

### 6.3. Transformata unitară și aplicațiile ei

Uneori este necesară transformarea unui vector aleator  $x$  într-un alt vector aleator  $y$ , ale cărui componente să aibă anumite proprietăți specifice. Un exemplu este și acela în care se dorește ca elementele noului vector, rezultat în urma aplicării unei transformări liniare, să fie necorelate; altfel spus, vectorul aleator  $y$  trebuie să satisfacă relația:

$$E\{(y_k - m_k)(y_l - m_l)^{*T}\} = 0; \text{ pentru orice } k \neq l \quad (6.16)$$

indiferent de relația anterioară existentă între componentele vectorului  $x$ . În această relație constantele  $m_k$  și  $m_l$  reprezintă componentele  $k$  și  $l$  ale vectorului medie aferent vectorului aleator  $y$ . O astfel de transformare ne permite și ne furnizează avantajul de a lucra cu vectori aleatori ale căror componente sunt necorelate. Deoarece **componentele vectorului sunt necorelate, matricea de covarianță a vectorului aleator  $y$  este o matrice diagonală.**

O altă transformare liniară poate fi aplicată și pentru a obține, de exemplu, o **relație de ortogonalitate** între componentele noului vector aleator,  $y$ . În acest caz, efectul este unul de **diagonalizare a matricii de corelație** a lui  $y$ .

Se cunosc mai multe metode ce pot fi utilizate pentru diagonalizarea matricii de corelație, respectiv, a matricii de covarianță. Două dintre aceste metode vor fi prezentate și în cadrul acestei cărți. O primă metodă se bazează pe **transformata unitară**; ea va fi discutată, în continuare, în cadrul acestui subcapitol. Cea de a doua metodă se bazează pe o tehnică de **descompunere triunghiulară** și ea va fi discutată separat, în unul din subcapitolele următoare.

#### 6.3.1. Definiție transformată unitară

Dacă pentru o matrice pătratică  $A$ , inversa sa este egală cu transpus-conjugatul ei:

$$A^{-1} = A^{*T} \quad (6.17)$$

atunci spunem că **matricea  $A$  este o matrice unitară.**

În mod echivalent, o matrice pătratică  $A$  este unitară dacă și numai dacă:

$$A^{*T}A = A A^{*T} = I \quad (6.18)$$

Utilizând o matrice  $A$  ce îndeplinește una din condițiile echivalente (6.17) sau (6.18), **definim** în continuare drept **transformată unitară a vectorului**

aleator  $x$  matricea  $B = A^{*T}$ . Astfel, transformata unitară a vectorului aleator  $x$  este dată de:

$$y = A^{*T} x \quad (6.19)$$

Relația anterioară se mai numește și **transformata directă** în timp ce **transformata inversă** este dată de relația:

$$x = A \cdot y \quad (6.20)$$

**Problemă 6.4:** Dovediți validitatea relației (6.20) plecând de la relația (6.19).

**Exemplu 6.3:** Un exemplu foarte cunoscut de **transformată unitară este transformata Fourier**, vezi relația (6.9).

După cum vom vedea și în subcapitolele următoare, **transformata unitară poate fi interpretată, din punct de vedere geometric, drept o rotire a sistemului inițial de coordonate**. Această transformată este una invariantă la schimbarea lungimii vectorilor de trăsături din spațiul de intrare. Această afirmație este una ușor de demonstrat; astfel:

$$|y|^2 = y^{*T} y = (A^{*T} x)^{*T} (A^{*T} x) = x^{*T} A A^{*T} x = x^{*T} x = |x|^2 \quad (6.21)$$

Dacă interpretăm vectorul aleator  $x$  drept o secvență de semnal ca în **Figura 5.1** și **Figura 5.2** observăm că (6.21) este chiar **relația lui Parseval** care ne asigură că **energia semnalului se păstrează indiferent de spațiul în care o calculăm**.

**Problemă 6.5:** Implementați un program în mediul de dezvoltare LabWindows CVI în care să demonstrați practic validitatea teoremei lui Parseval.

**Rezolvare:** Rezolvarea acestei probleme se găsește în directorul **Teorema lui Parseval**, asociat acestui capitol.

În subcapitolele următoare vom prezenta câteva aplicații practice ale transformatei unitare cât și o serie de interpretări ale acesteia.

### 6.3.2. Diagonalizarea matricei de covarianță cu ajutorul transformatei unitare

*Vectorii proprii* ai matricei de covarianță (a unui vector aleator  $x$ ) pot fi utilizați pentru construirea unei transformări unitare. În urma utilizării acestei transformări, în noul spațiu de trăsături rezultat, matricea de

covarianță va fi una diagonală. În plus, **are loc o rotire a sistemului inițial de coordonate** în care vectorul  $x$  era, la început, reprezentat. Această transformată este una generală și ea poate fi aplicată oricărui tip de vector aleator.

## 1. Vectori proprii și valori proprii

Fie  $A$  o matrice pătratică, de dimensiune  $d \times d$ . Spunem că  $e$  este un **vector propriu** al acestei matrici iar  $\lambda$  este o **valoare proprie**<sup>1</sup> a aceleiași matrici dacă între aceste elemente există relația:

$$A \cdot e = \lambda e \quad (6.22)$$

Din punct de vedere al relației (6.22) matricea  $A$  poate fi privită ca o matrice ce realizează o transformare liniară ce mapează vectorul propriu  $e$  într-o versiune scalată a lui.

Dacă matricea  $A$  este o matrice de covarianță, notată cu  $C_x$ , atunci putem găsi (în principal, datorită faptului că este o matrice Hermitiană simetrică), în mod unic pentru fiecare astfel de matrice:

- $d$  vectori **ortonormali**  $e_1, e_2, \dots, e_d$  și
- o mulțime de  $d$  valori proprii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ , asociate acestor vectori proprii.

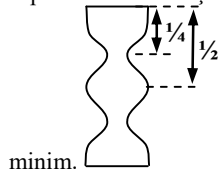
**Observația 6.4:** În mod similar, pentru o matrice de corelație,  $R_x$ , care este și

<sup>1</sup> Valorile proprii mai sunt cunoscute în literatură și sub denumirea de **autovalorile** matricii corespondente.

Valorile proprii sunt întâlnite și utilizate în toate domeniile ingineriei, economiei, științei etc. Astfel, de exemplu, frecvența naturală de oscilație a unui pod este egală cu valoarea proprie minimă a sistemului de ecuații ce modelează podul. Prăbușirea podului Tacoma Narrows în anul 1940 a fost generată de oscilațiile produse de către vânt și aceasta deoarece frecvența oscilațiilor a fost foarte apropiată de frecvența naturală de oscilație a podului.

În domeniul electronicii *polii oricărei funcții de transfer* ce modelează un sistem (filtru amplificator, oscilator etc.) sunt valorile proprii ale matricii de tranziție a sistemului respectiv – vezi **Anexa: Polii funcției de transfer și valorile proprii**. Un alt exemplu este și următorul.

În încercarea de a proiecta o coloană pornindu-se de la o cantitate fixă de material ce poate fi utilizată în construcția ei, dar care să suporte o greutate maximă (a unui acoperiș, plafon) inginerii au demonstrat, folosindu-se de valorile proprii, că această coloană ar trebui să aibă o formă similară cu cea din figura alăturată; astfel, coloana trebuie să aibă diametrul maxim în mijloc și la capete iar la distanțe egale cu 25% din lungimea ei, de ambele capete, diametrul trebuie să fie



ea, la rândul ei, hermitian-simetrică, putem găsi  $d$  vectori ortonormali și  $d$  valori proprii asociate cu acești vectori.

**Valorile proprii ale matricei de covarianță** (respectiv, corelație) **sunt întotdeauna numere reale**. Parte din aceste valori proprii pot să fie zero sau/și să existe grupuri de două sau mai multe valori proprii care să fie egale între ele.

## 2. Diagonalizarea matricei de covarianță

Fie  $e_k$  și  $e_l$  o pereche oarecare de doi vectori din mulțimea vectorilor proprii ai matricei de covarianță  $C_x$ . Utilizând acești vectori ortonormali putem scrie:

$$C_x e_k = \lambda_k e_k \quad (6.23)$$

Din relația anterioară rezultă imediat:

$$e_l^{*T} C_x e_k = \lambda_k e_l^{*T} e_k = \begin{cases} \lambda_k & \text{dacă } l = k \\ 0 & \text{dacă } l \neq k \end{cases} \quad (6.24)$$

Egalitatea dată de relația (6.24) rezultă imediat știind că vectorii  $e_1, e_2, \dots, e_d$  sunt ortonormali.

