

数字信号处理参考教材系列

多维数字信号处理

〔日〕川又政征 樋口龙雄 著
薛培鼎 徐国鼐 译

科学出版社
北京

图字 :01-2002-6157 号

Original Japanese Language Edition Published by Asakura Publishing Co., Ltd.

Tajigen Shingo Shori

by Masayuki Kawamata and Tatsuo Higuchi

Copyright © 1995

This Chinese language edition rights are arranged by Asakura Publishing Co., Ltd.
in Tokyo, Japan.

ハイテクシリーズ

多次元デジタル信号処理

川又政征 樋口龍雄 著 (株)朝倉書店

图书在版编目(CIP)数据

多维数字信号处理/(日)川又政征,樋口龍雄著;薛培鼎,徐国鼐译.

—北京:科学出版社,2003

(数字信号处理参考教材系列)

ISBN 7-03-011237-7

I .多… II .①川… ②樋… ③薛… ④徐… III .数字信号-信号处理
IV .TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 015305 号

责任编辑 崔炳哲 责任制作 魏 谨

责任印制 刘士平 封面设计 李 力

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号 邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

北京东方科龙图文有限公司 制作

<http://www.okbook.com.cn>

科学出版社发行 各地新华书店经销

2003年4月第一版 开本:A5(890×1240)

2003年4月第一次印刷 印张:10

印数:1—5 000 字数:231 000

定 价: 23.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

数字信号处理是用计算机对信号、波形、数据、信息等进行变换、分析、综合的技术。现在,数字信号处理的应用领域极为广泛,例如信息与通信、音响与语音、测量与控制、经济、统计、地质勘探、医疗等领域。可以毫不夸张地说,数字信号处理已经成为所有科学技术领域所必需的基础技术。

迄今为止,数字信号处理主要是以一维平稳信号为对象的线性、时不变处理。今后要研究和实现的数字信号处理将以多维信号和非平稳信号为对象的非线性、时变和自适应处理。这种数字信号处理能够真正发挥其魅力,是传统的模拟技术所难以实现的信号处理。

多维数字信号处理是今后数字信号处理发展的方向之一。本书将多维数字信号处理的基础理论和应用相结合,可作为大学本科生和研究生的教科书;也可作为一般工程技术人员的自学参考用书。所谓多维信号,是指其振幅值是由多个独立自变量 t_1, t_2, \dots, t_n 所决定的信号 $u(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 这里的 n 表示信号 u 的维数。图像是典型的二维信号,电影是三维信号的代表,而由传感器阵列接收地震波所得到的信号既可以构成二维信号,也可以构成三维信号。多维信号不但在科学技术领域作为观测数据和测量数据是极为重要的信息,而且也是人们直观地描述周围事物和传递信息的极为重要的手段。因此,在多媒体通信和计算机网络等方面,各类图像的处理、编码和传输已经成为重要课题,众多的研究人

员和技术工作者正在为此而加倍努力工作。多维数字信号处理被认为是未来高度发达的信息通信系统的基本技术。现在,大学里已把数字信号处理作为重要基础理论课程,与电路、电子线路、信息理论、逻辑电路等课程一起列入电子、通信和信息专业的必修课程。提倡上述相关专业的学生在大学本科阶段学习数字信号处理的基本理论是很有必要的。这里所指的数字信号处理基本理论,以一维信号为对象,包括信号理论、离散傅里叶变换及快速傅里叶变换、数字滤波器及其设计等内容。本书所要讲述的多维数字信号处理是继上述内容之后要进一步学习的内容之一。

基于上述观点,本书在编写时注意了以下几点:

(1) 由于多维数字信号处理的理论在许多地方与一维数字信号处理理论相似,加之执笔本书时日本还没有出版过多维数字信号处理方面的教科书,因而本书在讲述多维数字信号处理的基本理论和应用时,注意随时指出它与一维信号处理的异同点。

(2) “多维”指维数在二维以上,本书是以二维为中心来讲述多维数字信号处理的。之所以这样做,是因为多维数字信号处理中,二维的情况最为简单。并且,多维数字信号处理所特有的大部分问题可以从一维信号处理与二维信号处理的不同点中看出。

(3) 多维数字信号处理的基本内容与一维一样,包括信号理论、离散傅里叶变换及快速傅里叶变换、数字滤波器及其设计等。关于这些内容,本书都给予了详细的论述。

(4) 努力做到并不只停留在概念上,尽可能举出一些信号处理方面的实例和数据,以便读者能进行直观地理解。此

外,还给出了许多用于帮助理解所述内容的例题。

(5) 关于公式推导和定理证明,书中已有完整的论述;对于进一步的讨论、扩展和应用,将留给读者通过参考文献来学习。

当把本书作为大学本科教科书使用时,讲授中可以略去第7章的后半部分(多维无限长单位冲激响应(IIR)滤波器逼近)、第8章和第9章。其理由是,第7章后半部分的多维IIR滤波器逼近等内容还处于研究阶段,其设计方法大都是以数值计算优化为主。第8章和第9章是面向研究生或者专业研究人员的,内容较深。读者可以通过本书掌握多维数字信号处理的基础知识,然后再结合相关参考文献学习更深的內容。

本书初稿中的各种图形和曲线的绘制,得到了在作者所在大学选修“智能系统科学讲座”课程的学生的帮助,在此表示衷心的感谢。本书所列的参考书籍及文献尽可能引用了原版,但遗憾的是由于时间关系而未能详细收录最新发表的论文。朝仓书店出版社的各位同仁为本书出版付出了辛勤劳动,作者在此一并表示诚挚的感谢。

