Introducción a los Filtros Digitales

clase 10

Temas

- Introducción a los filtros digitales
  - Clasificación, Caracterización, Parámetros
- Filtros FIR (Respuesta al impulso finita)
  - Filtros de media móvil, filtros senoc enventanado, filtros personalizados
- Transformada Z
- Filtros IIR (Respuesta al impulso infinita o recursivos)
- Respuesta en fase
- Filtros Chebyshev
- Comparación de desempeño
- Ejemplos: Filtros peine, filtros pasatodo
- Aplicaciones: sínteisis de cuerda pulsada, reverberadores, efectos

Introducción

¿Que es un filtro?

Cualquier medio que atraviesa la señal puede ser considerado un filtro. No pensamos en algo como filtro si la señal no es modificada.

“When you think about it, everything is a filter” (Julius Smith)

Filtro digital

Un filtro digital, es un filtro que opera sobre señales digitales. Es una operación matemática que toma una secuencia de números (la señal de entrada) y la modifica produciendo otra secuencia de números (la señal de salida) con el objetivo de resaltar o atenuar ciertas características.

Puede existir como una fórmula en un papel, un loop en un programa de computadora, como un circuito integrado en un chip.

Introducción

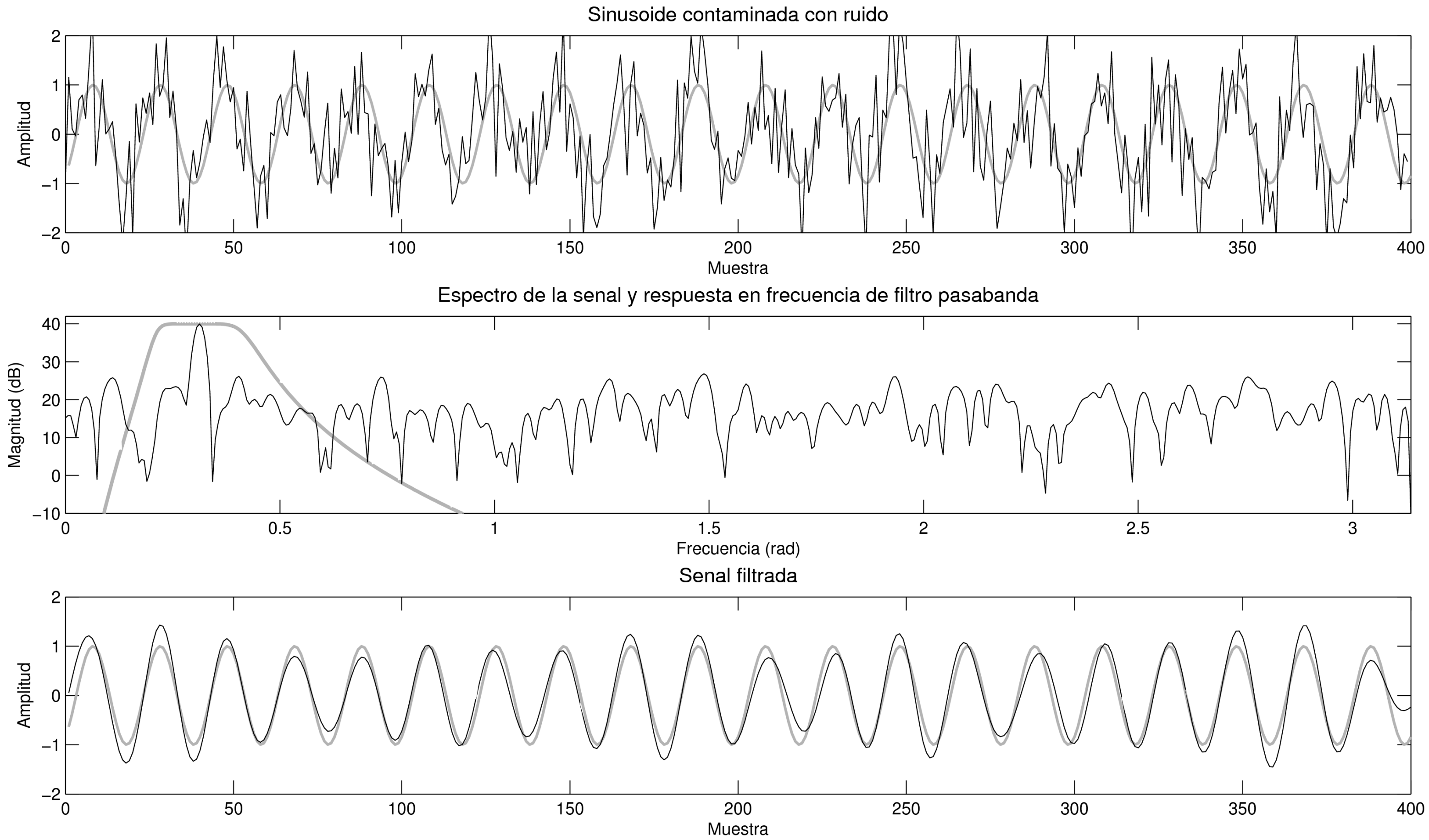
Aplicaciones

- Separación de señales que fueron combinadas desafortunadamente (ruido, interferencias provenientes de otros sistemas)
- Recuperación de señales distorsionadas de alguna forma (por ejemplo, al ser trasmitidas)
- *Síntesis de sonido*: creación o modificación de señales para moldear espectros o formas de onda y lograr el efecto auditivo buscado.
- *Efectos de audio:* chorus, flanger, phaser, reverb

Introducción

Aplicaciones

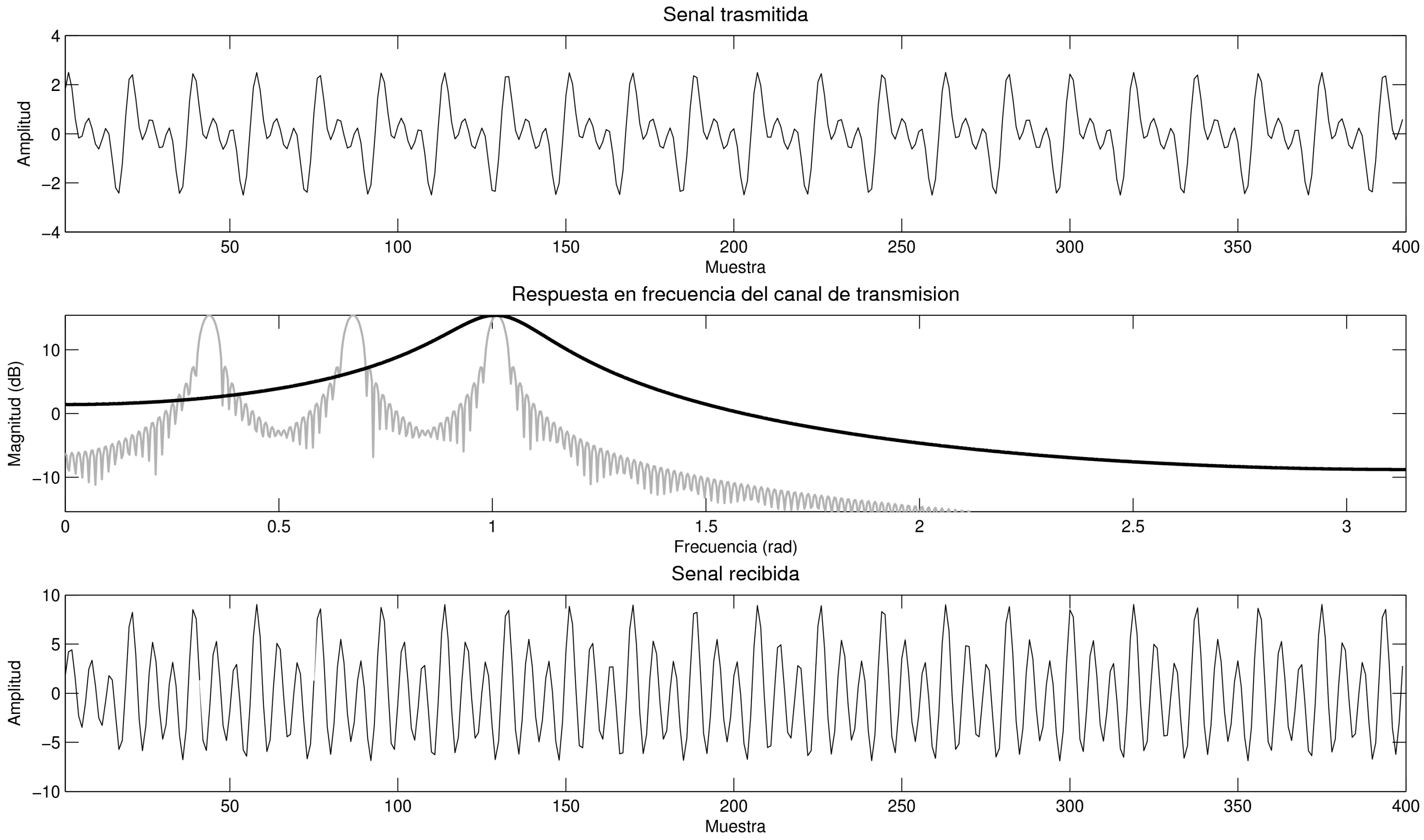
- *Separación de señales* que fueron combinadas desafortunadamente (ruido, interferencias provenientes de otros sistema)



Introducción

Aplicaciones

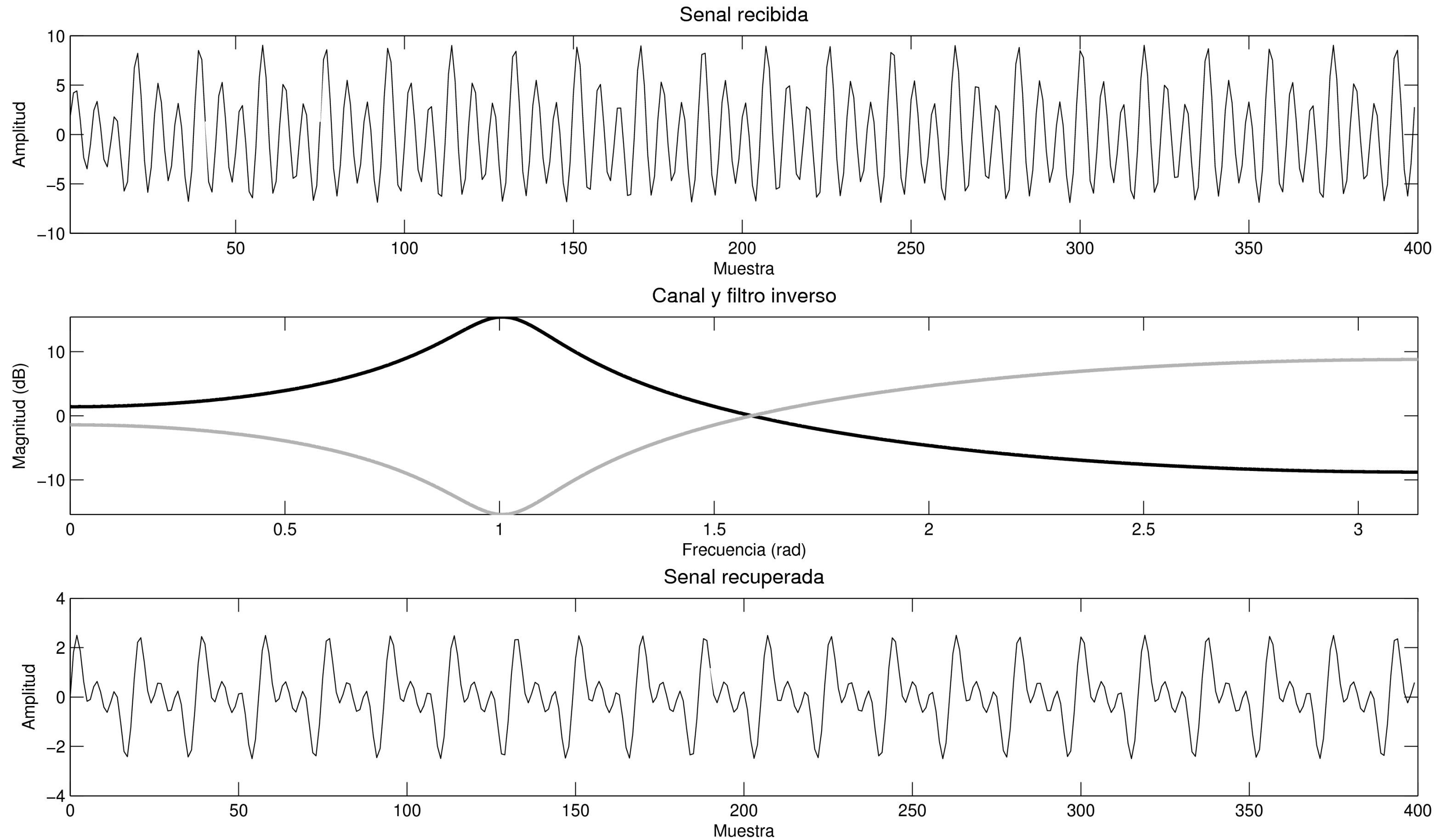
- *Recuperación de señales distorsionadas* de alguna forma (por ejemplo, al ser trasmitidas)