În continuare definim matricea  $E$  a vectorilor proprii. Coloanele acestei matrici sunt vectorii proprii ai matricii  $C_x$ :

$$E = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ e_1 & e_2 & \dots & e_d \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Din relația (6.24) rezultă:

$$E^{*T} C_x E = \begin{bmatrix} - & e_1^{*T} & - \\ - & e_2^{*T} & - \\ & \vdots & \\ - & e_d^{*T} & - \end{bmatrix} C_x \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ e_1 & e_2 & \dots & e_d \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d \end{bmatrix} = \Lambda \quad (6.26)$$

Din relațiile (6.10), (6.15) ( $y = A \cdot x$  și  $C_y = A C_x A^{*T}$ ) și (6.26) deducem că  $\Lambda$  este matricea de covarianță,  $C_y$ , pentru vectorul aleator  $y$  obținut prin aplicarea transformării liniare:

$$y = E^{*T} x = \begin{bmatrix} - & e_1^{*T} & - \\ - & e_2^{*T} & - \\ & \vdots & \\ - & e_d^{*T} & - \end{bmatrix} x \quad (6.27)$$

În noul spațiu (cel al vectorului aleator  $y$ ) obținut prin transformarea liniară a spațiului  $x$  prin intermediul **transformatei**  $A = E^{*T}$  vom avea, deci, o matrice de covarianță egală cu:

$$C_y = A C_x A^{*T} = E^{*T} C_x E = \Lambda \quad (6.28)$$

Prin urmare, în urma transformării liniare de mai sus, componentele vectorului aleator  $y$  devin necorelate; această afirmație se justifică prin aceea că matricea de covarianță a vectorului aleator  $y$ ,  $C_y = \Lambda$ , este o matrice diagonală – vezi relația (5.222) precum și analizele efectuate în **Subcapitolul 5.31**

Reamintim că transformata  $A = E^{*T}$  este o transformată liniară ce se aplică tuturor realizărilor particulare ale vectorului aleator  $x$ . Mai mult, această transformată este și o **transformată unitară** deoarece vectorii ce compun matricea  $E$  sunt ortonormați. Astfel, transformata liniară  $A = E^{*T}$  satisface și condiția (6.18).

Ținând cont de faptul că elementele de pe diagonala principală a matricei de covarianță a unui vector aleator oarecare,  $y$ , reprezintă varianțele componentelor lui  $y$ , vezi (5.201)<sup>2</sup>, atunci deducem imediat că **valorile proprii sunt întotdeauna reale și pozitive**, parte din ele putând să ia și valoarea zero.

**Observația 6.5:** În matematică se știe că o matrice este *pozitiv semidefinită* dacă și numai dacă toate valorile proprii asociate cu acea matrice sunt mai mari sau egale cu zero. În mod similar, o matrice este *pozitiv definită* dacă și numai dacă toate valorile proprii sunt pozitive.

Deoarece atât pentru matricea de corelație cât și pentru cea de covarianță s-a arătat anterior că sunt pozitiv semidefinite, **aceasta ne garantează că valorile proprii nu vor fi niciodată negative pentru cele două matrici** –  $R_x$ , respectiv,  $C_x$ . Mai mult, ne putem folosi de această proprietate drept test (doar pentru a fi siguri de corectitudinea calculului) în momentul în care estimăm matricea de corelație sau matricea de covarianță din setul de date. Concret, întotdeauna valorile proprii calculate pentru estimațiile matricelor de corelație și covarianță trebuie să fie pozitive sau, cel mult, egale cu zero. În cea mai mare

<sup>2</sup>  $c_{kk} = E\{|x_k - m_k|^2\}$  conform relației (5.201)

parte a situațiilor practice pe care le vom întâlni matricea de corelație și cea de covarianță furnizează, în general, valori proprii ce sunt strict pozitiv definite.

Folosindu-ne de toate informațiile prezentate până acum, vom spune că o **matrice de corelație sau covarianță este legitimă** dacă:

- este pătratică,
- elementele de pe diagonala principală sunt mai mari sau egale cu zero<sup>3</sup>,
- este Hermitian simetrică și, în plus,
- valorile proprii sunt întotdeauna mai mari sau egale cu zero.

Conform relațiilor (6.12) și (6.15) sunt adevărate următoarele relații pentru momentele de ordin unu și doi ale vectorului aleator  $y$  obținut din  $x$  prin transformarea unitară dată de relația (6.27):

- media vectorului  $y$ ,

$$m_y = E^{*T} m_x \quad (6.29)$$

- matricea de covarianță,

$$C_y = E^{*T} C_x E = \Lambda \quad (6.30)$$

- diagonalizarea matricii de covarianță nu implică direct și diagonalizarea matricii de corelație, matricea de corelație putând fi obținută cu relația,

$$R_y = C_y + m_y m_y^{*T} = \Lambda + m_y m_y^{*T} \quad (6.31)$$

**Observația 6.6:** În urma procesului de diagonalizare a matricii de covarianță se poate ca matricea de corelație în noul spațiu vectorial să fie și ea o matrice diagonală însă această situație apare numai atunci când media noului vector aleator,  $y$ , este zero ( $m_y = 0$ ). Din acest motiv, în multe tehnici de procesare a semnalelor, într-o primă fază (de preprocesare), se scade din fiecare realizare particulară a setului de date inițial valoarea vectorului mediu,  $m_x$ . În acest mod, de exemplu, prin procesările ulterioare, precum cele prezentate în acest capitol, se vor atinge simultan obiective multiple – precum, setul de trăsături va fi simultan și necorelat și ortogonal.

<sup>3</sup> În principal deoarece elementele de pe diagonala principală sunt varianțele fiecărei componente a vectorului aleator.

### 3. Proprietățile transformatei unitare

Înainte de a trece mai departe menționăm, în cele ce urmează, câteva proprietăți și facem câteva observații legate de transformata unitară și rezultatele anterior obținute.

- I. Astfel, dacă înmulțim la stânga și, respectiv, la dreapta relația (6.26) cu matricile  $E$  și, respectiv,  $E^{*T}$  și ținem cont că  $E$  este o matrice unitară, atunci obținem următoarea relație pentru matricea de covarianță a lui  $x$ :

$$C_x = E \Lambda E^{*T} \quad (6.32)$$

Relația (6.32) ne furnizează, practic, un mod de exprimare în *formă canonică* a matricii de covarianță funcție de vectorii săi proprii și de valorile proprii asociate.

Cel mai important aspect însă legat de exprimarea canonică de mai sus ține de faptul că **descompunerea dată de relația (6.32) este unică**, adică fiecărei matrici de covarianță (dacă este să particularizăm problema) îi este asociat un set unic de vectori și de valori proprii. În realitate, se poate demonstra că descompunerea oricărei matrici  $A$  sub forma dată de relația (6.32) este unică. În acest context, inclusiv matricii de corelație îi corespunde o descompunere în formă canonică unică.

- II. Plecând de la relația (6.32) și ținând cont că  $E^{-1} = E^{*T}$  obținem, mai departe, o altă relație de calcul<sup>4</sup> importantă, și anume:

$$C_x^{-1} = E \Lambda^{-1} E^{*T} \quad (6.33)$$

Această ultimă ecuație este utilă în obținerea, într-un mod mai facil, a inversei matricii de covarianță. Deoarece  $\Lambda$  este o matrice diagonală reală rezultă că matricea  $\Lambda^{-1}$  este tot o matrice diagonală, cu elementele de pe diagonala principală luând valori egale  $1/\lambda_j$ .

- III. Nu în ultimul rând avem că, deoarece elementele matricii  $E$  sunt ortonormale, **determinantul și urma matricii  $C_x$  sunt egale cu determinantul și urma matricii  $\Lambda$**  (pentru noțiunile de determinant și urma unei matrici consultați anexa “Relații matematice fundamentale”). Astfel, avem:

$$|C_x| = |\Lambda| = \prod_{j=1}^d \lambda_j \quad (6.34) \quad \text{și} \quad \text{tr } C_x = \text{tr } \Lambda = \sum_{j=1}^d \lambda_j \quad (6.35)$$

**Problemă 6.6:** Încercați să demonstrați validitatea relațiilor (6.34) și (6.35).

<sup>4</sup> Se utilizează și relația:  $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

#### 4. Determinarea valorilor și vectorilor proprii

În cea mai mare parte a cazurilor, diferitele tipuri de calculatoare științifice (HP 48GX, HP 49G), medii de simulare (gen Matlab, Matcad), editoare simbolice (*Scientific WorkPlace*) sau medii de dezvoltare (precum LabWindows CVI) au funcții proprii ce pot fi utilizate pentru găsirea vectorilor proprii și a valorilor proprii ale unei matrici pătratică. Din păcate însă, o mare parte din acestea nu țin cont de condiția de ortonormalitate a vectorilor proprii, ceea ce implică un pas suplimentar – de normalizare –, din partea utilizatorului.

În câteva rânduri vom revedea modul de determinare a vectorilor și valorilor proprii. Procedura descrisă în continuare este una de bază, aplicabilă în orice situație; din păcate, datorită complexității computaționale ridicate ea se aplică doar pentru matrici cu număr mic de elemente, pentru cele de mari dimensiuni existând alte metode numerice, mai eficiente.

