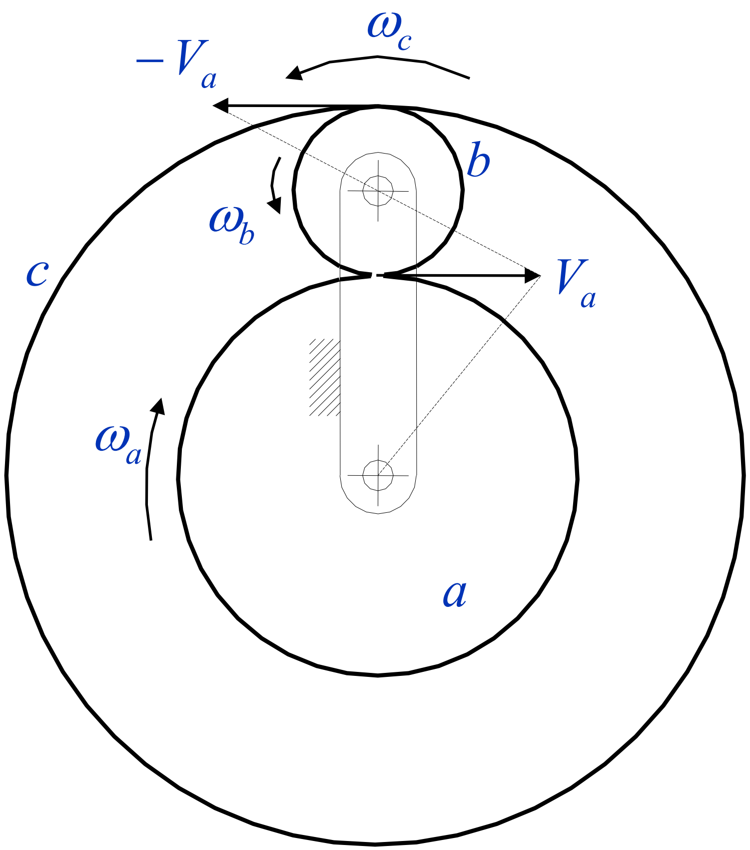


$$\tau_{a,b} = \frac{\omega_b}{\omega_a} = -\frac{z_a}{z_b}$$

$$\tau_{b,c} = \frac{\omega_c}{\omega_b} = -\frac{z_b}{z_c}$$

$$\tau_{a,c} = \tau_{a,b} \cdot \tau_{b,c} = \frac{\omega_c}{\omega_a} = \frac{z_a}{z_c}$$

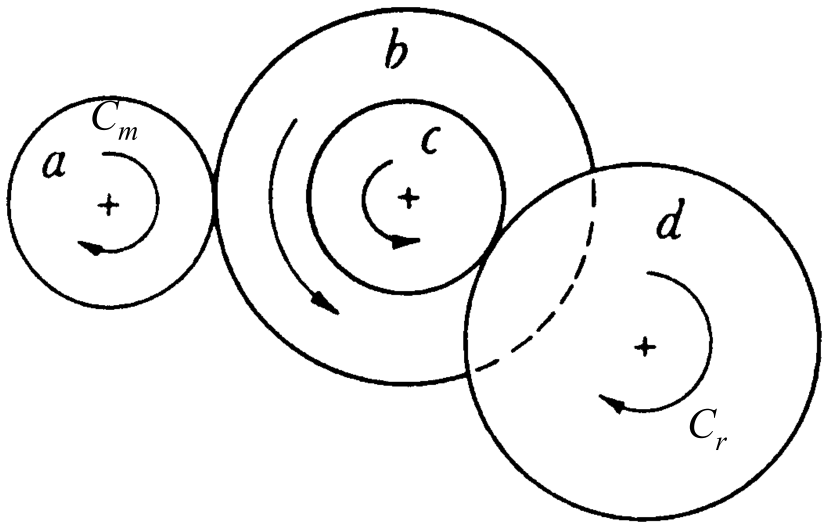
Rotismo Ordinario Simple or compound gear trains



$$\tau_{a,b} = \frac{\omega_b}{\omega_a} = -\frac{z_a}{z_b} \qquad \tau_{b,c} = \frac{\omega_c}{\omega_b} = \frac{z_b}{z_c}$$

$$\tau_{a,c} = \tau_{a,b} \cdot \tau_{b,c} = \frac{\omega_c}{\omega_a} = -\frac{z_a}{z_c}$$

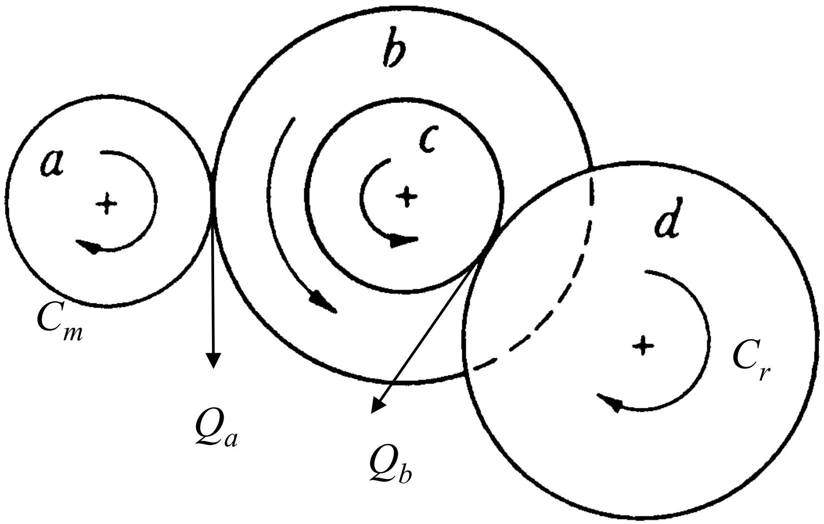
Coppie
torque



Se consideriamo il ***moto uniforme*** e un ***rendimento unitario*** si ha:
If we consider the uniform motion and an efficiency unit you

$$\frac{C_r}{C_m} = \frac{C_d}{C_a} = \frac{\omega_\mathrm{a}}{\omega_\mathrm{d}} = \frac{1}{\tau}$$

Coppie torque

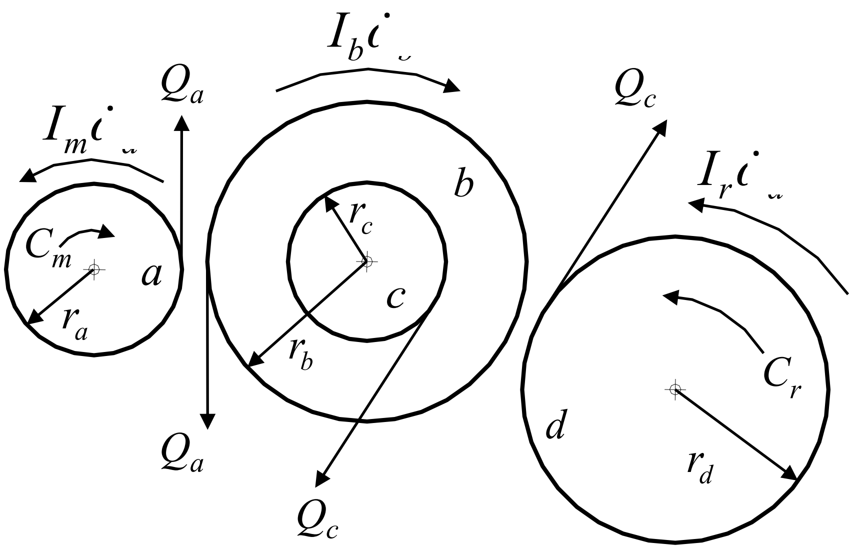


Se consideriamo i transitori sempre con rendimento unitario:

$$\frac{C_r}{C_m} = \frac{C_d}{C_a} \neq \frac{\omega_\mathrm{a}}{\omega_\mathrm{d}} = \frac{1}{\tau}$$