Introducción

Aplicaciones

- *Recuperación de señales distorsionadas* de alguna forma (por ejemplo, al ser trasmitidas)

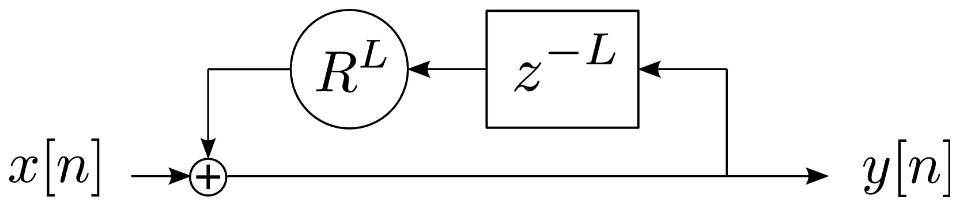


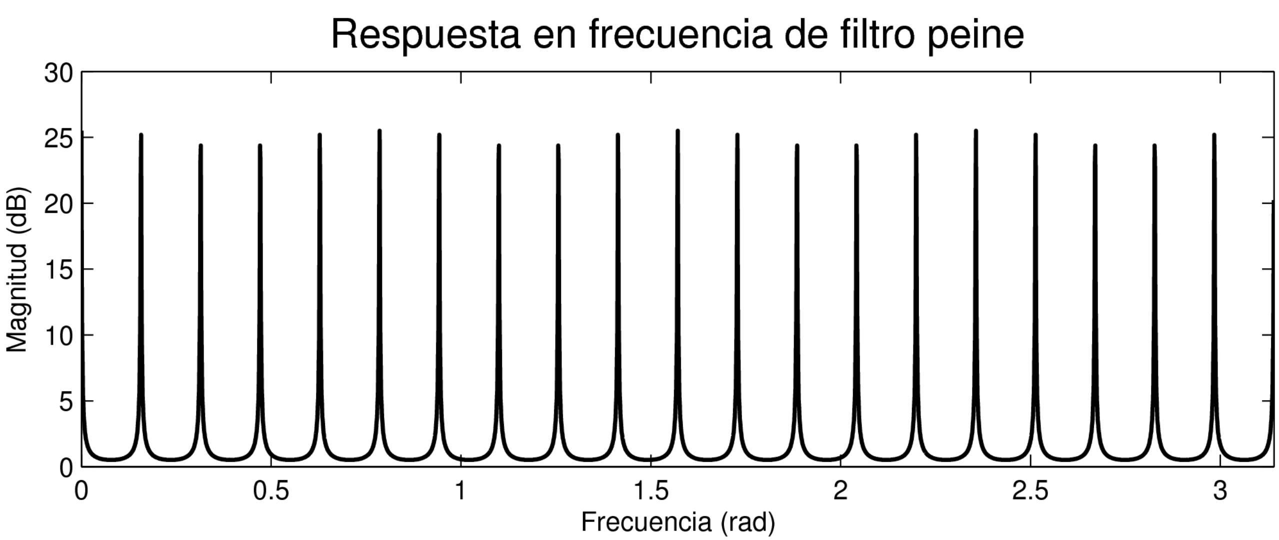
Introducción

Aplicaciones

- *Síntesis de sonido*: creación de señales con espectros complejos a partir del fitrado de señales simples con filtros simples.

Ejemplo: Filtro peine

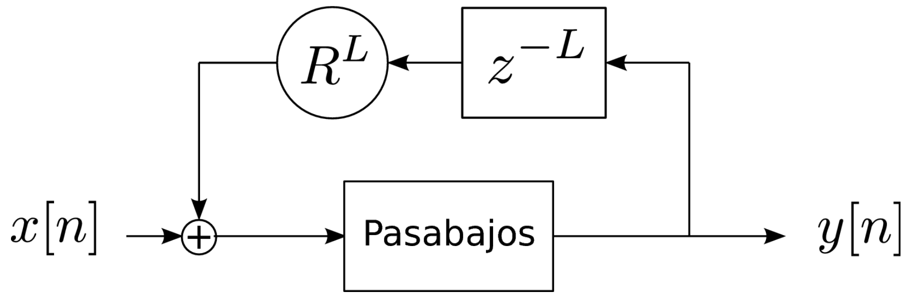


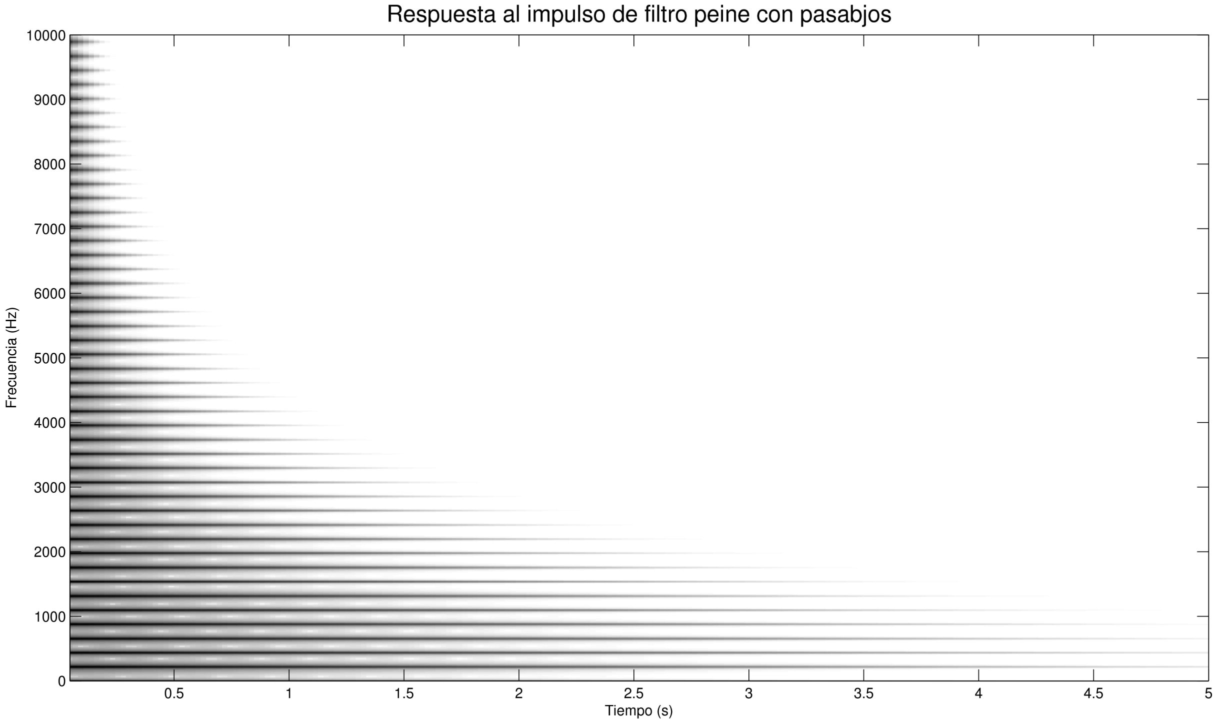


Introducción

Aplicaciones

- *Síntesis de sonido*: síntesis de cuerda pulsada a partir de un filtro peine.



