Conf. dr. ing. Emil CAZACU

Departamentul de Electrotehnică
Facultatea de Inginerie Electrică
Universitatea Politehnica Bucureşti

GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK

NOTE DE CURS PENTRU UZUL STUDENȚILOR FACULTĂȚII
DE INGINERIE ÎN LIMBI STRĂINE –FILS,
FILIERA GERMANĂ,
ANUL I/SEMESTRUL I

2012

ELEKTROTECHNIK DER GIEICHSTROMKREISE

A. ELEMENTE DES STROMKREISES

1. Beschreibung der Stromkreiselemente

Unter **Stromkreisen für Gleichstrom** versteht man *Stromkreise, in denen die Stromstärken und Spannungen zeitlich unveränderliche Werte haben.*
Für gewöhnlich werden diese Größen mit großen Buchstaben *I, U* usw. bezeichnet.

Die Teile eines Stromkreises werden Elemente des Stromkreises gennant. So zum Beispiel hat ein einfacher Stromkreis für Gleichstrom, bestehend aus einer Spannungsquelle mit der EMS U_q und dem inneren Widerstand R_i und einem Widerstand *R* (Abb. 3.1), zwei Elemente: die Spannungsquelle und den Widerstand. *Stromkreiselemente mit zwei Klemmen (Endklemmen) werden* **Zweipole** *genannt.*

Aktive und passive Stromkreiselemente. Ein *Stromkreiselement* für Gleichstrom wird *passiv* genannt, wenn es keine Energie in den Stromkreis einspeisen kann, unabhängig von dem Richtungssinn des Stromes, der durch dieses Element fließt (für gewöhnlich nimmt ein solches Element elektrische Energie auf). Ein Widerstand ist ein passives Stromkreiselement.

Ein *Stromkreiselement* wird *aktiv* genannt, wenn es in gewissen Betriebsbedin-gungen eine Energie elektrischer Natur liefern kann (in anderen Betriebsbedingungen kann ein solches Element eventuell auch elektrische Energie aufnehmen). Die Stromquellen sind aktive Stromkreiselemente.

Ein Stromkreis, der nur aus passiven Elementen besteht, wird *passiver Stromkreis* genannt. Ein Stromkreis der außer passiven Elementen auch wenigstens ein aktives Element besitzt, wird *aktiver Stromkreis* genannt.

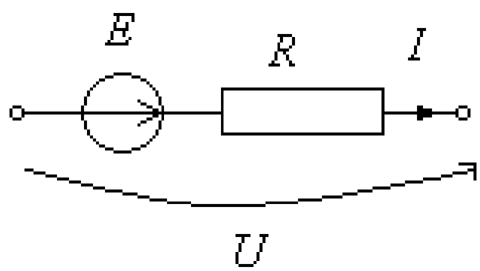


Abb. 3.1

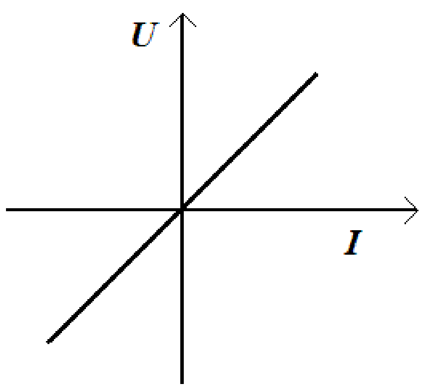


Abb. 3.2

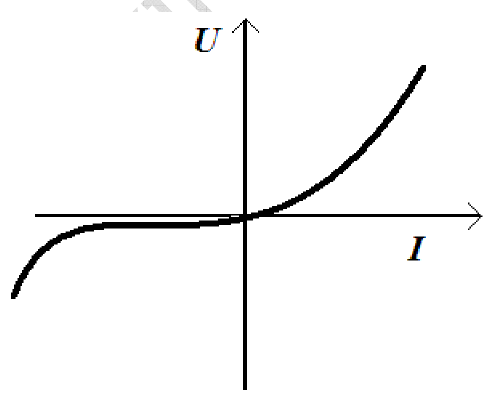


Abb. 3.3

Ein Zweipol wird vollständig durch die Beziehung zwischen der Klemmenspannung *U* und der Stromstärke *I* im Element beschrieben. Die graphische Darstellung dieser Beziehung in einem *U—I—Achsenkreuz* wird **Strom-Spannungs-Kennlinie des Stromkreiselements** genannt. *Stromkreiselemente* werden als *linear* bezeichnet, wenn ihre Strom-Spannungs-Kennlinie eine Gerade ist, die durch den Ursprung des Achsenkreuzes führt (Abb. 3.2). *Nichtlineare Stromkreiselemente* weisen eine kurvenförmige Strom-Spannungs-Kennlinie auf. (Abb. 3.3).

Die reellen Stromkreiselemente sind für gewöhnlich nichtlinear. Viele von ihnen können jedoch für genügend große Bereiche von Stromstärke und Spannung als linear angesehen werden.

Die vereinfachte Theorie der Gleichstromkreise bezieht sich auf Stromkreise, die aus idealen Elementen bestehen: idealer Widerstand und ideale Stromquelle. Die Nützlichkeit der idealen Stromkreiselemente besteht darin, dass sie eine einfache Formulierung der Stromkreistheorie erlauben. Das Verhalten von jedwedem reellen Element kann durch eine gleichwertige Schaltung, bestehend aus idealen Elementen, beschrieben (modelliert) werden. Deswegen wollen wir anschließend die Untersuchung der Gleichstromkreise mit dem Studium von zwei idealen Stromkreiselementen beginnen.

2. Der ideale Widerstand

Der **ideale Widerstand** *ist ein passiver und linearer Zweipol, dessen Klemmenspannung mit der Stromstärke, unabhängig von deren Wert, proportional ist.* Der Proportionalitätsfaktor ist der Widerstand R, bzw. der Leitwert $G = \frac{1}{R}$. Die Strom-Spannungs-Kennlinie hat demnach die Gleichung:

$U = RI$, für jedwedes I oder

$I = GU$, für jedwedes U.

Das zeichnerische Symbol des idealen Widerstands sowie seine Strom-Spannungs-Kennlinie sind in Abbildung 3.4 wiedergegeben.

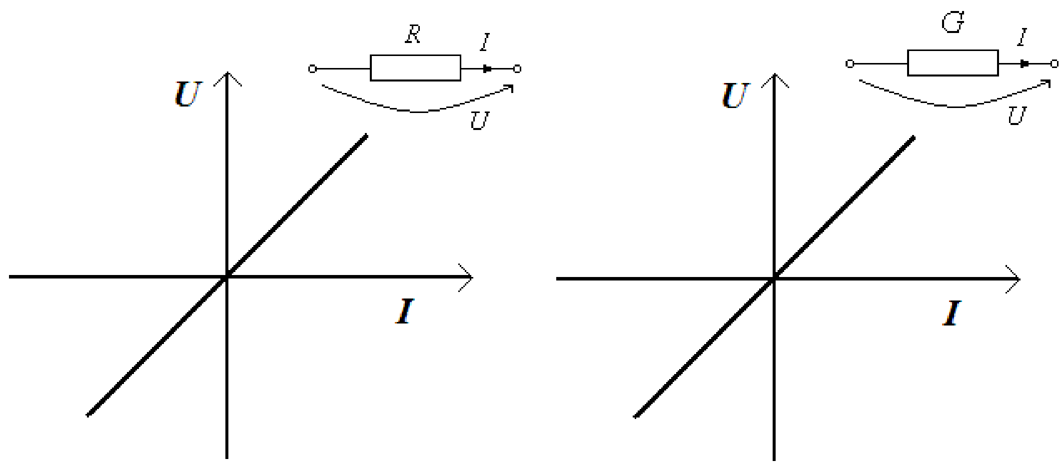


Abb. 3.4

Der ideale Widerstand ist ein passives Element: die Leistung $P_R = UI = RI^2 = GU^2 = \dfrac{U^2}{R}$ ist immer positiv, da sie effektiv von den Klemmen aufgenommen wird. Der ideale Widerstand arbeitet nur als Verbraucher elektrischer Energie.

3. Der ideale Spannungsgenerator

Der ideale Spannungsgenerator ist ein aktiver Zweipol, dessen Klemmens-Spannung von dem durch die Stromquelle fließenden Strom unabhängig ist.

Die *U*—*I*—Kennlinie einer idealen Spannungsquelle wird durch die Beziehung:

$U = U_q$ für jedwelches I ausgedrückt.

Das zeichnerische Symbol und die *U*—*I*—Kennlinie sind in Abbildung 3.5, *a* und *b* dargestellt.

Je nach dem angeführten Richtungssinn arbeitet die Spannungsquelle als Generator, wenn der Strom, der durch sie fließt, einen positiven Sinn hat und als Verbraucher, wenn der Strom einen negativen Sinn in bezug zur EMS hat. Die Leistung an den Klemmen des Spannungsgenerators $P_b = UI = U_q I$ ist im ersten Fall positiv (Generator) und im zweiten Fall negativ (Verbraucher). Die in einem Zeitintervall (t, $t + \Delta t$) durch die Klemmen ausgetauschte elektrische Energie ist $\Delta W = P_b \Delta t$. Die elektrische Energie ist positiv ($\Delta W > 0$), wenn sie von der Spannungsquelle effektiv abgegeben und negativ, wenn sie von dieser effektiv aufgenommen wird.

Der durch den Spannungsgenerator fließende Strom I hängt von der Art der Stromkreiselemente ab, die an ihre Klemmen angeschlossen sind.

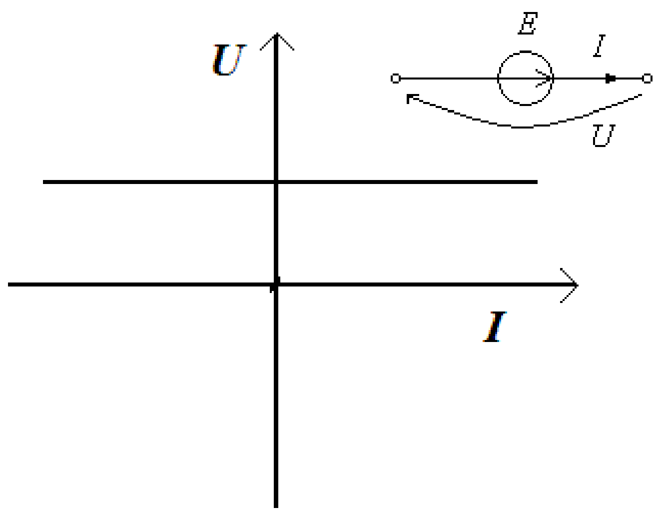


Abb. 3.5

B. DIE KIRCHHOFFSCHEN SÄTZE

1. Erster Kirchhoffscher Satz

Man nehme einen Verzweigungspunkt (*Knotenpunkt*) des Stromes in einem Stromkreis an (Abb. 3.6). I_1, I_2 und I_3 sind die Ströme, die durch die sich im Knotenpunkt verzweigenden Leiter fließen. Für eine geschlossene Fläche ∑, die den Knoten umhüllt, kann man entsprechend dem Gesetz der Erhaltung der Ladung:

$$I_\Sigma = I_1 + I_2 - I_3$$

und

$$\Delta q_\Sigma = 0 \quad \text{schreiben}$$

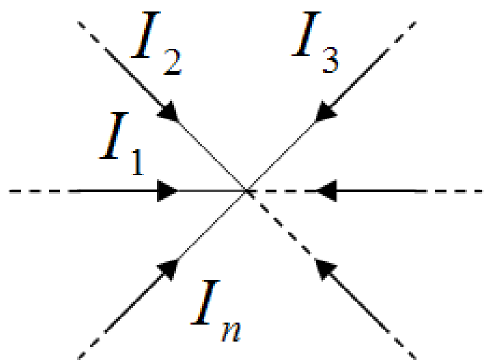


Abb. 3.6

(Die elektrische Ladung, die sich auf der Oberfläche der von Gleichstrom durchflossenen Leiter befindet, ist in der Zeit unveränderlich). Durch Einsetzen von $I_\Sigma = -\frac{\Delta q_\Sigma}{\Delta t}$, erhält man

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{3.1}$$

Diese Beziehung stellt den ersten *Kirchhoffschen Satz* für den angenommenen Knotenpunkt dar. Durch Verallgemeinern kann er folgendermaßen ausgesprochen werden: *Die algebraische Summe der sich in einem Knotenpunkt treffenden Gleichströme ist gleich Null*:

$$\sum_{K=1}^{N_b} \pm I_K = 0 \tag{3.2}$$

Beachte. Gemäß der Vereinbarung, die bei der Beschreibung des Gesetzes der Erhaltung der Ladung angenommen wurde, werden die vom Knotenpunkt wegführenden Ströme als positiv und jene zum Knotenpunkt fließenden als negativ betrachtet.

2. Zweiter Kirchhoffscher Satz

Man nehme eine Aufeinanderfolge (Kette) von Zweigen[1] aus einem Gleichstromkreis an, die zusammen ein geschlossenes Gebilde, genannt *Masche,* darstellen (Abb. 3.8).

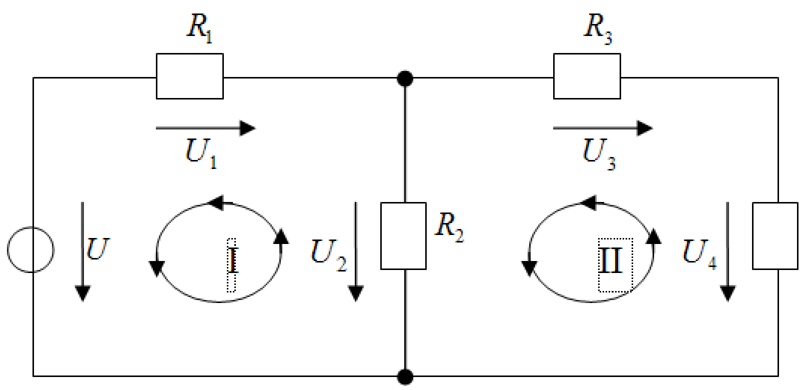


Abb. 3.8

Wenn man annimmt, dass die Bezugssinne der Ströme in den Zweigen (Abb. 3.8) mit den Bezugssinnen der *EMS* übereinstimmen und die Klemmenspannungen der Zweige die Bezugssinne aus der Abbildung 3.8 haben, kann man schreiben:

$$\begin{cases} U_1 + U_{q1} = R_1 I_1 \\ U_2 + U_{q2} = R_2 I_2 \\ U_3 + U_{q3} = R_3 I_3 \\ U_4 + U_{q4} = R_4 I_4 \end{cases} \tag{3.3}$$

Nun schreibt man die Verbindungsbeziehungen zwischen den Klemmenspannungen der Zweige und den Potentialen der Klemmen:

[1] Unter *Zweig* versteht man jeden beliebigen Abschnitt eines unverzweigten Stromkreises, der sich zwischen zwei Knotenpunkten befindet.

$$\begin{cases} U_1 = V_A - V_B \\ U_2 = V_C - V_B \mid *(-1) \\ U_3 = V_C - V_D \\ U_4 = V_D - V_A \end{cases} \tag{3.4}$$

Wenn man die zweite Gleichung mit (-1) multipliziert und jede Seite zusammenzählt, erhält man:

$$U_1 - U_2 + U_3 + U_4 = 0 \tag{3.5}$$

Wenn man ebenso mit dem Gleichungssystem (3.3) verfährt und das Ergebnis ans Gleichung (3.5) in Betracht zieht, erhält man die Beziehung:

$$U_{q1} - U_{q2} + U_{q3} + U_{q4} = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4$$

In dieser Art wurden zwei verschiedene Formulierungen für den zweiten Kirchhoffschen Satz erzielt (die nur für diejenigen Stromkreise gleichwertig sind, die ausschließlich aus linearen Stromkreiselementen bestehen). Somit haben wir für den **zweiten Kirchhoffsehen** Satz folgende Wortlaute:

- *Die algebraische Summe der Klemmenspannungen der Zweige, die eine Masche bilden, ist gleich Null.*

$$\sum_{K=1}^{N} \pm U_K = 0 \tag{3.6}$$

- *Die algebraische Summe der EMS der Stromquellen aus den Zweigen einer Masche ist der algebraischen Summe der Spannungsabfälle in den Widerständen der Zweige gleich:*

$$\sum_{K=1}^{N} \pm U_{qK} = \sum_{K=1}^{N} \pm R_K I_K \tag{3.7}$$

Die Summen werden algebraisch berechnet, weil bei der Annahme eines willkürlichen Umlaufsinns in der Masche, diejenigen Klemmenspannungen, deren Bezugssinn dem Umlaufsinn entgegengesetzt ist, ein negatives Vorzeichen haben. Dieselbe Regel zur

Bestimmung der Vorzeichen wird auch für die EMS und die Spannungsabfälle in den Zweigwiderständen angewendet.