C_m	coppia fornita dal motore collegato alla ruota a
C_r	coppia resistente assorbita dall'utilizzatore collegato alla ruota b
I_m, I_r	momenti d'inerzia polari delle masse collegate all'albero motore e all'albero utilizzatore
I_b	momento d'inerzia polare delle masse collegate all'albero intermedio
Q_a, Q_b	componenti tangenziali delle forze scambiate fra a e b, e tra c e d
$d\omega_a /dt$	accelerazione angolare istantanea dell'albero motore
I_e	il momento di inerzia equivalente

Coppie



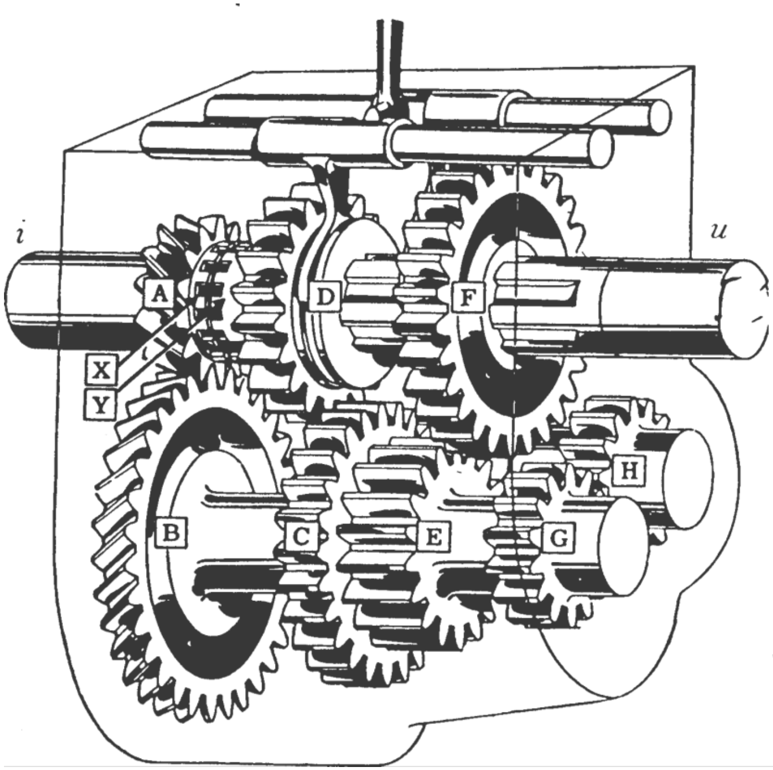
$$\begin{cases} C_m - I_m \dfrac{d\omega_a}{dt} = Q_a r_a \\ Q_a r_b - I_b \dfrac{d\omega_b}{dt} = Q_c r_c \\ Q_c r_d = I_r \dfrac{d\omega_d}{dt} + C_r \end{cases}$$

$$\frac{d\omega_a}{dt} = \frac{C_m - \tau C_r}{I_m + I_b \tau_{a,b}^2 + I_r \tau^2} = \frac{C_m - \tau C_r}{I_e}$$

In un rotismo qualunque si é in grado di effettuare la ***riduzione dei momenti di inerzia*** ad un unico asse del rotismo sommando al momento d'inerzia delle masse solidali all'albero stesso i momenti d'inerzia delle masse collegate agli altri assi moltiplicati per il quadrato dei rispettivi valori del rapporto di trasmissione.

In a gearing any one is able to effect the reduction of the moments of inertia to a single axis of the gearing by adding to the moment of inertia of the shaft itself same moments of inertia of the masses connected to the other axis multiplied by the square of the respective values of the transmission ratio.

Cambio di velocità per autoveicoli gearshift



$z_A = 15 \quad z_B = 32 \quad z_C = 26 \quad z_D = 21$

$z_E = 19 \quad z_F = 28 \quad z_G = 15 \quad z_H = 15$

$F \to E$

$$\tau = \left(-\frac{z_A}{z_B}\right)\left(-\frac{z_E}{z_F}\right) = \left(-\frac{15}{32}\right)\left(-\frac{19}{28}\right) = 0{,}318 \quad I \ marcia$$

$D \to C$

$$\tau = \left(-\frac{z_A}{z_B}\right)\left(-\frac{z_C}{z_D}\right) = \left(-\frac{15}{32}\right)\left(-\frac{26}{21}\right) = 0{,}580 \quad II \ marcia$$

$X \to Y \qquad (i) \to (u) \quad III \ marcia$

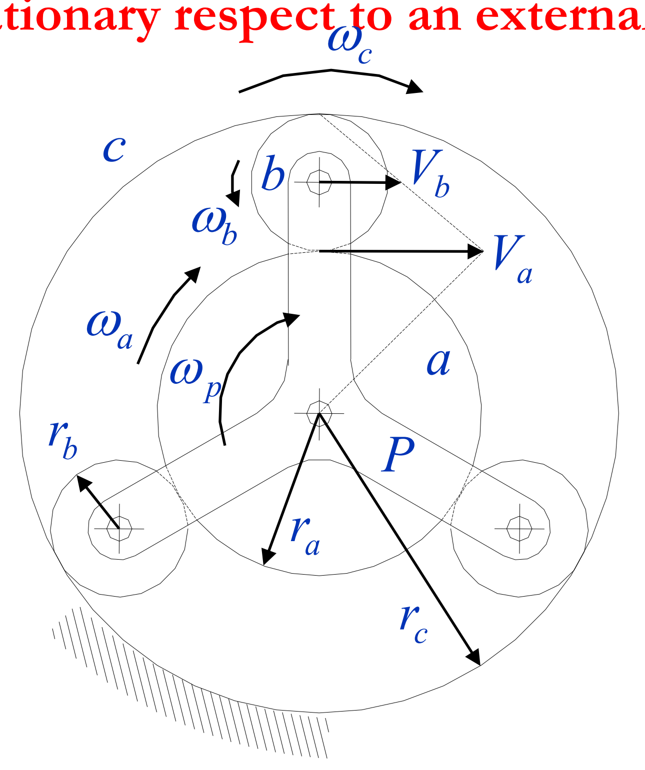
$F \to H$

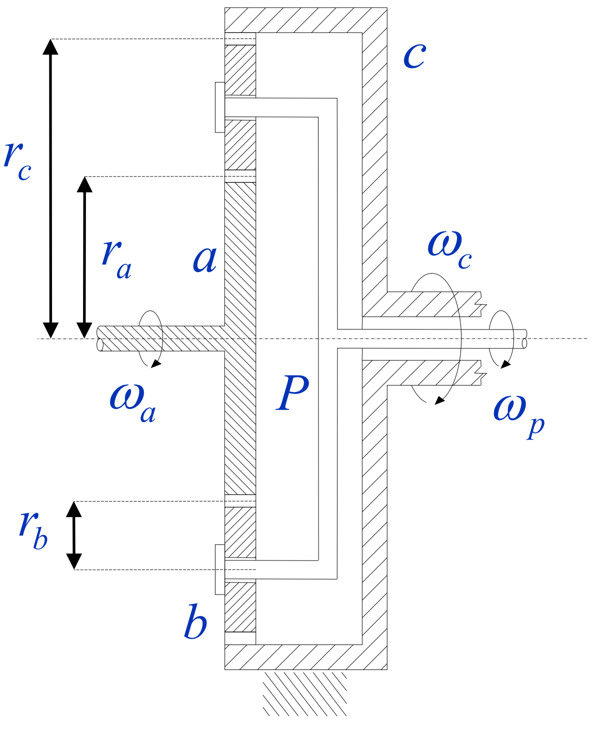
$$\tau = \left(-\frac{z_A}{z_B}\right)\left(-\frac{z_G}{z_H}\right)\left(-\frac{z_H}{z_F}\right) =$$

$$\left(-\frac{15}{32}\right)\left(-\frac{15}{15}\right)\left(-\frac{15}{28}\right) = -0{,}268 \quad retromarcia$$

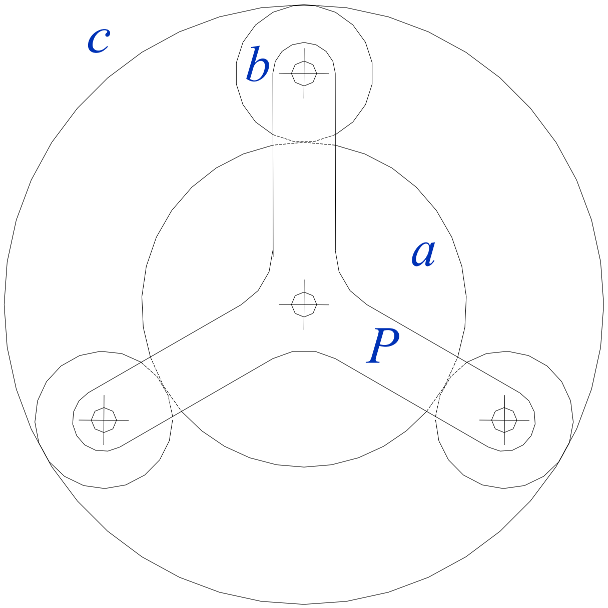
Rotismi Epicicloidali

Planetary gear trains: if exist in which at least a gear shaft centerlines not stationary respect to an external frame.





