PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

PRÁCTICA 2

1. Se eligen tres autos al azar y cada uno es clasificado N si tiene motor naftero o D si tiene motor diesel (por ejemplo, un resultado posible sería NND).

   a) Definir un espacio muestral $\mathcal{S}$ apropiado para este experimento.

   b) Consideremos la variable aleatoria

   $$X: \text{“cantidad de autos diesel entre los tres elegidos”}.$$

   Enumerar los elementos de $\mathcal{S}$ $(s \in \mathcal{S})$ con su correspondiente $X(s)$.

   c) Suponiendo que $\mathcal{S}$ es equiprobable, calcular la función de probabilidad puntual de X.

2. Si el espacio muestral $\mathcal{S}$ es un conjunto infinito, ¿ implica esto necesariamente que cualquier variable aleatoria X definida sobre $\mathcal{S}$ tendrá un conjunto infinito de valores posibles? Si la respuesta es sí, aclare por qué; si es no, dé un ejemplo.

3. De un lote que contiene 15 artículos, de los cuales 4 son defectuosos, se eligen 5 artículos al azar. Si llamamos X al número de artículos defectuosos entre los seleccionados,

   a) hallar la función de probabilidad puntual asociada a X y graficarla.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 artículos sean defectuosos?

   c) Hallar la función de distribución acumulada de X.

4. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0.3 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 0.4 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0.6 & \text{si } 6 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si } 12 \leq x \end{cases}$$

   a) Hallar la función de probabilidad puntual de X.

   b) Calcular de dos maneras: utilizando la función de distribución y utilizando la función de probabilidad puntual, las siguientes probabilidades:

   $$P(3 < X \leq 6) \qquad P(3 \leq X \leq 6) \qquad P(X \geq 4) \qquad P(X \geq 6)$$

5. Si X es una v.a. discreta que toma sólo valores enteros, probar que para todo $k \in Z$:

   $$p_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1)$$

6. Se tienen dos urnas con 5 bolillas cada una. En la urna A hay dos bolillas blancas y tres negras; y en la urna B hay una bolilla blanca y cuatro negras. Se tira un dado equilibrado. Si el resultado es múltiplo de 3, se sacan dos bolillas sin reposición de la urna A; en caso contrario, las extracciones se hacen de la urna B. Sea X el número de bolillas blancas extraídas.

a) Hallar las funciones de probabilidad puntual y de distribución asociadas a X.

b) Calcular $E(X)$ y $V(X)$.

7. **El bit de paridad.** Supongamos que queremos transmitir un caracter. El código ASCII le asigna a cada caracter un número de manera tal que sólo debemos preocuparnos por cómo enviar números. En el ejercicio 20 de la práctica 1 vimos como podemos representar los números utilizando bits. Si, por ejemplo, para transmitir números utilizamos 7 bits, el número 5 lo representamos como 0000101. Para disminuir la probabilidad de errores se le agrega a este conjunto de 7 bits un nuevo bit denominado bit de paridad. Este nuevo bit toma el valor 0 ó 1 de forma tal que el conjunto de 8 bits tenga una cantidad par de unos. Si queremos transmitir el número 5, como su representación tiene una cantidad par de unos el bit de paridad vale 0 y por lo tanto se envía 0000101$\underline{0}$. El número 93 se representa como 1011101 $(1(2^6)+0(2^5)+1(2^4)+1(2^3)+1(2^2)+0(2^1)+1(2^0))$. Como tiene una cantidad impar de unos, el bit de paridad vale 1 y se envía 1011101$\underline{1}$. De esta forma, siempre que se recibe un conjunto de 8 bits se sabe que los primeros 7 contienen la información y que el total de unos recibidos debe ser par. Si la cantidad de unos recibidos es impar significa que hubo un error en la transmisión. Supongamos que las transmisiones de los diferentes bits actúan en forma independiente y que la probabilidad de que un bit sea enviado incorrectamente es p. Consideremos el experimento de enviar un caracter y llamemos $X =$ cantidad de bits con error.