În cele ce urmează luăm în discuție, fără a reduce însă din gradul de generalitate<sup>5</sup>, cazul găsirii valorilor proprii pentru matricea de covarianță a unui vector aleator  $x$ ,  $d$ -dimensional. Pentru aceasta pornim de la ecuația (6.22) pe care o rescriem în forma echivalentă:

$$(C_x - \lambda I) e = [0] \quad (6.36)$$

Pentru ca acest sistem de ecuații să nu aibă soluții banale, conform regulii lui Cramer, este necesar să avem:

$$\det(C_x - \lambda I) = 0 \quad (6.37)$$

Ecuația (6.37) poartă numele de *ecuație caracteristică* corespunzătoare relației (6.22), ea este una polinomială în  $\lambda$  iar rădăcinile ei sunt tocmai valorile proprii ale matricii de covarianță  $C_x$ :

$$\det(C_x - \lambda I) = a_0 \lambda^d + a_1 \lambda^{d-1} + \dots + a_{d-1} \lambda + a_d = 0 \quad (6.38)$$

$$a_0 \lambda^d + a_1 \lambda^{d-1} + \dots + a_{d-1} \lambda + a_d = 0 \quad (6.39)$$

Ulterior găsirii valorilor proprii, acestea pot fi utilizate mai departe pentru determinarea vectorilor proprii; pentru aceasta se ține cont de faptul că vectorii proprii ai matricii de covarianță sunt ortonormali:

$$e_k^{*T} \cdot e_l = 0, \text{ pentru orice } k \neq l \quad (6.40)$$

și

<sup>5</sup> De exemplu, în mod similar se face și pentru matricea de corelație



$$e_k^{*T} \cdot e_k = 1, \text{ pentru orice } k \quad (6.41)$$

sau, această ultimă relație poate fi scrisă:

$$|e_{k1}|^2 + |e_{k2}|^2 + \dots + |e_{kd}|^2 = 1, \text{ pentru orice } k \quad (6.42)$$

**Problemă 6.7:** Pentru următoarea matrice de covarianță, prezentată mai jos, determinați valorile și vectorii proprii.

$$C_x = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

**Rezolvare:** Folosindu-ne de relația (6.37) obținem ecuația caracteristică:

$$\det(C_x - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \quad (6.44)$$

Grupând termenii din relația (6.44) într-un mod favorabil obținem:

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 6) = 0 \quad (6.45)$$

de unde rezultă soluțiile:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{și} \quad \lambda_2 = 6$$

**A.** Pentru  $\lambda_1 = 1$  și folosindu-ne de relația (6.36) obținem:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e_{11} - 2e_{12} = 0 \\ -2e_{11} + 4e_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_{11} - 2e_{12} = 0 \\ e_{11} - 2e_{12} = 0 \end{cases} \quad (6.46)$$

Utilizând și proprietățile vectorilor proprii în special proprietatea (6.41) sistemul de ecuații (6.46) poate fi rescris sub forma:

$$\begin{cases} e_{11}^2 + e_{12}^2 = 1 \\ e_{11} - 2 \cdot e_{12} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ e_{11} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad (6.47)$$

Din relația (6.47) rezultă vectorul propriu asociat cu valoarea proprie  $\lambda_1 = 1$ :

$$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad e_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

**B.** Pentru  $\lambda_1 = 6$  și folosindu-ne de relația (6.36) obținem:

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4e_{21} - 2e_{22} = 0 \\ -2e_{21} - 2e_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2e_{21} - e_{22} = 0 \\ -2e_{21} - e_{22} = 0 \end{cases} \quad (6.48)$$

Utilizând în mod similar ca la punctul anterior proprietățile vectorilor proprii, în special proprietatea (6.41), sistemul de ecuații (6.46) poate fi rescris sub forma:

$$\begin{cases} e_{21}^2 + e_{22}^2 = 1 \\ 2e_{21} + e_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_{21} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ e_{22} = \mp \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad (6.49)$$

Din relația (6.47) rezultă vectorul propriu asociat cu valoarea proprie  $\lambda_l = 6$  este unul din următorii doi:

$$e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad e_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

### 6.3.3. Determinarea elipsoizilor de concentrare

Procedura de diagonalizare a matricii de covarianță prin intermediul transformatei unitare determină decorelarea tuturor componentelor unui vector aleator  $x$ ,  $d$ -dimensional, în noul spațiu de trăsături, cel al vectorului aleator  $y$  rezultat. Acest nou spațiu de trăsături este obținut prin aplicarea transformatei unitare distribuției inițiale a setului de date, situată în spațiul vectorial inițial de coordonate  $(a_1, \dots, a_d)$ .

Pentru vectori aleatori caracterizați de funcții de distribuție *Gauss*-iene multidimensionale este ușor de arătat că funcția densitate de probabilitate rezultată după aplicarea transformatei unitare se scrie ca un produs de densități de probabilitate *Gauss*-iene monodimensionale – demonstrația acestui enunț va fi prezentată, în cele ce urmează, ca un rezultat intermediar al unei alte demonstrații, ce vizează punerea în evidență a contururilor funcției densitate de probabilitate.

O concluzie imediată ce se deduce din cele de mai sus este aceea că, prin aplicarea transformatei unitare unui vector aleator,  $x$ , cu **distribuție Gauss-iană**, componentele vectorului rezultat,  $y$ , devin **variabile aleatoare independente** din punct de vedere statistic.

Mai general, putem spune că, dacă componentele unui vector de trăsături sunt independente și au o distribuție de probabilitate de tip *Gauss*-iană,

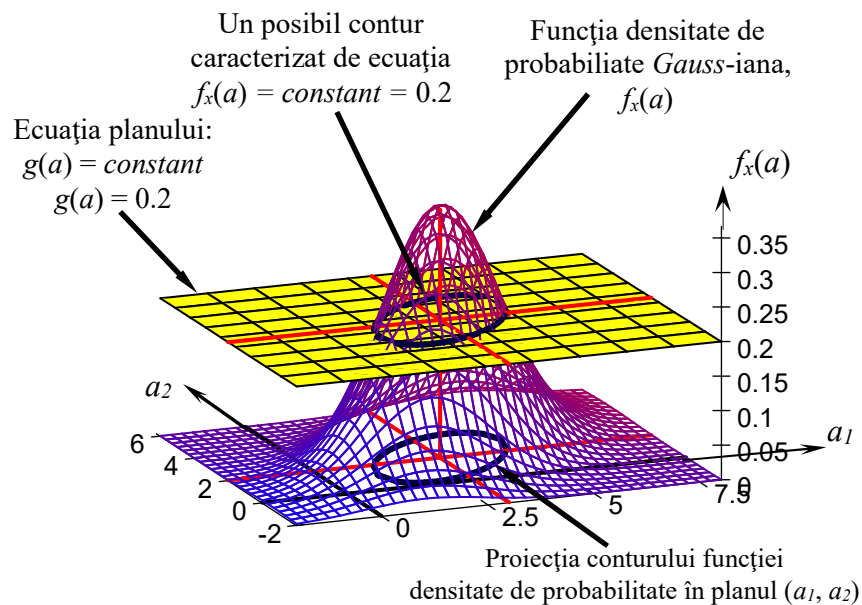
atunci funcția densitate de probabilitate a vectorului aleator se va scrie ca un produs de funcții densitate de probabilitate monodimensionale.

**Problemă 6.8:** Prezentați demonstrația completă a afirmației precedente.

În cadrul analizei ce va urma luăm în discuție doar distribuțiile *gauss-*iene, distribuții întâlnite foarte des în natură, în diferite procese biofizice, biochimice, tehnologice, sociologice etc.

În acest moment dispunem de toate cunoștințele necesare pentru a desena contururile unei funcții densitate de probabilitate  $d$ -dimensionale de tip *gauss-*iană. Capacitatea de a vizualiza modalitatea de distribuție spațială a vectorilor de trăsături este un aspect foarte important ce ne furnizează informații ce pot fi folosite în:

1. alegerea clasificatorului optim, funcție de complexitatea spațiului trăsăturilor și/sau
2. a metodelor de preprocesare ce vor fi utilizate în vederea obținerii performanțelor maxime de clasificare, în condițiile utilizării unei puteri minime de calcul.