Rotismi Epicicloidali



Un rotismo epicicloidale semplice é costituito:

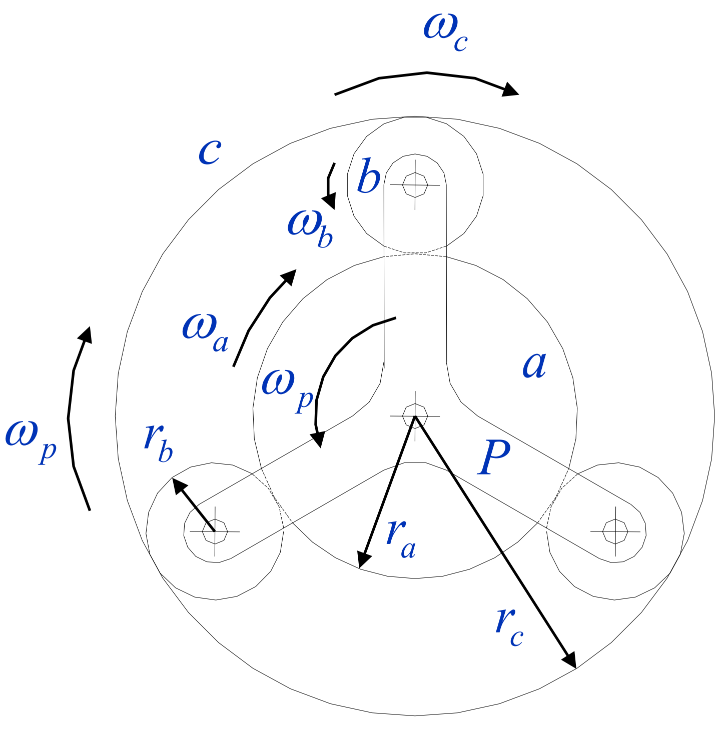
A simple epicyclic gear train is constituted

solari: ruote dentate principali che non ingranano tra di loro e che ruotano attorno a assi fissi e coincidenti. (sun gear)

satelliti o planetari: una o più ruote dentate che ingranano con i solari e i cui assi sono portati da un elemento rigido (portatreno). (planet)

portatreno: elemento rigido che ruota attorno ad un asse fisso coincidente con l'asse dei solari. (Planet carrier, arm, spider)

Formula di Willis



$$\tau_o = \frac{\omega_n - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p}$$

formula di Willis

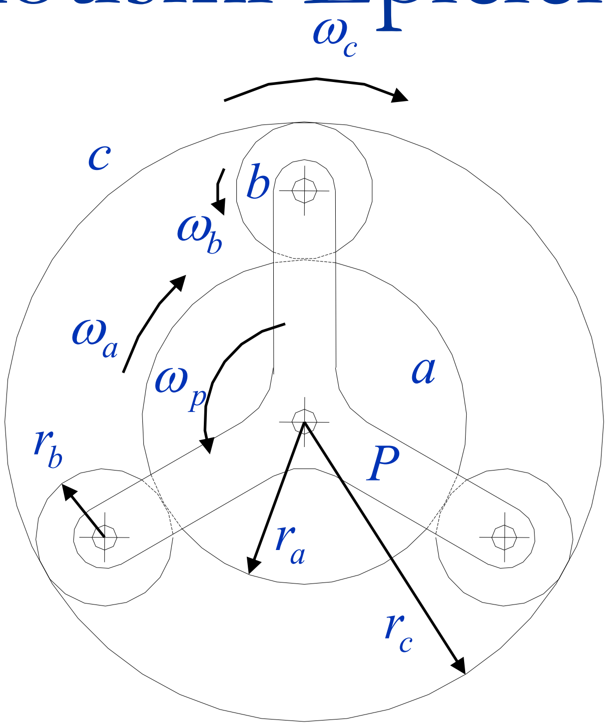
Se $\omega_1 = 0$ oppure $\omega_n = 0$, allora il rotismo sarà ad un grado di libertà.

$$\omega_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_o = \frac{\omega_n - \omega_p}{-\omega_p}$$

$$\frac{\omega_n}{\omega_p} = 1 - \tau_o \qquad \frac{\omega_p}{\omega_n} = \frac{1}{1 - \tau_o}$$

$$\omega_n = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_o = \frac{-\omega_p}{\omega_1 - \omega_p} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_p} = \frac{\tau_o - 1}{\tau_o} \qquad \frac{\omega_p}{\omega_1} = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1}$$

Rotismi Epicicloidali



Se $\omega_1 \neq 0$ e $\omega_n \neq 0$, allora il rotismo sarà a due gradi di libertà.

I rotismi a due gradi di liberta si dividono:
The gear trains with two degrees of freedom are divided:

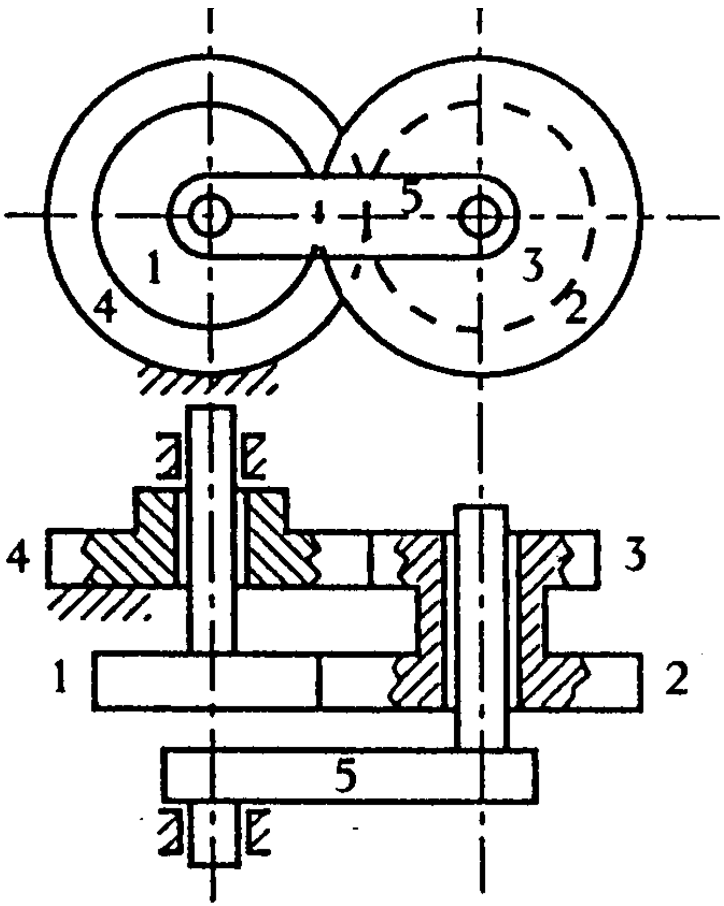
rotismi differenziali (o compensatori) — 1 movente, 2 cedenti
Differential gear

rotismi combinatori — 2 moventi, 1 cedente
Combined gear

I rotismi epicicloidali trovano applicazioni per:

- dare moto ad organi meccanici che devono ruotare attorno ad assi mobili;
- realizzare rapporti di trasmissione molto piccoli con piccolo numero di denti;
- realizzare rotismi a due gradi di libertà.
- The planetary gears are applications for:
- give motion to mechanical parts that need to rotate around moving axes;
- achieve transmission ratios very small with a small number of teeth;
- build gear trains with two degrees of freedom.