川又政征 樋口龙雄

kawamata@higuchi.ecei.tohoku.ac.jp

thiguchi@higuchi.ecei.tohoku.ac.jp

目 录

第 1 章 多维信号	1
1.1 信 号	2
1.2 多维连续空间信号和模拟信号	2
1.3 多维离散空间信号和数字信号	7
1.4 阵列信号	9
第 2 章 多维信号的傅里叶变换和抽样	11
2.1 多维模拟信号的傅里叶变换	12
2.1.1 傅里叶变换和逆变换	12
2.1.2 特殊信号的傅里叶变换	14
2.1.3 带限信号	16
2.1.4 傅里叶变换的性质	17
2.1.5 卷 积	19
2.2 多维数字信号的傅里叶变换	20
2.2.1 傅里叶变换和逆变换	20
2.2.2 傅里叶变换的性质	23
2.2.3 卷 积	24
2.3 多维模拟信号的抽样	25
2.3.1 矩形网格抽样	25
2.3.2 由样本值恢复模拟信号	28
2.3.3 任意抽样网格情况下的抽样定理 ...	30

第 3 章 多维数字信号处理的基本概念及其优点	31
3.1 基本构成	32
3.2 信号处理的目的	33
3.3 多维数字信号处理的特点	35
第 4 章 多维离散傅里叶变换	41
4.1 多维离散傅里叶变换和逆变换	42
4.2 离散傅里叶变换的例子	45
4.3 多维离散傅里叶变换的性质	50
4.4 循环卷积	51
4.5 信号处理中多维离散傅里叶变换的任务	54
4.5.1 频率成分分析	54
4.5.2 滤波	54
4.6 多维傅里叶变换和离散傅里叶变换的 关系	59
4.7 多维快速傅里叶变换	62
4.7.1 基于直接计算的离散傅里叶变换 ...	62
4.7.2 基于行列分解的离散傅里叶变换 ...	62
4.7.3 基于行列分解的快速傅里叶变换 ...	64
4.7.4 向量基快速傅里叶变换	65
4.7.5 计算量比较	71
第 5 章 多维数字系统	73
5.1 多维数字系统基础	74
5.1.1 线性、移不变性和卷积	74
5.1.2 并联和级联	77

5.1.3	因果性	79
5.1.4	变量分离性	80
5.2	频率响应	83
5.2.1	振幅特性和相位特性	83
5.2.2	频率响应的性质	89
5.3	多维 FIR 和 IIR 数字系统	90
5.3.1	FIR 数字系统	90
5.3.2	IIR 数字系统	92
第 6 章	多维数字系统的传递函数描述和稳定性	97
6.1	多维数字信号的 z 变换	98
6.1.1	z 变换及其逆变换	98
6.1.2	z 变换的性质	100
6.1.3	卷积性质	101
6.1.4	信号的空间平移	101
6.2	多维数字系统的传递函数描述	102
6.2.1	传递函数	102
6.2.2	用传递函数计算输出	103
6.2.3	FIR 和 IIR 系统的传递函数	104
6.2.4	由传递函数导出系统的直接型 结构	106
6.2.5	系统的各种结构	110
6.2.6	关于传递函数的说明	115
6.3	多维数字系统的稳定性	115
6.3.1	BIBO 稳定	116
6.3.2	Shanks 稳定性定理	118

6.3.3	稳定性判别法	119
6.3.4	其他稳定性定理	121
6.3.5	分子多项式对稳定性的影响	124
第 7 章	多维数字滤波器设计	127
7.1	多维数字滤波器设计问题	128
7.1.1	FIR 和 IIR 数字滤波器	128
7.1.2	多维数字滤波器设计步骤	129
7.1.3	数字滤波器的逼近指标	130
7.1.4	数字滤波器的结构	133
7.2	多维 FIR 数字滤波器的设计	133
7.2.1	零相位特性和线性相位特性	133
7.2.2	窗函数设计法	135
7.2.3	频率抽样设计法	139
7.2.4	麦克莱兰变换法设计	142
7.2.5	利用频率变换进行设计	152
7.2.6	FIR 滤波器的优化设计	157
7.3	多维 IIR 数字滤波器设计	161
7.3.1	旋转滤波器的设计	161
7.3.2	优化设计	167
7.3.3	频率变换法设计	172
7.3.4	修正的最小平方逼近设计法	176
7.3.5	基于分解的设计	180
第 8 章	多维状态空间系统	187
8.1	多维状态方程	188

8.1.1	状态方程的导出	188
8.1.2	高阶情况	190
8.1.3	用状态方程计算系统输出	196
8.2	多维状态空间系统的响应	197
8.2.1	一般状态空间系统的响应	197
8.2.2	分母分离型状态空间系统的响应	199
8.3	等价变换	200
8.4	多维状态空间系统的稳定性	202
8.4.1	渐近稳定性	202
8.4.2	稳定定理	203
8.4.3	分母分离型状态空间系统的 稳定性	208
8.5	传递函数	210
8.5.1	传递函数的系数矩阵描述	211
8.5.2	相对于等价变换的传递函数 不变性	212
8.5.3	分母分离型系统的传递函数	213

第 9 章 多维状态空间数字滤波器的有限字长

	实现问题	219
9.1	数的有限字长表示	220
9.1.1	量化误差	220
9.1.2	溢 出	223
9.1.3	数字滤波器中量化误差的分类	224
9.2	多维状态空间数字滤波器对正态白噪声输入 信号的响应	226