   (a) Si no se usa el bit de paridad (solo se envían 7 bits), ¿qué distribución tiene X? ¿cuál es la probabilidad de que el caracter sea enviado en forma errónea?

   (b) Si se usa el bit de paridad, ¿cuál es la probabilidad de que el caracter sea enviado en forma errónea (sin importar si ésto es detectado o no)?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un error y no sea detectado? Comparar esta probabilidad con la del ítem (a) para $p = 0.01$.

   (d) Graficar (en un mismo gráfico) las probabilidades obtenidas en (a) y en (c) en función de p.

8. Sea X una v.a. con distribución Bernoulli de parámetro p.

   a) Calcular $E(X^k)$ para $k \in \mathbb{N}$

   b) Mostrar que $V(X) = p(1-p)$.

9. Sea X una v.a. con distribución Binomial de parámetros n y p

   a) Si $p_k = P(X = k)$, probar que

$$p_k = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}\, p_{k-1} \qquad \text{para } k = 1, 2, ..., n$$

   b) Usando esta fórmula recursiva, calcular $P(X \leq 4)$ cuando n=9000 y p=0.0005.

10. El 70% de las consultas de un sistema interactivo de computación requiere de acceso a bases de datos. Un sistema recibe 25 consultas independientes unas de otras,

    a) ¿cuál es la probabilidad de que:

        i. exactamente 20 consultas requieran acceso a una base de datos?

        ii. el número de consultas que requieran acceso a una base de datos esté entre 20 y 24 inclusive?

    b) Calcular el valor esperado y la varianza del número de consultas que requieren acceso a una base de datos.

11. Un comerciante sabe que hay una probabilidad $p = 0.20$ de que en un día cualquiera le sea pedido un televisor de una marca determinada. Supongamos, además, que en un día le es solicitado a lo sumo un televisor de esa marca, y que la demanda de un día es independiente de la de cualquier otro día.

    a) Hallar la probabilidad de que no le soliciten ningún televisor de esa marca en un período de 15 días de actividad.

    b) En el mismo período, ¿cuál es la probabilidad de que la demanda sea de a lo sumo 3 televisores?

    c) Si al comienzo de ese período tiene 6 televisores de esa marca, ¿cuál es la probabilidad de que no pueda satisfacer la demanda?

12. Se tienen dos dados, uno equilibrado y el otro cargado en el cual los números 1 y 2 tienen probabilidad 1/3 y el resto 1/12. Se elige un dado al azar y se lo arroja tres veces (independientemente). Sea X el número de veces que sale 1 ó 2.

    a) ¿Cuál es la distribución de X condicional a que se eligió el dado cargado?

    b) Hallar una expresión general para $p_X(k)$.

13. Para verificar si se cumplen las normas establecidas para arrojar residuos al río Reconquista, un inspector visita al azar 10 de las 50 industrias establecidas a orillas de dicho río.

    a) Si en realidad 35 industrias no cumplen con alguna de las normas, ¿cuál es la distribución del número de industrias visitadas que están en infracción? Calcular la probabilidad de que 6 de las industrias visitadas estén en infracción.

    b) Si hay 500 industrias de las cuales 350 están en infracción, aproximar la distribución de (a) por una más simple. Calcular nuevamente la probabilidad de que 6 de las industrias visitadas estén en infracción.

    c) Sea X el número de fábricas que están en infracción entre las 10 visitadas. Calcular $E(X)$ y $V(X)$ para las distribuciones exacta (a) y aproximada (b).

14. Una rueda de ruleta está dividida en 38 secciones, de las cuales 18 son rojas, 18 son negras y las 2 restantes son verdes. Sea X el número necesario de juegos hasta obtener una sección verde en jugadas independientes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarias al menos 4 jugadas?

b) Hallar la función de distribución acumulada de la v.a. X.

c) Si fueron necesarias 7 o más jugadas, ¿cuál es la probabilidad de que se necesiten al menos 10 jugadas? Comparar con (a).

d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario un número impar de jugadas?

e) Hallar $E(X)$ y $V(X)$.