C. UNTERSUCHUNG DER ZWEIPOLSTROMKREISE MIT HILFE DER KIRCHHOFFSCHEN SÄTZE

1. Regeln für die Zuordnung der Bezugssinne des Stromes und der Klemmenspannung

Untersuchen wir den Stromkreis aus Abbildung 3.12: ein idealer Spannungsgenerator speist einen linearen Widerstand. Da die Klemmenspannung des Spannungsgenerators gleich der Klemmenspannung des Widerstands ist ($U = U_q$ bzw. $U = RI$), kann der durch den Stromkreis fließende Strom berechnet werden:

$$I = \frac{U_q}{R}$$

Die von dem Spannungsgenerator entwickelte Leistung :

$$P_g = U_q I$$

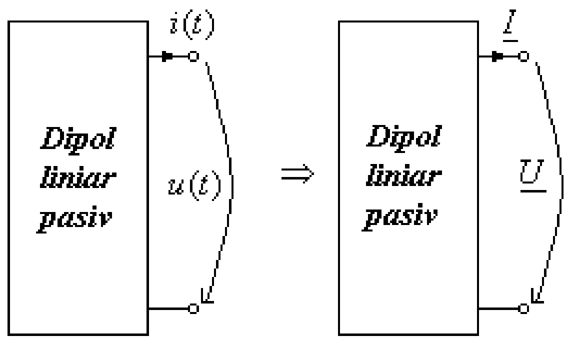
wird an den Widerstand abgegeben, wo sich die Energie durch den Joule'schen Effekt in Wärme umwandelt. Folglich ist:

$$P_g = U_q I = RI^2 = P_R$$

Im Verhältnis zu den Klemmen A und B haben der Strom, der durch die Klemmen fließt und die Klemmenspannung verschieden zugeordnete Richtungssinne, je nachdem, ob wir uns auf die linke Seite beziehen, wo die Energiequelle liegt, oder auf die rechte Seite, wo sich der Energieverbraucher befindet.

Für einen Zweipolstromkreis (Zweipol) sagt man, dass *die Richtungssinne der Spannung und des Stroms nach der für die*

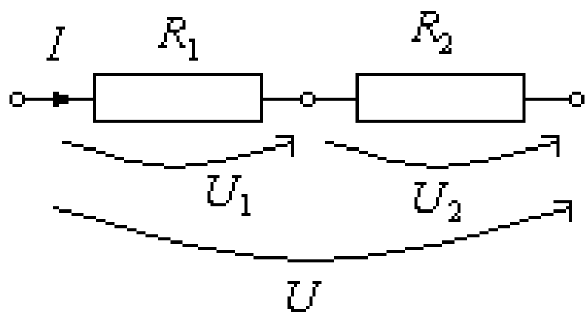
Generatoren verwendeten Regel zugeordnet werden, wenn ihre Richtungssinne denen für den Spannungsgenerator entsprechen der als Generator arbeitet (Abb. 3.13). *Die Bezugssinne der Spannung und des Stroms werden nach der für die Verbraucher verwendeten Regel zugeordnet, wenn ihre Richtungssinne jenen, die für einen Widerstand benutzt wurden, entsprechen* (Abb. 3.14).



Beachte! Die Anführung der Zuordnungsregel der Bezugssinne für Spannung und Strom an den Klemmen eines Zweipols ist verpflichtend. Die Zahlenwerte dieser Größen, die positiv oder negativ sein können, haben nur dann eine sinnvolle Bedeutung, wenn die obigen Regeln eingehalten werden.

2. Schaltung von Widerständen

Der Ersatzwiderstand eines linearen, passiven Zweipols ist gleich dem Verhältnis zwischen der Klemmenspannung und dem durch die Klemmen fließenden Strom (Abb. 3.15).



Die Rechenbeziehung ist :

$$R_e = \frac{U}{I}$$

Untersuchen wir nun auf dieser Grundlage die Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen.

a. Reihenschaltung

Für den Anfang nehmen wir zwei Widerstände in Reihenschaltung an (Abb. 3.16).

Da $U = U_1 + U_2$, worin $U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$, sowie $U = R_e I$ erhält man:

$$R_e I = R_1 I + R_2 I$$

woraus, nach Teilung durch I≠0:

$$R_e = R_1 + R_2 \tag{3.8}$$

Da aber $R_e = \frac{1}{G_e}$, $R_1 = \frac{1}{G_1}$ und $R_2 = \frac{1}{G_2}$ erhält man:

$$\frac{1}{G_e} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \tag{3.9}$$

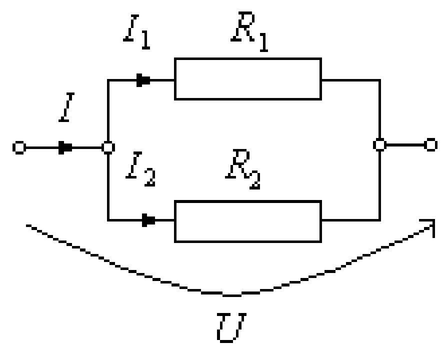
oder

$$G_e = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \tag{3.10}$$

Wenn die Elemente identisch sind, erhält man: $R_e = 2R$ und $G_e = \frac{G}{2}$.

b. Parallelschaltung

Wenn die beiden Widerstände parallel geschaltet sind, dann wird der Ersatzwiderstand so bestimmt, indem die Bedingung gestellt wird, dass für diegleiche Klemmenspannung der Strom, der in beiden Fällen durch die Klemmen fließt, dergleiche sein soll (Abb. 3.17).



Der durch den Ersatzwiderstand fließende Strom ist $I = \frac{U}{R}$ und entsprechend dem ersten Kirchhoff'schen Satz, kann geschrieben werden:

$$I = I_1 + I_2$$

worin $I_1 = \frac{U}{R_1}$ und $I_2 = \frac{U}{R_2}$.

Durch Einsetzen und Teilen durch U≠0 erhält man:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{3.11}$$

oder in einer anderen Form:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.12}$$

Natürlich erhält man auch:

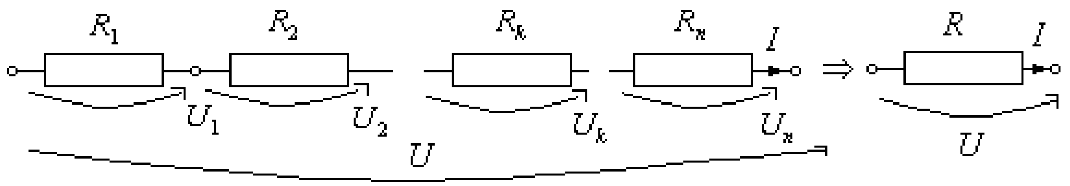
$$G_e = G_1 + G_2 \tag{3.13}$$

Wenn die Elemente identisch sind, erhält man: $G_e = 2G$ und $R_e = \frac{R}{2}$.

c. Verallgemeinerung der Rechenbeziehungen für Ersatzwiderstände

Wenn man auch weiterhin wie oben verfährt, können die Rechenbeziehungen für den Fall festgelegt werden, wenn eine Anzahl von n verschiedenen Widerständen in Reihen oder parallel geschaltet werden.

So zum Beispiel ergibt der zweite Kirchhoff'sche Satz für eine *Reihenschaltung* von mehreren Widerständen (Abb. 3.18):



$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n,$$

worin $U = R_e I$ und $U_k = R_k I$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Durch Einsetzen und Teilen durch I erhält man die Beziehung:

$$R_e = R_1 + R_2 + \ldots + R_n,$$

die noch wie folgt geschrieben werden kann:

$$R_e = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

oder

$$\frac{1}{G_e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{G_k} \qquad (3.14)$$

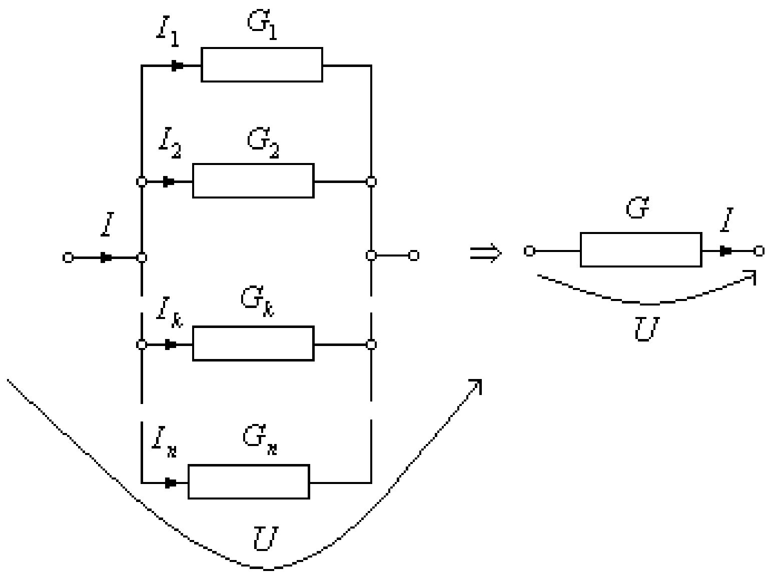
Wenn die Widerstände identisch sind, folgt:

$$R_e = nR \text{ und } G_e = \frac{G}{n}.$$

Wenn dieselben *Widerstände parallel geschaltet* werden, ergibt der erste Kirchhoff'sche Satz:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n,$$

worin $I = \frac{U}{R_e}$ und $I_k = \frac{U}{R_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.



Durch Einsetzen der Ströme und Teilen durch die Spannung U erhält man:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n},$$

Diese Gleichung kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \tag{3.15}$$

oder

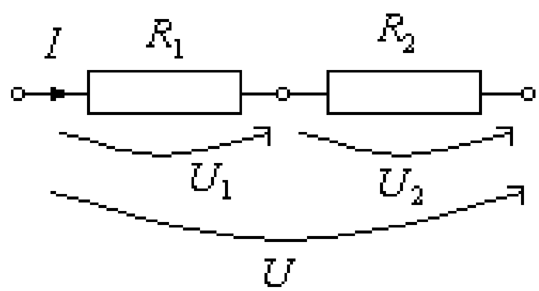
$$G_e = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

Wenn die Widerstände identisch sind, folgt: $G_e = nG$ und $R_e = \dfrac{R}{n}$.

3. Spannungs- und Stromteiler

a. *Spannungsteiler*

Unter **Spannungsteiler** versteht man eine *Reihenschaltung von zwei Widerständen mit dem Zweck, eine kleinere Spannung als die ursprüngliche Klemmenspannung U zu erzielen* (Abb. 3.22).



Der durch den Spannungsteiler fließende Strom ist:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

und die uns interessierende Spannung, sagen wir U_2, ist dann:

$$U_2 = R_2 I = R_2 \frac{U}{R_1 + R_2}$$

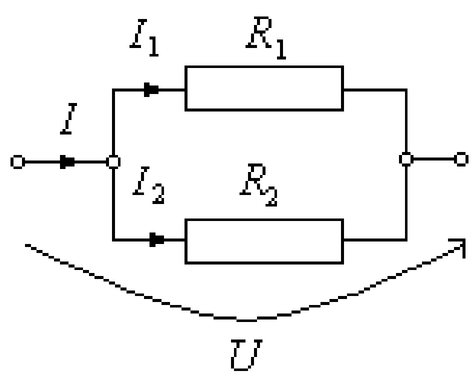
beziehungsweise:

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad (3.16)$$

das heißt ein Bruchteil der Klemmenspannung.

b. *Stromteiler*

Unter **Stromteiler** versteht man eine *Parallelschaltung von zwei Widerständen, die in einen Zweig eines Stromkreises eingebaut wird, mit dem Zweck, in einem der Elemente einen kleineren Strom als den Hauptstrom I zu erzielen* (Abb. 3.24).



Die beiden parallel geschalteten Elemente haben einen Ersatzwiderstand $R_e = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ und demnach ist die gemeinsame Klemmenspannung:

$$U = IR_e$$

Die Ströme, die durch jedes Element des Stromteilers fließen, sind:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{IR_e}{R_1};\ I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

und (3.17)

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{IR_e}{R_2};\ I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

4. Reeller Spannungsgenerator

Als *reeller Spannungsgenerator wird ein Generator mit innerem Widerstand bezeichnet*. Wie wir schon gesehen haben, kennzeichnet sich ein solcher Generator, der in belastetem Zustand arbeitet, durch die Gleichung:

$$U_{AB} = e - R_g I$$

oder mit den für Gleichstrom angenommenen Bezeichnungen:

$$U = U_q - R_i I \tag{3.18}$$

wobei R_g = R_i *innerer Widerstand des Spannungsgenerators* genannt wird.

Der zweite Kirchhoff'sche Satz erlaubt uns eine Ersatzschaltung aufzustellen, die nur aus idealen Elementen besteht und obiger Gleichung entspricht (Abb. 3.27). Man bemerkt, dass zum Unterschied von dem idealen Spannungsgenerator, bei dem *U* nicht von *I* abhängt, *im Falle des reellen Spannungsgenerators die Klemmenspannung fällt, wenn der Strom ansteigt.*

Im Leerlaufbetrieb (I = 0):

$$U|_{I=0} = U_0 = U_q$$

Im Kurzschlussbetrieb (U = 0):

$$I|_{U=0} = I_{KS} = \frac{U_q}{R_i} = \frac{U_0}{R_i}$$

Die Strom-Spannungs-Kennlinie ist eine Gerade (Abb. 3.27).

5. Reeller Stromgenerator

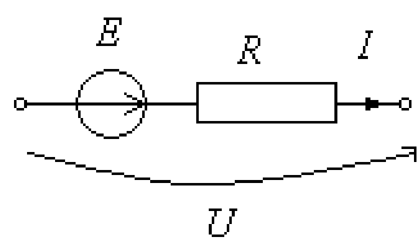
Wenn man die Gleichung (3.18) durch R_i teilt, erhält man:

$$\frac{U}{R_i} = \frac{U_q}{R_i} - I = I_{KS} - I$$

oder

$$I_{KS} = \frac{U}{R_i} + I = I_q + I$$

Der erste Kirchhoff'sche Satz erlaubt es uns eine Ersatzschaltung aufzustellen (Abb. 3.28), in der das ideale Element, das den Strom I_{KS} liefert, idealer Stromgenerator genannt wird. Für einen idealen Stromgenerator ist $R_i = \infty$ und $I = I_{KS}$ für jedes U (Abb. 3.29). Für gewöhnlich wird I_{KS} auch noch als $I_q = I_{KS}$ bezeichnet.



Die Parallelschaltung von einem idealen Stromgenerator mit dem inneren Widerstand des Generators wird reeller Stromgenerator genannt.

Die Strom-Spannungs-Kennlinie einer reellen Stromquelle ist in Abbildung 3.30 dargestellt. Man bemerkt, dass beim Anwachsen der

Spannung, die von dem Stromgenerator gelieferte Stromstärke bis zum Wert $I = 0$ fällt, wenn $U = U_0 = R_i I_{KS}$.

6. Zusammenschaltung idealer Generatoren

a. *Zusammenschaltung von Spannungsgeneratoren*

Zwei ideale und in Reihe verbundene Spannungsgeneratoren in Additionsschaltung (Abb. 3.32, a) haben eine Ersatzquelle mit *EMS*:

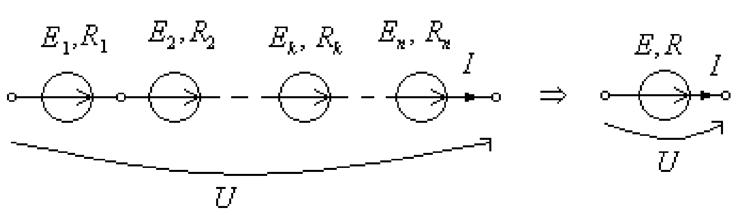
$$U_{qe} = U_{q1} + U_{q2}$$

Wenn die Generatoren so wie in Abbildung 3.32, b in einer Differentialschaltung liegen, so beträgt die *EMS* des Ersatzgenerators: $U_{qe} = U_{q1} - U_{q2}$.