**Figura 6.2.** Reprezentarea grafică a contururilor unei funcții densitate de probabilitate *Gauss-*iană pentru un spațiu de trăsături bidimensional

Contururile unei funcții densitate de probabilitate se obțin ca soluții ale ecuației:

$$f_x(a) = \text{constant} \quad (6.50)$$

pentru diferite valori ale constantei *constant*; practic, un astfel de contur reprezintă intersecția (vezi **Figura 6.2**) dintre funcția densitate de probabilitate cu un plan paralel cu planul trăsăturilor, caracterizat de ecuația:

$$g(a) = \text{constant}, \text{ pentru orice } a \in \mathcal{R}^d.$$

În relația anterioară  $f_x(\cdot)$  este o distribuție de probabilitate *Gauss-iană* a unui vector aleator  $x$  care, în cele mai multe situații va fi unul real, fiind, deci, caracterizat de o funcție densitate de probabilitate de forma:

$$f_x(a) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |C_x|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(a-m_x)^T C_x^{-1} (a-m_x)} \quad (6.51)$$

Deoarece numai termenul exponențial este singurul dependent de  $a$ , aceste contururi (pentru cazul cel mai general, cel al unui vector aleator  $x$  complex) sunt definite de:

$$(a - m_x)^*{}^T C_x^{-1} (a - m_x) = C \quad (6.52)$$

unde  $C$  este o constantă pozitivă ce depinde de constanta *constant*, fiind soluția următoarei ecuații:

$$e^C = \text{constant} \cdot (2\pi)^{d/2} |C_x|^{1/2} \quad (6.53)$$

Prin aplicarea transformatei unitare și utilizând relațiile (6.29) și (6.33), putem dezvolta relația (6.52) sub forma:

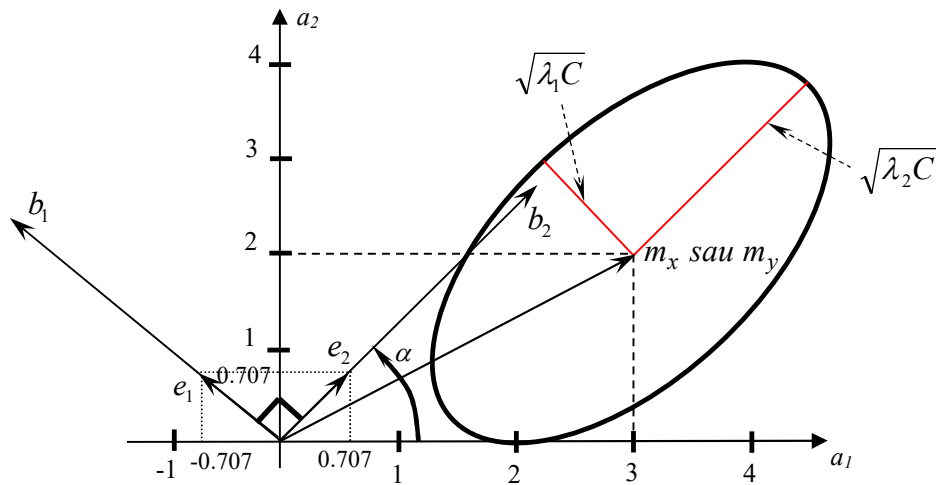
$$\begin{aligned} (a - m_x)^*{}^T C_x^{-1} (a - m_x) &= (a - m_x)^*{}^T E \Lambda^{-1} E^{*T} (a - m_x) = \\ &= (E^{*T} a - E^{*T} m_x)^*{}^T \Lambda^{-1} (E^{*T} a - E^{*T} m_x) = \\ &= (b - m_y)^*{}^T \Lambda^{-1} (b - m_y) = C \end{aligned} \quad (6.54)$$

Reamintim că, în relația de mai sus  $a$  este vectorul generic ce desemnează valorile vectorului aleator  $x$  iar  $b$  este vectorul generic ce desemnează valorile vectorului aleator  $y$ .

Ținând cont că matricea  $\Lambda$  este o matrice diagonală, iar inversa unei matrici diagonale este tot o matrice diagonală, având pe diagonala principală elementele de pe aceleași poziții din matricea  $\Lambda$  la puterea -1, în continuare relația (6.54) poate fi pusă sub forma:

$$\frac{|b_1 - m_{y_1}|^2}{\lambda_1} + \frac{|b_2 - m_{y_2}|^2}{\lambda_2} + \dots + \frac{|b_d - m_{y_d}|^2}{\lambda_d} = C \quad (6.55)$$

Ecuția (6.55) reprezintă descrierea unui elipsoid  $d$ -dimensional cu centrul în vectorul  $m_y$ . Acest elipsoid are proprietatea că axele lui principale sunt aliniat paralel cu direcțiile vectorilor proprii ai matricii de covarianță  $C_x$ , în timp ce lungimile axelor elipsoidului sunt egale cu  $2\sqrt{\lambda_i C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$  – vezi **Figura 6.3**. În această figură, deoarece axele elipsoidului fac un unghi,  $\alpha$ , cu sistemul de coordonate ce descrie spațiul inițial,  $(a_1, \dots, a_d)$ , de trăsături putem trage concluzia că există o corelație între componentele vectorului (în momentul în care o trăsătură, de exemplu  $a_1$ , crește aceasta va determina automat o creștere în valoare și pentru trăsătura  $a_2$ , pentru cea mai mare parte a vectorilor de trăsături ce caracterizează clasa).



**Figura 6.3.** Un contur tipic pentru o funcție densitate de probabilitate de tip Gauss-iană

**Figura 6.3** este chiar planul  $a_1, a_2$  de proiecție al elipsoidului  $f_x(a) = \text{constant}$ , reprezentat grafic în **Figura 6.2**.

În cazul bidimensional, existența unei pante pozitive a axei principale aparținând elipsei de concentrare ne furnizează informația existenței unei corelații pozitive în setul de date inițial – situație similară cu cea prezentată în **Figura 6.3**. Printr-o corelație pozitivă a trăsăturilor înțelegem că, în

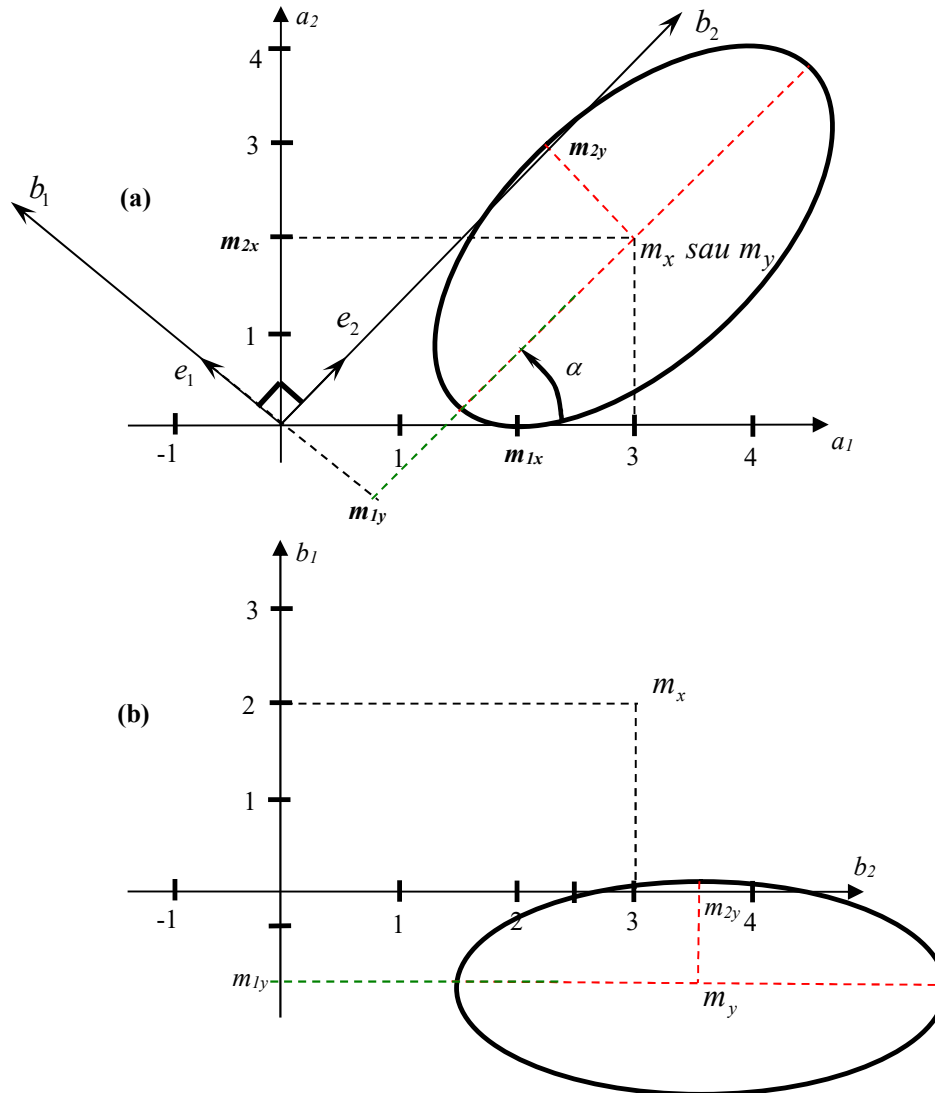
medie, creșterea valorii uneia dintre ele determină și creșterea valorii celeilalte trăsături. Existența unei pante negative a axei principale a elipsei de concentrare arată o corelație inversă sau „negativă” între componentele vectorului de trăsături. Când axele elipsei sunt, însă, paralele cu axele sistemului de coordonate, atunci componentele vectorului sunt necorelate.

**Observație 6.7:** Existența unei corelații în setul de date generează dificultăți, dacă nu chiar imposibilitatea obținerii unor performanțe maxime de clasificare, cel puțin în cazul unor anumite clase de clasificatori. De exemplu, în **Capitolul 4** unde s-au studiat clasificatorii elementari, s-a arătat că una dintre limitările fundamentale ale clasificatorului de tip minimă distanță este generată de existența, în setul de date, a unei corelații între trăsături.

Din **Figura 6.3** se observă că noul sistem de coordonate definit de ( $y_1 = b_1$  și  $y_2 = b_2$ ) se obține din vechiul sistem de coordonate, dat de ( $x_1 = a_1$  și  $x_2 = a_2$ ), în urma rotirii acestuia din urmă cu un unghi  $\alpha$ . Din acest motiv, **transformata unitară** este interpretată ca una ce **are drept efect rotirea sistemului inițial de coordonate**.