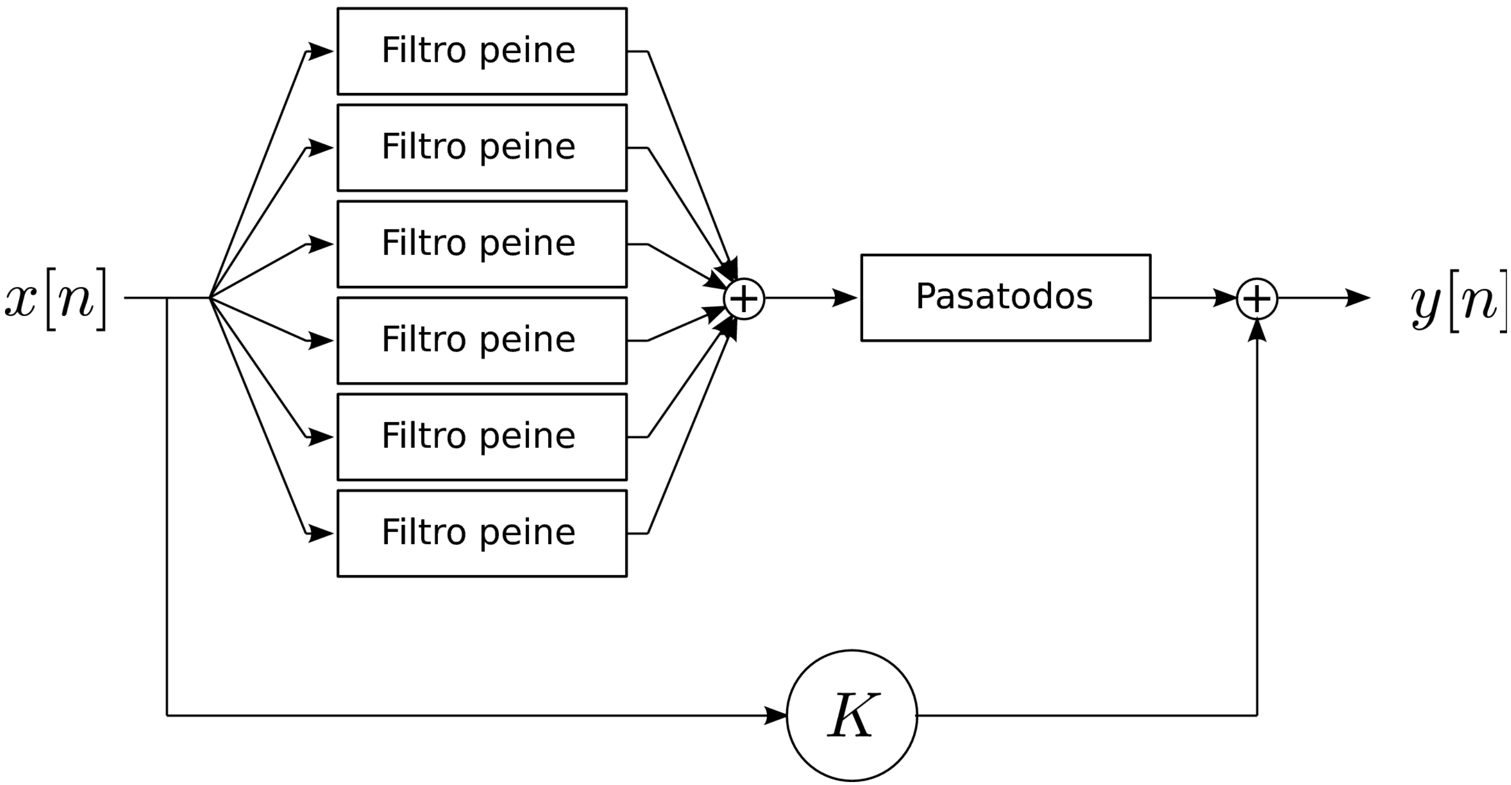


Introducción

Aplicaciones

- *Efectos de audio:* chorus, flanger, phaser, reverb

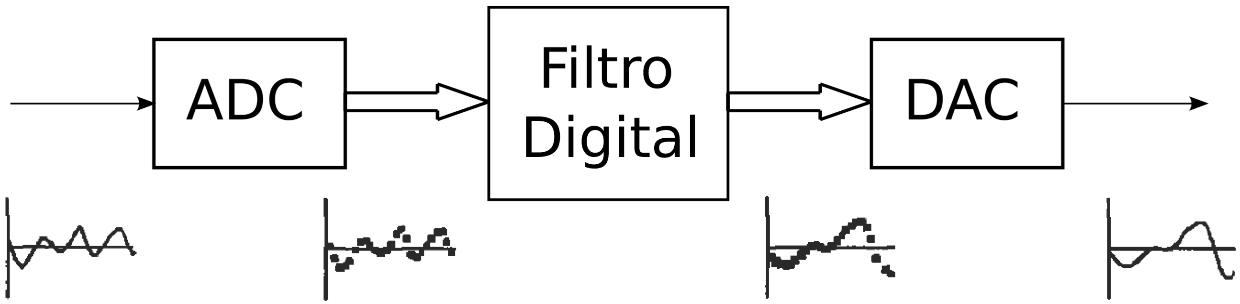
Ejemplo: Reverberador de Moorer

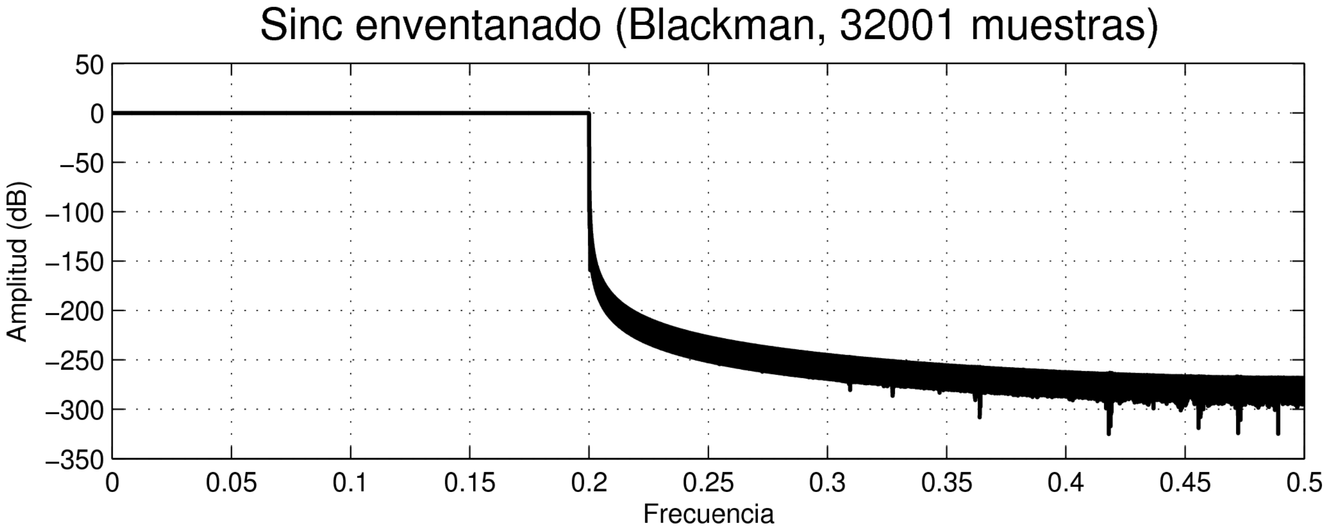


Alto desempeño de filtros digitales

Filtros digitales vs. Filtros analógicos

El desempeño de los filtros digitales es ampliamente superior a los filtros analógicos. En muchas ocasiones, la motivación para muestrear una señal es emplear un filtro digital.

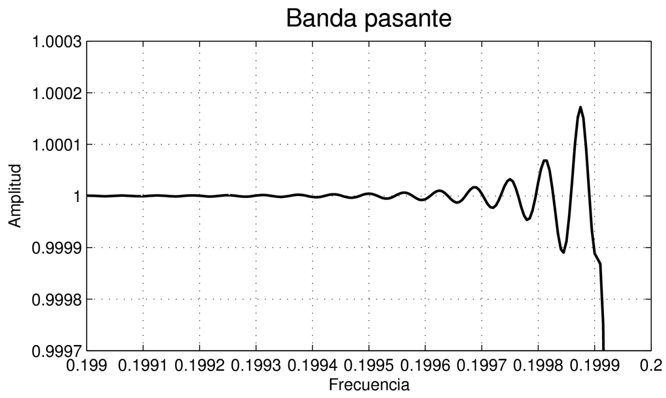


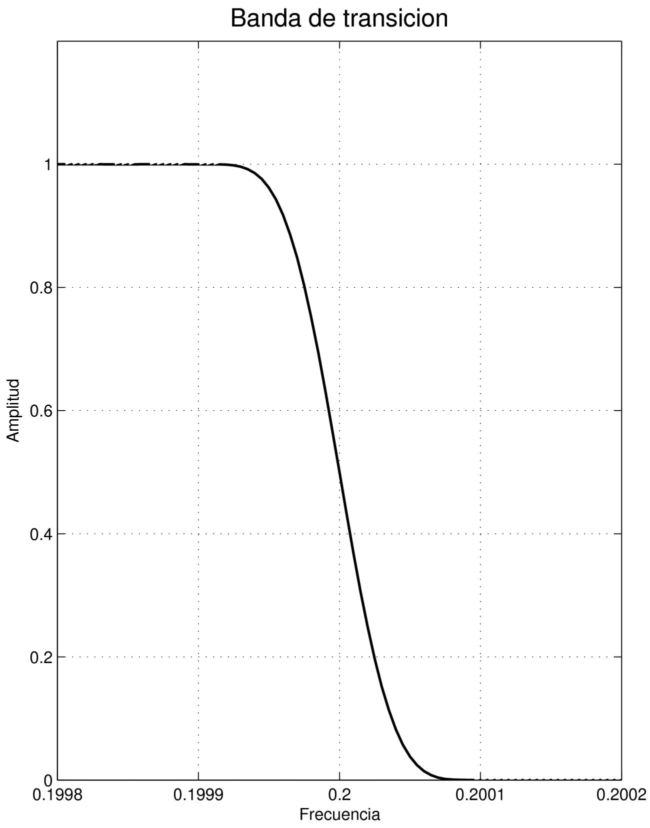


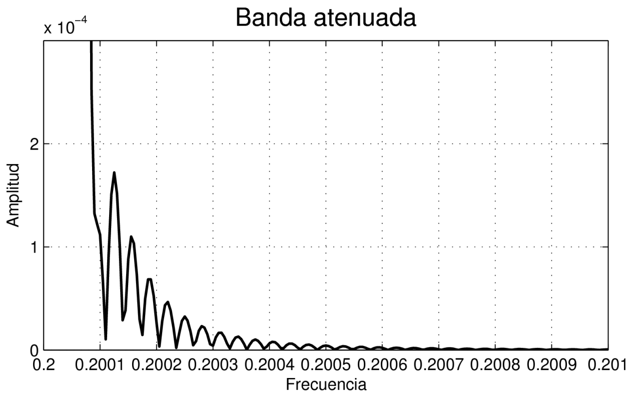
Alto desempeño de filtros digitales

Ejemplo: sinc enventanado de 32001 muestras

- Ganancia en banda pasante: 1 +/- 0.0002 (Variación del 0.02 %)
- Banda de transición: 0.1999 a 0.2001 (Ancho de 0.0002, 4 Hz a fs=44100)
- Atenuación en banda atenuada: 0.0002 (Residuo del 0.02 %)



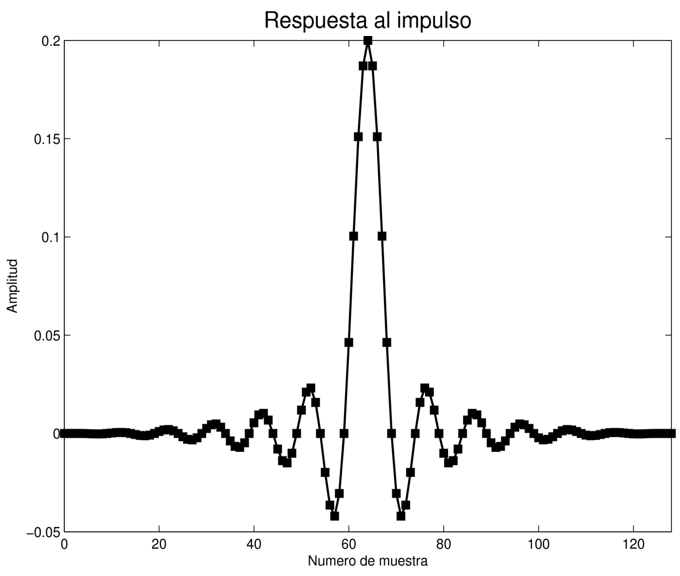


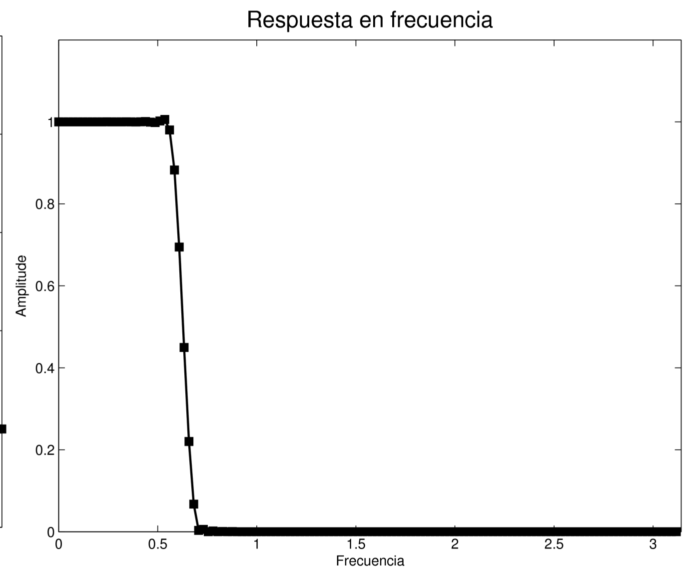


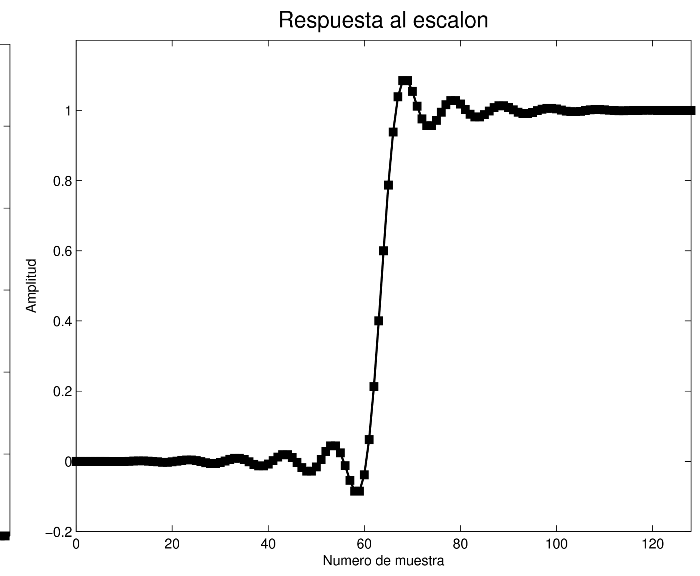
Caracterización de un filtro

Hay tres formas equivalentes de caracterizar un filtro:

- Respuesta al impulso
- Respuesta en frecuencia
- Respuesta al escalón



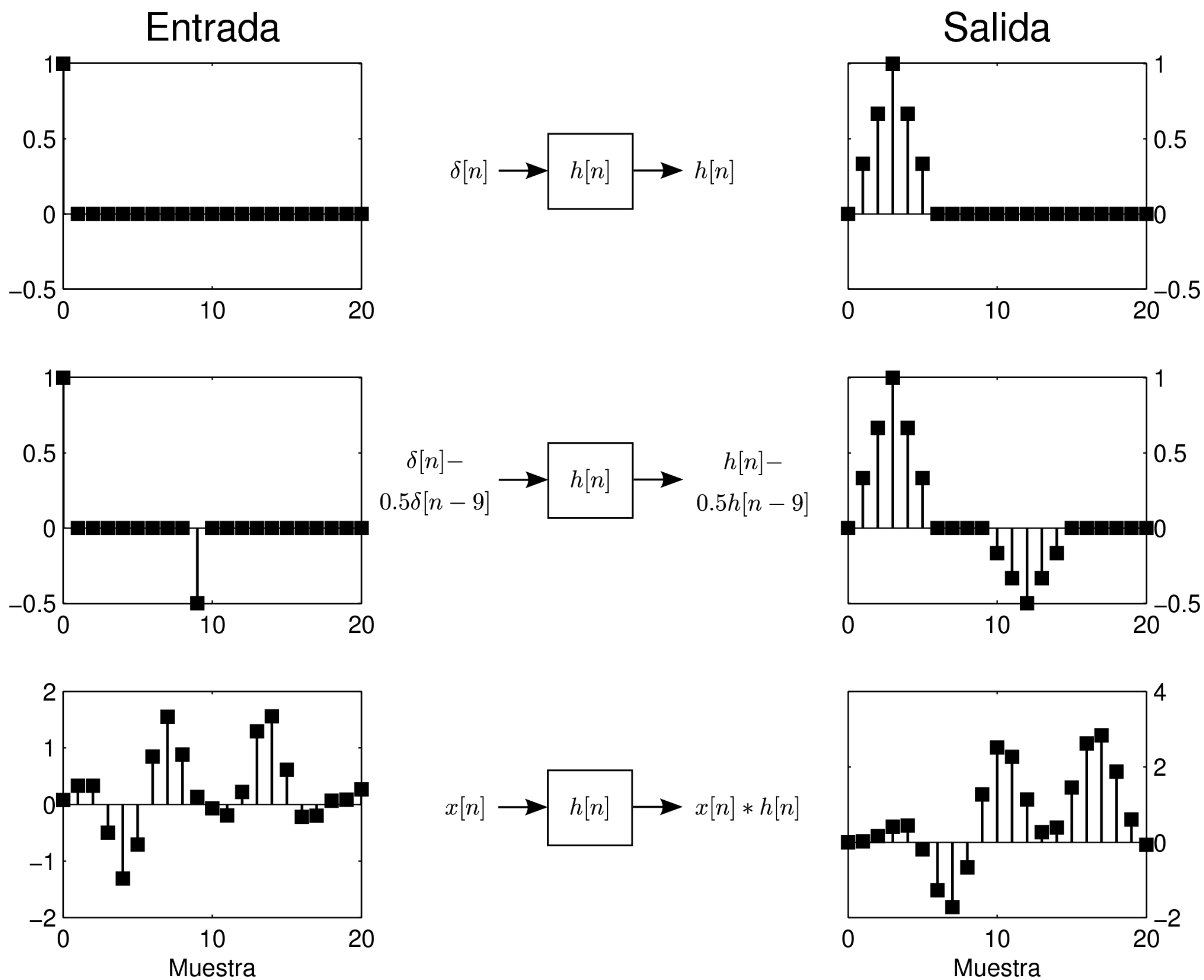




Caracterización de un filtro

Respuesta al impulso

Conociendo la respuesta al impulso, se puede calcular la respuesta del filtro a cualquier entrada (*principio de superposición*)



Caracterización de un filtro

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia es la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto de la respuesta al impulso.

$$h[n] \overset{\mathrm{DTFT}}{\longleftrightarrow} H(e^{j\theta})$$

Las transformadas de Fourier de la entrada y la salida del sistema se relacionan por

$$Y(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta})X(e^{j\theta})$$

Observaciones

- En el caso general, es una función que toma valores complejos.
- Es periódica de período 2pi.
- Al ser una función compleja, se puede representar en *notación cartesiana* como la parte real y la parte imaginaria o en *notación polar* como la magnitud y la fase.
- La representación en notación polar es mas útil porque muestra directamente las propiedades del sistema.

Caracterización de un filtro

Respuesta en frecuencia

Escalas de frecuencia

Nombre	**Símbolo**	**Unidad**	**Valor**	**Dominio**
Frecuencia	f	Hertz (1/s)	f	$[-f_s/2, f_s/2]$
Frecuencia angular	ω	rad/s	$2\pi f$	$[-\pi f_s, \pi f_s]$
Frecuencia normalizada		adim.	f/f_s	$[-0{,}5, 0{,}5]$
Frecuencia angular normalizada	θ	rad	$2\pi f/f_s$	$[-\pi, \pi]$
Muestras de la DFT	k	adim.	Nf/f_s	$[0, N-1]$

Espectro calculado con la DTFT: $H(e^{j\theta})$

Espectro calculado con la DFT: $H[k]$

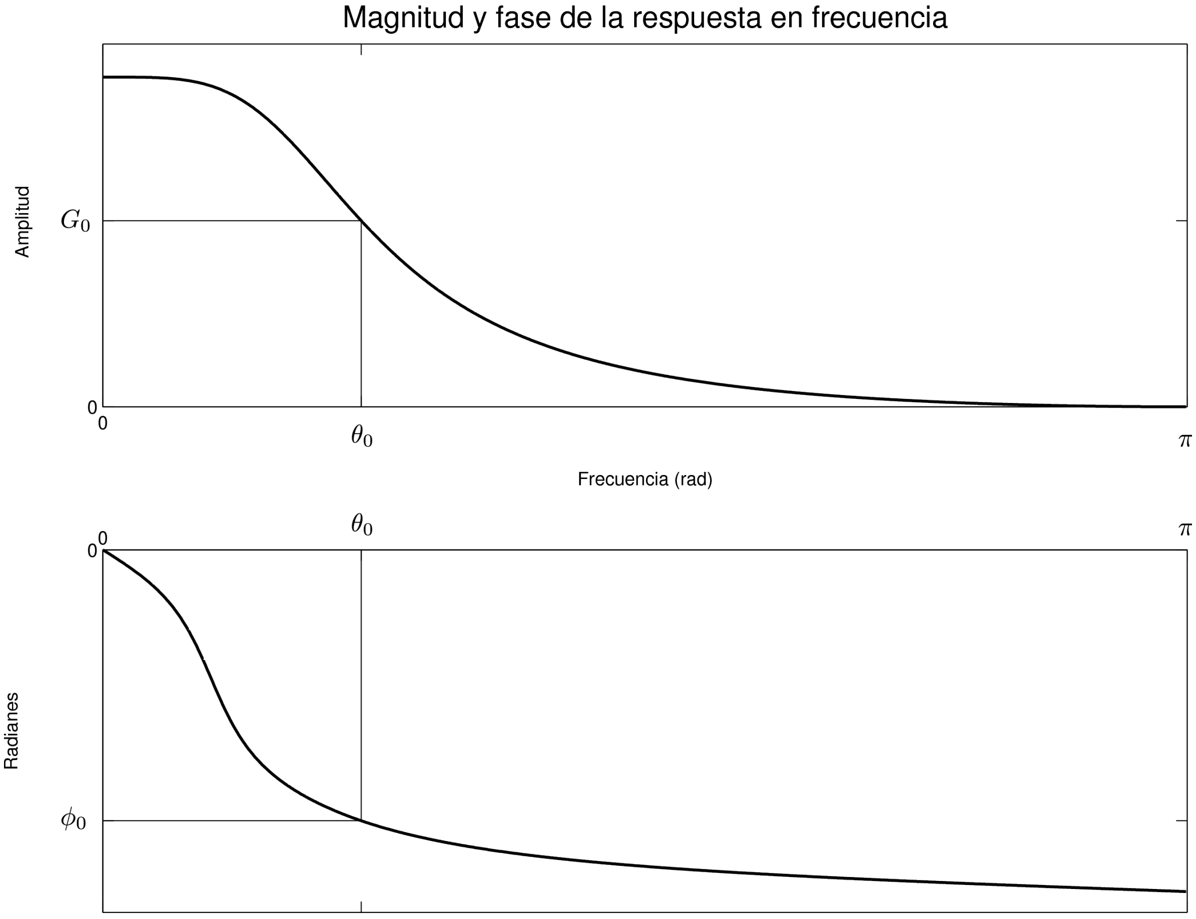
Caracterización de un filtro

Respuesta en frecuencia

Si la magnitud y fase del filtro para cierta frecuencia es

$$|H(e^{j\theta_0})| = G_0$$

$$\angle H(e^{j\theta_0}) = \phi_0$$



Entrada

$$x[n] = \mathrm{sen}(\theta_0 n)$$

Salida

$$y[n] = G_0 \mathrm{sen}(\theta_0 n + \phi_0)$$

Caracterización de un filtro

Respuesta al escalón

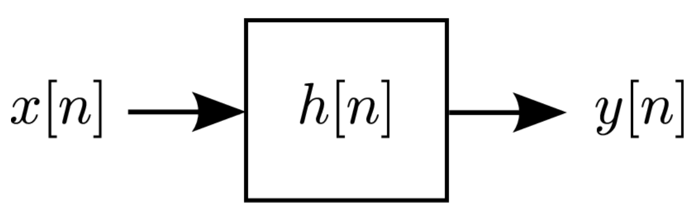
Equivalencia entre respuesta al impulso y respuesta al escalón.