Folglich hat *der Ersatzgenerator von mehreren in Reihe geschalteten idealen Spannungsgeneratoren eine EMS, die der algebraischen Summe der Einzelquellen gleich ist*:

$$U_{qe} = \sum_{k=1}^{n} \pm U_{qk} \tag{3.19}$$

Beachte! Zwei ideale Spannungsgeneratoren können nur dann *parallel* geschaltet werden, wenn ihre elektromotorischen Spannungen gleich sind ($U_{q1} = U_{q2} = U_q$). Die EMS des Ersatzgenerators ist dann $U_{qe} = U_q$.



b. *Zusammenschaltung von Stromquellen*

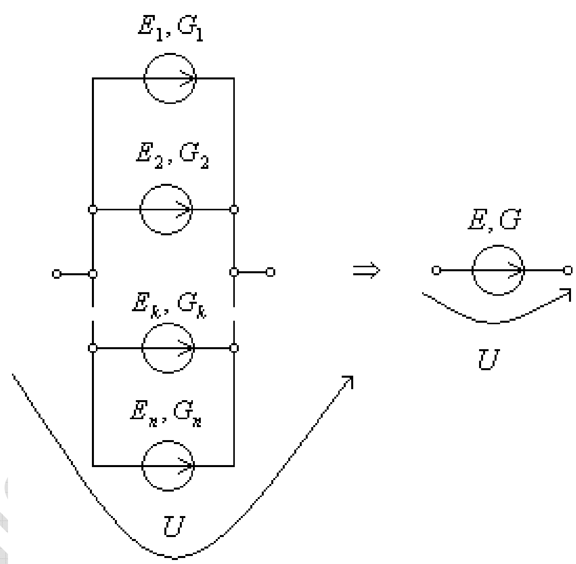
Zwei ideale Stromquellen, die *parallel geschaltet* sind, haben eine Ersatzquelle mit der Stromstärke $I_{qe} = I_{q1} + I_{q2}$, wenn sie in einer Additionsschaltung liegen (Abb. 3.33, a).

Wenn die Stromquellen durch eine Differentialschaltung verbunden werden (Abb. 3.33, b), beträgt der Strom der Ersatzquelle $I_{qe} = I_{q1} - I_{q2}$.

Folglich haben *mehrere parallelgeschaltete ideale Stromgeneratoren eine Ersatzstromquelle, deren Stromstärke gleich der algebraischen Summe der Stromstärken der Einzelquellen ist*:

$$I_{qe} = \sum_{k=1}^{n} \pm I_{qk} \tag{3.20}$$

Beachte! Zwei ideale Stromgeneratoren können nur dann in Reihe geschaltet werden, wenn sie gleiche Stromstärken haben ($I_{q1} = I_{q2} = I_q$). Die Stromstärke der Ersatzquelle ist in diesem Fall $I_{qe} = I_q$.



7. Zusammenschaltung reeller Stromquellen

a. Parallelschaltung von Spannungsgeneratoren

Es sei der Stromkreis aus Abbildung 3.34, für den die Elemente U_{qe} und R_e einer Ersatzstromquelle gesucht werden.

Die Bestimmung der Elemente wird auf eine einfache Art durchgeführt und zwar, indem *die Spannungsgeneratoren in Stromgeneratoren umgewandelt werden* (Abb. 3.35).

Die beiden idealen Stromgeneratoren mit den Stromstärken $\frac{U_{q1}}{R_1} = U_{q1}G_1$ und $\frac{U_{q2}}{R_2} = U_{q2}G_2$ können durch einen einzigen Stromgenerator mit Stromstärke $U_{q1}G_1 + U_{q2}G_2 = I_{qe}$ ersetzt werden.

Der Innenwiderstand des Stromgenerators (beziehungsweise ihr Leitwert) folgt aus der Parallelschaltung der beiden Widerstände, und zwar:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.21}$$

oder

$$G_e = G_1 + G_2$$

Jetzt kehren wir zum Spannungsgenerator zurück, dessen Innenwiderstand R_e und Ersatz-EMS:

$$U_q = R_e I_{qe} = \frac{I_{qe}}{G_e} = \frac{U_{q1}G_1 + U_{q2}G_2}{G_1 + G_2} = \frac{\frac{U_{q1}}{R_1} + \frac{U_{q2}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{3.21}$$

Schlußfolgerung. Die EMS der Ersatz Stromquelle ist ein gewogenes (ponderiertes) Mittel zwischen den EMS der Einzelquellen, das von den Größen der inneren Leitwerte abhängt. Der Innenwiderstand der Ersatzquelle wird so berechnet, als ob die Widerstände der Einzelquellen parallelgeschaltet wären.

b. Reihenschaltung von Spannungsgeneratoren

Zwei in Reihe geschaltete Spannungsgeneratoren können durch eine Ersatzstromquelle mit U_{qe} und R_e (Abb. 3.37) ersetzt werden, wenn man die Bedingung stellt, dass für diegleiche Klemmenspannung derselbe Strom die Klemmen durchfließen soll. So können folgende Beziehungen geschrieben werden:

$$U = U_{qe} - R_e \quad \text{und} \quad U = U_{q1} + U_{q2} - \left(R_1 + R_2\right) I$$

woraus durch Vergleich der entsprechenden Glieder folgende Gleichungen erhalten werden:

$$U_{qe} = U_{q1} + U_{q2}$$

und

$$R_e = R_1 + R_2$$

Für n Stromquellen können die Schaltgleichungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$U_{qe} = \sum_{k=1}^{n} \pm U_{qk} \tag{3.23}$$

und

$$R_e = \sum_{k=1}^{n} \pm R_k \tag{3.24}$$

Wenn die n Stromquellen identisch sind, erhält man:

$$U_{qe} = nU_q$$

und

$$R_e = nR$$

c. Parallelschaltung von Stromgeneratoren

Die Ersatzschaltung von n parallelgeschalteten reellen Stromgeneratoren besteht aus n idealen Stromgeneratoren und n Widerständen, die parallelgeschaltet sind. Für die Elemente der Ersatzstromquellen folgt dann sogleich:

$$I_{qe} = \sum_{k=1}^{n} \pm I_{qk} \tag{3.25}$$

und

$$G_e = \sum_{k=1}^{n} \pm G_k \tag{3.26}$$

Für n identische Stromgeneratoren werden die Gleichungen zu:

$$I_{qe} = nI_q$$

und

$$G_e = nG$$

D. UNTERSUCHUNG DER STROMKREISE MIT HILFE DER KIRCHHOFFSCHEN SÄTZE

1. Anwendungsmöglichkeiten der Kirchhoff'schen Sätze. Der Streckenkomplex eines Stromkreises

Die Spannungen an den Zweigklemmen eines Stromkreises, sowie die durch die Zweige fließenden Ströme befolgen die Kirchhoff'schen Sätze. Der erste Kirchhoff'sche Satz bezieht sich auf die Zweigströme im Knotenpunkt eines Netzes (Knotenpunktsatz). Der zweite Satz bezieht sich auf die Klemmenspannungen an den Zweigen, die eine Masche bilden (Maschensatz).

Verfolgen wir nun die Anwendungsart der Kirchhoff'schen Sätze bei der Untersuchung der Stromkreise für Gleichstrom.

a. *Anwendung des ersten Kirchhoff'schen Satzes (Knotenpunktsatz)*

Wie wir wissen, besagt der erste Kirchhoff'sche Satz, dass die algebraische Summe der Stromstärken aus den Zweigen, die sich in einem Knotenpunkt treffen, gleich Null ist.

$$\sum_{k \in B} \pm I_k = 0$$

worin mit B die Menge der Indizes der Zweige bezeichnet wurde, die sich im Knoten (b) treffen.

Beachte. Für die Überprüfung des ersten Kirchhoff'schen Satzes ist es nicht nötig, die Stromkreise mit allen Einzelheiten darzustellen. Es genügt, wenn nur die Knoten und Zweige der Stromkreise mit dem positiven Bezugssinn der Zweigströme aufgezeichnet werden (Abb. 3.40). Eine Darstellung dieser Art heißt *Streckenkomplex*[2].

Um einen Stromkreis lösen zu können, muss die Anzahl der unabhängigen Gleichungen bekannt sein, die man durch Anwendung des ersten Kirchhoffschen Satzes erhält. Um diese Anzahl zu bestimmen, werden zwei einfache Stromkreise untersucht, deren Streckenkomplex weiter unten vorgeführt wird.

Es kann gleich festgestellt werden, dass man für den Stromkreis mit zwei Knoten aus Abbildung 3.43, in beiden Knoten dieselbe Gleichung: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$ beziehungsweise $-I_1 + I_2 - I_3 = 0$ schreiben kann.

Für den Stromkreis mit drei Knoten aus Abbildung 3.44 können folgende Gleichungen geschrieben werden :

$$(a)\ I_1 - I_2 + I_3 = 0\ ;$$

$$(b)\ I_4 + I_5 - I_1 - I_2 = 0\ ;$$

$$(c) - I_3 - I_4 - I_5 = 0\ .$$

Von den drei Gleichungen sind nur zwei unabhängig (zum Beispiel erhält man die dritte Gleichung, wenn man die beiden ersten mit (-1) multipliziert und nachher zusammenzählt). Hieraus folgt durch Verallgemeinern : für einen Stromkreis mit N Knoten erhält man durch Anwendung des ersten Kirchhoff'schen Satzes N - l unabhängige Gleichungen. Folglich:

$$\sum_{k \in B} \pm I_k = 0 \left(b = 1, 2, \ldots, N-1 \right) .$$

b. Anwendung des zweiten Kirchhoff sehen Satzes

Wir erinnern uns nun an die erste Form des Wortlauts: die algebraische Summe der Klemmenspannungen an den Zweigen einer Masche ist gleich Null. Folglich schreiben wir :

$$\sum_{k \in P} \pm U_k = 0\ ,$$

[2] Auch als Graph eines Stromkreises bekannt.

worin P die Menge der Indizes der Zweige darstellt, die die Masche bilden (p). In dieser Summe ist das Vorzeichen plus, wenn der Bezugssinn der Spannung mit dem Umlaufsinn in der Masche übereinstimmt. Im gegenteiligen Fall ist das Vorzeichen der Spannung minus.

Die Anzahl der unabhängigen Spannung¬gleichungen für die Maschen ist gleich der Anzahl der unabhängigen Maschen.

Eine Masche wird dann gegenüber anderen Maschen als unabhängig bezeichnet, wenn sie nicht aus den Zweigen dieser Maschen gebildet werden kann. So zum Beispiel sind die in Abbildung 3.48 dar gestellten Maschen, die aus den Zweigen 1, 3, 6; 6, 2 4 und 3, 4, 5 gebildet werden, unabhängige Maschen, da jede von diesen wenigstens einen Zweig besitzt, der nicht aus einer anderen Masche stammt. Die aus den Zweigen 1, 2, 5 gebildete Masche ist jedoch den anderen drei Maschen gegenüber nicht mehr unabhängig, da sie aus je einem Zweig, der diesen Maschen gehört, gebildet wird. Wenn L die Gesamtzahl der Zweige eines Netzes und N die Gesamtzahl der Knoten in diesem Netz darstellt, so ist nach dem Eüler'schen Satz die Anzahl der unabhängigen Maschen :

$$o = L - N + 1$$

Im Falle des Netzes aus Abbildung 3.47 (L = 6, N = 4):

$$o = 6 - 4 + 1 = 3 \ .$$

So wie eine beliebige Masche aus mehreren unabhängigen Maschen hervorgeht, so kann die Gleichung für diese unabhängige Masche durch die algebraische Summe der Gleichungen für die unabhängigen Maschen bestimmt werden. Diese Eigenschaft soll nun für den Stromkreis aus Abbildung 3.48 mit L = 6, N = 4, o = 3 geprüft werden. Für die unabhängigen Maschen können folgende Gleichungen geschrieben werden:

$U_1 + U_6 - U_3 = 0$, für Masche 1;

$U_2 - U_4 - U_6 = 0$, für Masche 2;

$U_3 + U_4 - U_5 = 0$, für Masche 3.

Für andere Maschen, zum Beispiel für Masche 4, erhält man:

$$U_1 + U_2 - U_5 = 0$$

Diese .letzte Gleichung erhält man durch Zusammenzählen der Gleichungen 1, 2 und 3.

Durch Anwendung des zweiten Kirchhoffschen Satzes für ein Netz mit L Zweigen und N Knoten erhält man folglich ein Gleichungssystem mit $o = L - N + 1$ unabhängigen Spannungsgleichungen :

$$\sum_{m \in p} \pm U_m = 0 \left(p = 1,2,\ldots,o \right).$$

Anwendung des zweiten Kirchhoff'schen Satzes nach dem zweiten Wortlaut. Des öfteren bestehen Stromkreise für Gleichstrom nur aus Widerständen und Spannungsgeneratoren. Nach dem Ersetzen der reellen Stromkreiselemente durch ideale Elemente kann ein beliebiger Zweig m eines derartigen Stromkreises höchstens aus einem in Reihe geschalteten idealen Widerstand und einem idealen Spannungsgenerator bestehen.

In diesem Fall kann der zweite Kirchhoffsche Satz unter folgender Form angewendet werden: die algebraische Summe der EMS aus den Zweigen einer Netzmasche ist der algebraischen Summe der Spannungsabfälle in den Widerständen der Maschenzweige gleich. So können wir schreiben :

$$\sum_{m \in p} \pm U_{qm} = \sum_{m \in p} \pm R_m I_m \ \left(p = 1,2,\ldots,o \right).$$

Bei der Anwendung des zweiten Kirehhoffschen Satzes unter dieser Form wird die Netzmasche zweimal durchlaufen : einmal für die EMS und das zweite Mal für die Spannungsabfälle.

Beachte! *Das Vorzeichen einer EMS ist plus, wenn ihr Richtungssinn mit dem gewählten Umlaufsinn in der Masche* *übereinstimmt (im gegenteiligen Fall ist das Vorzeichen minus). Das Vorzeichen eines Spannungsabfalls* $R_m I_m$ *ist plus, wenn der Richtungssinn des Stromes, der durch den Widerstand fließt, mit dem Umlaufsinn in der Masche übereinstimmt (im gegenteiligen Fall ist das Vorzeichen minus).*

2. Lösung der Stromkreise mit Hilfe der Kirchhoffschen Sätze

Die Bestimmung der Zahlenwerte von Stromstärken und Spannungen in einem Stromkreis für Gleichstrom umfasst drei Etappen und zwar:

— Bestimmung des Gleichungssystems des Stromkreises:

— Lösung des Gleichungssystems;

— Überprüfung der Lösung.

Für die Bestimmung des Gleichungssystems können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden, wenn man das in Paragraph D.l Gelernte zusammenfasst:

— für einen Stromkreis für Gleichstrom mit L Zweigen und N Knoten können geschrieben werden:

— N - 1 Gleichungen zwischen den L Zweigströmen;

— L - N + 1 Gleichungen zwischen den L Spannungen an den Knotenpunkten.

So erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\sum_{m \in A} \pm I_m = 0\big(a = 1,2,\dots,(N-1)\big);$$

$$\sum_{m \in P} \pm U_m = 0\big(p = 1,2,\dots,L-N+1\big).$$

das aus L Gleichungen mit einer doppelten Anzahl von 2L Unbekannten besteht, und zwar:

I_m $(m = 1,2,\dots,L)$ — Zweigströme;

$U_m \ (m=1,2,\ldots,L)$ — Spannungen zwischen den Knotenpunkten

— *das Gleichungssystem muss zusätzlich noch L Gleichungen erhalten, damit man es lösen kann.*

Wenn der Stromkreis linear ist, können dem System noch L lineare Gleichungen mit Beziehungen zwischen den Größen I_m und U_m beigefügt werden. So sind zum Beispiel die Verbindungsgleichungen für einen Stromkreis, der nur aus Widerständen und Spannungsquellen besteht, folgende:

$$U_{qm} + U_m = R_m I_m \qquad (m=1,2,\ldots,L),$$

die für alle L Zweige geschrieben werden. Diese Gleichungen schließen auch die Sonderfälle ein, für die ein Zweig nur aus einem Widerstand (wobei $U_{qm}=0$ angenommen wird), oder nur aus einer Spannungsquelle (wobei $R_m=0$ ist) besteht. Für einen derartigen Stromkreis erhält man durch Anwendung der Kirchhoffschen Sätze das System:

$$\sum_{k\in A} \pm I_k = 0\big(a=1,2,\ldots,(N-1)\big);$$

$$\sum_{m\in P} \pm U_{qm} = \sum_{m\in P} \pm R_m I_m \ \ (p=1,2,\ldots,L-N+1).$$

das aus L Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten besteht, und zwar den Strömen I_1, I_2, ..., I_L, die durch die L Zweige fließen.

Wenn der Stromkreis auch Stromgeneratoren besitzt, dann

— bestimmt jeder Stromgenerator den entsprechenden Zweigstrom, das heißt, dass die Anzahl der unbekannten Ströme um einen kleiner ist, daneben jedoch noch eine Unbekannte auftritt, und zwar die an den Stromgenerator angeklemmte Spannung ;

— verkleinert sich die Anzahl der Maschen, für die der zweite Kirchhoff'sche Satz als Sonderfall geschrieben werden kann. Für die übriggebliebenen Maschen kann jedoch der zweite Kirchhoff'sche Satz in seiner allgemeinen Form angewendet werden. Folglich erhält man auch in diesem Fall ein Gleichungssystem von L Gleichungen mit L

Unbekannten. Diese alle sind Klemmenspannungen der Stromgeneratoren und bzw. Ströme, die durch diejenigen Zweige fließen, die keine Stromgeneratoren enthalten.