**Observație 6.8:** O primă impresie pe care o putem avea, în mod greșit, atunci când ne uităm la **Figura 6.3** este aceea că punctul ce corespunde vectorului medie  $m_x$  coincide grafic cu punctul ce corespunde vectorului medie  $m_y$ . Ori noi știm că o astfel de egalitate,  $m_x = m_y$ , poate să apară doar atunci când fie matricea transformării este matricea unitate, fie  $m_x = [0]$  – nici una din cele două situații nu caracterizează situația analizată în **Figura 6.3**. În realitate ceea ce s-a urmărit prin acest grafic a fost punerea în evidență a efectului de rotire a sistemului de coordonate cu un unghi  $\alpha$ , pe care îl are transformata  $E^{*T}$  asupra spațiului vectorial inițial; diferența reală ce există între vectorii medie  $m_x$  și  $m_y$  este dată de modul cum ne raportăm față de cele două sisteme de coordonate suprapuse. Astfel, atunci când vorbim de valori și momente ale vectorului aleator  $x$ , referirea acestor puncte o facem în raport cu sistemul de coordonate ( $a_1, a_2$ ) – în particular,  $m_x = [m_{1x}, m_{2x}]^T$  – iar atunci când vorbim de valori și momente ale vectorului aleator  $y$ , referirea acestor puncte o facem în raport cu noul sistem de coordonate ( $b_1, b_2$ ) – în particular,  $m_y = [m_{1y}, m_{2y}]^T$  (vezi **Figura 6.4(a)**). Dacă considerăm acum doar noul sistem de coordonate, ( $b_1, b_2$ ), reprezentarea elipsoidului de concentrare va arăta ca în **Figura 6.4(b)**. Pentru început se remarcă că axele elipsoidului sunt paralele cu axele de coordonate (în noul spațiu vectorial componentele noului vector de trăsături sunt necorelate). Tot în

aceeași figură observăm că vectorii medie  $m_x$  și  $m_y$ , reprezentați conform coordonatelor lor particulare, sunt două puncte clar distincte.



**Figura 6.4.** Reprezentarea vectorilor medie,  $m_x$  și  $m_y$  în cele două sisteme de coordonate  $(a_1, a_2)$ , respectiv,  $(b_1, b_2)$

Contururile funcției de densitate Gauss-iene poartă numele de **elipsoizi de concentrare** deoarece acestea indică regiuni în care funcția de densitate de probabilitate are valori maxime, cu număr mare de elemente în acele părți ale spațiului poziționate cât mai aproape de

centrul clasei și cu un număr de elemente din ce în ce mai mic, pentru regiuni situate la o distanță mai mare de centrul clasei. O imagine elocventă ce descrie acest mod de distribuție a datelor, respectiv, a vectorilor de trăsături, a fost prezentată în **Figura 5.6**. Prin urmare, din punct de vedere practic, elipsoizi de concentrare ne dau o idee asupra distribuției setului de date în spațiul de intrare.

**Problema 6.9:** Pentru o clasă de elemente caracterizate de următoarea

matrice de covarianță și, respectiv, medie:  $c_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ,  $m_x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

desenați un contur al funcției densitate de probabilitate în planul  $a_1, a_2$ .

**Rezolvare:** Pentru determinarea unui contur al funcției densitate de probabilitate sau a unui elipsoid de concentrare al funcției densitate de probabilitate – denumirile sunt similare – se vor urmări etapele:

1. Se determină valorile proprii ale matricii  $C_x$ :  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$  și  $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ .
2. Se determină vectorii proprii asociați fiecărei valori proprii:
  - a. Pentru valoarea proprie  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$  avem unul din următorii

vectori proprii:  $e_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  sau  $e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ .

- b. Pentru valoarea proprie  $\lambda_2 = \frac{3}{4}$  avem unul din următorii

vectori proprii:  $e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  sau  $e_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ .

Din calculele de mai sus observăm că, pentru o aceeași valoare proprie, datorită funcției radical pe care o aplicăm, obținem doi vectori proprii care au aceeași direcție însă sensuri diametral opuse. Din punctul nostru de vedere ne este indiferent sensul vectorului atâta timp cât direcția este aceeași. În consecință, pentru rezolvarea, în continuare, a problemei puteți alege oricare dintre cei doi vectori calculați pentru fiecare valoare proprie în parte. Pentru această problemă autorii au ales vectorii:

$e_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  și  $e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ .



3. Se desenează vectorii proprii  $e_1$  și  $e_2$  în planul  $(a_1, a_2)$  (atenție: ei sunt întotdeauna ortonormali!) – vezi **Figura 6.3**.
4. Se desenează *calitativ*<sup>6</sup> o elipsă de concentrare, ținându-se (atenție!) cont, de următoarele repere:
  - elipsa este centrată în vectorul medie al clasei,  $m_x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ;
  - axele elipsei sunt paralele cu vectorii proprii ( $e_1$  și  $e_2$ ), iar
  - aceste axe sunt proporționale cu  $2\sqrt{\lambda_1 C}$ , și respectiv,  $2\sqrt{\lambda_2 C}$ . În cazul nostru, din calcule reiese că axa mare a elipsei este paralelă cu vectorul propriu  $e_2$  iar axa mică este paralelă cu vectorul propriu  $e_1$ .
 O reprezentarea grafică a elipsei de concentrare de mai sus este redată chiar în **Figura 6.3**.

**Aplicație 6.2:** Utilizând programul de trasare grafică a elipselor de concentrare și de analiză a unui set de vectori de trăsături bidimensionali (programul implementat îl găsiți în directorul **Determinare Contur si Decorelare** asociat acestui capitol) parcurgeți și răspundeți la următoarele puncte:

- (a). Urmăriți în mod intuitiv, cu ajutorul acestui program, pașii teoretici efectuați anterior pentru determinarea elipsoizilor de concentrare. Pentru aceasta se vor utiliza seturile de date din directorul **Date**. De asemenea, analizați și particularitățile elipsoizilor de concentrare trasați.
- (b). Încărcând un set de date, arbitrar, din directorul **Date** (prin apăsarea butonului **Load**, vezi **Figura 6.5**) demonstrați că:
  1. Vectorii proprii obținuți sunt ortonormali.
  2. Matricea transformării estimată este unitară.
  3. În cadrul programului, matricea de covarianță în spațiul  $y$ ,  $C_y$ , a fost calculată direct din setul de date nou rezultat. Utilizând matricea transformării  $A$  și matricea de covarianță  $C_x$ , verificați corectitudinea rezultatului.
  4. Eliminați din fișierul vectorilor de trăsături circa 90% din setul de date. Reluați analiza setului de date (reapăsați butonul **Start**, **Figura 6.5**). Explicați diferențele obținute.

<sup>6</sup> Pentru a putea desena și cantitativ elipsa de concentrare avem nevoie să cunoaștem valoarea particulară a constantei *constant* din relația (6.52).

- (c). Construiți o bază de date formată din vectorii de trăsături utilizați în cadrul problemei rezolvate în subcapitolul „Estimarea parametrilor statistici din setul de date”. Verificați corectitudinea rezultatelor obținute în cadrul acestei probleme cu ajutorul programului utilizat în cadrul acestei aplicații.

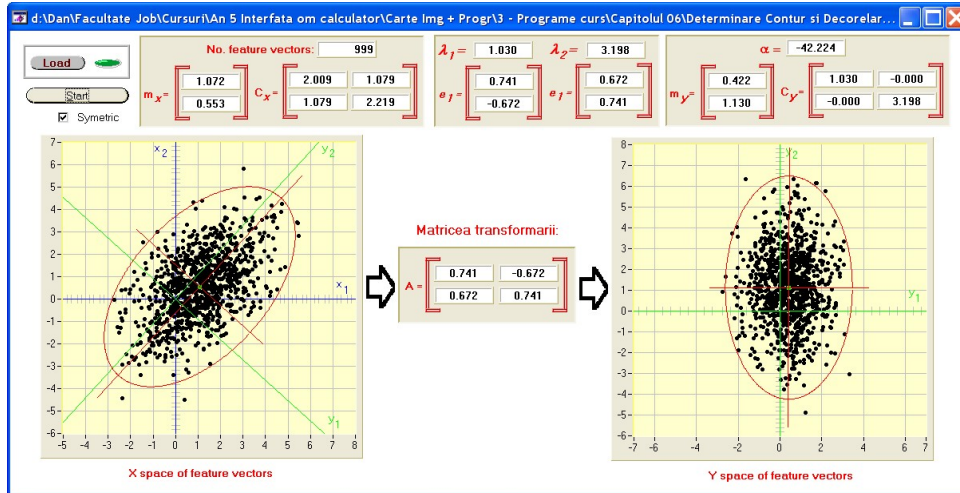


Figura 6.5. Interfața grafică a programului

### 6.3.4. Diagonalizarea matricii de corelație

Matricea de corelație poate fi diagonalizată printr-o procedură similară cu cea utilizată pentru matricea de covarianță. În acest caz, în urma aplicării transformatei unitare vectorul rezultat va avea componentele ortogonale.