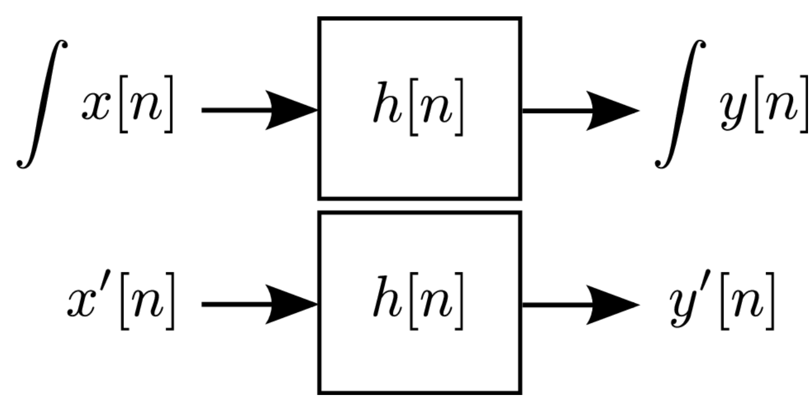
El escalón se obtiene mediante la **integración discreta** del impulso

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$$

El impulso se obtiene mediante la **derivación discreta** del escalón

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

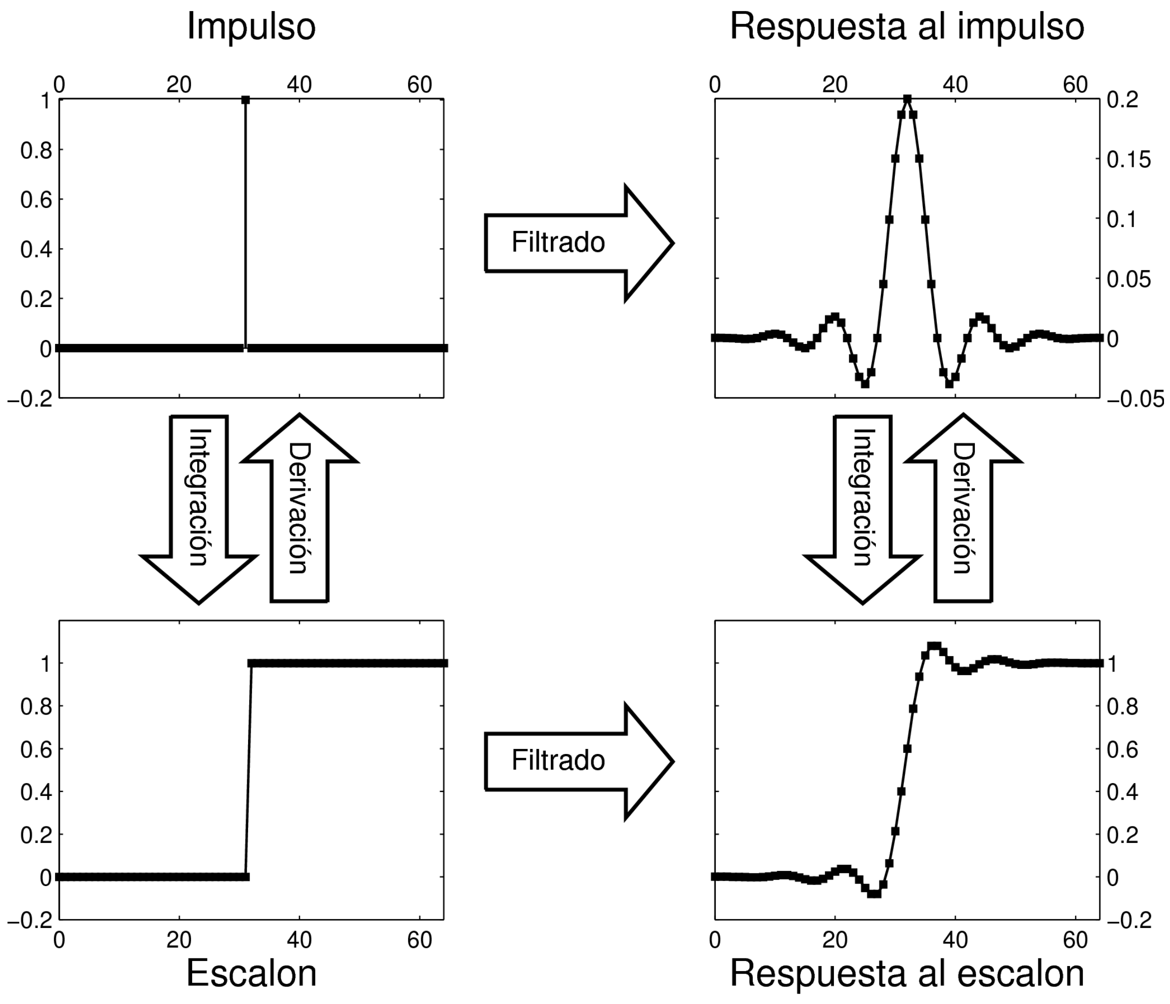




Caracterización de un filtro

Respuesta al escalón

Equivalencia entre respuesta al impulso y respuesta al escalón: el escalón se obtiene mediante la integración discreta del impulso



Implementación de un filtro

Convolución

Convolución de la señal de entrada con la **respuesta al impulso** del filtro. En este caso, la salida del filtro en cada instante es un promedio ponderado de la muestra actual y muestras pasadas de la entrada.

Respuesta al impulso finita (FIR)

$$\begin{aligned} y[n] &= (x * h)[n] \\ &= \sum_k x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

Ecuación en recurrencia

Mediante la **ecuación en recurrencia**. En este caso, el filtro se define por los **coeficientes de recursión**. La salida en cada instante involucra además de muestras de la entrada, muestras previas de la salida.

Respuesta al impulso infinita (IIR)

$$\begin{aligned} y[n] = &\, a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] \\ &+ b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \end{aligned}$$

Implementación de un filtro

Filtros IIR

Ecuación en recursión

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M]$$
$$- a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \cdots - a_N y[n-N]$$

- Las constantes b_i , *i=1,...,M* y a_j, *j = 1,...,N* se llaman *coeficientes del filtro*. El filtro queda completamente especificado con los valores de todos los coeficientes.
- Los valores b_i se llaman *coeficentes de prealimentación* (*feedforward*) y los valores a_j se llaman *coeficentes de realimentación* (*backward*).
- El filtro es recursivo si tiene algún coeficiente de realimentación no nulo. En ese caso, es un filtro IIR. En caso contrario, no hay realimentación y el filtro es FIR, o equivalentemente, no recursivo.
- El retardo máximo usado por la ecuación en recurencia se llama *orden* del filtro. El orden es el máximo entre *N* y *M*.

Implementación de un filtro

Filtros IIR

Ejemplo: Cálculo de la respuesta al impulso de filtro IIR de primer orden

Se quiere calcular la respuesta al impulso del filtro dado por la siguiente ecuación en recursión:

$$y[n] = 0{,}7y[n-1] + x[n]$$

La entrada al filtro es entonces,

$$x[n] = \delta[n].$$

Imponemos la siguiente condición inicial,

$$y[-1] = 0.$$

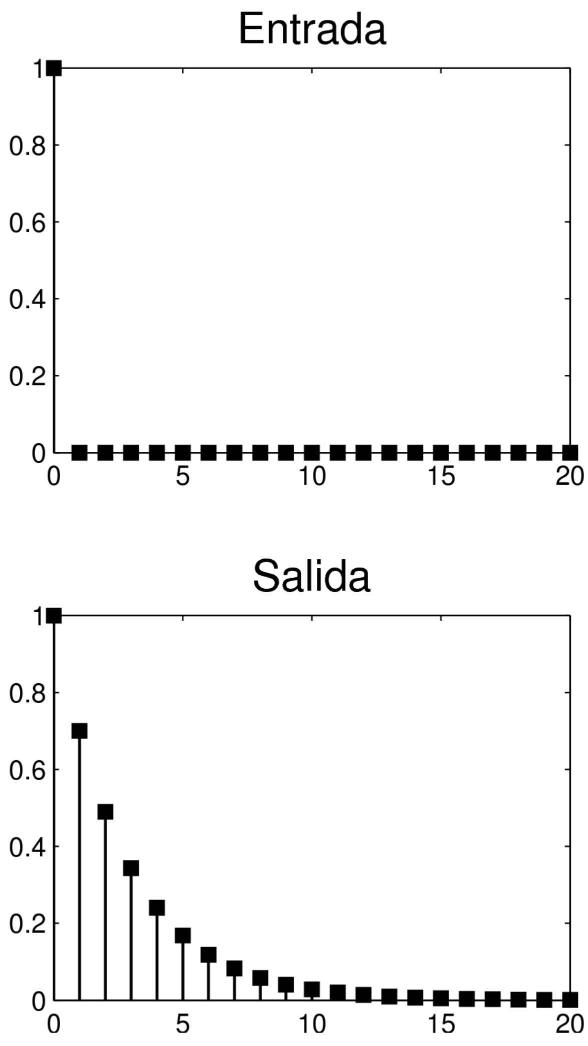
Resolviendo a mano la ecuación en recursión,

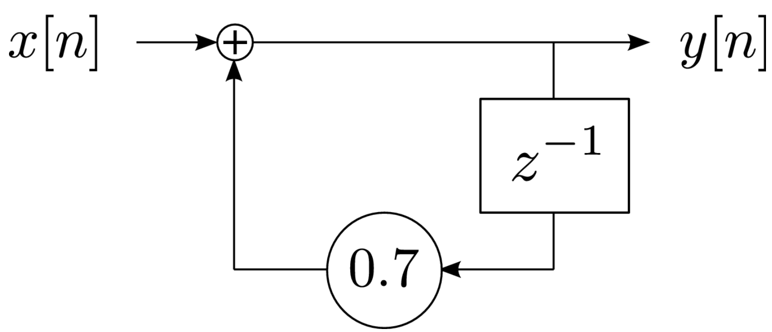
$$\begin{aligned} y[0] &= 0{,}7y[-1] + x[0] = 1 \\ y[1] &= 0{,}7y[0] + x[1] = 0{,}7 \\ y[2] &= 0{,}7y[1] + x[2] = 0{,}7^2 \\ y[3] &= 0{,}7y[2] + x[3] = 0{,}7^3 \\ &\vdots \\ y[n] &= 0{,}7^n \end{aligned}$$

Implementación de un filtro

Filtros IIR

Ejemplo: Cálculo de la respuesta al impulso de filtro IIR de primer orden





- El filtro tiene realimentación entre la entrada y la salida.
- En general, la respuesta al impulso de un filtro recursivo es una combinación de exponenciales y sinusoides decrecientes.

Implementación de un filtro

Filtros FIR

Coeficientes de filtro FIR

$$
\begin{aligned}
y[n] &= (x * h)[n] \\
&= \sum_{i=0}^{M} h[k]x[n-k] \\
&= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots + h[M]x[n-M] \\
&= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M]
\end{aligned}
$$

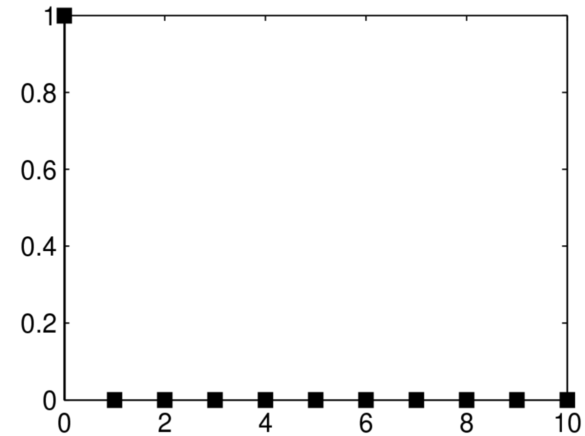
En un filtro FIR, los coeficientes de prealimentación de la ecuación de recurrencia son los coeficientes de la respuesta al impulso y los coeficientes de realimentación son nulos.