Verfolgen wir nun die Berechnungsetappen bei zwei Stromkreisen für Gleichstrom.

Oft kann die Lösung eines Stromkreises fur Gleichstrom vereinfacht werden, wenn die in Reihe oder parallel geschalteten Elemente durch Ersatzelemente vertauscht werden. Als Beispiel wird folgende Aufgabe gebracht.

3. Methoden und Lehrsätze zum Lösen von linearen Gleichstromkreisen

a. Überlagerungssatz

Gegeben sei der Stromkreis aus Abbildung 3.58, a. Der durch den Stromkreis fließende Strom ist:

$$I = \frac{U_{q1}}{R} + \frac{U_{q2}}{R}$$

Man bemerkt, dass I als Summe von zwei Gliedern berechnet wird, $I_1 = \frac{U_{q1}}{R}$ und $I_2 = \frac{U_{q2}}{R}$, die aus den Stromkreisen von den Abbildungen 3.58, b und c berechnet werden können, worin jede der beiden idealen Stromquellen, U_{q1} und U_{q2} sich der Reihe nach allein im Stromkreis befinden.

Diese Berechnungsmethode kann für jeden linearen Stromkreis benutzt werden, für den folgender *Überlagerungssatz* gültig ist: *der elektrische Strom durch jeden Zweig ist der algebraischen Summe der elektrischen Ströme gleich, die in jenem Zweig von jeder Stromquelle erzeugt werden, wenn sich diese allein im Stromkreis befinden würde.*

2) Für den Fall eines Stromkreises, der auch reelle Spannungsgeneratoren (oder Stromgeneratoren) enthält, müssen diese

durch eine Reihenschaltung von idealen Spannungsgeneratoren mit Widerständen (oder eine Parallelschaltung von idealen Stromgeneratoren mit Widerständen) ersetzt werden. So bleiben die Innenwiderstände im Stromkreis, wenn die Stromquelle, d.h. ihre EMS, aus dem Stromkreis entfernt wird.

b. *Methode der Maschenströme (der zyklischen Ströme)*

Gegeben sei der Stromkreis ans Abbildung 3.63, *a*. Durch Anwendung Kirchhoff'schen Sätze erhält man das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 8I_1 + 2I_3 = 16 \\ 4I_2 + 2I_3 = 20 \end{cases}$$

Das System wird mit Hilfe der Substitutionsmethode gelöst. Durch Eliminieren von I_3 erhält man das System:

$$\begin{cases} 8I_1 + 2(I_1 + I_2) = 16 \\ 4I_2 + 2(I_1 + I_2) = 20 \end{cases}$$

das auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\begin{cases} 10I_1 + 2I_2 = 16 \\ 2I_1 + 6I_2 = 20 \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$I_1 = \frac{20 - 6I_2}{2} = 10 - 3I_2 \ ,$$

und durch Einsetzen in die erste Gleichung erhält man:

$$10\left(10 - 3I_2\right) + 2I_2 = 16 \ ; \quad I_2 = \frac{84}{28} = 3A \ .$$

Nach weiteren Berechnungen erhält man für die beiden anderen Ströme:

$$I_1 = 1A \ ; \quad I_3 = 4A \ .$$

Die Verringerung der Anzahl der Gleichungen, die durch die Substitutionsmethode erzielt wurde, kann auch direkt durch die Wahl einer neuen Unbekannten erhalten werden, so dass der erste

Kirchhoff'sche Satz automatisch eingehalten wird. Die neuen Unbekannten sind fiktive Ströme, die auch Maschenströme oder zyklische Ströme genannt werden, wobei jeder dieser Ströme alle Zweige einer unabhängigen Masche durchfließt.

Nehmen wir an, dass durch die beiden Maschen des Stromkreises aus Abbildung 3.62 die Maschenströme $I_1^{'}$ und $I_2^{'}$ fließen, mit den in der Abbildung angegebenen Richtungssinnen. Die wirklichen Ströme, die durch die Zweige des Stromkreises fließen, können in Funktion von diesen fiktiven Strömen ausgedrückt werden. Somit ist $I_1 = I_1^{'}$, $I_2 = I_2^{'}$ und $I_3 = I_1^{'} + I_2^{'}$, da die beiden Maschenströme im selben Sinn durch den dritten Zweig fließen.

Durch Anwendung des zweiten Kirchhoff'schen Satzes für die zwei Maschen erhält man:

$$\begin{cases} 8I_1^{'} + 2(I_1^{'} + I_2^{'}) = 16 \\ 4I_2^{'} + 2(I_1^{'} + I_2^{'}) = 20 \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} 10I_1^{'} + 2I_2^{'} = 16 \\ 2I_1^{'} + 6I_2^{'} = 20 \end{cases}$$

Dieses System ist identisch mit dem weiter oben erhaltenen, das durch Anwendung der Kirchhoff'schen Sätze und durch Substitution des Stromes I_3 erzielt wurde. Das letzte System lässt aber eine verschiedenartige Interpretation zu. So kann man bemerken, dass die Gleichungen der Maschenströme folgende Form annehmen:

$$\begin{cases} R_{11}I_1^{'} + R_{12}I_2^{'} = U_{q1}^{'} \\ R_{21}I_1^{'} + R_{22}I_2^{'} = U_{q2}^{'} \end{cases}$$

wobei R_{11} und R_{22} *Eigenwiderstände der Maschen* genannt werden, $R_{12} = R_{21}$ *der gemeinsame Widerstand der Maschen* und $U_{q1}^{'}$ und $U_{q2}^{'}$ die EMS der Maschen sind.

Der Eigenwiderstand einer Masche ist gleich der Summe der Zweigwiderstände der Masche und ist immer positiv. Der gemeinsame

Widerstand der beiden Maschen ist der Widerstand des gemeinsamen Zweiges dieser Maschen, wenn dieser Zweig im selben Sinn von den Strömen der beiden Maschen durchflossen wird. Der Widerstand $R_{12} = R_{21}$ ist dem Widerstand des gemeinsamen Zweiges mit umgekehrten Vorzeichen gleich, wenn die Ströme diesen in entgegengesetztem Sinn durchfließen. Die EMS der Masche ist der algebraischen Summe aller EMS aus der Masche gleich und wird genauso wie für den Sonderfall des zweiten Kirchhoff'schen Satzes berechnet.

Die Lösung des Systems der Maschengleichungen ist:

$$I_1^{'} = 1A \; ; \; I_2^{'} = 3A$$

und kann durch Aufstellung der Streckenkomplexe mit Spannungs- und Stromeinzeichnung überprüft werden (Abb. 3.64).

Aufgabe. *Gegeben sei die Brückenschaltung aus Abbildung 3.65 mit den auf dem Schema angegebenen Zahlenwerten. Bestimme die Ströme mit Hilfe des Maschenstromverfahrens.*

Der Stromkreis hat L = 6, N = 4 und folglich: o = L - N + 1 = 3 unabhängige Maschen. $I_1^{'}$, $I_2^{'}$ und $I_3^{'}$ seien die entsprechenden Maschenströme mit den in der Abbildung angegebenen Richtungssinnen.

Die allgemeinen Gleichungen für die drei Maschen sind:

$$\begin{cases} R_{11}I_1^{'} + R_{12}I_2^{'} + R_{13}I_3^{'} = U_{q1}^{'} \\ R_{21}I_1^{'} + R_{22}I_2^{'} + R_{23}I_3^{'} = U_{q2}^{'} \\ R_{31}I_1^{'} + R_{32}I_2^{'} + R_{33}I_3^{'} = U_{q3}^{'} \end{cases}$$

wobei, den oben angeführten Regeln entsprechend:

$$R_{11} = R_1 + R_5 + R_2 = 10; \qquad R_{12} = R_{21} = R_5 = 4;$$

$$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5 = 13; \qquad R_{13} = R_{31} = -R_2 = -4;$$

$$R_{33} = R_2 + R_4 + R_6 = 10; \qquad R_{23} = R_{32} = R_4 = 6;$$

$$U_{q1}^{'} = 0; \quad U_{q2}^{'} = 0; \quad U_{q3}^{'} = U_q = 80V \; .$$

Anmerkung. $R_{13} = R_{31} = -R_2 = -4 < 0$, weil der Zweig 4 von den Strömen $I_1^{'}$ und $I_3^{'}$ in entgegengesetztem Sinn durchflossen wird.

Durch Einsetzen erhält man:

$$10I_1^{'} + 4I_2^{'} - 4I_3^{'} = 0$$

$$4I_1^{'} + 13I_2^{'} + 6I_3^{'} = 0$$

$$-4I_1^{'} + 6I_2^{'} + 12I_3^{'} = 80$$

Hieraus folgt:

$$I_1^{'} = 10A = -I_2^{'};\;\; I_3^{'} = 15A$$

Die Stromstärken der Zweigströme folgen aus der Überlagerung der Maschenströme, die die Zweige durchfließen:

$$I_1 = I_1^{'} = 10A$$

$$I_2 = -I_1^{'} + I_3^{'} = -10 + 15 = 5A$$

$$I_3 = -I_2^{'} = 10A$$

$$I_4 = I_2^{'} + I_3^{'} = -10 + 15 = 5A$$

$$I_5 = I_1^{'} + I_2^{'} = 10 - 10 = 0A$$

$$I_3 = I_3^{'} = 15A$$

Die Streckenkomplexe dieser Ströme und der Maschenströme sind in Abbildung 3.66, a dargestellt.

Man **bemerkt**, dass die Lösung derselben Aufgabe mit Hilfe der Kirchhoffs'chen Sätze zu einem Glei chungssystem von sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten geführt hätte.

c. *Methode der Knotenpotentiale*

Es soll der Stromkreis aus Abbildung 3.67 gelöst werden, wobei die Unbekannte das Potential des Knotenpunktes (a) ist, im Verhältnis zum Potential des Knotens (b), das als Null angenommen wird. Die Klemmenspannungen der drei Widerstände und die sie durchfließenden Ströme können in Funktion von diesem Potential ausgedrückt werden, so wie es in den Strom- und Spannungsstreckenkomplexen aus Abbildung 3.68, a und b verfolgt werden kann.

Es kann festgestellt werden, dass der zweite Kirchhoff'sche Satz automatisch erfüllt ist. Nun muss nur noch der erste Kirchhoff'sche Satz erfüllt werden, also:

$$\frac{U_{q1}-V}{R_1}+\frac{U_{q2}-V}{R_2}-\frac{V}{R_3}=0 .$$

Durch Ordnen erhält man:

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V=\frac{U_{q1}}{R_1}+\frac{U_{q2}}{R_2} .$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten erhält man:

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)V=\frac{16}{8}+\frac{20}{4} .$$

woraus folgt:

$$U=8V .$$

Wenn man den Knoten mit dem Index 1 bezeichnet, kann die erhaltene Gleichung folgende Form annehmen:

$$G_{11}U_1=I_{KS1}$$

Wenn der Stromkreis drei Knotenpunkte gehabt hätte und wenn man die Potentiale der Knoten 1 und 2 mit V_1 und V_2 bezeichnet hätte, während $V_3=0$ gewesen wäre, dann hätte man in ähnlicher Weise ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen aufstellen können:

$$\begin{cases} G_{11}U_1+G_{12}U_2=I_{KS1} \\ G_{21}U_1+G_{22}U_2=I_{KS2} \end{cases}$$

Die Leitwerte G_{11} und G_{22} werden *Eigenleitwerte der Knotenpunkte* genannt. So wie weiter oben angeführt, wird der Eigenleitwert eines Knotens als Summe der Leitwerte aller in diesem Knoten zusammenführenden Zweige berechnet und hat stets einen positiven Wert. Der Leitwert $G_{12} = G_{21}$ ist der *gemeinsame Leitwert* zwischen Knoten 1 und Knoten 2 und wird als Summe der Leitwerte der Zweige berechnet, die die Knoten 1 und 2 direkt verbinden (mit umgekehrten Vorzeichen). Die Ströme I_{KS1} und I_{KS2} werden *Kurzschlußströme* genannt. Ein Kurzschlußstrom wird aus der algebraischen Summe der Ströme berechnet, die von den Stromquellen, die in den im Einotenpunkt zusammentreffenden Zweigen liegen, gegen den Knoten geliefert würden, wobei die Klemmen der Zweige kurzgeschlossen wären.

d. Umwandlungsmethoden

Einen Stromkreis umwandeln heißt, ihn in einen Ersatzstromkreis umändern. So kann zum Beispiel eine Kette von Widerständen in Reihenschaltung durch einen einzigen Widerstand ersetzt werden, dessen Wert aus der Summe der Widerstände berechnet wird; ein reeller Spannungsgenerator kann in einen reellen Stromgenerator verwandelt werden usw. Die Umwandlungsmethoden werden in der Elektrotechnik verwendet, um die Stromkreise zu vereinfachen und deren Berechnung zu erleichtern.

Umrechnung: Dreieck-Stern- und Stern-Dreieck-Schaltung. Der Stromkreis aus Abbildung 3.71, a wird *Sternschaltung* und derjenige aus Abbildung 3.71, b *Dreieckschaltung* genannt. Ihre Elemente sind R_1, R_2, R_3 (Stern) und R_{12}, R_{23}, R_{31} (Dreieck).

Ein Dreieck in einen Stern umwandeln heißt, die Elemente R_1, R_2, R_3 einer Sternschaltung zu finden, die unter beliebigen Bedingungen eine Dreieckschaltung ersetzen kann (die also mit einem Dreieck äquivalent ist). Folglich sind R_{12}, R_{23}, R_{31} gegeben, während R_1, R_2, R_3 verlangt werden. Da die beiden Schaltungen unter jeder

Bedingung äquivalent sein müssen, kann auch der Fall angenommen werden, für den nur ein Klemmenpaar gespeist wird, zum Beispiel die Klemmen (1) und (2), während die Klemme (3) leer steht (Abb. 3.71). In diesem Fall müssen die beiden Ersatzwiderstände gleich sein:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

In ähnlicher Weise erhält man für Speisung der Klemmen (2), (3) und (3), (1):

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Durch Zusammenzählen der drei Gleichungen erhält man:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{23}R_{31} + R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Wenn man von dieser letzten Gleichung je eine der obigen Gleichung abzieht, erhält man:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Für den Sonderfall gleicher Zweigwiderstände

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_\Delta$$

folgt

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R_\Delta}{3}$$

Um einen Stern in ein Dreieck umzuwandeln, speist man der Reihe nach die beiden Stromkreise wie in Abbildung 3.72, zum Beispiel durch die Klemmen (1) und (2), wobei die Klemmen (2) und (3) kurzgeschlossen werden. Es werden die Ersatzleitwerte, die gleich sein müssen, berechnet. So erhält man nacheinander:

$$G_{12} + G_{31} = \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{23} + G_{12} = \frac{G_2(G_3 + G_1)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{31} + G_{23} = \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Durch lösen dieses Systems wie im vorherigen Fall, erhält man:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \tag{3.28}$$

$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Für den Sonderfall von gleichen Leitwerten in der Sternschaltung;

$$G_1 = G_2 = G_3 = G = \frac{1}{R}$$

folgt:

$$G_{12} = G_{23} = G_{31} = \frac{1}{R_\Delta} = \frac{G}{3} = \frac{1}{3R}$$

woraus $R = \frac{R_\Delta}{3}$, genau wie weiter oben erhalten wurde.

Umwandlung von Stromkreisen in Ersatzschaltungen

Der Ersatz-Spannungsgenerator. Helmholtz-Thevenin'scher Satz. Es sei eine Stromquelle mit der EMS U_q und dem Innenwiderstand R_i, die in einen Verbraucher mit Widerstand R einspeist.

Nach dem Ohm'schen Gesetz ist die Stromstärke:

$$I = \frac{U_q}{R + R_i}$$

Wir stellen uns nun folgende Frage: welche Versuche (Messungen) müssen gemacht werden, um die Stromstärke durch jeden gegebenen Verbraucher R berechnen zu können, wenn die Parameter der Stromquelle unbekannt sind? Wenn der Verbraucher abgeschaltet ist (Stromquelle in Leerlauf: $R = \infty$), erhält man I = 0, während $U_{AB0} = U_q$ die Leerlaufspannung an den Klemmen der Stromquelle darstellt. Wenn die Klemmen der Stromquelle kurzgeschlossen sind (R = 0), ist $U_{AB} = 0$ und der Kurzschlußstrom beträgt:

$$I = I_{KS} = \frac{U_q}{R_i} = \frac{U_{AB0}}{R_i}$$

Hieraus folgt:

$$R_i = \frac{U_{AB0}}{I_{KS}}$$

Somit erhält man:

$$I = \frac{U_{AB0}}{R + \frac{U_{AB0}}{I_{KS}}}$$

Es genügt also, die Leerlaufspannung U_{AB0} und den Kurzschlußstrom zu messen. Man bemerkt, dass R_i den Innenwiderstand der Stromquelle darstellt, die ein passives Element geworden ist, das heißt, den Widerstand der durch Annullierung der EMS erhalten wurde (es bleibt nur der Innenwiderstand übrig). Dieser Widerstand wird mit R_{AB0} bezeichnet. So erhält man:

$$I = \frac{U_{AB0}}{R + R_{AB0}}$$

Diese Beziehung stellt den **Helmholtz-Thevenin'schen Satz** dar und wird in folgendem Sinn verallgemeinert: wenn an zwei Klemmen A, B eines aktiven Stromkreises ein Verbraucher R geschaltet wird, dann wird die Stromstärke aus Zweig AB mit folgender Beziehung berechnet:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R + R_{AB0}} \tag{3.29}$$

wobei U_{AB0} die Spannung darstellt, die an den Klemmen A und B auftritt, wenn der Widerstand R aus dem Stromkreis ausgeschaltet wird (Leerlaufbetrieb), und R_{AB0} den Widerstand des in den passiven Zustand überführten Stromkreises (im Verhältnis zu den Klemmen A und B) darstellt, das heißt, den Widerstand des Stromkreises (ohne den Zweig AB), wenn die EMS der Stromquellen annulliert wird und nur deren Innenwiderstände bestehen bleiben.