Esempi



$$\tau_o = \frac{\omega_n - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p}$$

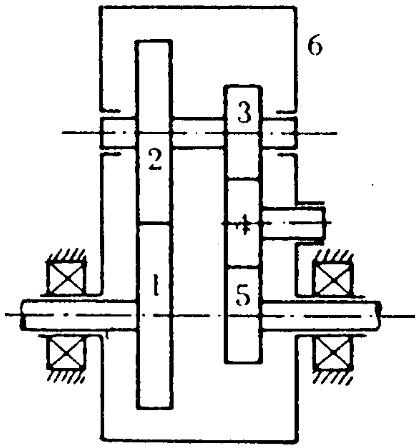
$$\omega_n = \omega_4 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_p} = \frac{\tau_o - 1}{\tau_o}$$

$$\tau_o = \tau_{1,2} \cdot \tau_{3,4} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4}$$

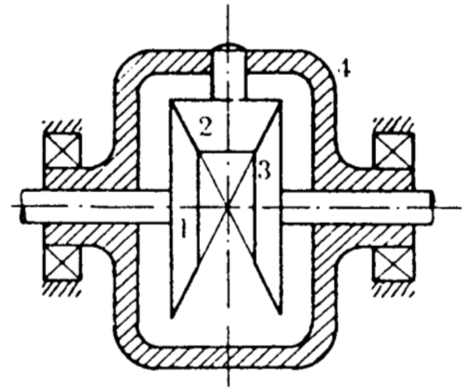
e quindi:

$$\frac{\omega_1}{\omega_p} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

Esempi (rotismi differenziali)



rotismo epicicloidale con ruote cilindriche



rotismo epicicloidale con ruote coniche

Nel rotismo a ruote cilindriche:

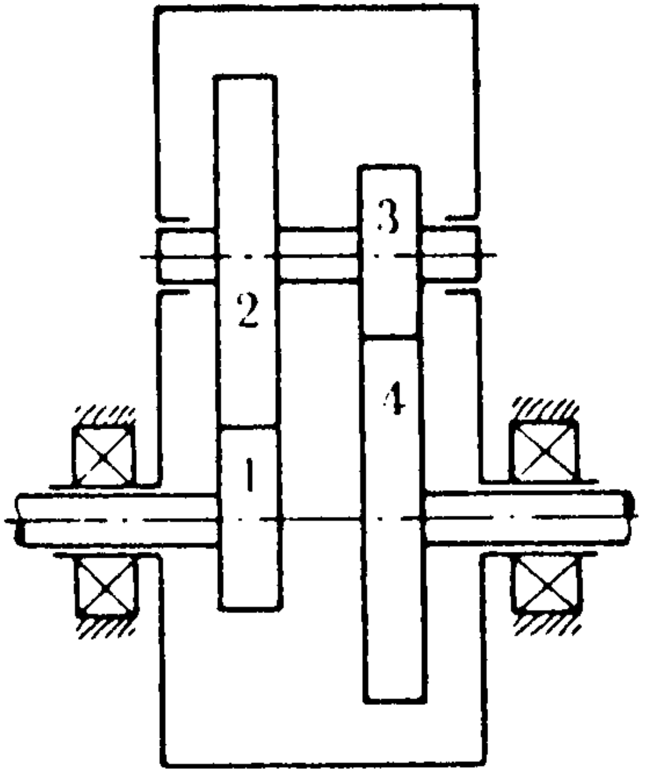
$$\tau_o = -\frac{z_1 z_3}{z_2 z_5} \quad \text{se} \quad \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_3 = z_5 \end{cases} \rightarrow \tau_o = -1$$

Nel rotismo a ruote coniche:

$$z_1 = z_3 \quad \rightarrow \quad \tau_o = -1$$

In entrambi i casi: $\omega_p = \dfrac{\omega_1 + \omega_n}{2}$

Esempi (rotismi combinatori)



$$\tau_o = \frac{\omega_{\mathrm{n}} - \omega_{\mathrm{p}}}{\omega_1 - \omega_{\mathrm{p}}}$$

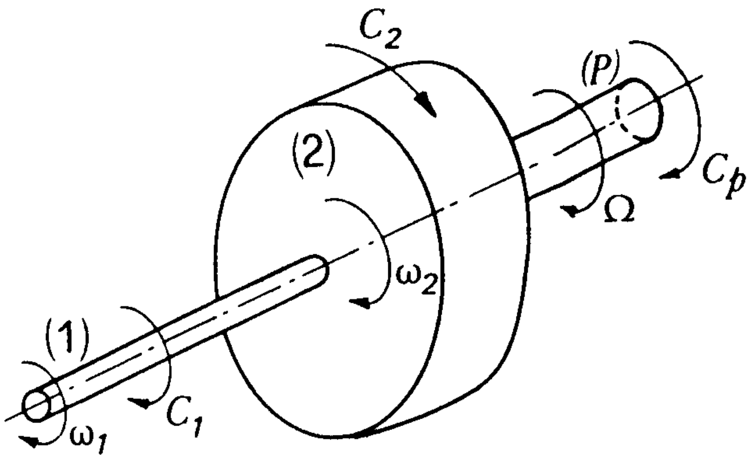
$$\omega_4 = -(\tau_o - 1)\omega_p + \tau_o \omega_1$$

$$\tau_o = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$$

se $\begin{cases} z_2 = 2 \cdot z_1 \\ z_3 = z_4 \end{cases} \rightarrow \tau_o = \frac{1}{2}$

$$\omega_4 = \frac{\omega_1 + \omega_p}{2}$$

Coppie esterne agenti su un rotismo



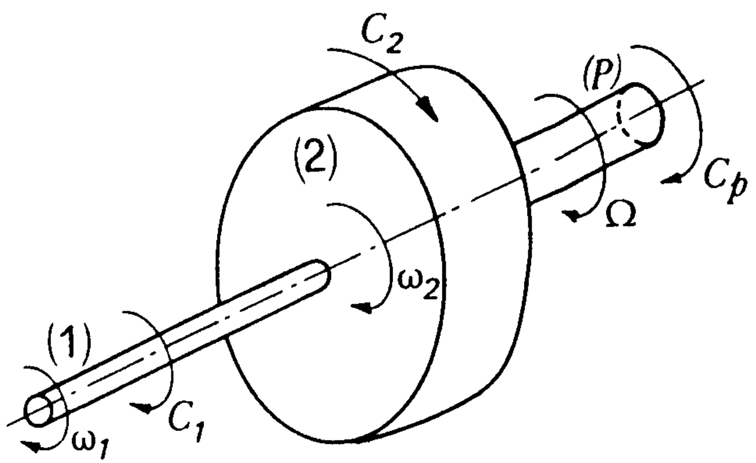
- rendimento del rotismo unitario (assenza di attrito)

- condizioni di regime (moto uniforme)

$$C_1 + C_2 + C_p = 0$$

$$C_1\omega_1 + C_2\omega_2 + C_p\Omega = 0$$

Coppie esterne agenti su un rotismo



Si ha:

$$C_p = -\left(C_1 + C_2\right)$$

$$C_1\left(\omega_1 - \Omega\right) = -C_2\left(\omega_2 - \Omega\right)$$

Se consideriamo la formula di Willis:

$$\frac{C_2}{C_1} = -\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = \frac{1}{\tau_o}$$

e quindi:

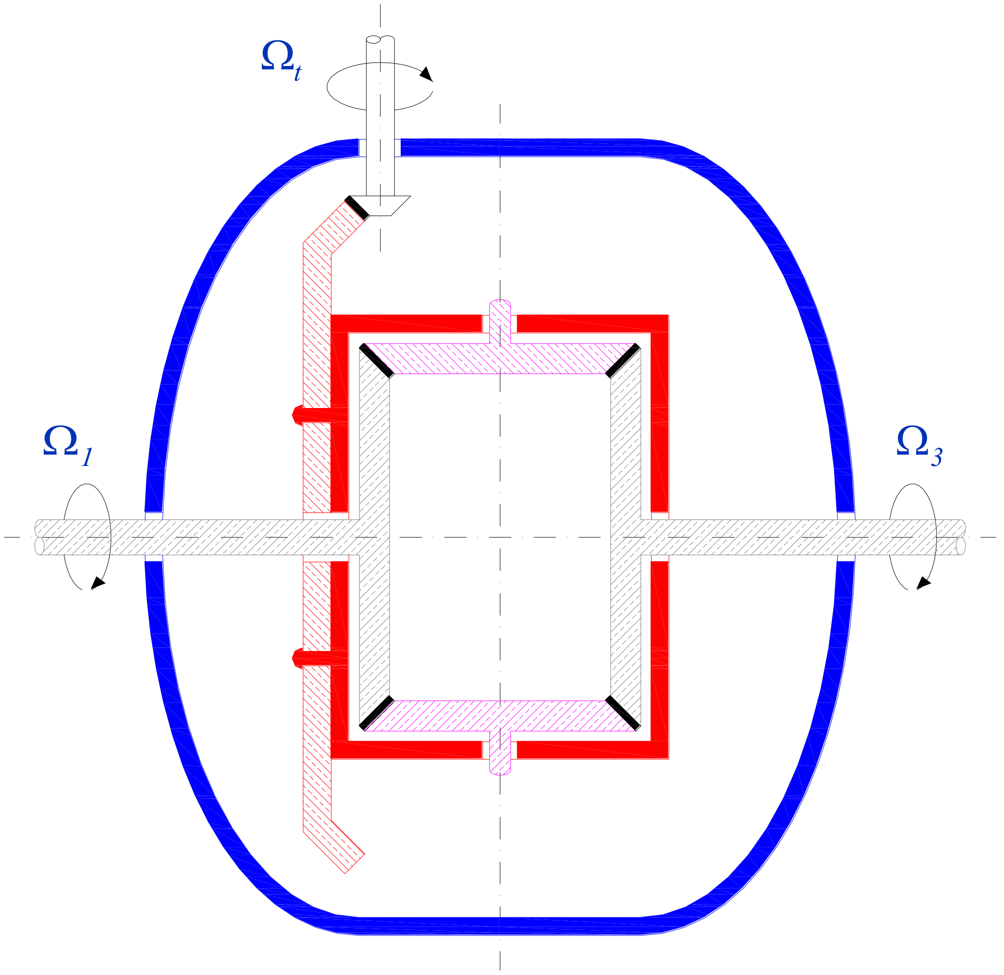
$$\frac{C_p}{C_1} = \frac{1-\tau_o}{\tau_o} \qquad \frac{C_p}{C_2} = \tau_o - 1$$

Un rotismo epicicloidale è dunque un ***partitore di coppia* (*division, partition*)**, il rapporto di partizione dipende unicamente dalla geometria del rotismo.

Differenziale automobilistico

Lo schema riportato in figura rappresenta il rotismo epicicloidale noto come differenziale automobilistico. in quanto applicato nella quasi totalità dei casi della trazione automobilistica.

E' un rotismo a due gradi di libertà, un movente e due cedenti, e pertanto rientra nella classe dei rotismi 'compensatori'.

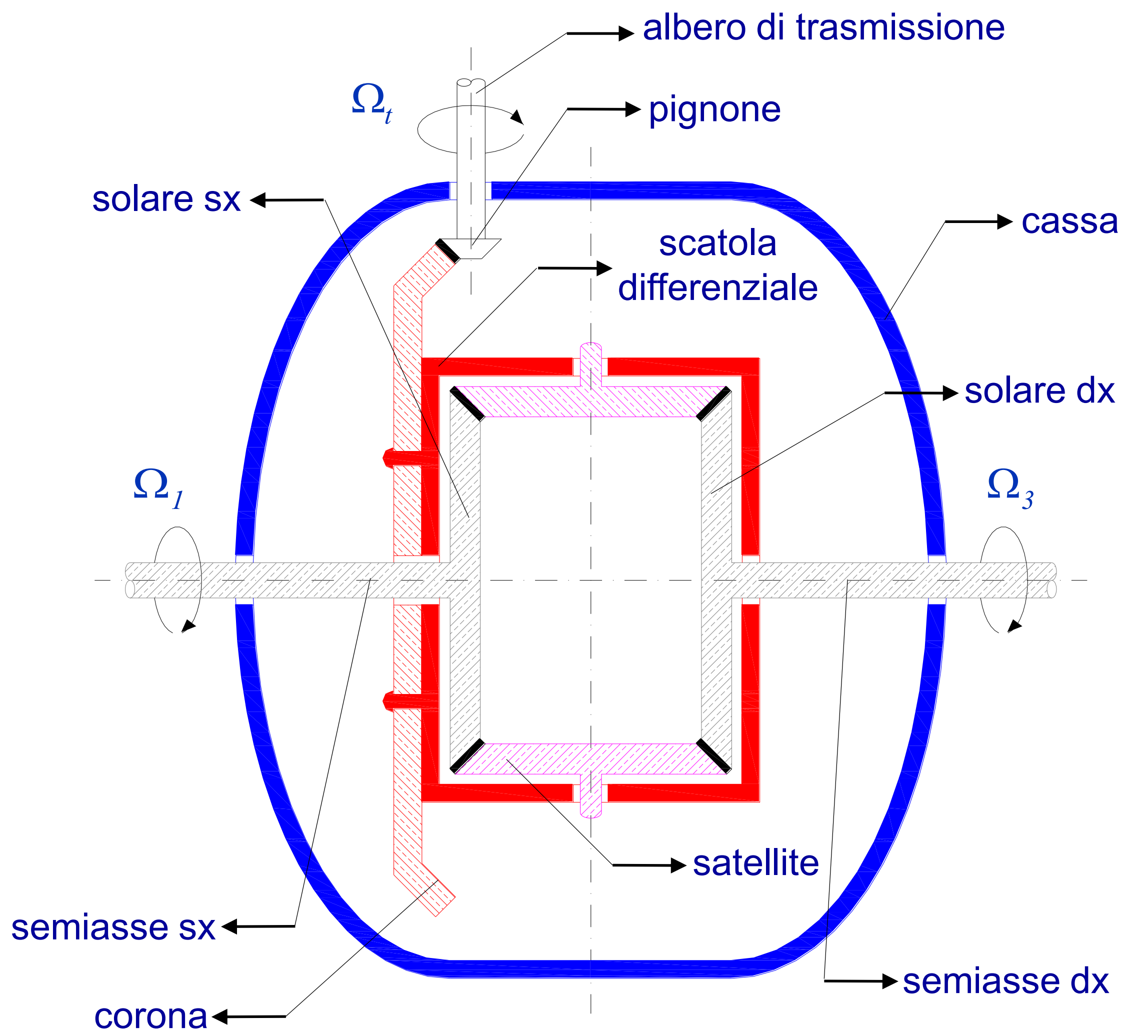


Differenziale automobilistico

Consta di una scatola, detta scatola del differenziale, che funge da portatreno e porta in rotazione, intorno all'asse principale del rotismo, gli alberi folli dei satelliti; questi ingranano con due solari che ruotano sempre intorno all'asse principale e sono calettati sui due semiassi delle ruote motrici.

Sia i solari che, i satelliti sono costituiti da ruote coniche e sono uguali tra di loro.