Implementación de un filtro

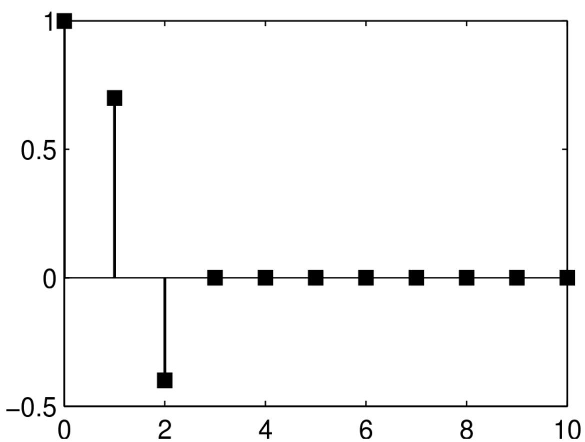
Filtros FIR

Ejemplo: Filtro FIR de segundo orden

Entrada



Salida

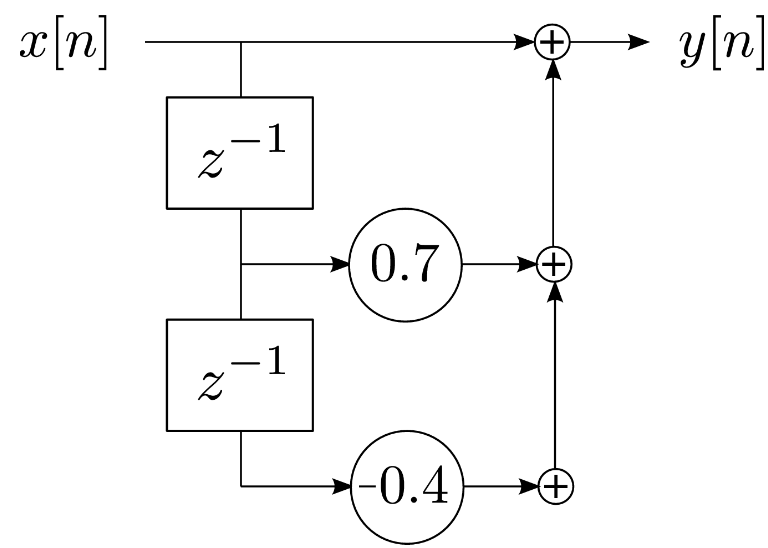


Ecuación de recursión

$$y[n] = x[n] + 0{,}7x[n-1] - 0{,}4x[n-2]$$

Respuesta al impulso

$$h[n] = \delta[n] + 0{,}7\delta[n-1] - 0{,}4\delta[n-2]$$



Implementación de un filtro

Observaciones

- Todo filtro, sea FIR o IIR, tiene una respuesta al impulso. En el caso en que el filtro está dado por la ecuación en recurrencia, la expresión analítica de respuesta al impulso puede ser difícil de calcular.
- Si un filtro está definido por la ecuación en recurrencia (y tiene coeficientes de realimentación no nulos), la respuesta al impulso es IIR.
- Si el filtro está definido por la respuesta al impulso, se implementa mediante el producto convolución.

Causalidad

Un filtro es causal si cada efecto en la salida ocurre luego de la causa correspondiente en la entrada.

Condición para causalidad: $h[n] = 0 \quad \text{si} \quad n < 0$

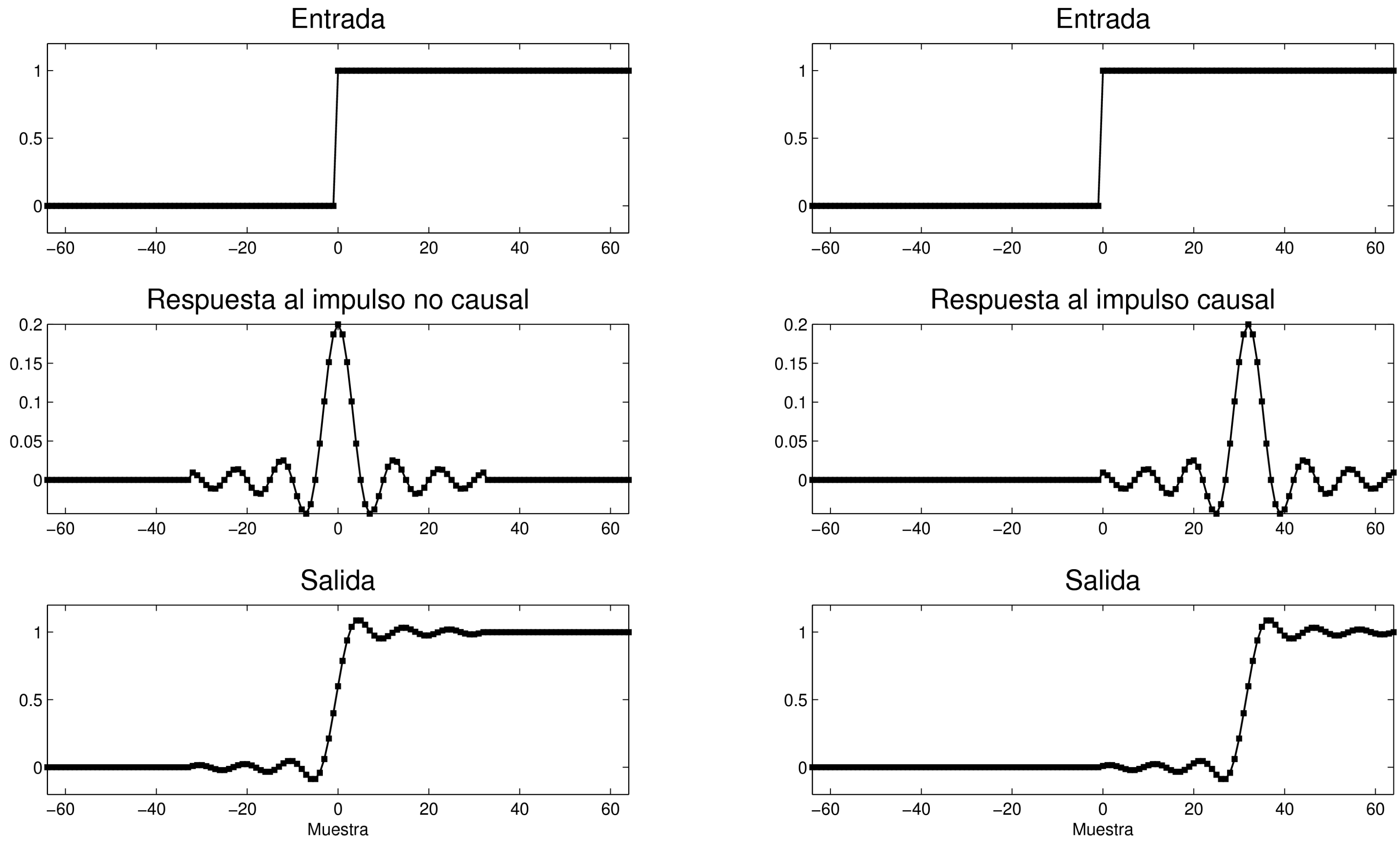
Si esta condición no se cumple, la salida depende de muestras futuras de la entrada:

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$
$$= \cdots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \ldots$$

Por ejemplo, la décima muestra de la salida se calcula como:

$$y[10] = \cdots + h[-2]x[12] + h[-1]x[11] + h[0]x[10] + h[1]x[9] + \ldots$$

Causalidad


Entrada
Entrada
Respuesta al impulso no causal
Respuesta al impulso causal
Salida
Salida
Muestra
Muestra

Causalidad

Observaciones

- Los filtros no causales son *irrealizables* en la práctica. No es posible construir un filtro no causal que opere en tiempo real.
- Cuando se trabaja en una computadora, la señal de entrada y de salida del filtro son secuencias de números almacenadas en memoria. En este caso, la salida puede depender de cualquier muestra de la entrada.
- **Retardo de los filtros causales**. Los filtros causales producen un retardo de la salida respecto a la entrada. Si la respuesta al impulso del filtro es simétrica, el retardo es la muestra del centro de simetría.

Estabilidad

Un filtro es estable (BIBO estable), si para toda entrada acotada la salida es acotada.

Condición para estabilidad BIBO: $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Para que la sumatoria converga, tiene que ocurrir que:

$$|h[n]| \text{ caiga mas rápido que } Ae^{-\alpha n}, \text{ con } \alpha, A > 0$$

Los filtros FIR son estables porque la sumatoria contiene una cantidad finita de sumandos finitos. Los filtros IIR pueden ser estables o inestables.

Información contenida en las señales

Información en el dominio del tiempo

La descripción del momento de ocurrencia de eventos y la magnitud del evento está codificada en el dominio del tiempo, es decir, en la forma de onda.

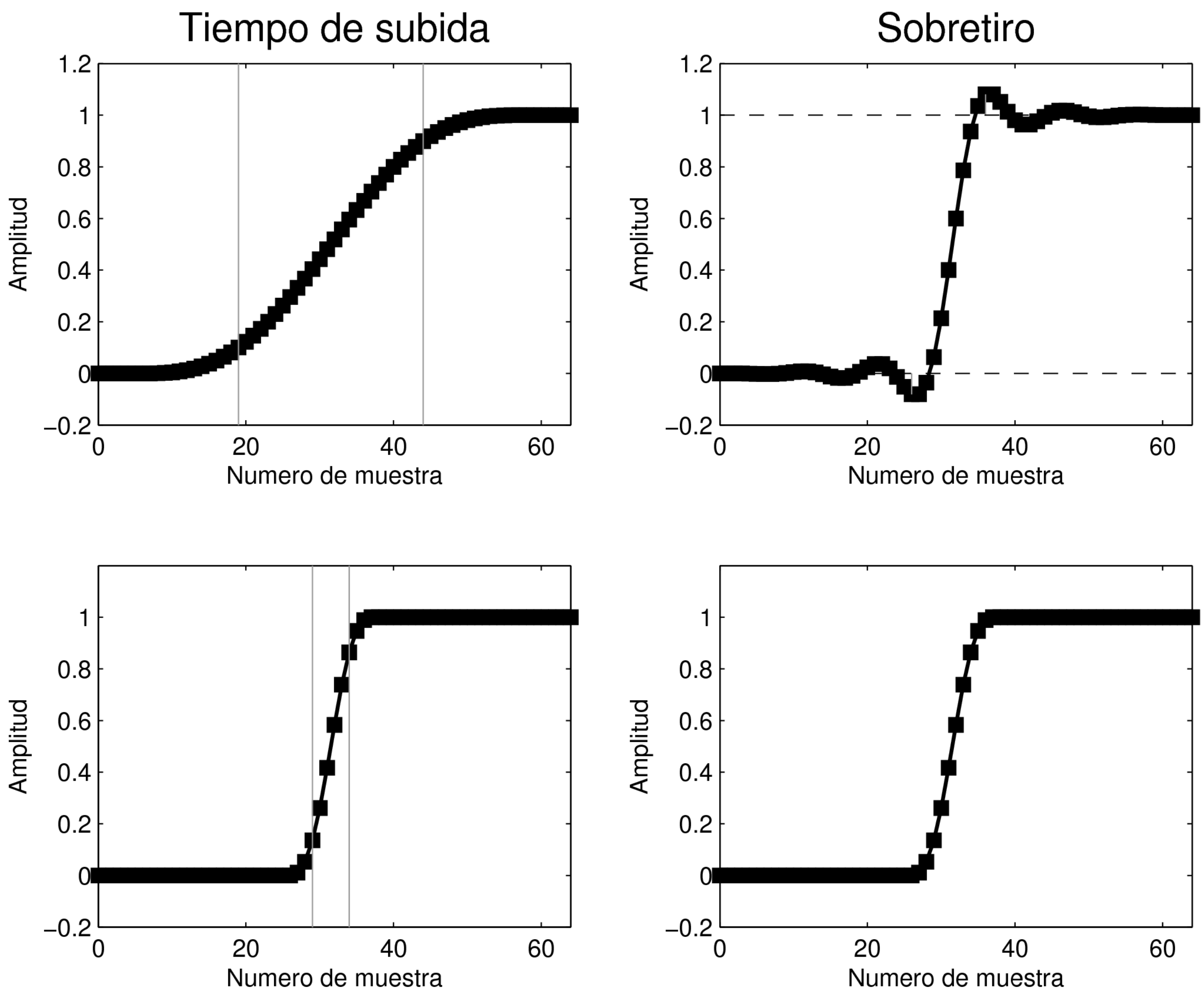
Las modificaciones en la información en el dominio del tiempo están mejor especificadas en la respuesta al escalón del filtro.