Der Helmholtz-Thevenin'sche Satz führt zum Ersatzschaltbild aus Abbildung 3.74, c, in welchem $U_q = U_{AB0}$ und $R_i = R_{AB0}$. Dieses aktive Ersatzschaltbild wird *Ersatz-Spannungsgenerator des Stromkreises im Verhältnis zu den Klemmen A und B* genannt.

Man kann demnach folgenden **Lehrsatz des Ersatz-Spannmigsgenerators eines aktiven Stromkreises** aussagen : *im Verhältnis zu zwei Klemmen A und B kann jeder aktive Stromkreis für Gleichstrom in einen Ersatz-Spannungsgenerator umgewandelt werden, dessen EMS* $U_q = U_{AB0}$ *und dessen Innenwiderstand* $R_i = R_{AB0}$ *ist.*

Ersatz-Stromgenerator; Norton'scher Satz. Durch Umwandlung des Ersatz-Spannungsgenerators in einen Ersatz-Stromgenerator (Abb. 3.75) erhält man den Ersatz- Stromgenerator des Stromkreises gegenüber den Klemmen A und B.

Es kann demnach auch folgender **Lehrsatz des Ersatz-Stromgenerators eines aktiven Stromkreises** ausgesprochen werden: im Verhältnis zu zwei Klemmen A und B kann jeder aktive Stromkreis für Gleichstrom in einen Ersatz-Stromgenerator umgewandelt werden mit $I_q = I_{KS\ AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB0}}$ und dem Ersatzleitwert $G_{AB0} = \frac{1}{R_{AB0}}$.

Aufgabe. *Der Ersatz-Spannungsgenerator eines Stromkreises für Gleichstrom hat* $U_{AB0} = 100V$ *und* $R_{AB0} = 10\Omega$. *Bestimme den Ersatz-Stromgenerator.*

$$I_q = \frac{U_{AB0}}{R_{AB0}} = \frac{100}{10} = 10\,A; \quad G_{AB0} = \frac{1}{R_{AB0}} = \frac{1}{10} = 0.1S \ .$$

Man nehme an, dass der Ersatz-Stromgenerator eines Stromkreises einen Verbraucher mit Leitwert $G = \frac{1}{R}$ einspeist. Es soll die Spannung U_{AB} an den Verbraucherklemmen bestimmt werden.

$$U_{AB} = RI_{AB} = \frac{1}{G} I_{AB} \ .$$

Mit Hilfe der Stromteilerregel erhält man:

$$I_{AB} = I_{KS\ AB} \frac{R_{AB0}}{R + R_{AB0}} = I_{KS\ AB} \frac{G}{G_{AB0} + \mathrm{G}} \ .$$

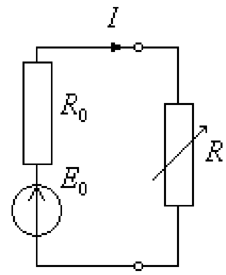
Durch Einsetzen in den Ausdruck der Spannung erhält man:

$$U_{AB} = \frac{I_{KS\ AB}}{G + G_{AB0}} \tag{3.30}$$

Diese Gleichung drückt den Norton'schen Satz mathematisch aus, der folgendermaßen ausgesprochen werden kann : *die Klemmen-Spannung eines passiven Zweiges mit Leitwert* **G**, *der zwischen die Klemmen* **A** *und* **B** *eines Stromkreises für Gleichstrom eingeschaltet wird, ist gleich dem Verhältnis zwischen der Stromstärke, die sich beim Kurzschließen der Klemmen einstellt, und der Summe von Zweigleitwert* **G** *und Leitwert* $\mathbf{G_{AB0}}$ *des gegenüber den Klemmen* **A** *und* **B** *in den passiven Zustand überführten Stromkreises.*

e. *Lehrsatz des Leistungsumsatzes in Gleichstromkreisen*

Leistungsumsatz mit maximaler Verbraueherleistung. Es wird ein reeller Spannungsgenerator mit EMS U_q und Innenwiderstand R_i angenommen, der in einen Verbraucher mit Widerstand R einspeist (Abb. 3.78). Vorausgesetzt, dass die Stromquelle gegeben ist, wird die Frage gestellt: in welcher Situation ist die vom Verbraucher aufgenommene Leistung maximal ?



Um auf diese Frage zu antworten, wird die vom Verbraucher aufgenommene Leistung in Betracht gezogen:

$$P = RI^2$$

Nach dem Ohm'schen Gesetz ist:

$$I = \frac{U_q}{R + R_i}$$

so dass die Leistung folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$P = \frac{R{U_q}^2}{\left(R + R_i\right)^2} = \frac{{U_q}^2}{\left(\sqrt{R} + \frac{R_i}{\sqrt{R}}\right)^2}$$

Da die EMS U_q gegeben ist, wird die Leistung dann einen Maximalwert erreichen, wenn der Nenner Minimalwert annimmt. Um diesen Minimalwert zu finden, kann bemerkt werden, dass das Produkt der Glieder konstant ist, und zwar:

$$\frac{R_i}{\sqrt{R}} \cdot \sqrt{R} = R_i$$

Aus der Mathematik ist bekannt, dass von allen Zahlenpaaren, deren Produkt konstant ist, deren Summe einen Minimalwert erreicht, wenn die beiden Zahlen gleich sind (z.B. 1 x 16 = 2 x 8 = 4 x 4 $\Rightarrow$ 4 + 4

< 2 + 8 < 1 + 16). Da nun das Produkt der beiden eingeklammerten Glieder des Nenners konstant ist, folgt, dass ihre Summe einen Minimalwert erreicht, wenn die beiden Glieder gleich sind:

$$\frac{R_i}{\sqrt{R}} = \sqrt{R} \Rightarrow R_i = R$$

In diesem Fall ist die Maximalleistung:

$$P_{max} = \frac{U_q^{\ 2}}{4R_i} \tag{3.32}$$

In dieser Art gelangen wir zu folgendem Wortlaut des **Lehrsatzes der maximalen Leistungsübertragung** : *ein Generator Überträgt dann einem Verbraucher eine maximale Leistung* $\frac{U_q^{\ 2}}{4R_i}$, *wenn der Widerstand des Verbrauchers dem Innenwiderstand des Generators gleich ist.*

Die Leistung kann als Funktion von R dar gestellt wer den, wenn man bemerkt, dass:

für $R=0,\ P=0$;

für $R=R_i,\ P=P_{max}$;

für $R=\infty,\ P=0$.

Ein Verbraucher, der die Bedingung der maximalen Leistungsübertragung erfüllt, wird als der Stromquelle *angepasst* bezeichnet. Die Anpassung der Verbraucher wird nur in der Signaltechnik benützt (Radio- und Fernsehtechnik u.a.)

Wenn der **Wirkungsgrad der Energieübertragung** als :

$$\eta = \frac{P\Delta t}{P_q\Delta t} = \frac{P}{P_q}$$

definiert wird, wobei $P_q = U_q I = \dfrac{U_q^{\ 2}}{R + R_i}$ die gesamte, von der Stromquelle entwickelte Leistung darstellt, erhält man:

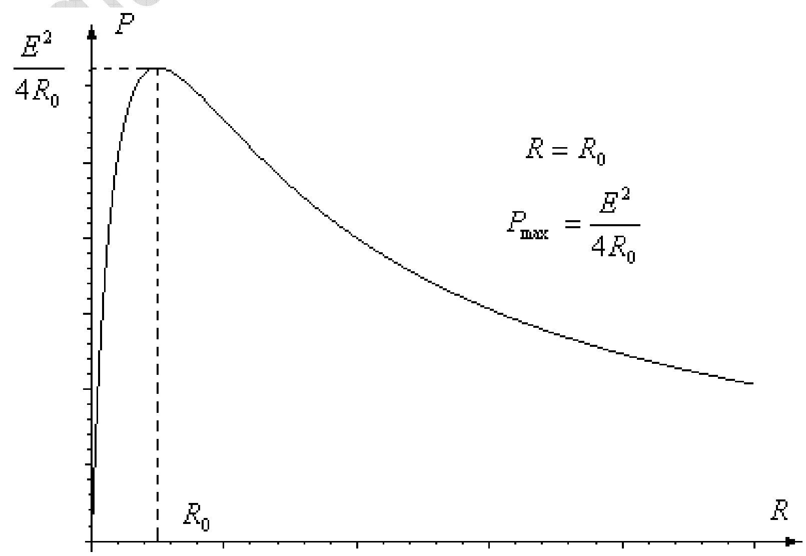
$$\eta = \frac{\dfrac{RU_q^{\ 2}}{(R+R_i)^2}}{\dfrac{U_q^{\ 2}}{R+R_i}} = \frac{R}{R+R_i}$$

Man bemerkt, dass *der Wirkungsgrad um so größer ist*, je kleiner R_i gegenüber R ist ($R_i \ll R$). Für $P = P_{max}$, $R = R_i$ erhält man:

$$\eta\left(\frac{P}{P_{max}}\right) = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \ .$$

Dieses Ergebnis ist selbstverständlich, weil dann, wenn der Widerstand des Verbrauchers dem Innenwiderstand der Stromquelle gleich ist, diese von gleichem Strom durchflossen werden und dieselben Leistungen dissipieren. Somit wird die Hälfte der von der Stromquelle entwickelten Leistung von der Stromquelle selbst, die andere Hälfte vom Verbraucher aufgenommen.

Im elektrischen Energiewesen (Kraftwerke, Kraftnetze usw.) ist der Wirkungsgrad von 50% gänzlich unbefriedigend, so dass in diesem Fall die Verbraucher nicht den Stromquellen angepasst werden.



f. *Lehrsatz der Erhaltung der Leistung*

Gegeben sei ein Spannungsgenerator mit EMS U_q und Innenwiderstand R_i der in einen Verbraucher mit Widerstand R einspeist. Nach dem Ohm'schen Gesetz kann man schreiben:

$$U_q = R_i I + RI \ .$$

Nach Multiplizieren mit I erhält man:

$$U_q I = R_i I^2 + RI^2 \ ,$$

oder

$$P_q = P_i + P$$

wobei

P_q die von dem Generator entwickelte Leistung, P_i die im Innenwiderstand der Stromquelle dissipierte Leistung und P die vom Verbraucher aufgenommene Leistung darstellen.

Nun wird auch das Beispiel aus Abbildung 3.77 in Betracht gezogen, für das man nach Anwendung des zweiten Kirchhoff'schen Satzes erhält:

$$U_{q1} - U_{q2} = R_1 I + R_2 I$$

oder, nach Multiplizieren mit I:

$$U_{q1} I - U_{q2} I = R_1 I^2 + R_2 I^2$$

beziehungsweise

$$P_{1q} + P_{2q} = P_1 + P_2 \ .$$

Man bemerkt, dass im ersten Fall die vom Generator entwickelte Leistung in seinem Innenwiderstand und im Verbraucher dissipiert wird. Im zweiten Fall deckt die vom ersten Generator entwickelte Leistung die in den Widerständen dissipierte Leistung sowie die vom zweiten Generator aufgenommene Leistung.

Diese Beziehungen werden *Erhaltungsgleichungen der Leistungen* oder *Leistungsbilanzgleichungen* genannt. Sie können für einen Stromkreis mit L aktiven Zweigen verallgemeinert werden:

$$\sum_{K=1}^{L} \pm U_K I_K = \sum_{K=1}^{L} \pm R_K I_K^{\,2}$$

und stellen den mathematischen Ausdruck des **Lehrsatzes der Erhaltung der Leistungen** dar, der folgendermaßen ausgesprochen werden kann: die algebraische Summe der von den Spannungsgeneratoren entwickelten Leistungen ist der Summe der in den Widerständen des Stromkreises dissipierten Leistungen gleich.

Anmerkung. Die Leistung einer Stromquelle hat das Vorzeichen (+), wird also effektiv abgegeben, wenn die Stromstärke und die EMS positiv sind und denselben Richtungssinn haben ; die Leistung einer Stromquelle hat das Vorzeichen (-), wenn sie effektiv auf genommen wird, wenn die Stromstärke und die EMS positiv sind und entgegengesetzten Sinn haben; die in den Widerständen dissipierten Leistungen (einschließlich in den Innenwiderständen der Stromquellen) sind immer positiv.

Für gewöhnlich wird für die Überprüfung der Lösung eines Stromkreises die Leistungsbilanzgleichung aufgestellt. Wenn diese Bilanzgleichung nicht stimmt, ist die Lösung sicher nicht richtig.

Umlauf- und Knotenanalyse unter Benutzung eines „vollständiges Baumes“

Lösungsansatz:

Das Maschenstrom- und das Knotenspannungsverfahren nach Kap. 14.2 und Kap 14.3 haben zum Ziel, die richtige Anzahl der benötigten Gleichungen bestimmen und die Auswahl der voneinander unabhängigen Gleichungen zur Netzwerkanalyse vornehmen zu können.

Beide Vorgehensweisen werden auch bei der Analyse unter Benutzung eines „vollstän-digen Baumes“ zugrunde gelegt, wobei sich hier allerdings die erforderlichen Arbeitsschritte weitergehend schematisieren lassen.

Begriffsdefinitionen:

Abstrahiert man die Zeichnung des Netzes zu einem Streckennetz („Graph“; vergleiche auch Kap. 14.1) und verbindet die Knoten durch eine nicht unterbrochene Linie (im Streckennetz nach Bild 14.8.1. dick eingezeichnet), nennet man diesen Linienkomplex einen „Baum“.

Dieser Linienzug, der aber keinen geschlossenen Umlauf bilden darf, heißt „vollständiger Baum“, wenn alle Knoten erfasst sind.

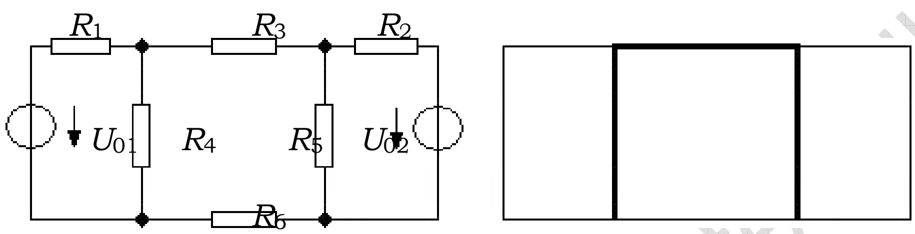


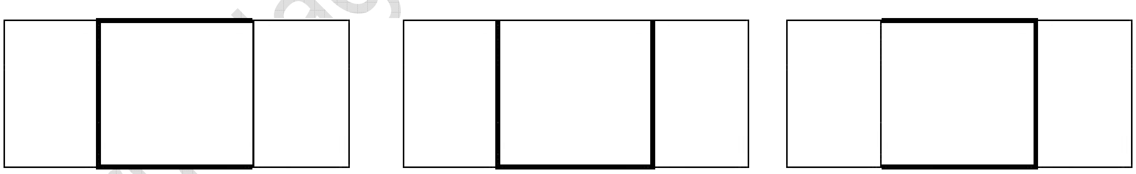
Bild 14.8.1 Netzwerk und zugehöriges Streckennetz mit einem Beispiel für einen eingetragenen „vollständigen Baum“

Die dicken Linien bezeichnet man als „Baumzweige“, die dünnen Linien als „Verbin-dungszweige“.

Sieht man z.B. die Ströme in den Verbindungszweigen als unabhängige Größen an, sind die Ströme in den Baumzweigen die abhängigen Ströme.

Man hat sich somit eine grafische Methode geschaffen, abhängige und unabhängige Größen schnell und zweifelsfrei definiere zu können.