Deoarece matricea de corelație este, ca și matricea de covarianță, o matrice Hermetiană simetrică,  $d \times d$  dimensională, putem să găsim întotdeauna și să-i asociem  $d$  valori proprii  $\lambda_k$  și  $d$  vectori proprii  $e_k$  care să satisfacă relația:

$$R_x e_k = \lambda_k e_k; \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (6.56)$$

Toți acești vectori proprii și valori proprii asociate lor sunt unice pentru fiecare matrice de corelație particulară în parte.

**Observație 6.9:** Chiar dacă în cadrul acestui subcapitol valorile proprii și vectorii proprii pentru matricea de corelație sunt notați în mod similar cu cei ai matricii de covarianță aceștia sunt diferiți în marea majoritate a situațiilor.

**Problemă 6.10:** În ce situație sau situații vectorii proprii și valorile proprii ale matricilor de corelație și de covarianță sunt identice?

Deoarece vectorii proprii  $e_k$  sunt unitari, din relația (6.56) avem:

$$e_l^{*T} R_x e_k = \begin{cases} \lambda_k & \text{dacă } l = k \\ 0 & \text{dacă } l \neq k \end{cases} \quad (6.57)$$

Definim matricea vectorilor proprii sub forma:

$$E = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_d \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Relația (6.57) poate fi generalizată prin utilizarea simultană a tuturor vectorilor proprii și a tuturor valorilor proprii asociate matricii de corelație într-o singură relație. Astfel, obținem:

$$E^{*T} R_x E = \Lambda \quad (6.59)$$

unde:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Dacă trecem din spațiul  $x$  de trăsături în spațiul  $y$  prin intermediul transformării:

$$y = E^{*T} x \quad (6.61)$$

atunci, media clasei și matricea de covarianță în noul spațiu de trăsături sunt date de:

$$m_y = E^{*T} m_x \quad (6.62)$$

și

$$R_y = E^{*T} R_x E = \Lambda \quad (6.63)$$

În acest mod componentele  $y_k$  aparținând vectorului aleator  $y$  sunt ortogonale, iar valorile proprii (care sunt termeni modulo pătratici ai vectorului  $y$ ) sunt întotdeauna reale și pozitive; parte din acestea este posibil să ia și valoarea zero.

În continuare se prezintă câteva relații utile ce rezultă din proprietățile matricii de corelație:

$$R_x = E \Lambda E^{*T} \quad (6.64)$$

$$R_x^{-1} = E \Lambda^{-1} E^{*T} \quad (6.65)$$

$$|R_x| = |\Lambda| = \prod_{j=1}^N \lambda_j \quad (6.66)$$

$$\text{tr } R_x = \text{tr } \Lambda = \sum_{j=1}^N \lambda_j \quad (6.67)$$

**Problemă 6.11:** Demonstrați proprietățile prezentate anterior.

Din ultimele două relații se observă că determinantul și urma matricii de corelație se pot scrie ca produsul și, respectiv, suma varianțelor variabilelor obținute în urma aplicării transformării unitare.

### 6.3.5. Utilizarea descompunerii în valori singulare

Fie matricea de corelație sau cea de covarianță, estimată cu ajutorul relației (5.238), respectiv, a relației (5.241):

$$\hat{R}_x = \frac{1}{K} X^{*T} X \quad (6.68)$$

$$\hat{C}_x = \frac{1}{K} X_0^{*T} X_0 \quad (6.69)$$

unde  $X$  reprezintă matricea setului de date, iar  $X_0$  reprezintă matricea setului de date obținute din datele din care am eliminat vectorul medie,  $m_x$ . Fiind date aceste matrici, putem să găsim vectorii și valorile proprii aparținând fiecăreia dintre aceste matrici folosindu-ne pentru aceasta de metoda prezentată în **Subcapitolul 6.3.2, Subpunctul 4**. Procedura, așa cum am mai menționat, este una de bază, aplicabilă în orice situație, însă datorită complexității computaționale ridicate, pentru matricile de dimensiuni mari se preferă utilizarea unei **metode numerice** care este mai precisă și mai eficientă. Această metodă, pe care o vom prezenta în cele ce urmează, poartă numele de **descompunerea în valori singulare**, SVD (*singular value decomposition*), **a matricii setului de date** (vorbim, deci, de matricea eșantioanelor și nu de estimațiile matricilor de corelație sau de covarianță!).

Precizia superioară a rezultatelor obținute prin această metodă este generată de faptul că toate produsele care sunt implicate în calcularea matricii de corelație sau de covarianță nu vor fi calculate. Astfel, când

utilizăm o „mașină” (de exemplu, un microcontroler sau un DSP în virgulă fixă) ce poate executa calculele într-o precizie finită, acest fapt reprezintă un avantaj major.

Metodele aparținând clasei din care face parte și metoda SVD pot să lucreze direct cu matricea setului de date – de exemplu, cu  $X_0$  –, în loc de produse de forma  $X_0^{*T} X_0$  și, din acest motiv, sunt denumite *metode de tip “radical”*.

**Observația 6.10:** În cele ce urmează vom discuta metoda SVD în contextul determinării vectorilor proprii și ai valorilor proprii pentru matricea de covarianță a unui vector aleator de trăsături,  $x$ ,  $d$ -dimensional; acest exemplu particular nu reduce cu nimic din caracterul de generalitate al prezentării.

**Teorema de descompunere în valori singulare** ne asigură că orice matrice  $X$  (reală sau complexă), de forma  $K \times d$  (în cazul nostru particular,  $X$  este matricea  $X_0$  a eșantionului iar  $K$  este numărul de realizări particulare ale lui  $x$ ) poate fi descompusă și scrisă ca un produs de matrici de forma:

$$X_0 = U \Sigma V^{*T} \quad (6.70)$$

unde:

- $U$  este o matrice unitară<sup>7</sup> de forma  $K \times K$ , numită **matrice stânga de vectori singulari** (în literatura de specialitate această matrice mai este cunoscută și drept **matricea de “ieșire”**, ce conține vectorii bazei pentru matricea setului de date  $X_0$ ):

$$U = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_K \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

- $V$  este tot o matrice unitară (numită și **matrice dreapta de vectori singulari**), având  $d \times d$  elemente:

$$V = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_d \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

În mod similar matricei  $U$ , matricea  $V$  mai este denumită și ea **matrice de “intrare” a vectorilor bazei**.

- $\Sigma$  este o matrice (de dimensiune  $K \times d$ ) de valori singulare reale, pozitive de tipul:

<sup>7</sup>  $U^{*T} U = U U^{*T} = I$  sau  $U^{-1} = U^{*T}$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_d \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

Elementele  $\sigma_i$  ce aparțin matricii  $\Sigma$  pot fi privite drept constante ce controlează câștigul prin intermediul cărui fiecare intrare este multiplicată pentru a obține o anumită ieșire.

Matricea  $\Sigma$ , prezentată mai sus, a fost scrisă în ipoteza  $K \geq d$  (situație uzuală pentru matricile seturilor de date obținute empiric). Pentru această matrice există în plus și proprietatea că  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_d$ , iar o parte din  $\sigma_k$ , pentru  $k$  luând valori aflate spre sfârșitul șirului  $\{1, 2, 3, \dots, d-1, d\}$ , pot fi chiar zero. În general vor fi  $r$  valori singulare diferite de zero, unde  $r$  este rangul<sup>8</sup> matricii  $X_0$ . Este important de subliniat că, indiferent dacă matricea datelor,  $X_0$ , este reală sau complexă, valorile singulare sunt întotdeauna reale și pozitive.

Dacă numărul de linii  $K$  este mai mic decât  $d$  atunci, matricea  $\Sigma$  ia forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

unde, din nou, parte din  $\sigma_k$ , pentru  $k$  luând valori situate spre sfârșitul intervalului  $1 \div K$ , pot fi zero. În acest caz, rangul  $r$ , respectiv, numărul de valori singulare diferite de zero, este egal cu numărul de linii independente din matricea  $X_0$ .

Aplicând relația (6.70), în acest moment, nu este greu să arătăm că **vectorii proprii** ai matricii  $X_0^{*T}X_0$  sunt **vectorii singulari dreapta** ai matricii  $X_0$ , și că **valorile proprii** ale aceleiași matrici,  $X_0^{*T}X_0$ , sunt **pătratul valorilor singulare** ale matricii  $X_0$ . Pentru a demonstra acestea dezvoltăm produsul  $X_0^{*T}X_0$  astfel:

$$X_0^{*T}X_0 = V \Sigma^{*T} U^{*T} U \Sigma V^{*T} = V (\Sigma^T \Sigma) V^{*T} \quad (6.75)$$

<sup>8</sup> Rangul unei matrici este dat de numărul de coloane liniar independente.