Información en el dominio de la frecuencia

La descripción de las características de eventos de naturaleza oscilatoria está representada en el dominio de la frecuencia. La información en este caso, no está contenida en las muestras individuales, está contenida en la relación entre muestras.

Las modificaciones en la información en el dominio de la frecuencia están mejor especificadas en la respuesta en frecuencia del filtro.

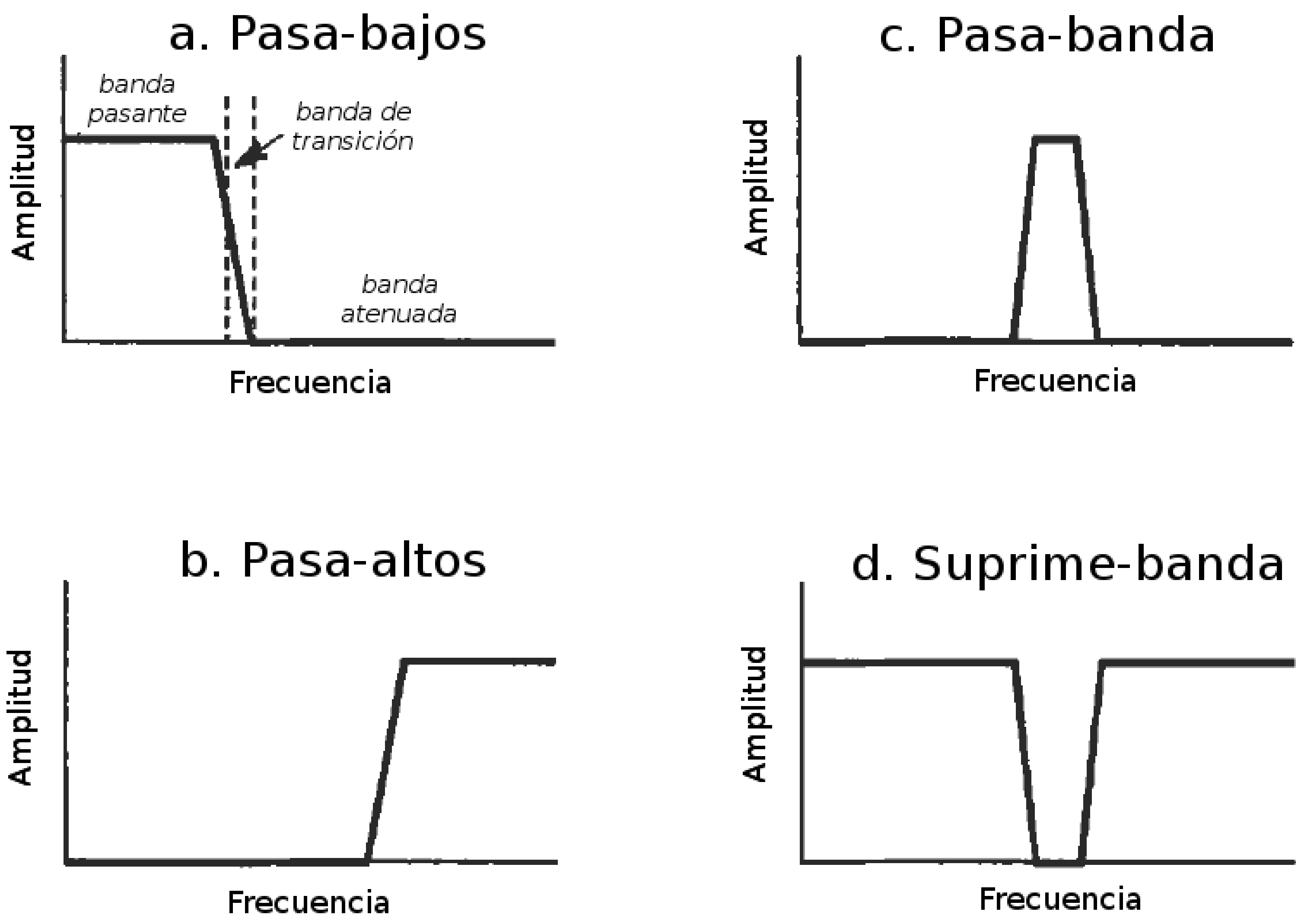
Parámetros en el dominio del tiempo



Parámetros en el dominio del tiempo

- **Tiempo de subida**: Es la cantidad de muestras en pasar del 10 % al 90% de amplitud de la respuesta al escalón. El tiempo de subida debe ser rádido para identificar eventos cercanos en el tiempo.
- **Sobretiro**: Amplitud del pico que sobrepasa la amplitud del escalón. Sobretiros grandes producen distorsión en la forma de onda.

Respuesta en frecuencia



Respuesta en frecuencia

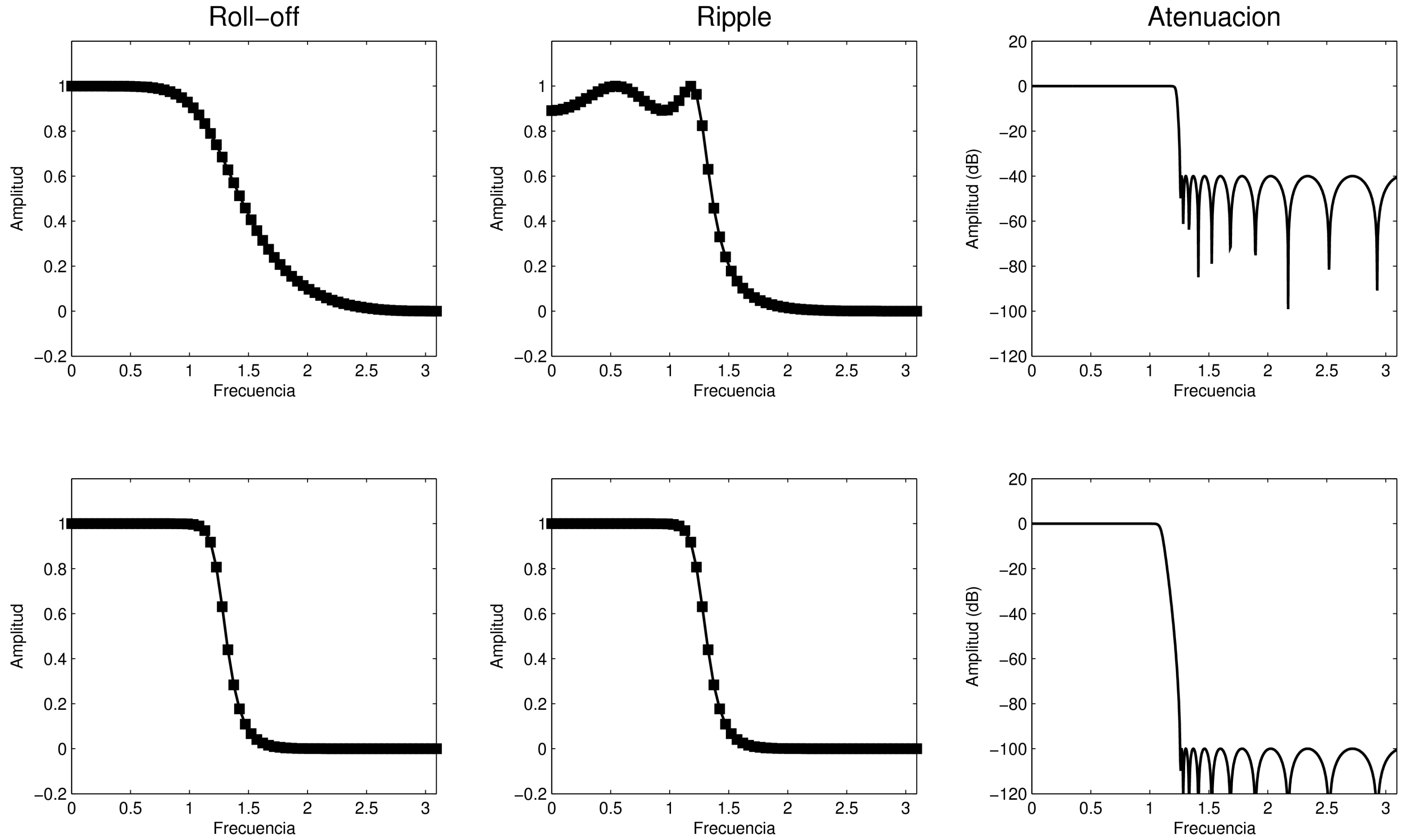
Filtros selectores de frecuencias

El objetivo es permitir pasar inalterada cierta banda de frecuencias y bloquear completamente el resto. Hay cuatro tipos básicos: pasabjos, pasaltos, pasabanda y suprimebanda.

Clasificación de las regiones de filtros selectores

- **Banda pasante**: Rango de frecuencias que el filtro permite pasar sin alterar.
- **Banda atenuada**: Rango de frecuencias que el filtro bloquea.
- **Banda de transición**: Región entre la banda pasante y la banda atenuada.
- **Frecuencia de corte**: Frecuencia entre la banda pasante y la banda de transición.

Parámetros en el dominio de la frecuencia



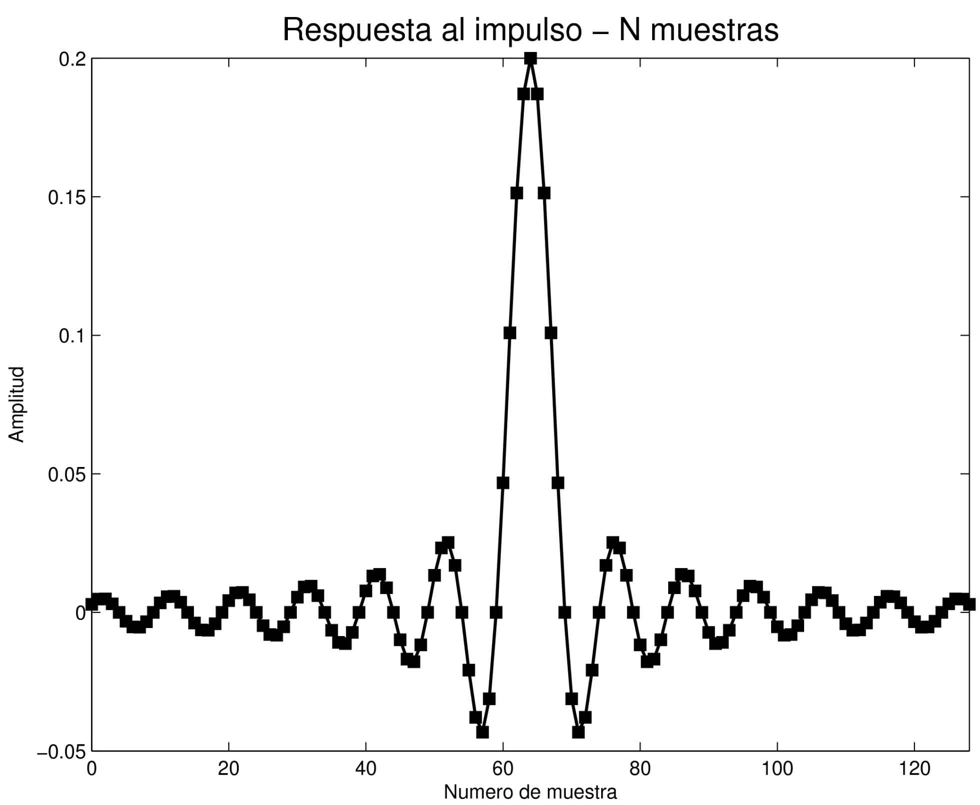
Parámetros en el dominio de la frecuencia