Bild 14.8.2 zweigt einige weitere Möglichkeiten zur Wahl des vollständigen Baumes:

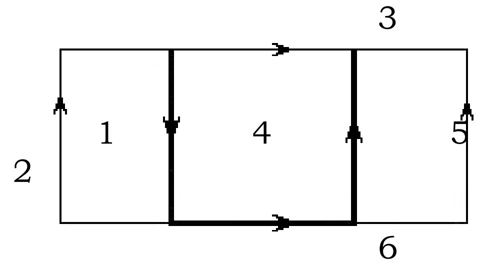


Lösungsstrategien zur Berechnung der unabhängigen Ströme aus den Maschen-Gleichungen

„Rezept Maschenstromanalyse“ unter Benutzung eines vollständigen Baumes
(zweckmäßig, wenn Baum so gelegt werden kann, dass möglichst wenig Verbindungszweigen (= Zahl der Gleichungen) entstehen)

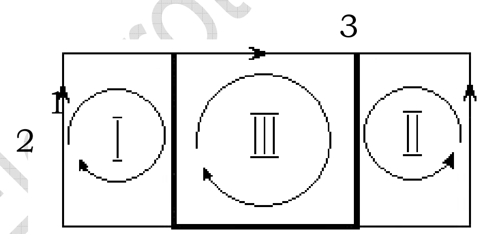
1. Alle Knoten des Netzes verbinden, aber ohne einen geschlossenen Umlauf zu bilden. Dabei vollständigen Baum so wählen, dass gesuchte Ströme in Verbindungszweigen (unabhängige Ströme) fließen. Spannungsquellen und vorgegebene Ein-Strömungen gleichfalls in Verbindungs-Zweige legen. Beachte. Für Maschenumläufe soll nur ein Verbindungszweig zu durchlaufen sein.

Beispiel: Gesucht: I_3



Unabhängige Ströme: I_1, I_2, I_3

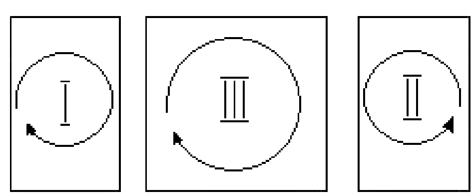
2. Zweckmäßige Nummerierung der Zweige: Beginne mit der Nummerierung bei den Verbindungszweigen (= gesuchte Ströme) und lasse die Baumzweige folgen, wenn keine andere Nummerierung vorgegeben ist.



3. Lege Zählrichtung in allen Zweigen (willkürlich) fest $\Rightarrow$ Umlaufrichtig für die unabhängigen Maschen.

4. Für die unabhängigen Größen sind nach Kap. 14.2 die Kirchhoffschen Gleichungen aufzustellen. Da hier die Berechnung mit den unabhängigen Strömen erfolgen soll, hat man die Maschengleichungen und in jedem Zweig des Ohmsche Gesetz zu benutzen. Das Ergebnis ist eine Widerstandsmatrix, deren Elemente sofort unter Benutzung eines Koeffizientenschemas angegeben werden können.

$$(R)\cdot(I)=(U)$$



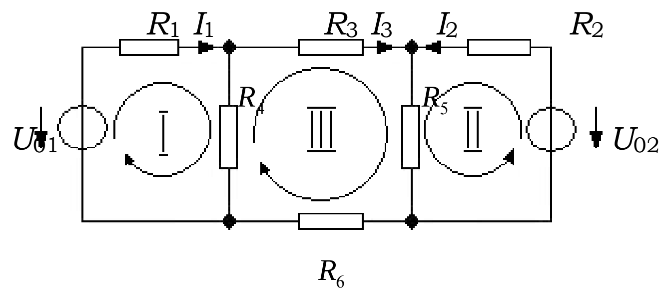
Dazu führt man für jeden Verbindungs-Zweig entsprechend der Zählrichtung des unabhängigen Stromes einen Spannungs-Umlauf durch und Stellt das Koeffizienten-Schema nach folgenden Regeln auf:

5. In der linken Spalte des Schemas sind die Maschenumläufe angegeben, dann folgen in der Kopfzeile die spaltenweise Bezeichnungen der unabhängigen Ströme von links nach rechts entsprechend der Reihenfolge der Maschenumläufe in der linken Spalte.
   Getrennt davon wird in der rechten Spalte die „rechte Seite des Gleichungssystems" aufgeführt (vgl. dazu auch Kap. 14.2, Lösung Aufgabe 14.2.4 usw.).

Ströme	I_1	I_2	I_3	rechte Seite
Masche I				
Masche II				
Masche III				

6. Die Elemente der Widerstandsmatrix sind in den noch freien, linken Teil des Schemas nach folgenden Regeln einzutragen:
   - In den Hauptdiagonalen steht die Summe aller Widerstände des zugehörigen Spannungsumlaufs.
   - Die Übrigen Elemente werden durch die Widerstände gebildet, die den verschiedenen Umläufen gemeinsam sind; z.B. in Masche I, Spalte 3 ist im Umlauf *I* und *III* R_4 gemeinsam enthalten.

   Für den Umlauf *II* und *III* ist R_5 gemeinsames Element, usw.
   Diese Widerstände erhalten ein **positives Vorzeichen**, wenn in dem gemeinsamen Zweig **beide Umläufe die gleiche Orientierung** haben und ein negatives Vorzeichen, wenn in dem gemeinsamen Zweig die **Umläufe verschiedenen orientiert** sind.
   Sind keine gemeinsamen Elemente beim Umlauf vorhanden, ist $R = 0$ einzusetzen. So enthält das Schema z.B. in Masche I, Spalte 2 eine 0, denn die Umläufe *I* und *II* besitzen kein gemeinsames Element.
   Das Koeffizientenschema ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen, da bei der hier gewählten Anordnung die Verkopplung der Umläufe für Masche *i* mit Strom *j* identisch ist mit der Verkopplung der Masche *j* mit dem Strom *i* ($i, j = 1,\ldots,n$).



Ströme	I_1	I_2	I_3	rechte Seite
Masche I	$R_1 + R_4$	0	$-R_4$	U_{01}
Masche II	0	$R_2 + R_5$	R_5	U_{02}
Masche III	$-R_4$	R_5	$R_3 + R_4 + R_5 + R_6$	0

7. Die rechte Seite des Gleichungssystems ergibt sich nach folgender Regel:
   Auf der rechten Seite stehen alle in dem betreffenden Maschenumlauf enthaltenen Generatorspannungen, und zwar
   - mit **positivem Vorzeichen**, wenn **Umlaufs- und Spannungsrichtung entgegen-gesetzt** sind,
   - mit **negativem Vorzeichen**, bei **gleicher Orientierung**.

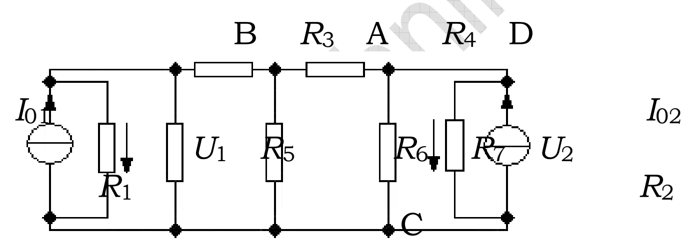
8. Die Unbekannten Ströme I_1, I_2 und I_3 sind dann mit den Hilfsmitteln der Mathematik für die Lösung von Gleichungssystemen zu bestimmen (Lösung des Gleichungssystems z.B. nach den Regeln der Matrizenrechnung, unter Benutzung von Taschenrechner-Programmen usw.; s. auch Anhang: Mathematische Ergänzungen).

Lösungsstrategien zur Berechnung der unabhängigen Spannungen aus den Knotengleichungen

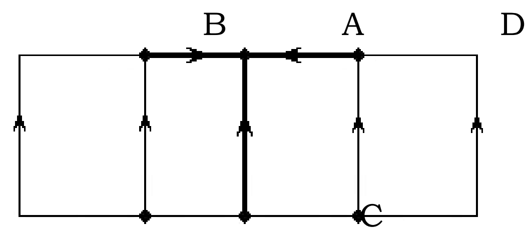
„Rezept Knotenspannungsanalyse“ unter Benutzung eines vollständigen Baumes:
(zweckmäßig, wenn alle Knoten durch möglichst wenig Baumzweige (Zahl der Baumzweige = Zahl der Gleichungen) eines sternförmigen Baumes verbunden werden können)

1. Wähle Baum so, dass von einem Bezugsknoten aus alle anderen Knoten sternförmig verbunden sind. Falls nur eine Spannung bzw. der zugehörige Strom im Netzwerk gesucht ist, ist der Bezugknoten in einen Knoten dieses Baumzweiges zu legen.
   Sollte keine direkte Verbindung vom Bezugsknoten zu einem anderen Knoten bestehen, füge eine Verbindung hinzu und ordne ihr den Leitwert $G = 0$ zu.
   Beachte: Stromquellen sollten vorzugsweise in Verbindungszweigen liegen.

Beispiel: Netzwerk



Zugehöriges Streckennetz:



2. Lege Zählpfeilrichtung der unabhängigen Spannungen (Baumzweige) in Richtung auf Bezugsknoten fest (In der Skizze: Bezugs-Knoten A).
   Die Zählpfeilorientierung in Zweigen mit Stromquellen sollte der Quellenstromrichtung entsprechen, wenn nicht eine andere Richtung durch Orientierung der Baum-Zweige (unabhängige Spannungen, auf Bezugsknoten gerichtet!)

$$(G)\cdot(U)=(I)$$

vorgegeben ist.

3. Falls Spannungsquellen vorhanden, forme sie in entsprechende Stromquellen um.

4. Für die Berechnung der unabhängigen Spannungen müssen nach Kap. 14.3 die Knotengleichungen und in jedem Zweig das Ohmsche Gesetz ausgewertet werden.
   Somit sind für alle Knoten außer dem Bezugsknoten die Knotengleichungen aufzustellen.

5. In der linken Spalte des Koeffizientenschemas listet man zweckmäßigerweise die Knoten auf und zwar entsprechend der Reihenfolge der unabhängigen Spannungen, die zwischen dem jeweilig betrachteten Knoten und dem Bezugsknoten liegen.
   In der Kopfzeile folgen dann spaltenweise die unabhängigen Spannungen an den Baumzweigen entsprechend der Reihenfolge der Knoten. Getrennt davon steht in der rechten Spalte die „rechte Seite des Gleichungssystems".

Spannungen	U_3	U_4	U_5	rechte Seite
(1): Knoten B				
(2): Knoten D				
(3): Knoten C				

6. In den freien, linken Teil des Schemas sind die Elemente der Leitwertmatrix wie folgt einzutragen:
   - In den Hauptdiagonalen steht die Summe aller Leitwerte der Zweige, die von dem betrachteten Knoten ausgehen.

- Die übrigen Leitwerte haben alle ein negatives Vorzeichen und ergeben sich aus den abhängigen Spannungen (Verbindungszweige), die den jeweiligen Knoten über einen Verbindungszweig mit der betreffenden unabhängigen Spannung verbindet (z.B. Verbindung Knoten D mit unabhängiger Spannung U_6 and R_6 kann über die Verbindungszweige mir R_7, bzw. mir R_2, also Zweige 2 und 7 gekoppelt werden).

Ist kein direkter Verbindungszweig vorhanden, ist der Leitwert G = 0. Das Koeffizientenschema ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.

Spannungen	U_3	U_4	U_5	rechte Seite
(1): Knoten B	$G_1 + G_2 + G_3$	0	$-(G_1 + G_5)$	I_{01}
(2): Knoten D	0	$G_2 + G_4 + G_7$	$-(G_2 + G_7)$	I_{02}
(3): Knoten C	$-(G_1 + G_5)$	$-(G_2 + G_7)$	$G_1 + G_2 + G_5 + G_6 + G_7$	$-I_{01}-I_{02}$

7. Auf der rechten Seite stehen alle in den betreffenden Knoten
   - hineinfließenden Ströme mit positivem Vorzeichen (!) bzw.
   - hinausfließenden Ströme mit negativem Vorzeichen (!)

   von Stromquellen.

8. Die unbekannten Spannungen U_3, U_4 und U_6 sind dann mit den Methoden der Mathematik für die Lösung von Gleichungssystemen zu bestimmen (s. Anhang).
   Wenn benötigt, ergeben sich schließlich auch noch für jeden Baumzweig die zugehörigen Ströme mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes.

Zusammenfassung und Vergleich zwischen den Methoden der Analyse linearer Netzwerke

Es wurden die folgenden Methoden zur Berechnung von Strömen und Spannungen in linearen Netzwerken ausführlich untersucht:

- Die Kirchhoffschen Gleichungen
- Die Methoden der Ersatzspannungs- und der Ersatzstromquelle (Thévenin- und Norton-Theorem)
- Der Überlagerungssatz
- Das Maschenstromverfahren
- Das Knotenpotentialverfahren.

Im Folgenden sollen die Methoden kurz wiederholt, ihre Merkmale, Vor- und Nachteile analysiert und miteinander verglichen werden. Ein einfaches Beispiel einer Schaltung mit zwei Quellen und drei Widerständen soll mit allen sechs Methoden berechnet werden.

Allgemeines

Die Aufgabe der Netzwerkanalyse ist die Bestimmung der Ströme und Spannungen in Netzwerken, wenn alle Quellen und alle Widerstände bekannt sind. Ist also die Anzahl der Unbekannten

$2 \cdot z$,

wobei z die Anzahl der Zweige bedeutet, so reduziert das Ohmsche Gesetz

$U = R \cdot I \qquad I = G \cdot U$

die Anzahl der Unbekannten auf die Hälfte. **Es sind also im Allgemeinen z unbekannte Ströme oder Spannungen zu bestimmen.**

Sollte das gesamte Netzwerk analysiert werden, also sollten alle Unbekannten ermittelt werden, so eignen sich dazu alle erwähnten Methoden, mit Ausnahme der Methoden der Ersatzspannungsquellen. Diese liefern nur einen Strom (Thévenin-Theorem) oder nur eine Spannung (Norton-Theorem) und werden nur dann eingesetzt, wenn eine einzige unbekannte Größe gesucht wird.

Das zu untersuchende Beispiel ist die einfache Schaltung aus Abbildung.

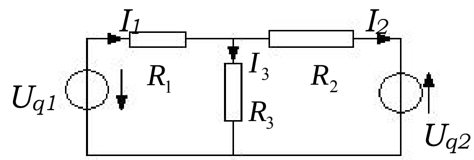


Abbildung 7.20.: Beispiel für den Vergleich der Berechnungsmethoden

Gesucht ist der Strom I_3. Er soll mit Hilfe aller sechs Methoden bestimmt werden. Die Schaltung hat

k = 2 Knoten
z = 3 Zweige
$m = z - k + 1 = 2$ unabhängige Maschen.

Die Kirchhoffschen Gleichungen (Zweigstromanalyse)

Die zwei Kirchhoffschen Gleichungen lauten:

1. Die Summe aller zu – und abfließenden Ströme an jedem Knotenpunkt (unter Beachtung ihrer Vorzeichen) ist gleich Null:

$$\boxed{\sum_{\mu=1}^{n} I\mu = 0}$$

2. Die Summe aller Teilspannungen in einem geschlossenen Umlauf (Masche), unter Beachtung ihrer Vorzeichen, ist stets Null:

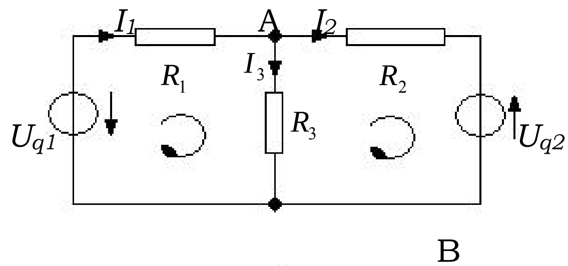
$$\boxed{\sum_{\mu=1}^{n} U\mu = 0}$$

Die Kirchhoffschen Sätze führen zu einem Gleichungssystem mit z Unbekannten für die z unbekannten Ströme, as folgendermaßen zusammengestellt ist:

$\boxed{(k-1)}$ Gleichungen für die Knoten
$\boxed{m = k - (z-1)}$ Gleichungen für die Maschen

Achtung: *Ein Knoten* ***muss*** *unberücksichtigt bleiben. Nur* ***m*** *Maschen sind unabhängig!*

Gemäß der nächsten Abbildung ergeben sich mit den Kirchhoffschen Gleichungen die folgenden Zusammenhänge:



Im Knoten (A): $I_1 = I_2 + I_3$
Masche (1): $I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 = U_{q1}$ } 3 Gleichungen für z = 3 Ströme
Masche (2): $I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = U_{q2}$

Aus den Maschengleichungen kann man I_1 und I_2 als Funktion von I_3 ausdrücken:

$$I_1 = \frac{U_{q1} - I_3 \cdot R_3}{R_1} \qquad I_2 = \frac{U_{q2} + I_3 \cdot R_3}{R_2}$$

Diese Kann man jetzt in die Knotengleichung einführen:

$$I_3 = I_1 - I_2 = \frac{U_{q1} - I_3 \cdot R_3}{R_1} - \frac{U_{q2} + I_3 \cdot R_3}{R_2}$$

$$I_3 \cdot (R_1\ R_2) = U_{q1} \cdot R_2 - I_3 \cdot (R_3 R_2) - U_{q2} \cdot R_1 - I_3 \cdot (R_1\ R_3)$$

$$I_3 \cdot (R_1\ R_2 + R_3 R_2 + R_1\ R_3) = U_{q1} \cdot R_2 - U_{q2} \cdot R_1$$

$$I_3 = \frac{U_{q1} \cdot R_2 - U_{q2} \cdot R_1}{\underbrace{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3}_{\sum R_i \cdot R_j}}$$

- Die Kirchhoffschen Gleichungen stellen die allgemeinste Methode zur Netzwerkanalyse dar; sie sind immer einsetzbar und führen zu den z unbekannten Strömen. Nur bei dieser Methode operiert man mit den tatsächlichen Strömen, die durch die Zweige fließen. Alle anderen Methoden benutzen virtuelle Ströme, die erst zum Schluss die physikalischen Ströme ergeben. Somit ist die „Zweigstromanalyse" weniger abstrakt und leichter nachvollziehbar als alle anderen Methoden.
- Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen ist **maximal *z***.
- Auch wenn nur ein Strom gesucht wird, muss man alle z Gleichungen schreiben.
- Alle anderen Methoden sind aus den Kirchhoffschen Gleichungen abgeleitet.