9.2.1	状态响应	227
9.2.2	输出响应	229
9.3	多维状态空间数字滤波器的尺度压缩	232
9.3.1	尺度压缩的必要性	232
9.3.2	着眼于状态方差的尺度压缩	232
9.4	多维状态空间数字滤波器输入量化误差的 分析	234
9.4.1	输入量化误差模型	234
9.4.2	输入量化误差的方差	235
9.5	多维状态空间数字滤波器乘法量化误差的 分析	236
9.5.1	乘法量化误差模型	236
9.5.2	乘法量化误差的方差	238
9.5.3	噪声功率增益和噪声矩阵	239
9.5.4	尺度压缩后的乘法量化误差	241
9.5.5	分母分离型滤波器的协方差矩阵和 噪声矩阵	242
9.6	多维状态空间数字滤波器系数敏感度的 分析	243
9.6.1	系数量化所造成的传递函数的 变化	243
9.6.2	频率敏感度	244
9.6.3	频率敏感度范数	246
9.7	多维状态空间数字滤波器量化误差的 最小化	248
9.7.1	乘法量化误差的最小化	248

9.7.2	系数敏感度的最小化	251
9.8	多维状态空间数字滤波器的极限环	254
9.8.1	具有由量化和溢出而造成的非线性的 滤波器	254
9.8.2	不产生极限环的条件	254
9.8.3	分母分离型的情况下	257
9.8.4	无极限环的滤波器的综合	258
第 10 章	多维数字信号处理的应用	261
10.1	用空间滤波器进行图像预处理	262
10.1.1	空间滤波器	262
10.1.2	平滑和去噪	263
10.1.3	图像的锐化和轮廓提取	267
10.2	用于计算机图形学的特殊效果滤波器	272
10.2.1	运动模型	272
10.2.2	透镜照相机的模型	274
10.3	用扇形滤波器处理直线信号和平面波	277
10.3.1	直线信号	277
10.3.2	平面波	277
10.3.3	扇形滤波器	279
10.4	从投影重构图像	282
参考文献	287

第1章

多维信号



- 1.1 信号
- 1.2 多维连续空间信号和模拟信号
- 1.3 多维离散空间信号和数字信号
- 1.4 阵列信号

本章将给出一些具体例子来介绍各种信号。讲述信号的维数,并给出连续信号、模拟信号、离散信号、数字信号的定义。其中,本书的主要对象是多维数字信号。

1.1 信号

平时,我们通过测量各种各样的量,进行某种判断,来安排我们的生活。例如在日常生活中,我们总是注意每天的气温、气压、湿度、体重、血压等的变化。而在科学技术方面,我们通过测量某个电路的电流、电压、功率来进行电路分析与设计,通过测量位置和速度来理解物体的运动。这里所列举出的量,都可以像图 1.1 那样来表示,它们是随某个坐标轴 t 而变的物理量 $u(t)$ 。多数情况下,坐标轴 t 是时间,但也有表示位置的。这种随坐标轴 t 而变化的量称为**信号**(signal)。一般,也可认为信号 $u(t)$ 是以 t 为自变量,以 u 为因变量的函数。所谓**信号处理**,是以信息的提取、传输和存储,系统的观测和控制等为目的对信号进行加工、解析和合成。**数字信号处理**(digital signal processing)就是用数字计算机或者数字电路来进行的信号处理。

1.2 多维连续空间信号和模拟信号

如图 1.1 所示,作为一个自变量 t 的函数所表示的信号,称为**一维信号**(one-dimensional signal)。作为两个自变量 t_1 和 t_2 的函数所表示的信号称为**二维信号**,这两个自变量称为**空间自变量**(spatial variable)。这里 t_1 和 t_2 究竟表示什么(时间还是位置),我们不必在意。所谓**维**(dimension),可认为是为了表示信号的值所必须的自变量,为了方便常常把 t_1 和 t_2 的方向分别称为**水平方向**(horizontal direction)和**垂直方向**(vertical direction)。如图 1.2 所示,空间自变量 t_1 、 t_2 取连

续值的二维信号 $u(t_1, t_2)$ 称为二维连续空间信号 (two-dimensional continuous-space signal)。

二维连续空间信号中, 幅值取连续值的信号称为二维模拟信号 (analog signal), 取离散的多电平值的信号称为二维多电平信号

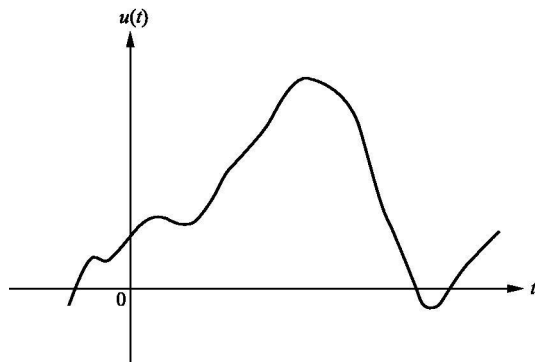


图 1.1 信号

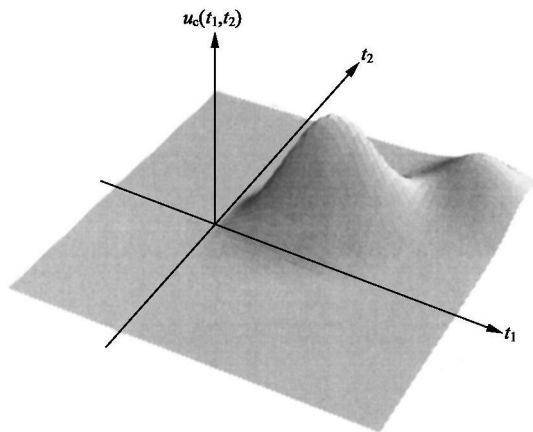


图 1.2 二维连续空间信号

(multi-level signal)¹⁾。

下面给出典型的二维连续空间信号。

1. 单位脉冲(unit impulse)

$$\delta(t_1, t_2) = \delta(t_1)\delta(t_2) \quad (1.1)$$

式中, $\delta(t)$ 是狄拉克 δ 函数(Dirac delta function)。

2. 单位阶跃(unit step)

$$S(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & t_1 \geq 0 \text{ 且 } t_2 \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.2)$$