Ultima egalitate rezultă din faptul că matricea  $U$  este unitară. Introducând relația (6.73) în (6.75) și realizând înmulțirea obținem:

$$X_0^{*T} X_0 = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} V^{*T} \quad (6.76)$$

Această relație reprezintă descompunerea matricii  $X_0^{*T} X_0$  în forma (6.32):

$$C_x = E \Lambda E^{*T} \quad (6.77)$$

Ținându-se cont că această descompunere este unică, deducem imediat că matricea  $V$  este matricea vectorilor proprii ai lui  $C_x$  iar  $\sigma_k^2/K$  sunt valorile proprii asociate acestora. În concluzie, când matricea de covarianță este estimată conform relației (6.69), vectorii și valorile proprii sunt date de:

$$e_k = v_k, \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (6.78)$$

și

$$\lambda_k = \frac{1}{K} \sigma_k^2 \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (6.79)$$

**Observația 6.11:** În mod similar demonstrației anterioare se poate arăta că vectorii singulari stânga  $u_k$  sunt vectorii proprii ai matricii  $X_0 X_0^{*T}$ , iar  $\sigma_k^2/K$  sunt valorile proprii ale aceleiași matrici. Deoarece  $X_0 X_0^{*T}$  este o matrice  $K \times K$ , ea are în total  $K$  valori proprii. Dacă  $K > d$ , atunci sunt cel puțin  $d$  valori singulare, iar restul de  $(K - d)$  valori sunt zero.

**Problemă 6.12:** Reluând **Problema 5.31** prezentată în **Subcapitolul 5.5.3** „Estimarea parametrilor statistici din setul de date”, să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai următoarei matrici a setului de date:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

aplicând, pentru aceasta, metoda descompunerii în valori singulare (SVD) implementată în mediul de dezvoltare LabWindows CVI sau în editorul de documente matematice, Scientific WorkPlace determinați valoarea valorilor proprii asociați matricii de covarianță ce caracterizează setul de date (6.80).

**Rezolvare:** Utilizând funcțiile oferite în biblioteca „*Advance analysys*” a mediului de dezvoltare LabWindows CVI sau funcțiile similare existente în editorul de documente matematice, Scientific WorkPlace vom obține:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{SVD}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.40825 & -0.70711 & 0.57735 & 0 \\ -0.40825 & 0.70711 & 0.57735 & 0 \\ 0.8165 & 0 & 0.57735 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 1.7321 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{bmatrix} 0.70711 & 0.70711 \\ 0.70711 & -0.70711 \end{bmatrix}}_{V^*T}$$

Din descompunerea de mai sus rezultă că vectorii proprii sunt egali cu:  $e_k = v_k$  pentru  $k = 1$  și  $2$ , adică:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad e_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

iar valorile proprii asociate acestor vectori proprii sunt:

$$\lambda_k = \frac{1}{K} \sigma_k^2$$

pentru  $k = 1$  și  $2$ , adică  $\lambda_1 = \frac{3}{4}$  și  $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ .

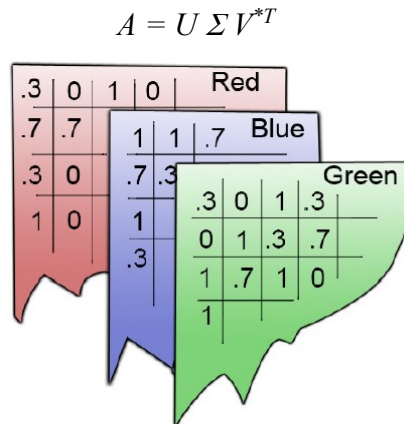
### 6.3.6. Compresia imaginilor utilizând transformata SVD

Compresia datelor reprezintă un domeniu foarte important de aplicabilitate al algebrei liniare. Necesitatea minimizării cantității de informații digitale stocate sau transmise este o necesitate din ce în ce mai mare o dată cu creșterea cantităților de date achiziționate și stocate. Transformata SVD poate fi folosită în mod eficient, în această direcție, pentru minimizarea cantităților de date stocate sau transferate.

Imaginile sunt stocate sub forma unor matrici. Fiecare valoare a acestei matrici reprezintă nivelul de strălucire a unui pixel – de exemplu pentru imaginile de tip *greyscale*, 0 reprezintă „culoarea” neagră, în timp ce, 255 reprezintă “culoarea” albă. Pentru imaginile color, există trei nivele de strălucire pentru fiecare culoare fundamentală (roșu, verde și albastru), deci, stocarea se realizează pe trei planuri de culoare diferite, care reprezintă trei matrici diferite – vezi figura de mai jos.

Pentru o imagine pătratică  $A$  de tip  $n \times n$  o putem descompune pe aceasta, prin intermediul transformatei SVD, sub forma următoare:





**Figura 6.6.** Reprezentarea planurilor de culoare într-o imagine color

Relația anterioară se poate scrie sub forma:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} - & v_1^T & - \\ - & v_2^T & - \\ - & \vdots & - \\ - & v_n^T & - \end{bmatrix}$$

înmulțind obținem:

$$A = u_1 \cdot \sigma_1 \cdot v_1^T + u_2 \cdot \sigma_2 \cdot v_2^T + \dots + u_n \cdot \sigma_n \cdot v_n^T$$

sau

$$A = \sum_{i=1}^n u_i \cdot \sigma_i \cdot v_i^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot u_i \cdot v_i^T$$

Dar știm că elementele  $\sigma_i$  au proprietatea că  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ , de aici rezultând că primul termen al sumei de mai sus are impactul maxim asupra matricii  $A$ , apoi cel de al doilea, urmând cel de al treilea etc. De aici rezultă că putem aproxima matricea  $A$  (deci imaginea) adunând doar primii  $k$  termeni ai sumei și nu toți. Suma rezultantă va avea rangul  $k$ , această valoare  $k$  semnificând numărul de matrici adunate pentru compunerea imaginii inițiale.

În cazul general, memoria necesară stocării unei matrici  $A$  ce are o “lățime” de  $n$  pixeli și o “înălțime” de  $m$  pixeli este  $n \times m$ . Se observă că **cantitatea de memorie** necesară stocării imaginii **crește exponențial cu dimensiunile acesteia**.

Pentru stocarea unei imagini  $A$  de dimensiuni  $n \times m$  aproximată prin  $k$  termeni prin intermediul transformatei SVD avem nevoie de  $k \cdot (n + m + 1)$  locații de memorie. Se observă că **necesitățile de memorie** în cazul acestei situații **cresc liniar o dată cu creșterea dimensiunilor imaginii**, comparativ cu o creștere exponențială în cazul imaginilor necomprimate.

Din cele două valori ale capacității de stocare, anterior prezentate, rezultă că pentru a comprima o imagine trebuie în mod obligatoriu să alegem numai acei  $k$  primi termeni ai aproximării pentru care:

$$k < \frac{m \cdot n}{n + m + 1}$$

### 6.3.7. Transformata Karhunen-Löeve

Fie  $x$  un vector aleator  $d$ -dimensional. Pornindu-se de la un eșantion al vectorului  $x$ , se caută o *transformare ortogonală* care să permită reprezentarea oricărui alt eșantion printr-un alt vector într-un spațiu  $m$ -dimensional, spațiu al vectorului aleator  $y$ , cu proprietatea  $m < d$ . Condiția care se impune pentru această minimizare a numărului de elemente componente ale vectorilor de trăsături în noul spațiu vectorial este ca în acest spațiu de aproximare (spațiu de proiecție a lui  $x$ ) să fie minimizată eroarea medie pătratică.

Să presupunem că transformata liniară căutată este dată de matricea  $K_L$  definită prin:

$$K_L = \begin{bmatrix} - & \varphi_1^T & - \\ - & \varphi_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & \varphi_d^T & - \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

Vectorii linie ai matricii  $K_L$ ,  $\varphi_i^T$ , sunt  $d$ -dimensionali și ei formează un sistem de coordonate ortonormat:

$$\varphi_i^T \varphi_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6.82)$$

S-a ales un sistem de coordonate ortonormat, în principal datorită ușurinței de reprezentare a vectorilor precum și datorită proprietăților existente, proprietăți care sunt generate de ortonormalitatea vectorilor bazei.

Vectorul  $x$  din spațiul  $d$ -dimensional este proiectat, prin transformata  $K_L$ , în vectorul  $y$  din spațiul  $m$ -dimensional astfel:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix} = K_L x \quad (6.83)$$

Fiecare element  $y_i$  rezultat al vectorului  $y$  se poate determina cu relația:

$$y_i = \varphi_i^T x \quad (6.84)$$

Deoarece coloanele matricii  $K_L$  sunt ortonormate, rezultă că această matrice este o transformată unitară. Astfel, putem scrie:

$$K_L K_L^T = K_L^T K_L = I \quad (6.85)$$

Din relațiile (6.83) și (6.85) rezultă<sup>9</sup>:

$$x = K_L^T y = \sum_{i=1}^d y_i \varphi_i \quad (6.86)$$

sau

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_d \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

Deci, se observă din relația (6.86) că orice vector aleator  $x$  se poate scrie sub forma unei combinații liniare de vectori ortonormați  $\varphi_i$ .