Ersatzspannungsquelle und Ersatzstromquelle

Diese Methoden gehen von der Tatsache aus, dass jeder beliebige lineare, aktive Zweipol durch eine Ersatzspannungsquelle oder eine Ersatzstromquelle ersetzt werden kann, die an den zwei Klemmen dasselbe Verhalten (d.h. denselben Strom I und dieselbe Spannung U aufweist).

Es bedeuten:

- U_l die Leerlaufspannung an den Klemmen A-B
- I_k den Kurzschlussstrom

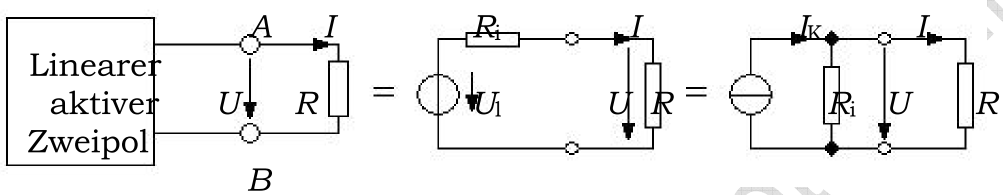


Abbildung 7.21.: Ersatzspannungsquelle und Ersatzstromquelle

- $R_i = \dfrac{U_l}{I_K}$ den Innenwiderstand der Ersatzquellen.

Wenn das so ist, dann kann man jede Schaltung in Bezug auf die zwei Klemmen A und B durch eine Ersatzspannungsquelle oder eine Ersatzstromquelle ersetzen. Die Voraussetzung dafür ist, dass der abgetrennte Zweig A-B passiv (ohne Quelle) sein muss.

Zwei Theoreme ermöglichen die Berechnung des Stromes in dem Zweig A-B (Thévenin) oder der Spannung an den Klemmen A-B (Norton).

Theorem von Thévenin (Ersatzspannungsquelle):

$$I_{AB} = \frac{U_{AB_l}}{R_{i_{AB}} + R} \qquad U_{AB_l} = \text{Leerlaufspannung an A-B}$$

Theorem von Norton (Ersatzstromquelle):

$$U_{AB} = \frac{I_{K_{AB}}}{G_{i_{AB}} + G} \qquad I_{K_{AB}} = \text{Kurzschlussstrom zwischen A-B}$$

In beiden Fällen verfährt man folgendermaßen:

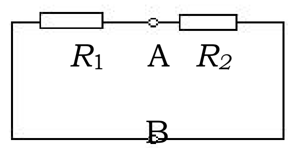
1. Man trennt den Zweig A-B mit dem Widerstand R ab.

2. Die restliche Schaltung wird als Ersatzspannungsquelle mit der Quellenspannung U_{AB_l} oder als Ersatzstromquelle mit dem Quellenstrom $I_{K_{AB}}$ betrachtet.
3. Der Innenwiderstand R_i ist der gesamte Widerstand der **passiven** Schaltung an den Klemmen A-B (um den Widerstand zu ermitteln, werden alle Spannungsquellen).

Berechnung mit dem Thévenin-Theorem

$$I_3 = \frac{U_{AB_l}}{R_{i_{AB}} + R}$$

Berechnung des Innenwiderstandes der passiven Schaltung:

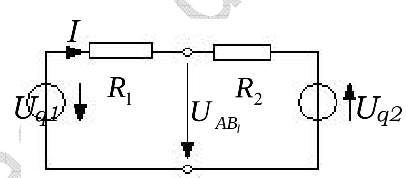


$$R_{i_{AS}} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

---

kurzgeschlossen und alle Stromquellen unterbrochen

Berechnung der Leerlaufspannung U_{AB}:



Der Strom ist: $I = \frac{U_{q1} + U_{q2}}{R_1 + R_2}$

Die Spannung ergibt sich z.B. aus dem linken Maschenumlauf (Uhrzeigersinn):

$$U_{AB_l} - U_{q1} + I \cdot R_1 = 0.$$

Damit wird U_{AB_l} :

$$U_{AB_l} = U_{q1} - R1 \cdot \frac{U_{q1} + U_{q2}}{R_1 + R_2}$$

$$U_{AB_l} = \frac{U_{q1} \cdot (R_1 + R_2) - R_1 (U_{q1} + U_{q2})}{R_1 + R_2}$$

$$U_{AB_l} = \frac{U_{q1}\cdot R_2 - U_{q2}\cdot R_1}{R_1 + R_2}$$

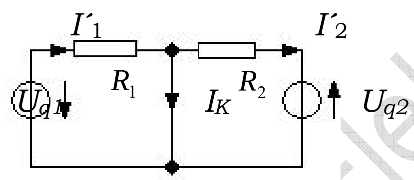
Der Strom I_3 ist dann:

$$I_3 = \frac{U_{q1}\cdot R_2 - U_{q2}\cdot R_1}{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2}.$$

Berechnung mit dem Norton-Theorem:

$$U_{AB} = \frac{I_{K_{AB}}}{G_{i_{AB}} + G} \Rightarrow I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{I_{K_{AB}}}{R_3\cdot G_{i_{AB}} + 1}$$

$$G_{i_{AB}} = \frac{1}{R_{i_{AB}}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1\cdot R_2}$$



Der Kurzschlussstrom ist:

$$I_K = I_1 - I_2 = \frac{U_{q1}}{R_1} - \frac{U_{q2}}{R_2} = \frac{U_{q1}\cdot R_2 - U_{q2}\cdot R_1}{R_1\cdot R_2}$$

Zur Überprüfung:
I_K kann auch anders berechnet werden:

$$I_K = \frac{U_{AB_l}}{R_{i_{AB}}} = \frac{U_{q1}\cdot R_2 - U_{q2}\cdot R_1}{R_1\cdot R_2}\cdot\frac{R_1 + R_2}{R_1\cdot R_2}$$

Damit wird I_3:

$$I_3 = \frac{U_{q1}\cdot R_1 - U_{q2}\cdot R_1}{R_1R_2\cdot\left(R_3\cdot\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2} + 1\right)}$$

$$I_3 = \frac{U_{q1}\cdot R_2 - U_{q2}\cdot R_1}{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2}.$$

Kommentar:

- Die Sätze von den Ersatzquellen sind dazu geeignet, in einer Schaltung **einen** Strom oder **eine** Spannung zu bestimmen und zwar nur in einem **passiven** Zweig. Für eine Gesamtanalyse sind sie nicht interessant, da die Berechnung zu aufwändig wäre.

- Ist der Lastwiderstand zwischen zwei Klemmen variabel und sollte eine Leistungsanpassung realisiert werden, so soll die restliche Schaltung durch eine Ersatz-Quelle ersetzt werden.
- Sind in der Schaltung nichtlineare Bauelemente vorhanden (z.B. eine Diode), so ist zur Bestimmung des Arbeitspunktes eine Ersatzquelle sehr günstig.
- Zur Bestimmung von U_l oder I_K müssen andere Methoden herangezogen werden.
- Zur Bestimmung von $R_{i_{AB}}$ müssen Widerstände zusammengeschaltet werden, eventuell muss eine Stern-Dreieck- oder eine Dreieck-Sterntransformation durchgeführt werden.
- Des Thévenin-Theorem ist besonders interessant, wenn $R_{i_{AB}} << R$ ist.

$$I_{AB} \approx \frac{U_{AB_l}}{R}.$$

- Das Norton-Theorem wird meistens eingesetzt, wenn $R_{i_{AB}} >> R$ ist.

$$U_{AB} \approx \frac{I_{K_{AB}}}{G}.$$

Der Überlagerungssatz

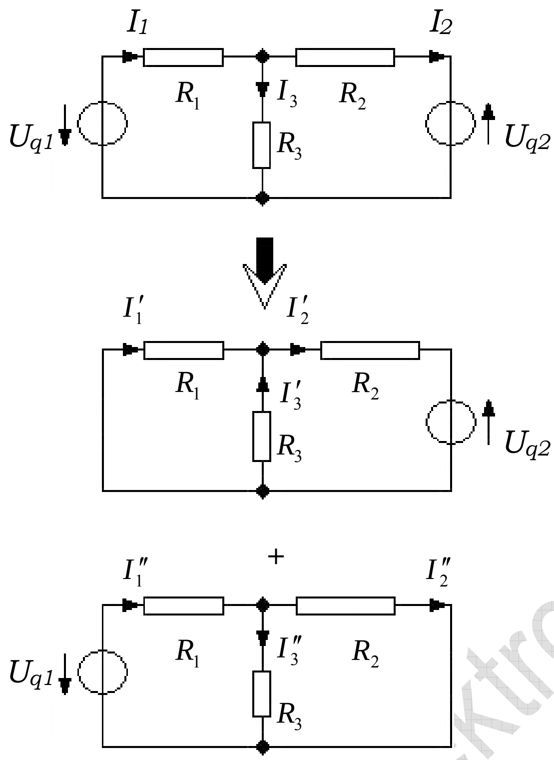
Der Überlagerungssatz ist eine Konsequenz der **Linearität** aller Schaltelemente: zwischen jedem Strom und jeder Quellenspannung besteht dann eine lineare Beziehung.

Die Idee diese Verfahrens ist: Man lässt jede Quelle **allein** wirken, indem man alle anderen als energiemäßig nicht vorhanden ansieht. Bei **n** Quellen ergeben sich somit **n** verschiedene Stromverteilungen, die mit der tatsächlichen Stromverteilung nicht zu tun haben!

Erst die Überlagerung der „Teilströme“ unter Beachtung ihrer Zählrichtung ergibt die tatsächlichen Ströme. Jeder Zweigstrom besteht also aus **n** Teilströmen.

Bemerkung: *Genauso gut kann man Gruppen von Quellen wirken lassen und ihre Wirkung anschließend überlagern. Damit verringert man die Anzahl der Stromverteilungen die man berechnen muss, doch werden die einzelnen Stromverteilungen etwas komplizierter, da die zu behandelnden virtuellen Schaltungen jetzt mehrere Quellen enthalten.*

Das Betrachtete Beispiel wird nun mit dem Überlagerungssatz berechnet:



Quelle 1 unwirksam, es interessiert nur I_3 (siehe Abbildung, Mitte).

$$I_2' = \frac{U_{q2}}{R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{U_{q2} \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

I_3' ergibt sich mit der Stromteilerregel:

$$I_3' = I_2' \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{U_{q2} \cdot R_1}{\sum (R_i R_j)}$$

Nun wird die Quelle 2 als unwirksam betrachtet (Abbildung, unten):

$$I_1'' = \frac{U_{q1}}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{U_{q1} \cdot (R_2 + R_3)}{\sum (R_i R_j)}$$

$$I_3'' = I_1'' \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{U_{q1} \cdot R2}{\sum (R_i R_j)}.$$

Der tatsächliche Strom I_3 ist $I_3'' - I_3'$, da I_3' entgegen dem angenommenem Zählpfeil fließt.

$$I_3 = \frac{U_{q1} \cdot R_2 - U_{q2} \cdot R_1}{\sum (R_i R_j)}$$

Empfehlung: Es ist immer sinnvoll die zu überlagernden Ströme anders zu benennen als die tatsächlichen (z. B. $I_1', I_2', \cdots$ *für die erste Stromverteilung,* $I_1'', I_2'', \cdots$ *für die zweite, usw.)*

Kommentar:

- Der Überlagerungssatz führt zu **n** Stromverteilungen mit jeweils nur **einer** Quelle. Zur Bestimmung der Ströme braucht man nur Widerstände zu schalten und die Stromteiler-Regel (evtl. mehrmals) zu benutzen.
- Der Nachteil ist: es müssen immer so viele unterschiedliche Stromverteilungen bestimmt werden, wie Quellen im Netz vorhanden sind (außer man bildet Gruppen von Quellen, deren Wirkung man überlagert).

Maschenstromverfahren

Das Maschenstromverfahren ist die meistverbreitete Methode der Netzwerkanalyse, da sie ein Gleichungssystem mit nur $m = z - k + 1$ Gleichungen löst und sehr übersichtlich ist. Das Gleichungssystem kann direkt aufgestellt werden.

Die Methode basiert auf der Annahme, dass man die **Zweigströme** in unabhängige und abhängige Zweigströme aufteilen kann. Die **unabhängigen Ströme** sind die Unbekannten, für die das Gleichungssystem aufgestellt werden muss. Man sollte bei dieser Methode mit den Begriffen arbeiten

- **vollständiger Baum** – Ein vollständiger Baum verbindet alle Knoten, ohne eine Masche zu bilden
- **Baumzweige –** Es gibt immer $(k - 1)$ Baumzweige
- **Verbindungszweige** – Dies sind die restlichen m Zweige

. (Es geht auch ohne „Bäume“, doch gibt es einige Gründe dafür, sie hier einsetzen: erstens werden diese topologischen Begriffe heute auf vielen gebieten angewendet, zweitens führen sie zu einer Systematisierung des Verfahrens, die Fehlerquellen eliminiert (und drittens kann man komplizierte Schaltungen ohne kaum behandeln).

Die Wahl des vollständigen Baumes ist **frei**.

Die **unabhängigen Ströme fließen in den Verbindungszweigen**. Mit jedem von diesen (und den Baumzweigen) bildet man **m** unabhängige Maschen. Das Gedankenmodell der Methode ist: In jeder Masche fließt ein solcher unabhängiger **Maschenstrom**. Das Gleichungs-System enthält *m* Maschengleichungen:

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2m} \\ \vdots & & & \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{mn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ \vdots \\ I'_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U'_{q1} \\ U'_{q2} \\ \vdots \\ U'_{qm} \end{vmatrix}$$

mit: $R_{ii} > 0$ = Umlaufwiderstände (Summe aller Widerstände in der betreffenden Masche)

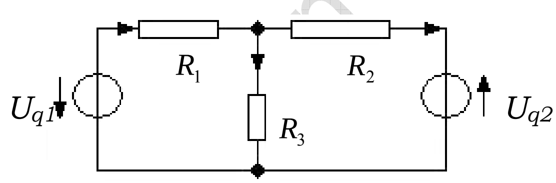
$R_{ij} \lessgtr 0$ = Kopplungswiderstände zwischen zwei Maschen

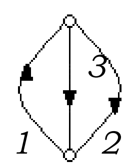
I'_i = unbekannte Maschenströme

U'_{qi} = Summe aller **Quellenspannungen** in der Masche (mit Pluszeichen, wenn ihr Zählpfeil **entgegen** dem Umlaufsinn ist).

Die (k – 1) abhängigen Ströme werden durch Überlagerung (Knotengleichung) bestimmt.

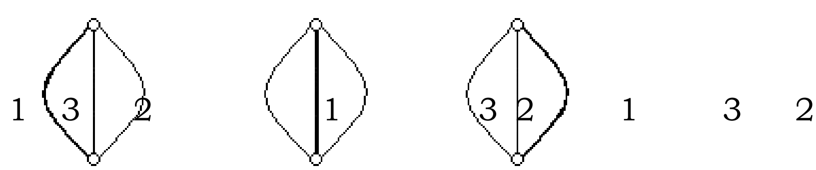
Das bereits mehrmals betrachtete Beispiel soll nun mit dem Maschenstromverfahren berechnet werden. Die folgende Abbildung zeigt nochmals die Schaltung und ihren gerichteten Graph.