3. 直线(line)

$$l(t_1, t_2) = \delta(t_2 - \alpha t_1 - \beta) \quad (1.3)$$

式中, α 为斜率, β 为截距。

4. 方柱(rectangular signal)

$$r(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & |t_1| \leq L_1, |t_2| \leq L_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.4)$$

5. 圆柱(cylinder)

$$c(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \leq R \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.5)$$

6. 指数函数(exponential function)

(1) 分离型: $\exp(\alpha t_1 + \alpha t_2)$

(2) 圆对称型: $\exp(\alpha \sqrt{t_1^2 + t_2^2})$ (1.6)

7. 复指数函数(complex exponential function)

(1) 分离型: $\exp(j\xi_1 t_1 + j\xi_2 t_2)$

(2) 圆对称型: $\exp(j\xi \sqrt{t_1^2 + t_2^2})$ (1.7)

例题 1.1

$\exp(j\xi \sqrt{t_1^2 + t_2^2})$ 是个很重要的信

号,它是后面将要讲到的二维傅里叶变换的“核”,同时也是二维系统

1) 本书后叙中,在前后文章的逻辑性和符号明了的情况下,大都省略了维数(一维、二维、三维等)和模拟/数字等用语。当有必要区分它们的大小和信号类别时,用语中将予以明示。

和滤波器的测试输入信号。对不同的 (ξ_1, ξ_2) ,可用图形表示其所对应的二维复指数函数的虚部 $\sin(\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2)$ 。

解 对于图 1.3(a)所示的各种 (ξ_1, ξ_2) ,图 1.3(b)~(f)分别示出了 $\sin(\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2)$ 的波形。

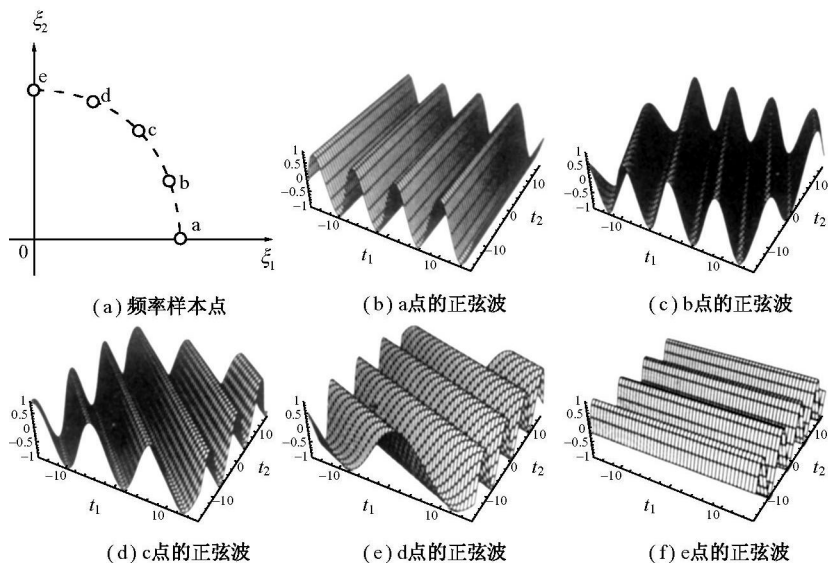
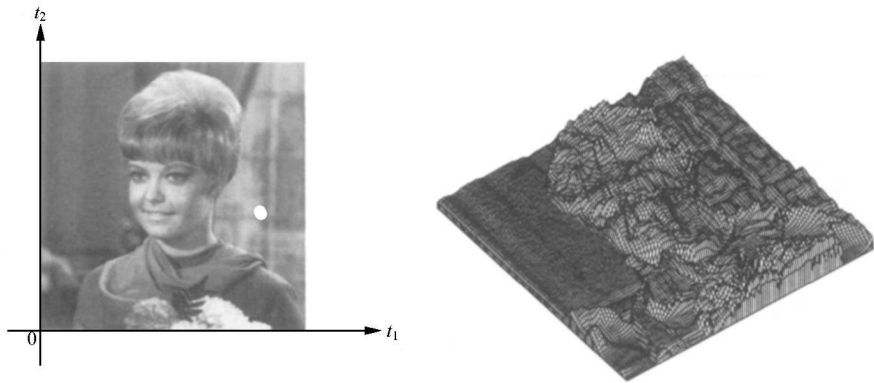


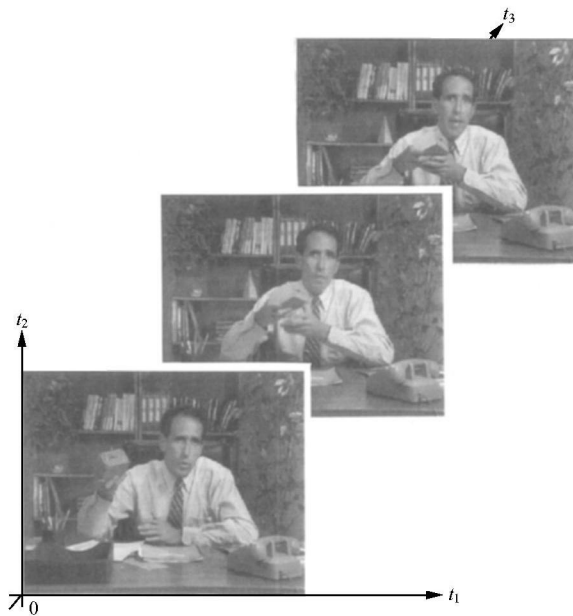
图 1.3 各种频率的二维复指数函数

信号 $u(t_1, t_2)$ 可以表示成两个一维信号 $u_{c1}(t_1)$ 和 $u_{c2}(t_2)$ 之积的形式,该信号称为可分(separable)信号。一维信号处理的理论和方法可以直接用于可分信号。