În continuare, în reprezentare vom reține numai un subset  $m$  ( $m < d$ ) de vectori ai bazei,  $\varphi_i$ , și de coeficienți  $y_i$ . Restul de coeficienți  $y_i$  vor fi înlocuiți de un set de constante  $b_i$ . Astfel, dorim să reprezentăm în mod optim vectorul  $x$  (dar nu numai un vector, ci întreg setul de date disponibil) în forma dată de relația (6.86) prin eliminarea numai a acelor componente specifice ale vectorilor bazei astfel încât să avem cea mai bună aproximare a întregului set de date conform cu un criteriu de acuratețe a reprezentării. Acest criteriu va fi pentru problema de față cel al erorii medii pătratice. În aceste condiții vectorul  $x$  va fi estimat astfel:

<sup>9</sup> Pentru descompunerea lui  $x$  în vectorii  $\varphi_i$  vezi **Anexa: Descompunere matricială sub forma unei combinații de vectori.**

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^m y_i \varphi_i + \sum_{i=m+1}^d b_i \varphi_i \quad (6.88)$$

În continuare dorim să determinăm vectorii  $\varphi_i$  și constantele  $b_i$  astfel încât în reprezentarea vectorului  $x$  în noul spațiu vectorial să minimizăm eroarea medie pătratică între aproximarea noastră și vectorul original.

Eroarea de aproximare a vectorului  $x$  este:

$$x - \tilde{x} = \sum_{i=m+1}^d (y_i - b_i) \varphi_i \quad (6.89)$$

în timp ce, eroarea medie pătratică de aproximare este dată de:

$$\bar{\varepsilon}^2 = E\{\|x - \tilde{x}\|^2\} = E\left\{ \sum_{j=m+1}^d \sum_{i=m+1}^d (y_i - b_i)(y_j - b_j) \varphi_i^T \varphi_j \right\} \quad (6.90)$$

Ținând cont că vectorii  $\varphi_i$  sunt ortonormali relația (6.90) devine:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \sum_{i=m+1}^d E\{(y_i - b_i)^2\} \quad (6.91)$$

Minimizarea erorii medii pătratice,  $\bar{\varepsilon}^2$ , se realizează prin determinarea optimă a vectorilor  $\varphi_i$  și a constantelor  $b_i$ .

Minimizarea  $\bar{\varepsilon}^2$  în raport cu  $b_i$  conduce la relația:

$$\frac{\partial}{\partial b_i} \bar{\varepsilon}^2 = \frac{\partial}{\partial b_i} E\{(y_i - b_i)^2\} = -2(E\{y_i\} - b_i) = 0 \quad (6.92)$$

Din relația (6.92) rezultă:

$$b_i = E\{y_i\} \quad (6.93)$$

Ținând cont de relația (6.84), (6.93) devine (pentru orice  $i = \overline{1, d}$ ):

$$b_i = E\{y_i\} = \varphi_i^T E\{x\} \quad (6.94)$$

Utilizând aceste valori ale coeficienților  $b_i$  și relația (6.84), obținem eroarea pătratică medie:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \sum_{i=m+1}^d E\{(\varphi_i^T x - \varphi_i^T E\{x\})^2\} = \sum_{i=m+1}^d \varphi_i^T E\{(x - E\{x\})(x - E\{x\})^T\} \varphi_i \quad (6.95)$$

iar, în final:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \sum_{i=m+1}^d \varphi_i^T C_x \varphi_i \quad (6.96)$$

În relația anterioară  $C_x$  este matricea de covarianță a vectorului aleator  $x$ .

Pentru determinarea vectorilor  $e_i$  optimi se minimizează, în continuare, eroarea medie pătratică în raport cu acești vectori, impunându-se, în plus, și constrângerea de ortonormalitate a acestui set de vectori.

Pentru minimizarea erorii medii pătratice ținând cont simultan și de constrângerea  $\varphi_i^T \varphi_i = 1$  se va folosi *metoda multiplicatorilor Lagrange*. Astfel, definim o nouă funcție:

$$f(e_{m+1}, \dots, e_d, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_d) = \bar{\varepsilon}^2 - \sum_{i=m+1}^d \alpha_i (\varphi_i^T \varphi_i - 1) \quad (6.97)$$

unde  $\alpha_i$  reprezintă multiplicatorii Lagrange.

Minimizând relația (6.97) funcție de  $\varphi_i$  se obține:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} f = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left( \sum_{i=m+1}^d [\varphi_i^T C_x \varphi_i - \alpha_i (\varphi_i^T \varphi_i - 1)] \right) = C_x \varphi_i - \alpha_i \varphi_i = 0 \quad (6.98)$$

Putem rescrie relația (6.98) astfel:

$$C_x \varphi_i = \alpha_i \varphi_i \quad (6.99)$$

Din relația (6.99) se observă că  $\varphi_i$  optim minimizării erorii medii pătratice este un vector propriu al matricii de covarianță iar  $\alpha_i$  este valoarea proprie asociată acestui vector:

$$\varphi_i = e_i \quad (6.100)$$

$$\alpha_i = \lambda_i \quad (6.101)$$

pentru orice  $i$  în intervalul  $1 \dots d$ .

Utilizând relația (6.99) și proprietățile vectorilor ortonormali putem deduce:

$$e_i^T C_x e_i = \lambda_i e_i^T e_i = \lambda_i \quad (6.102)$$

În acest caz eroarea medie pătratică minimă devine:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \sum_{i=m+1}^d \lambda_i \quad (6.103)$$

Formula (6.86):

$$x = K_L^T y = \sum_{i=1}^d y_i e_i \quad (6.104)$$

se numește **dezvoltarea Karhunen-Loève** iar transformarea definită de relația:

$$y = K_L x = [y_1, y_2, \dots, y_d]^T, \quad (6.105)$$

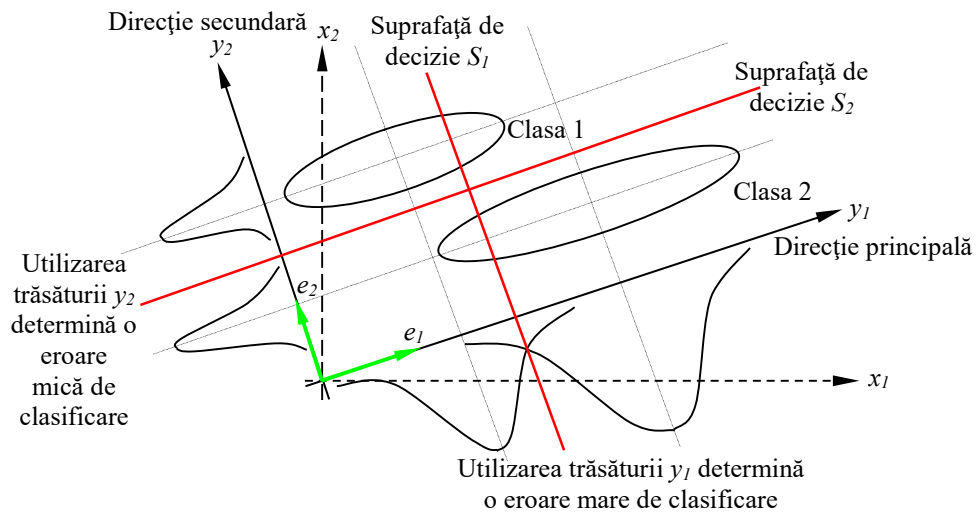
**a cărei matrice a transformării este formată din vectorii proprii  $e_i$** , poartă denumirea de transformata Karhunen-Loève.

Problema minimizării lui  $\bar{\varepsilon}^2$  se numește în statistică „**analiza componentelor principale**” sau **analiză factorială** [Neagoe, 1992].

Dacă calculăm în continuare matricea de covarianță în noul spațiu de trăsături,  $y$ , utilizând simultan și relația (6.102) obținem:

$$C_y = K_L \cdot C_x \cdot K_L^{*T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_d \end{bmatrix} \quad (6.106)$$

Din relația (6.106) observăm de asemenea, că și transformata Karhunen-Loève are drept rezultat decorelarea trăsăturilor în noul spațiu de trăsături.



**Figura 6.6.** Erorile de clasificare funcție de trăsătura aleasă

În cazul utilizării PCA într-o problemă de clasificare, în vederea reducerii dimensionalității spațiului trăsăturilor, importanța fiecărei trăsături este determinată de valoarea proprie corespunzătoare. Prin eliminarea unei caracteristici, de exemplu a trăsăturii  $y_i$ , eroarea de aproximare va crește cu

$\lambda_i$ . În acest mod, pentru minimizarea erorii, trebuie eliminate caracteristicile cu cele mai mici valori proprii. Prin ordonarea în mod descrescător a valorilor proprii, reținerea caracteristicilor este realizată în ordinea naturală a indicilor lor. Astfel, analiza este focalizată în principal pe acele trăsături determinate de vectorii principali pe care proiecția unei clase are varianță maximă. Acest rezultat al transformatei PCA nu este însă în măsură să asigure și soluții optime în problemele de clasificare, această transformare neimplicând nici o optimizare din punct de vedere al discriminării, vezi **Figura 6.6**.

Existența unei varianțe mari a unei trăsături nu implică automat și o capacitate superioară de discriminare a trăsăturii respective. După cum se observă din **Figura 6.6** eliminarea trăsăturii  $y_2$ , de varianță minimă, determină automat scăderea capacității de discriminare a celor două clase.