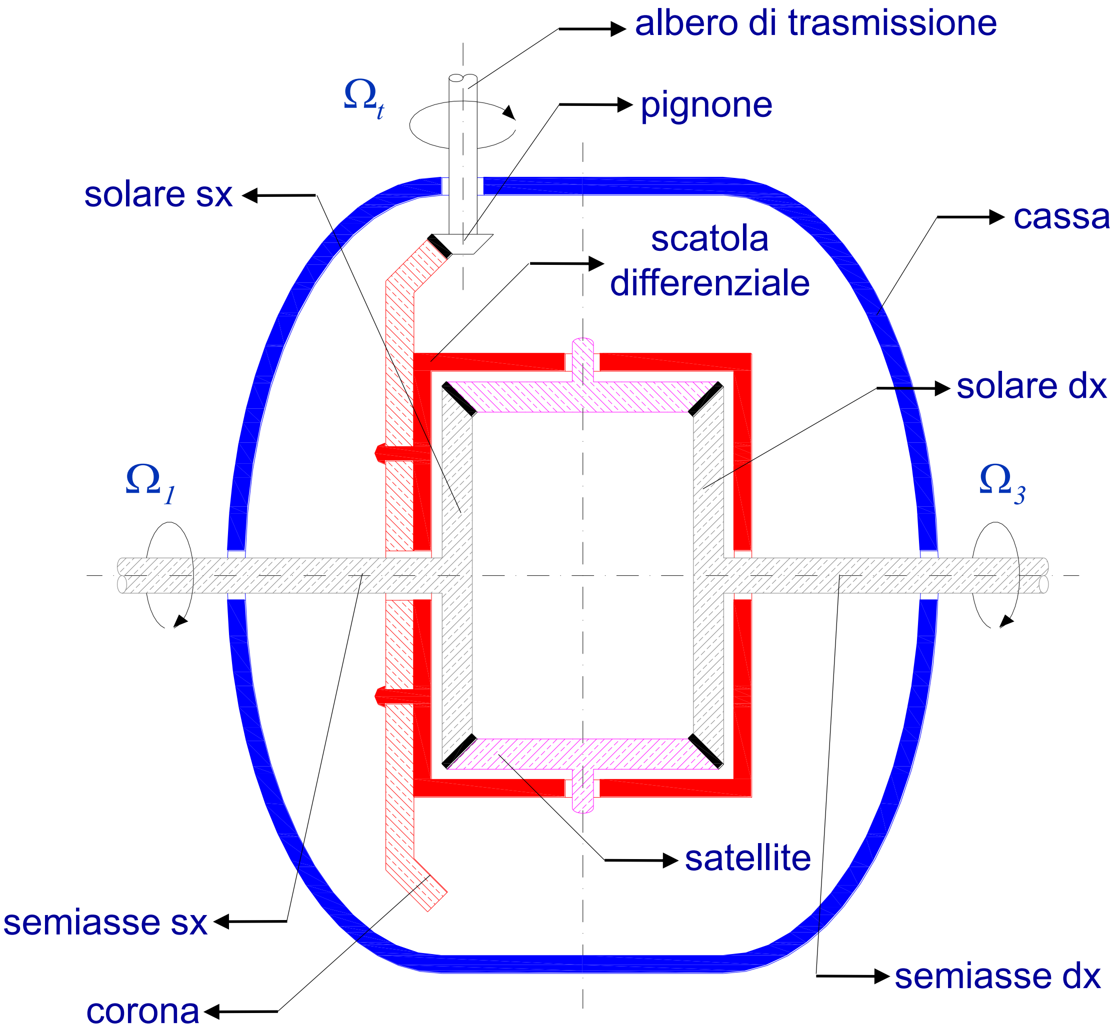
La scatola del differenziale è imbullonata con una ruota dentata conica, con asse coincidente con quello principale del rotismo, detta corona, che riceve il moto da un pignone conico calettato all'albero di trasmissione.



Differenziale automobilistico

Il rapporto che si realizza tra queste due ruote viene definito 'rapporto al ponte' e vale:

$$\tau_p = \frac{\Omega_p}{\Omega_t}$$



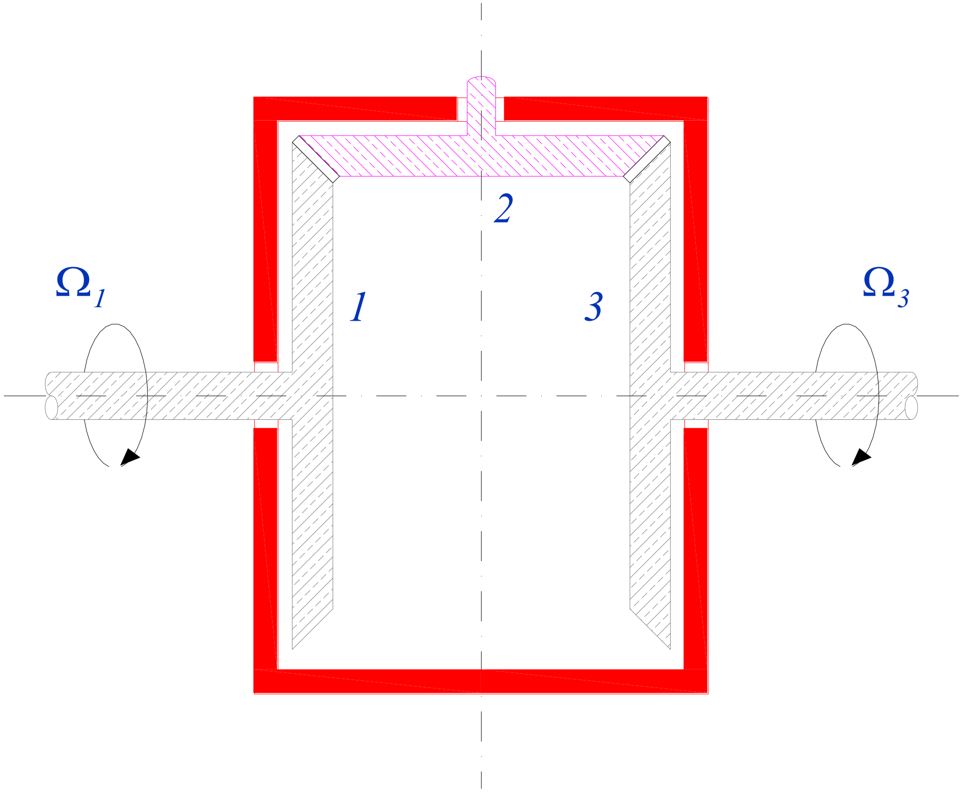
Differenziale automobilistico

Se si schematizza il differenziale come riportato nella seguente figura, si ottiene facilmente per il rapporto di trasmissione del rotismo reso ordinario il seguente valore:

$$\tau_o = -\frac{z_1}{z_3} = -1$$

Se si applica la formula di Willis al rotismo si ottiene l'equazione caratteristica del differenziale automobilistico che permette di spiegare il suo funzionamento:

$$\Omega_p = \frac{\Omega_1 + \Omega_3}{2}$$



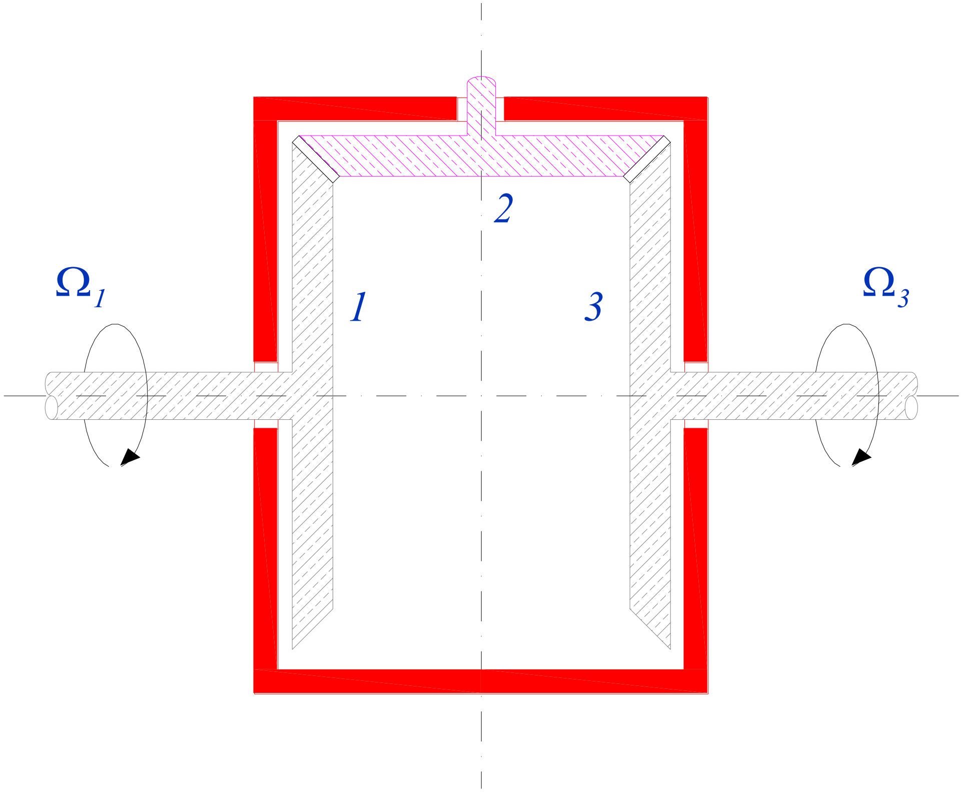
Differenziale automobilistico

$$\Omega_p = \frac{\Omega_1 + \Omega_3}{2}$$

La velocità angolare del portatreno (scatola differenziale o corona) è sempre media aritmetica tra le velocità angolari dei due solari (ruote dell'autoveicolo).

Nella marcia in rettilineo, con uguale aderenza alle due ruote motrici, quest'ultime devono avere, ovviamente, la stessa velocità angolare; risulta pertanto:

$$\Omega_p = \Omega_1 = \Omega_3$$

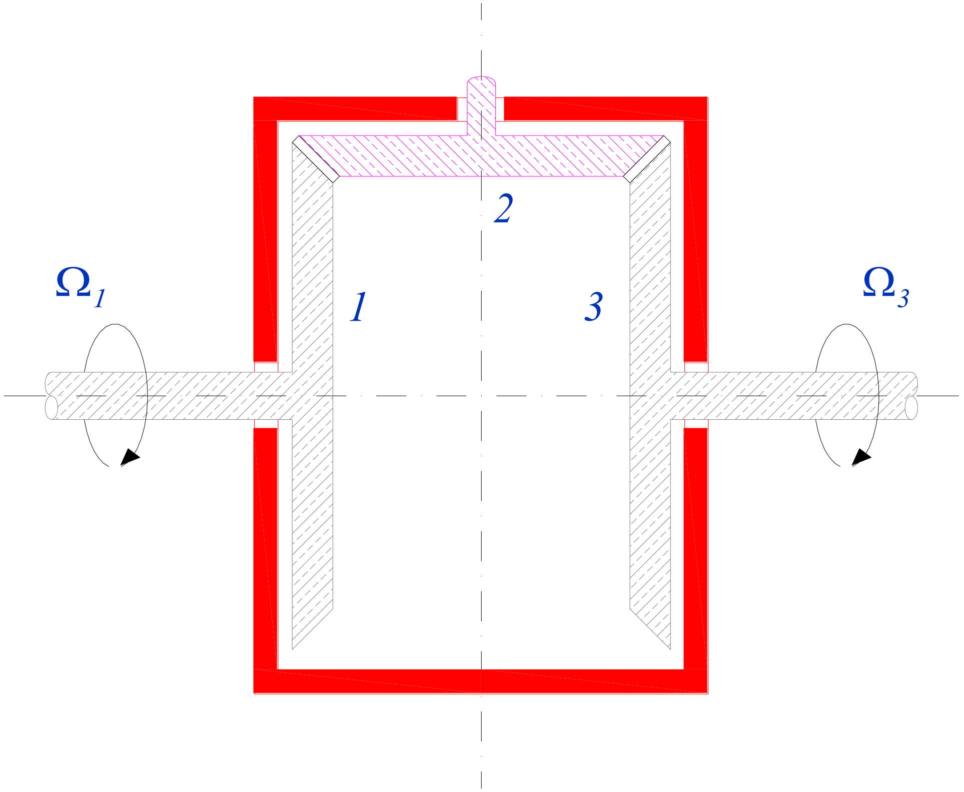


Differenziale automobilistico

In ***rettilineo*** la scatola del differenziale ruota alla stessa velocità dei due planetari.

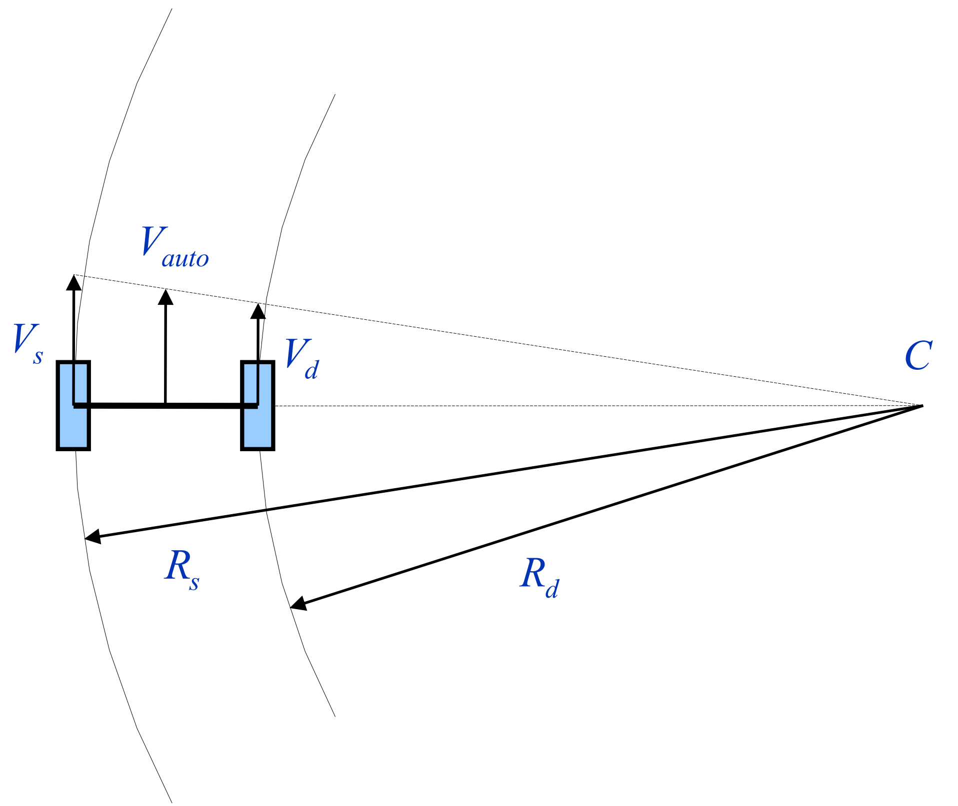
I satelliti non ruotano intorno al proprio asse, ma soltanto solidalmente col portatreno intorno all'asse principale del rotismo,

Il meccanismo si comporta, in questo caso, come un arpionismo; i satelliti restano a contatto con i planetari sempre per mezzo degli stessi denti che funzionano da chiavette fisse.



Differenziale automobilistico

Per analizzare il comportamento dell'autoveicolo in ***curva*** facciamo riferimento alla figura.