三维(three-dimensional)连续空间信号是其值 $u(t_1, t_2, t_3)$ 由三个连续的自变量 t_1, t_2, t_3 决定的信号。与二维连续空间信号一样,作为三维连续空间信号的例子,可以定义其单位脉冲和复指数函数。同样,也可以定义四维(four-dimensional)、五维(five-dimensional)等连续空间信号的单位脉冲和复指数函数。



(a) 静止图像——少女(二维信号)
(选自东京大学生产技术研究所提供的图像数据库SIDBA)



(b) 动态图像——推销员(三维信号)
(选自ITU-T测试图像)

图 1.4 多维连续空间信号

例题 1.2

解 例如图 1.4(a)的“少女”那样,人眼在某个瞬间所看见的**静态图像**(still image) $u(t, t_2)$ 是二维连续空间信号, u 表示图像的灰度。如图 1.4(b)所示,在某段时间里所看到的**动态图像**(moving image) $u(t, t_2, t_3)$ 是三维连续空间信号,在这种情况下,可将眼前的空间按纵轴和横轴分别选为 t_1 和 t_2 ,将时间轴选为 t_3 。

1.3 多维离散空间信号和数字信号

两个空间自变量取整数的二维信号 $u_d(m, n_2)$ 称为**二维离散空间信号**(discrete-space signal),如图 1.5 所示。很容易想像,将前述(1.1)式~(1.7)式中的 t, t_2 换成 m, n_2 ,便可得到相对应的离散空间信号。

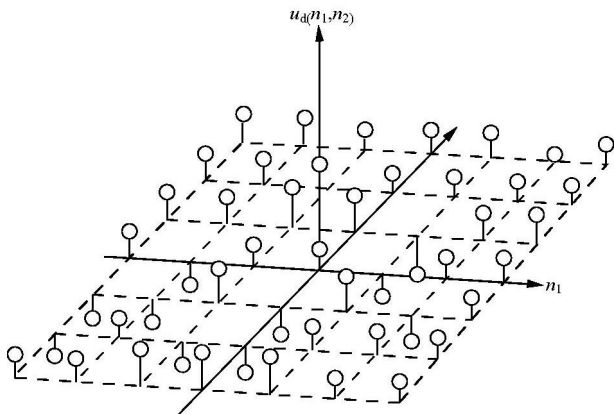


图 1.5 离散空间信号

例题 1.3**1. 单位脉冲**

$$\delta(m, n) = \delta(m) \delta(n) \quad (1.9)$$

式中, $\delta(n)$ 是克罗内克 δ (Kronecker delta) 函数¹⁾。

2. 单位阶跃

$$s(m, n) = \begin{cases} 1, & m \geq 0 \quad \text{且} \quad n \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.10)$$

3. 方柱

$$r(m, n) = \begin{cases} 1, & |m| \leq L_1, |n| \leq L_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.11)$$

4. 指数函数

$$(1) \text{ 分离型: } \exp(\alpha m + \alpha n)$$

$$(2) \text{ 圆对称型: } \exp(\alpha \sqrt{n_1^2 + n_2^2}) \quad (1.12)$$

5. 复指数函数

$$(1) \text{ 分离型: } \exp(j\xi_1 m + j\xi_2 n)$$

$$(2) \text{ 圆对称型: } \exp(j\xi \sqrt{n_1^2 + n_2^2}) \quad (1.13)$$

在二维离散空间信号中, 有一种情况是信号的幅值取量化后的离散值, 这种信号称为**二维数字信号** (digital signal)。相对应, 把信号幅值取连续值的信号称为**抽样值信号** (sampled signal)。二维数字信号处理是将数字信号作为输入并对其进行某种运算的。但是, 对数字信号进行数学描述是很麻烦的, 所以, 除了特别的场合外, 我们并不考虑振幅离散化了的信号。但作为用语, 常把“数字信号”作为离散空间信号的代称。

例题 1.4 举出二维和三维数字信号的例子

解 元素值取整数的矩阵 $\mathbf{A} = \{a(m, n)\}$, 可以看作是二维数

1) 克罗内克 δ 函数是当 $n=0$ 时 $\delta(n)=1$, 其他情况下 $\delta(n)=0$ 的函数。

字信号,在这种情况下,空间自变量是行和列的序号(m, n)。

当把图 1.4 中的静态图像“少女”,存放在计算机中时,它就成了二维数字信号。它在 $m=0\sim 255, n=0\sim 255$ 的方格坐标点(m, n)上具有信号值(灰度),其值取 $0\sim 255$ 范围内的整数。

同样,图 1.4(b)的动态图像“推销员”在计算机中是作为三维数字信号存储的,它在 $m=0\sim 359, n=0\sim 287, n_3=0, 1, 2, \dots$ 范围内的方格坐标点(m, n, n_3)上有信号值(灰度),其值取 $0\sim 255$ 范围内的整数。其中的 n_3 表示时间轴。

1.4 阵列信号

二维信号中,也有表示成 $u(t, n)$ (其中 t 为连续自变量, n 为整数)的信号。如图 1.6 所示,把等间隔排列着的**传感器阵列**(sensor array)所记录的一维**地震波**(seismic wave)组合起来作为二维信号来描述时,就成为信号 $u(t, n)$ 。这时, n 表示传感器的位置, t 表示时间。这样的信号称为**阵列信号**(array signal)。