15. Si en el ejercicio anterior se define Y: número de juegos hasta obtener exactamente tres secciones verdes,

a) ¿qué distribución tiene la v.a. Y?

b) ¿cuál es la probabilidad de que se requieran exactamente 5 jugadas?

c) hallar $E(Y)$ y $V(Y)$.

16. Con el fin de encontrar una palabra clave, un motor de búsqueda de internet explora una secuencia de sitios de la WEB en orden aleatorio. Al iniciar la búsqueda, el motor elige, al azar y con igual probabilidad, una entre dos secuencias posibles de sitios. Se sabe que el 10% de los sitios de la primera secuencia contienen esta palabra clave, mientras que sólo el 5% de los sitios de la segunda contienen dicha palabra.

a) Si la búsqueda termina ni bien se encuentra un sitio que contenga la palabra clave, ¿cuál es la probabilidad de que más de 5 sitios deban ser explorados?

b) Si se sabe que el motor de búsqueda encontró la palabra clave en la sexta visita ¿cuál es la probabilidad de que la haya encontrado en la segunda secuencia?

c) Si la búsqueda termina cuando se encuentran 2 sitios que contenga la palabra clave ¿cuál es la probabilidad de que deban explorarse exactamente 10 sitios?

17. Un minorista ha verificado que la demanda semanal de cajones de cierto producto es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$. Completa su existencia los lunes por la mañana de manera de tener 4 cajones al principio de la semana. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se le plantean las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante la semana?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea incapaz de cumplir con un pedido por lo menos?

c) ¿Cuál es la distribución del número de cajones vendidos en una semana?

d) ¿Con cuántos cajones debería iniciar la semana a fin de que la probabilidad de cumplir con todos sus pedidos fuese mayor o igual que 0.99?

18. Un bibliotecario ubica 1000 libros en un cierto día. Si la probabilidad de que un libro cualquiera sea mal ubicado es 0.001 y los libros se ubican en forma independiente, ¿cuál es la distribución aproximada del número de libros mal ubicados en ese día?

Utilizando esta distribución, calcular la probabilidad de que

a) por lo menos un libro sea mal ubicado ese día.

b) exactamente 3 libros sean mal ubicados ese día. Comparar con el valor exacto.

19. En un concurso de pesca cada pescador paga 100$ por participar. La cantidad de peces obtenida por cada pescador durante el desarrollo del concurso es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 4$. Hay un premio de 50$ por pieza. Cada pescador tiene permitido cobrar a lo sumo 6 piezas (es decir, aunque pesque más de 6 cobrará sólo por 6).

    a) Calcular la función de probabilidad puntual de la ganancia neta de un pescador.

    b) ¿Cuánto dinero espera ganar cada participante?

20. Las tareas llegan a una cola de un sistema de computación con un solo servidor de acuerdo con un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 5$ tareas por minuto. Llamemos a dicho proceso X_t

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que en 30 segundos lleguen menos de 5 tareas?

    b) Sea X_1 la cantidad de tareas recibidas en un minuto. Calcular::

$$\begin{array}{ll} P(X_1 \leq 6) & P(3 \leq X_1 \leq 6) \\ P(X_1 = 6) & P(3 < X_1 < 6) \\ P(X_1 \geq 5) & P(3 \leq X_1 \leq 6 | X_1 \geq 4) \end{array}$$

    c) ¿Cuál es el número esperado de tareas que se reciben en media hora?

21. El número de veces que una red de computadoras se bloquea sigue un proceso de Poisson de parámetro igual a 2 bloqueos por semana. Hallar la probabilidad de que

    a) en 2 semanas no se bloquee.

    b) en un periodo de 4 semanas, haya exactamente 1 semana en la que no se bloquea. (Sugerencia: Notar que se está preguntando por cantidad de semanas, no de bloqueos.)