Quando un autoveicolo si inserisce in una curva, per esempio verso destra, la velocità del suo asse longitudinale, essendo R il raggio di curvatura medio della strada, vale:

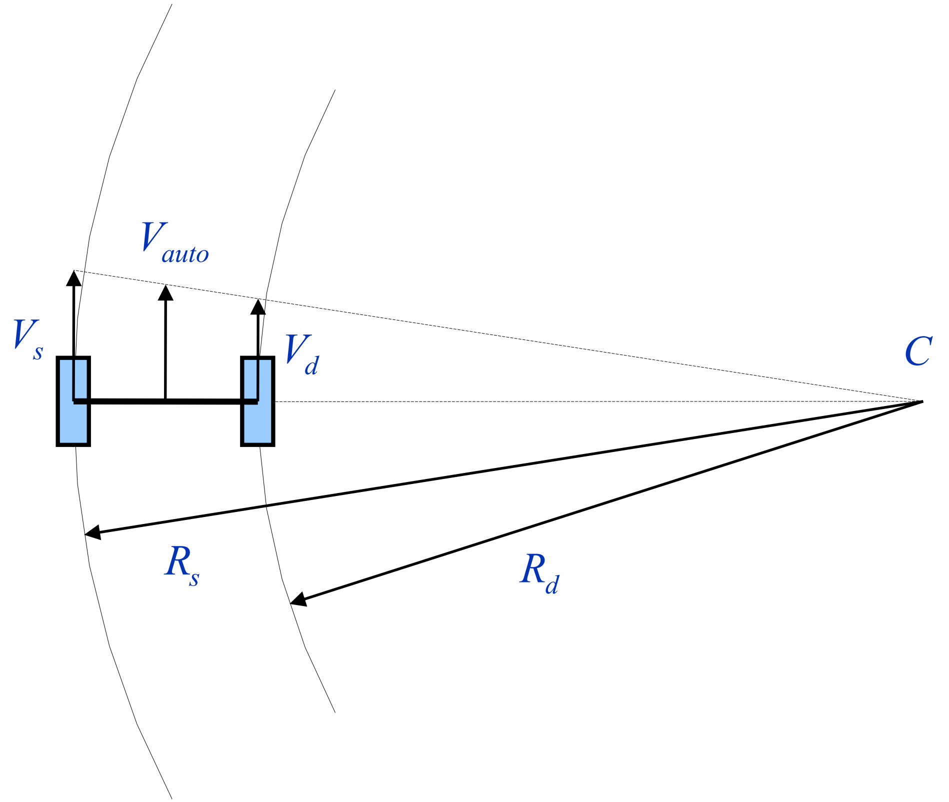
$$V_{auto} = \Omega \cdot R$$

dove Ω è la velocità angolare dell'autoveicolo rispetto al centro di rotazione C.

Differenziale automobilistico

mentre per gli assi delle due ruote motrici di destra e di sinistra deve valere la disuguaglianza:

$$V_s = \Omega \cdot R_s > V_d = \Omega \cdot R_d$$



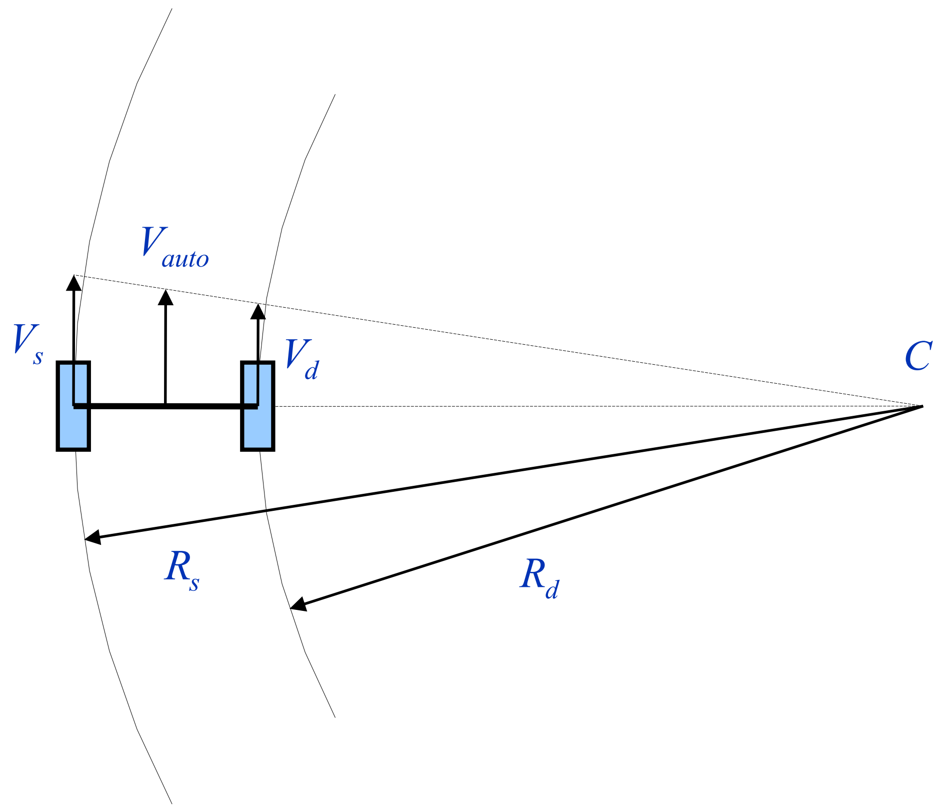
Nella ipotesi di moto di puro rotolamento. indicando con r_r il raggio di rotolamento del pneumatico, si può scrivere:

$$\Omega_s = \Omega_1 = \frac{V_s}{r_r} > \frac{V_d}{r_r} = \Omega_d = \Omega_3$$

il ché evidenzia come la ruota esterna (la sinistra), dovendo percorrere nello stesso tempo un arco maggiore, deve necessariamente accelerare rispetto a quella interna.

Differenziale automobilistico

E' proprio in questa situazione che entra in gioco il particolare funzionamento del differenziale: infatti, è la rotazione dei satelliti intorno al proprio asse a permettere di ottenere velocità dei solari diverse tra di loro, pur rispettando sempre la condizione che la loro media aritmetica eguagli la velocità del portatreno.



Differenziale automobilistico

Analizziamo ora il caso delle ruote dell'autoveicolo che si trovino su appoggi con differente coefficiente di aderenza. Il caso limite può essere rappresentato da una ruota (la destra p. e.) su di una lastra di ghiaccio e l'altra su asfalto asciutto.

Il coefficiente di aderenza ruota-ghiaccio può, con buona approssimazione, considerarsi prossimo a zero, il momento resistente offerto tende anch'esso a zero.

Il flusso di energia proveniente dalla scatola differenziale si indirizza tutto verso questa direzione destra che offre minor resistenza rispetto a quella sinistra con il pneumatico sull'asfalto.

La ruota destra inizia ad accelerare fino a portasi ad una velocità doppia di quella del portatreno:

$$\Omega_3 = 2 \cdot \Omega_P$$

Se l'autoveicolo si trovava fermo, non riuscirà a partire, cosa che si verifica, per esempio, quando una delle due ruote motrici si insabbia.

Differenziale automobilistico

Essendo il rotismo differenziale un meccanismo a due gradi di libertà la sola equazione di Willis non è sufficiente a studiarne il comportamento dinamico.

Ad essa si possono aggiungere le equazioni già scritte per la dinamica dei rotismi:

- rendimento del rotismo unitario (assenza di attrito)
- condizioni di regime (moto uniforme)

$$C_1 + C_3 + C_p = 0 \qquad\qquad C_1\Omega_1 + C_3\Omega_3 + C_p\Omega_p = 0$$

Nel caso generale si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{C_1}{C_3} = -\tau_o \qquad\qquad \frac{C_1}{C_p} = \frac{\tau_o}{1-\tau_o} \qquad\qquad \frac{C_3}{C_p} = \frac{-1}{1-\tau_o}$$

Nel differenziale essendo: $\tau_o = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_3 = -\dfrac{C_p}{2}$

Differenziale automobilistico

Rettilineo

- Le due ruote motrici assumono la stessa velocità (condizione di equilibrio stabile).
- Se una ruota tende ad accelerare rispetto all'altra, nascono slittamenti differenziati tra le due ruote e la strada; il coefficiente d'attrito aumenta all'aumentare della velocità di strisciamento.
- Insorgono momenti resistenti applicati alle due ruote differenti tra loro: e precisamente alla ruota che aveva iniziato ad accelerare viene ad essere applicato un momento resistente maggiore di quello riscontrabile sull'altra.
- Alle due ruote giungono eguali flussi di energia con momenti motori eguali.
- Le due ruote si riporteranno di nuovo alla stessa velocità.

Curva

- Le velocità angolari delle due ruote si differenziano fino a raggiungere una fase in cui i piccolissimi slittamenti che si vengono a generare nel contatto pneumatico - asfalto non diventano uguali per le due ruote.
- I momenti resistenti applicati alle due ruote risulteranno uguali.