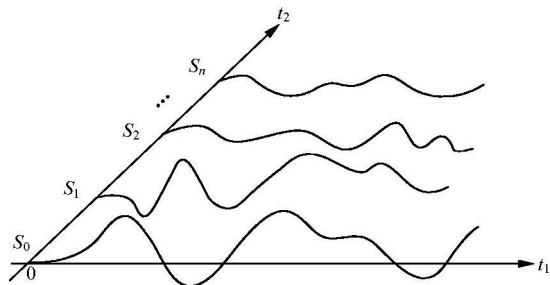


图 1.6 阵列信号

第2章

多维信号的傅里叶 变换和抽样



- 2.1 多维模拟信号的傅里叶变换
- 2.2 多维数字信号的傅里叶变换
- 2.3 多维模拟信号的抽样

作为在频率域对信号进行描述、分析和综合的方法,本章将导入多维模拟信号和数字信号的傅里叶变换,并考察其性质。其次,将叙述模拟信号的抽样问题。对模拟信号进行数字处理,在大多数情况下是先对模拟信号进行抽样,使之变成数字信号,而后对数字信号进行处理。这时,在适当的条件下,对模拟信号进行抽样得到的数字信号与原来的模拟信号具有相同的信息。反过来,用适当的方法能从数字信号完全重现原来的模拟信号。这就是众所周知的抽样定理,是数字信号处理中最重要的基础理论。

2.1 多维模拟信号的傅里叶变换

2.1.1 傅里叶变换和逆变换

求取信号中所包含的简单分量,是分析信号的重要方法之一。另外,如果能够把复杂信号表示为几个简单信号分量的组合,那么复杂信号的加工、记录、合成等就变得容易了。下面叙述的傅里叶变换就是一种信号分析和综合的方法。

二维模拟信号 $u_a(t_1, t_2)$ 的傅里叶变换(Fourier transform) $U_a(\Omega_1, \Omega_2)$ 定义如下:

$$U_a(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_a(t_1, t_2) \exp(-j\Omega_1 t_1 - j\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2$$

$$\Omega_1 = -\infty \sim +\infty, \Omega_2 = -\infty \sim +\infty \quad (2.1)$$

其逆变换(inverse transform)为

$$u_a(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_a(\Omega_1, \Omega_2) \exp(j\Omega_1 t_1 + j\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2$$

$$t_1 = -\infty \sim +\infty, t_2 = -\infty \sim +\infty \quad (2.2)$$

在这种正逆变换中,信号 $u_a(t, t')$ 及其变换 $U_a(\Omega, \Omega')$ 一般都是复变函数。 Ω 和 Ω' 分别称为其方向上的空间角频率 (spatial anglnur frequency)。它们与随时间变化的一维信号的角频率 (anglnur frequency) (单位为弧度/秒的频率) 是有区别的。但在本书中,我们仍称其为角频率,并且,在不引起误解的情况下,更简单地称其为频率 (frequency)。

(2.2) 式和 (2.1) 式可作如下解释。(2.2) 式意味着信号 $u_a(t, t')$ 可以表示成各种频率 (Ω, Ω') 的复指数函数 $\exp(j\Omega t + j\Omega' t')$ 被复数加权系数 $U_a(\Omega, \Omega')$ 所加权,成为二维模拟信号 $U_a(\Omega, \Omega') \exp(j\Omega t + j\Omega' t')$ (它也是个复指数函数) 而后求和 (确切地说是积分) 的结果。这就说明,任意信号 $u_a(t, t')$ 可以由各种频率的复指数函数来合成。合成时的复指数函数所带的加权系数 $U_a(\Omega, \Omega')$ 可由 (2.1) 式求出。正变换式 (2.1) 意味着信号 $u_a(t, t')$ 中所包含的频率为 (Ω, Ω') 的复指数函数 $\exp(j\Omega t + j\Omega' t')$ 的量为 $U_a(\Omega, \Omega')$, 它的值是个复数。

正变换 $U_a(\Omega, \Omega')$ 称为信号 $u_a(t, t')$ 的谱 (傅里叶谱) (spectrum)。由于 $U_a(\Omega, \Omega')$ 是复数,所以可表示成

$$U_a(\Omega, \Omega') = |U_a(\Omega, \Omega')| e^{j\phi(\Omega, \Omega')} \quad (2.3)$$

式中, $U_a(\Omega, \Omega')$ 的绝对值 $|U_a(\Omega, \Omega')|$ 称为振幅谱 (amplitude spectrum), 相位 $\phi(\Omega, \Omega')$ 称为相位谱 (phase spectrum)。

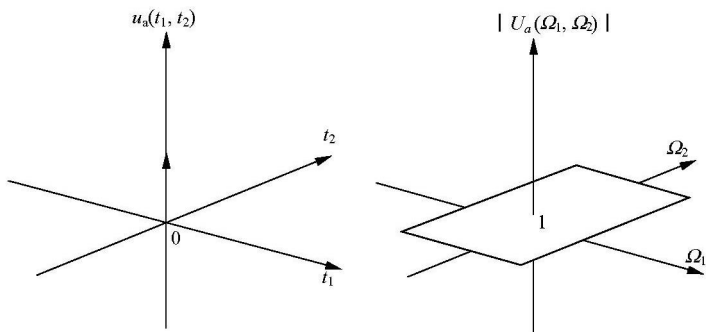
例题 2.1

解 将 (2.1) 式的右边代入 (2.2) 式的右边, 可得下式, 从而得证。

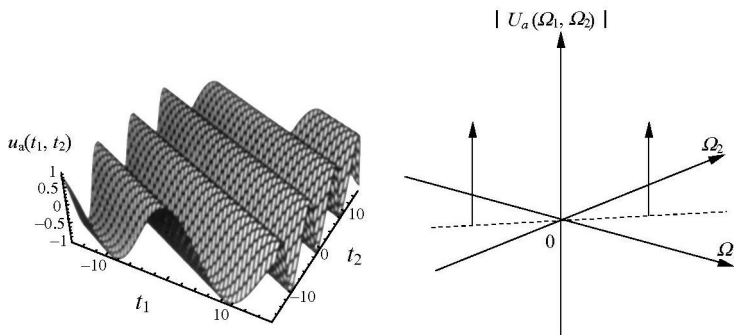
$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_a(t', t'') e^{-j\Omega_1 t' - j\Omega_2 t''} dt' dt'' \right] e^{j\Omega_1 t + j\Omega_2 t} d\Omega d\Omega' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_a(t', t'') \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_1(t_1 - t') + j\Omega_2(t_2 - t'')} d\Omega d\Omega' \right] dt' dt'' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_a(t', t'') (2\pi)^2 \delta(t - t', t - t'') dt' dt'' = u_a(t, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.1.2 特殊信号的傅里叶变换