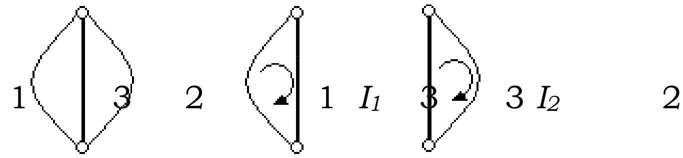


Es gilt: $k = 2$, $z = 3$, $m = 2$.

Möglich sind drei vollständige Bäume (siehe nächste Abbildung):



Der vollständige Bau sei z.B. der Zweig 3. Unabhängige Ströme sind: I_1 und I_2. Ihre Maschen sind auf der nächsten Abbildung gezeigt:



Das entsprechende Gleichungssystem ist:

I_1	I_2	
$R_1 + R_3$	$-R_3$	U_{q1}
$-R_3$	$R_2 + R_3$	U_{q2}

$$D = (R_1 + R_3)\cdot(R_2 + R_3) - R_3^2 = (R_i R_j)$$

$$D_1 = U_{q1}\cdot(R_2 + R_3) + U_{q2}\cdot R_3$$

$$I = \frac{D_1}{D} = \frac{U_{q1}\cdot(R_2 + R_3) + U_{q2}\cdot R_3}{\sum(R_i R_j)}$$

$$D_2 = U_{q2}\cdot(R_1 + R_3) + U_{q1}\cdot R_3 \Rightarrow I_2 = \frac{U_{q2}\cdot(R_1 + R_3) + U_{q1}\cdot R_3}{\sum(R_1 R_j)}$$

Der Strom I_3 ist nach der Knotengleichung im Knoten (A):

$$I_3 = \frac{U_{q1}\cdot(R_2 + R_3) + U_{q2}\cdot R_3 - U_{q2}\cdot(R_1 + R_3) - U_{q1}\cdot R_3}{\sum(R_i R_j)}.$$

Kommentar:

- Gegenüber den Kirchhoffschen Gleichungen werden hier nur $m = z - k + 1$ Gleichungen gelöst.
- Das Gleichungssystem kann direkt augestellt werden, ohne Kenntnis irgendwelcher Gesetze der Elektrotechnik. Dieser Vorteil wird oft unterschätzt und er wird manchmal sogar – wegen dem Automatismus, der bei de Anwendung dieser „Gebrauchsanweisung" entsteht – als Nachteil dargestellt. Nun, eine deutliche leicht anzuwendende Gebrauchsanweisung, die schnell zu dem korrekten Ergebnis führt, ist immer vorzuziehen, auch wenn dabei der physikalische Hintergrund nicht mehr zu erkennen ist.
- Stromquellen sollen in Spannungsquellen umgewandelt werden.

Knotenpotentialverfahren

Von der Anzahl der zu lösenden Gleichungen der ist es meistens das beste Verfahren. Es müssen lediglich (k – 1) Gleichungen gelöst werden.

Das Gleichungssystem kann auch hier direkt aufgestellt werden. Vorbereitungsarbeiten (Umwandeln der Schaltung) und Nacharbeiten machen jedoch diese Methode weniger übersichtlich als die Maschen-Analyse.

Die Idee der Methode ist, dass man die **Spannungen** zwischen den einzelnen Knoten in unabhängige und abhängige Spannungen aufteilen kann.

Die **unabhängigen Spannungen** sind die Unbekannten, für dir man das Gleichungs-System aufstellt. **Unabhängig sind die Spannungen an den Baumzweigen**, es gibt also (k – 1) unabhängige Zweige.

Beim Knotenpotential-Verfahren gibt es jedoch Einschränkungen bezüglich der Wahl des vollständigen Baumes. Man verbindet einen auswählten „Bezugsknoten“ sternförmig mit **allen** anderen Knoten und wählt die Bezugspfeile für die unabhängigen Spannungen **zu** diesen Knoten **hin**.

Das Gleichungssystem enthält (k – 1) Knotengleichungen. Die restlichen abhängigen **m** Ströme ergeben sich anschließend aus Maschengleichungen.

Vor der Aufstellung des Gleichungssystems müssen alle Spannungsquellen in Stromquellen und alle Widerstände in Leitwerte umgewandelt werden. Das Gleichungssystem lautet:

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1(k-1)} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2(k-1)} \\ \vdots & & & \\ G_{(k-1)1} & G_{(k-1)2} & \dots & G_{(k-1)(k-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ \vdots \\ U'_{(k-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I'_{q1} \\ I'_{q2} \\ \vdots \\ I'_{q(k-1)} \end{vmatrix}$$

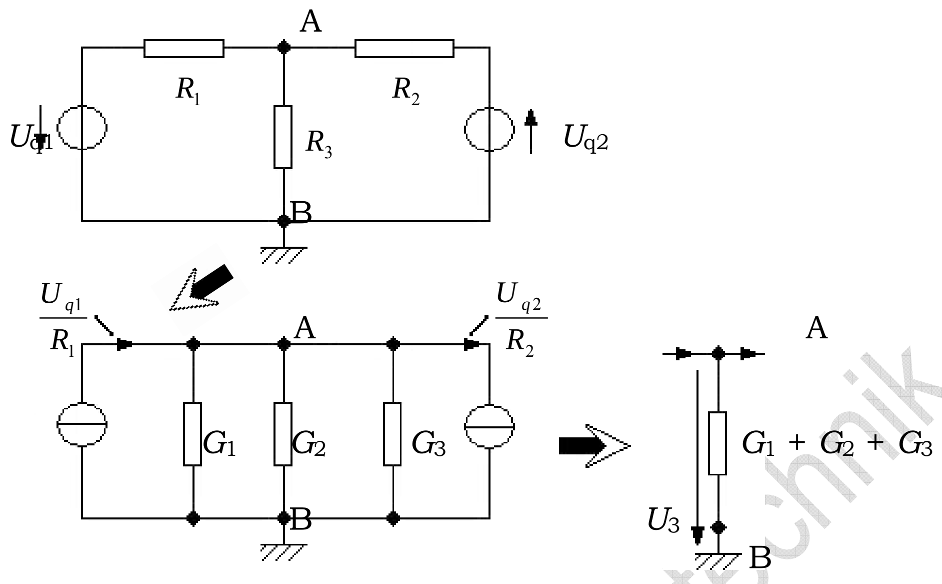
mit: $G_{ii} > 0$ = Knotenleitwert (Summe aller Leitwerte in den Knoten)

$G_{ij} < 0$ = Kopplungsleitwert zwischen zwei Knoten

U'_i = unbekannte Knotenspannung

I'_{qi} = Summe aller Quellen in dem Knoten[17]

In dem betrachteten Beispiel kann man z.B. den Knoten (B) als Bezugsknoten wählen. Die ursprüngliche und die umgeformte Schaltung sind auf der nächsten Abbildung gezeigt.



[17]Ströme die hineinfließen sind als positiv, Ströme die herausfließen sind als negativ zu zählen

Es gibt nur **eine** Gleichung für den oberen Knoten:

$$G \cdot U_3 = \frac{U_{q1}}{R_1} - \frac{U_{q2}}{R_2}$$

De gesuchte Strom I_3 ist dann:

$$I_3 = U_3 \cdot G_3 = \frac{1}{R_3} \cdot \frac{\frac{U_{q1}}{R_1} - \frac{U_{q2}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$I_3 = \frac{1}{R_3} \cdot \frac{R_3 R_2 U_{q1} - R_3 R_1 U_{q2}}{\sum\left(R_i R_j\right)}$$

$$I_3 = \frac{U_{q1} \cdot R_2 - U_{q2} \cdot R_1}{\sum\left(R_i R_j\right)}$$

Kommentar:

- In den meisten Fällen erfordert keine andere Methode zur kompletten Analyse eines Netzes weniger Gleichungen.
- Unter Annahme einiger Einschränkungen ist das Gleichungssystem sehr einfach und kann direkt aufgestellt werden.
- Wegen unvermeidbaren Umwandlungen vor der Aufstellung des Gleichungssystems und Zurückwandlungen zu der

ursprünglichen Schaltung ist die Methode weniger übersichtlich als die Machen-Analyse.

Gewöhnt man sich (durch Üben!!) an die nötigen Umwandlungen und an die Arbeit mit Leitwerten und Stromquellen, so ist die Knotenanalyse meistens der schnellste Weg zur Bestimmung aller

WÖRTERVERZEICHNIS

A	
aktives Stromkreiselement	element activ de circuit
äquipotential	echipotențial
Atomkern	nucleu atomic
C	
Coulomb'sche Kräfte	forțe coulombiene
Coulomb'scher Versuch	experiența lui Coulomb
D	
Dielektrikum	material dielectric
Dielektrizitätskonstante	constantă dielectrică
Dielektrische Grundkonstante	
(Influenz-konstante,	
Dielektrizitätskonstante des	permitivitatea electrică a
Vakuums)	spațiului vid
Durchflutungsgesetz	legea fluxului electric
Durchschlagfestigkeit	rigiditatea dielectrică
E	
eingeprägtes Feld	câmp imprimat
Einheitsvektor	vector unitar
elektrische Erregung	vectorul de flux electric
(Syn. Verschiebungsvektor,	(sin: deplasare dielectrică)
Flußdichte-vektor, elektrische	
Flußdichte)	cîmp electric
elektrisches Feld	flux electric
elektrischer Fluß	energie electrică

elektrische Energie
elektromotorische Spannung (EMS)
(Syn. Elektromotorische Kraft (EMK) (im deutschen Sprachraum in allen Fachbüchern noch sehr gebräuehlicher Ausdruck)
Elektronengas
Elektronenladung
Elektronenmasse
elektrische Kraft
elektrisches Potential
elektrische Spannung
elektrischer Druck
elektrisches Gleichgewicht
Energiedichte
Ersatzwert (einer Kapazität, eines Widerstandes)

F
Feldlinie
Feldstärke
Flächenladung

G
galvanische Elemente
Gesetz der Erhaltung der elektrischen Ladung (Syn. Kontinuitätsgesetz der

tensiune electromotoare (TEM)
(sin. FEM forță electromotoare, noțiune istorică şi abandonată)

gaz electronic
Sarcina electronului
masa electronului
forță electrică
potențial electric
tensiune electrică
presiune electrostatică
echilibru electrostatic
densitate de energie
valoare echivalentă (a unei capacități, a unei rezistențe electrice)

linie de câmp electric
intensitatea câmpului electric
densitatea superficială de sarcină electrică

elemente galvanice
legea conservării sarcinii electrice
(sin. legea continuității)

Elektrizität)	mişcare ordonată
geordnete Bewegung	viteză medie
Geschwindigkeit (mittlere)	nodurile rețelei în corp solid
Gitterbausteine	constantă gravitațională
Gravitationskonstante	forță gravitațională
Gravitationskraft	
H	câmp electric omogen
homogenes Feld (Syn.	
einförmiges Feld)	
	elemente de circuit ideal
I	permitivitatea electrică a
ideale Elemente	spațiului vid
Influenzkonstante (syn.	
Dielektrizitätskon-stante des	
Vakuums, elektrische Feldkon-	rezistență electrică internă
stante)	
innerer Widerstand	
	căldură dezvoltată într-un
J	conductor prin efect Joule
Joulesche Wärme	legea dezvoltării puterii
	electromagnetice în conductoare
Joulesches Gesetz	(Joule)
K	condensator
Kondensator	capacitate
Kapazität	borne
Klemmen	tensiune la borne
Klemmenspannung	conductanță

Konduktanz (Syn. Leitwert)
Knotenpotentiale
(Knotenpunktpotentiale)
Knotenpunktsatz
(Knotenpunktanalyse)
Kurzschlußstrom
Kontinuitätsgleichung
(Syn. Gesetz der Erhaltung der elektrischen Ladung)
Kirchhoffsche Sätze

L
Ladung (elektrische)
Ladungsträger
Ladungskonzentration
Leerlaufbetrieb
Leerlaufspannung
Leiter
Leitungselektronen
Leistung (elektrische)
Leitwert (syn. Konduktanz)
Leitungsstrom
Leitfähigkeit (spezifische) (syn. Leitvermögen)

M
Maschensatz
Maschenströme
mittlere Geschwindigkeit

potențiale de noduri
teorema potențialului de noduri
curent electric de scurt-circuit
legea de continuitate
(sin. legea conservării sarcinii electrice)

teoremele lui Kirchhoff

sarcină (electrică)
purtător de sarcină electrică
sarcină electrică din unitatea de volum
regim de mers în gol
tensiune electrică de mers in gol
conductor
electroni de conducție
putere (electrică)
conductanță
curent electric de conducție
conductivitate electrică

teorema curenților ciclici
curenți ciclici
viteză medie

N

Nebenschaltung (Syn. Parallelschaltung)

Netz

Netzmasche

nichtelektrische Kräfte

O

Ohmscher Versuch

Ohmsches Gesetz (Syn. Leitungsgesetz)

P

Parallelschaltung (Syn. Nebenschaltung)

passives Stromkreiselement

Planetenmodell (des Atoms)

Plattenkondensator

positiver Bezugssinn

Potential

Probeladung

R

Raumladung

reelle Stromquelle

reeller Spannungsgenerator

reeller Stromgenerator

Reibungselektrizität

Reibungskraft

Reihenschaltung

legare în paralel

rețea

ochi de rețea (circuit)

forțe neelectrice

experiența lui Ohm

legea lui Ohm (sin. legea conducției)

legare in paralel

element de circuit pasiv

model planetar (al atomului)

condensator plan

sens de referință pozitiv (sens pozitiv

potențial

sarcină electrică de probă

sarcină electrică volumetrică

sursă reală de curent electric

sursă reală de tensiune

sursă reală de curent

electrizare prin frecare

forță de frecare

legare în serie

legare serie-paralel (sin. legare mixtă)

Reihen-Nebenschaltung	
	conexiune, circuit
S	circuit
Schaltung	tensiune
Schaltkreis	cădere de tensiune
Spannung	divizor de tensiune
Spannungsabfall	conductivitate electrică
Spannungteiler	rezistivitate electrică
spezifischer Leitwert	Sistem internațional de măsuri
spezifischer Widerstand	(SI)
SI- Maßsystem (internationales	
Maßsystem)	intensitatea curentului electric
Stromstärke	densitatea curentului electric
Stromdichte	ciocniri
Stöße	dispersie
Streuung	sursă de curent, sursă electrică
Stromquelle	generator de curent
Stromgenerator	divizor de curent
Stromteiler	caracteristică volt-amperică
Strom-Spannungskennlinie	
T	viteza de transport
Transportgeschwindigkeit	
U	constantă universală
Universalkonstante	
V	vectorul inducției electrice
Verschiebungsvektor (Syn.	(vector de deplasare = expresie
Verschiebungsdichte	veche abandonată)

Flußdichtevektor, elektrische	
Erregung, elektr.	
Flußvektor)	element voltaic
Voltaisches Element	vectorul inducției electrice
Verschiebungsdichte	
(Syn. Flußdichtevektor,	
elektrische Erregung,	
Verschiebungsvektor,	
Flußvektor)	
	agitație termică
W	conductanță
Wärmebewegung	
Wirkleitwert (Syn. Konduktanz)	
	forțe centrale
Z	latură de circuit
Zentralkräfte	dipol
Zweig (eines Stromkreises)	circuit dipolar (dipol)
Zweipol	
Zweipolstromkreis	

LITERATURVERZEICHNIS

1. H. Clausert, G. Wiesemann, *Grundgebiete der Elektrotechnik I und II*, R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 2008.
2. M. Marinescu, J. Winter, *Basiswissen Gleich- und Wechselstromtechnik*, Viewegs Fachbücher der Technik, Vieweg, Wiesbaden, 2007.
3. M. Marinescu, *Elektrische und magnetische Felder – Eine praxisorientierte Einführung*, Springer Verlag, Heidelberg, 2009.
4. Dieter Zastrow, *Elektrotechnik. Ein Grundlagenlehrbuch*, Viewegs Fachbücher der Technik, Vieweg, Wiesbaden, 2006.
5. Paul, Reinhold, *Elektrotechnik und Elektronik für Informatiker* Bd.1,2, Teubner Verlag, Stuttgart, 2006.
6. G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik*, Aula-Verlag GmbH; 16., durchgesehene und korrigierte Auflage 2013.
7. G. Hagmann, *Aufgabensammlung zu den Grundlagen der Elektrotechnik*, Aula-Verlag GmbH; 16., durchgesehene und korrigierte Auflage. 2013
8. G. Wiesemann, W. Mecklenbräuker, *Übungen in Grundlagen der Elektrotechnik*, Mannheim Bibliographisches Institut, 1989.
9. Vömel, Martin, Zastrow, Dieter, *Aufgabensammlung Elektrotechnik 1 und 2*, Viewegs Fachbücher der Technik, Vieweg, Wiesbaden 2004.