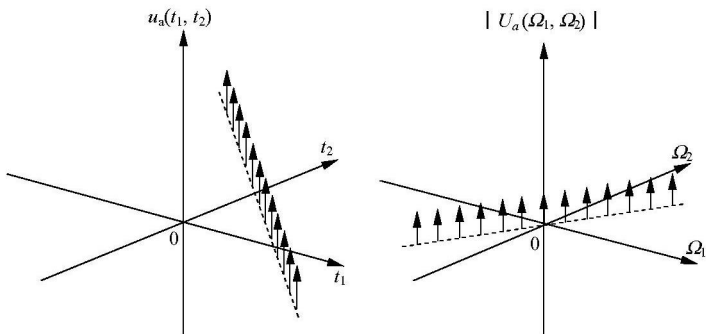
下面举出特殊信号的傅里叶变换,其振幅谱如图 2.1 所示。



(a) 单位脉冲及其频谱



(b) 正弦波及其频谱



(c) 直线及其频谱

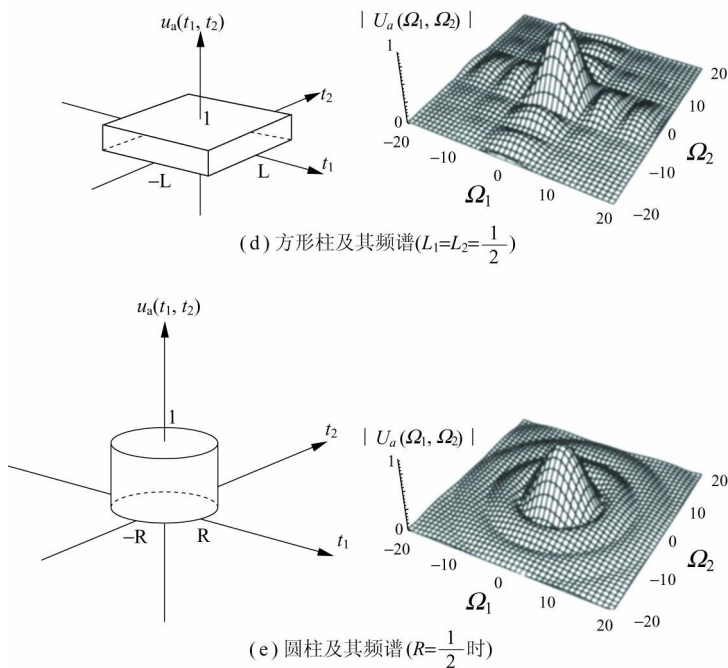


图 2.1 特殊二维信号的傅里叶变换

1. 单位脉冲

$$\delta(t_1, t_2) \longleftrightarrow 1 \quad (2.5)$$

2. 复指数函数(图中仅表示出了它的虚部及其频谱)

$$\exp(j\theta_1 t_1 + j\theta_2 t_2) \longleftrightarrow (2\pi)^2 \delta(\Omega_1 - \theta_1, \Omega_2 - \theta_2) \quad (2.6)$$

3. 直线(斜率 α , 截距 β)

$$\delta(t_2 - \alpha t_1 - \beta) \longleftrightarrow e^{-j\beta\Omega_2} 2\pi \delta(\Omega_1 + \alpha\Omega_2) \quad (2.7)$$

4. 方形柱

$$r(t_1, t_2) \longleftrightarrow 2L_1 \frac{\sin L_1 \Omega_1}{L_1 \Omega_1} \cdot 2L_2 \frac{\sin L_2 \Omega_2}{L_2 \Omega_2} \quad (2.8)$$

5. 圆柱

$$c(t_1, t_2) \longleftrightarrow 2\pi R^2 \frac{J_1(R\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2})}{R\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \quad (2.9)$$

式中, $J_1(\cdot)$ 为第一类贝赛尔函数(Bessel function)。

2.1.3 带限信号

一维频域的“带宽”是一维频率轴上的某个“区间”, 所以其带限(bandlimit)的形状很简单。二维频域的带宽是由两个频率 Ω_1 和 Ω_2 所表示的平面中的某个“区域”, 可通过选取这个区域来定义各种各样的带限形状。

• **矩形带限信号** 我们来看带限为矩形区域 $U_r(\Omega_1, \Omega_2)$ 的信号 $u_r(t_1, t_2)$ 。

$$U_r(\Omega_1, \Omega_2) = \begin{cases} 1, & |\Omega_1| \leq \Omega_{11}, |\Omega_2| \leq \Omega_{22} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.10)$$

这个傅里叶变换可以如下式那样完全分开。

$$U_r(\Omega_1, \Omega_2) = U_{r1}(\Omega_1)U_{r2}(\Omega_2) \quad (2.11)$$

其中

$$U_{ri}(\Omega_i) = \begin{cases} 1, & |\Omega_i| \leq \Omega_{i1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$i = 1, 2 \quad (2.13)$$

因此, 它的逆变换可如下方便地求得

$$u_r(t_1, t_2) = \frac{\Omega_{11}}{\pi} \frac{\sin(\Omega_{11} t_1)}{\Omega_{11} t_1} \cdot \frac{\Omega_{22}}{\pi} \frac{\sin(\Omega_{22} t_2)}{\Omega_{22} t_2} \quad (2.14)$$

$$t_1, t_2 = -\infty \sim +\infty$$

• **圆对称带限信号** 作为信号的带限, 一般常考虑其为如下的圆对称形。

$$U_c(\Omega_1, \Omega_2) = \begin{cases} 1, & \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \leq \Omega \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.15)$$

求上式的傅里叶逆变换可以得到

$$u_c(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \leq \Omega_c} 1 \cdot \exp(j\Omega_1 t_1 + j\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (2.16)$$

对此进行如下的自变量变换：

$$\Omega = \Omega \cos \phi, \quad \Omega_2 = \Omega \sin \phi, \quad t_2/t_1 = \tan \theta \quad (2.17)$$

这时

$$u_c(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\Omega_c} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[j\Omega \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cos(\theta - \phi)] \Omega d\phi d\Omega \quad (2.18)$$

从而

$$\begin{aligned} u_c(t_1, t_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Omega_c} \Omega J_0(\Omega \sqrt{t_1^2 + t_2^2}) d\Omega \\ &= \frac{\Omega_c^2}{2\pi} \frac{J_1(\Omega_c \sqrt{t_1^2 + t_2^2})}{\Omega_c \sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \\ &-\infty \leq t_1, t_2 \leq +\infty \end{aligned} \quad (2.19)$$

式中, $J_0(\cdot)$ 和 $J_1(\cdot)$ 分别为零阶和一阶第一类贝塞尔函数。

2.1.4 傅里叶变换的性质

下面举出傅里叶变换的基本性质。这里, 设信号 $f(t_1, t_2)$ 的傅里叶变换为 $F(\Omega_1, \Omega_2)$ 。

1. 反转性

$$f(\pm t_1, \pm t_2) \longleftrightarrow F(\pm \Omega_1, \pm \Omega_2) \quad (2.20)$$

2. 线性

$$a f_1(t_1, t_2) + a f_2(t_1, t_2) \longleftrightarrow a F_1(\Omega_1, \Omega_2) + a F_2(\Omega_1, \Omega_2) \quad (2.21)$$

3. 共轭性

$$f^*(t_1, t_2) \longleftrightarrow F^*(-\Omega_1, -\Omega_2) \quad (2.22)$$

其中“ $*$ ”表示复共轭。

4. 分离性

$$f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\Omega)F_2(\Omega) \quad (2.23)$$

5. 扩大缩小

$$f(at, at) \longleftrightarrow F(\Omega/a, \Omega/a) / |aa| \quad (2.24)$$

6. 移位性

$$f(t \pm \tau, t \pm \tau) \longleftrightarrow \exp[\mp j2\pi(\tau\Omega + \tau\Omega)]F(\Omega, \Omega) \quad (2.25)$$

7. 旋转性

$$f(t \cos\theta + t \sin\theta, -t \sin\theta + t \cos\theta) \longleftrightarrow F(\Omega \cos\theta + \Omega \sin\theta, -\Omega \sin\theta + \Omega \cos\theta) \quad (2.26)$$

8. 调制

$$\exp[\pm j(\eta t + \eta t)]f(t, t) \longleftrightarrow F(\Omega \mp \eta, \Omega \mp \eta) \quad (2.27)$$

9. 卷积

$$g(t, t) = h(t, t) \otimes f(t, t) \longleftrightarrow G(\Omega, \Omega) = H(\Omega, \Omega)F(\Omega, \Omega) \quad (2.28)$$

式中, \otimes 表示(2.32)式的卷积。

10. 乘积

$$g(t, t) = h(t, t)f(t, t) \longleftrightarrow G(\Omega, \Omega) = H(\Omega, \Omega) \otimes F(\Omega, \Omega) \quad (2.29)$$

11. 内积

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t) f^*(t, t) dt dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\Omega, \Omega) F^*(\Omega, \Omega) d\Omega d\Omega \end{aligned} \quad (2.30)$$

12. 帕塞瓦尔(Parseval)等式

$$\text{信号的能量} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t, t)|^2 dt dt$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\Omega_1, \Omega_2)|^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (2.31)$$

2.1.5 卷 积

将两个信号 $u_a(t_1, t_2)$ 和 $h_a(t_1, t_2)$ 按如下操作得到一个新信号 $y_a(t_1, t_2)$ 的运算,称为**卷积(convolution)**。

$$y_a(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_a(s_1, s_2) u_a(t_1 - s_1, t_2 - s_2) ds_1 ds_2 \quad (2.32)$$

这一卷积与下面的卷积相等。

$$y_a(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t_1 - s_1, t_2 - s_2) u_a(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \quad (2.33)$$

卷积是信号处理中最重要的操作之一。傅里叶变换中最重要的性质,就是两个信号的卷积的傅里叶变换等于两个信号的傅里叶变换的乘积。即设信号 $u_a(t_1, t_2), h_a(t_1, t_2), Y_a(t_1, t_2)$ 的傅里叶变换分别为 $U_a(\Omega_1, \Omega_2), H_a(\Omega_1, \Omega_2), Y_a(\Omega_1, \Omega_2)$, 则如下的关系成立。

$$\text{卷积 } y_a(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_a(s_1, s_2) u_a(t_1 - s_1, t_2 - s_2) ds_1 ds_2 \quad (2.34)$$

变换 \rightarrow

← 逆变换

$$\text{乘积 } Y_a(\Omega_1, \Omega_2) = H_a(\Omega_1, \Omega_2) U_a(\Omega_1, \Omega_2) \quad (2.35)$$

例题 2.2

解 对(2.34)式的右边进行傅里叶变换,即可证得。

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} h_a(s_1, s_2) u_a(t_1 - s_1, t_2 - s_2) ds_1 ds_2 \right] e^{-j\Omega_1 t_1 - j\Omega_2 t_2} dt_1 dt_2$$