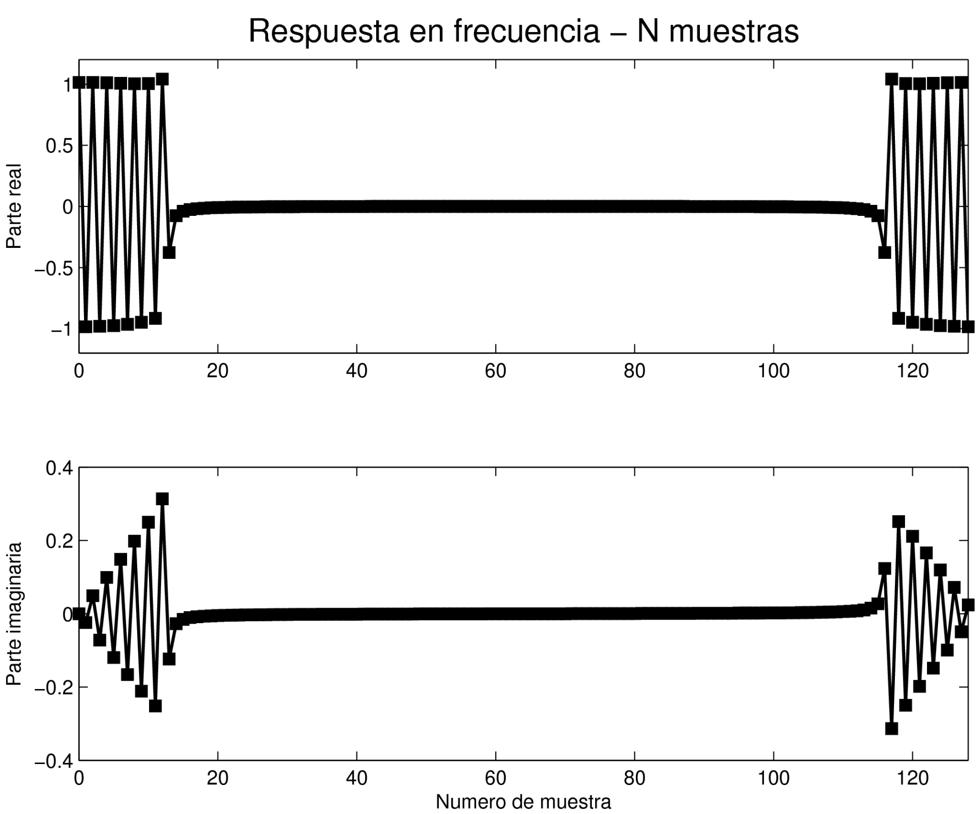
Parámetros que miden la calidad del filtro como selector de frecuencias

- **Roll-off**: es el ancho de la banda de transición. Un filtro de roll-off rápido significa que la banda de transición es angosta. Para separar componentes de frecuencia cercanos, el roll-off debe ser rápido.
- **Ripple en la banda pasante**: oscilaciones en la banda pasante de la respuesta en magnitud. Para no alterar la magnitud de los componentes espectrales de la banda pasante, el filtro no debe tener ripple.
- **Atenuación en la banda atenuada**: Es deseable buena atenuación en la banda atenuada para eliminar los componentes espectrales en esa región.

Cálculo de la Respuesta en Frecuencia

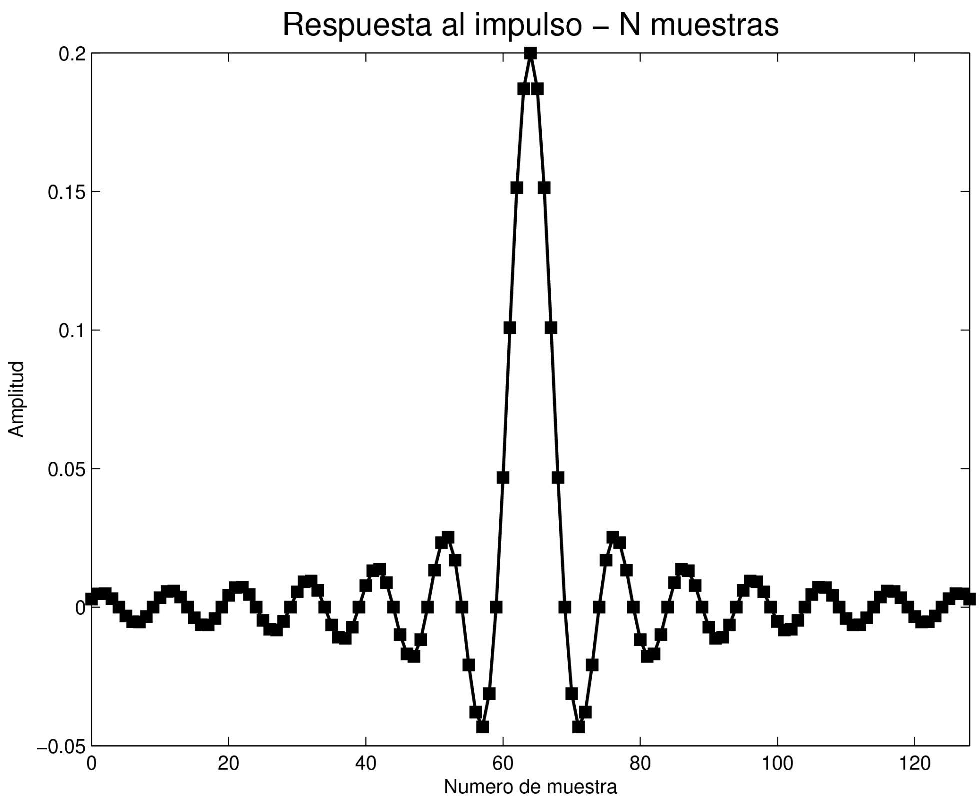
DFT de la respuesta al impulso

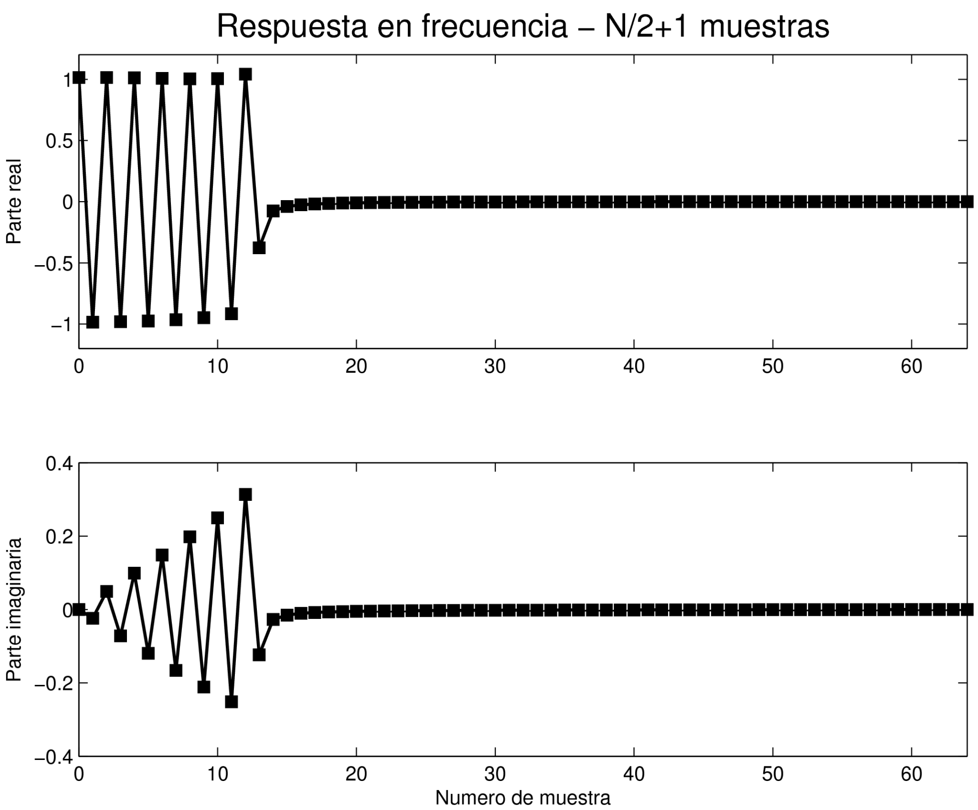




Cálculo de la Respuesta en Frecuencia

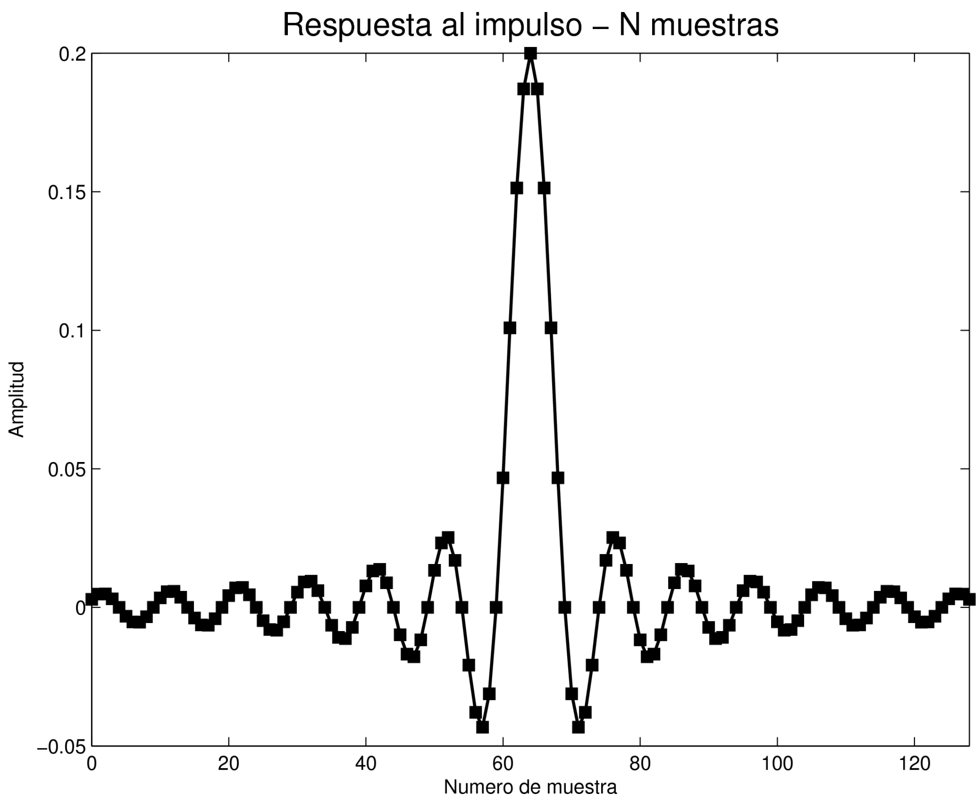
Se mantiene la región no redundante

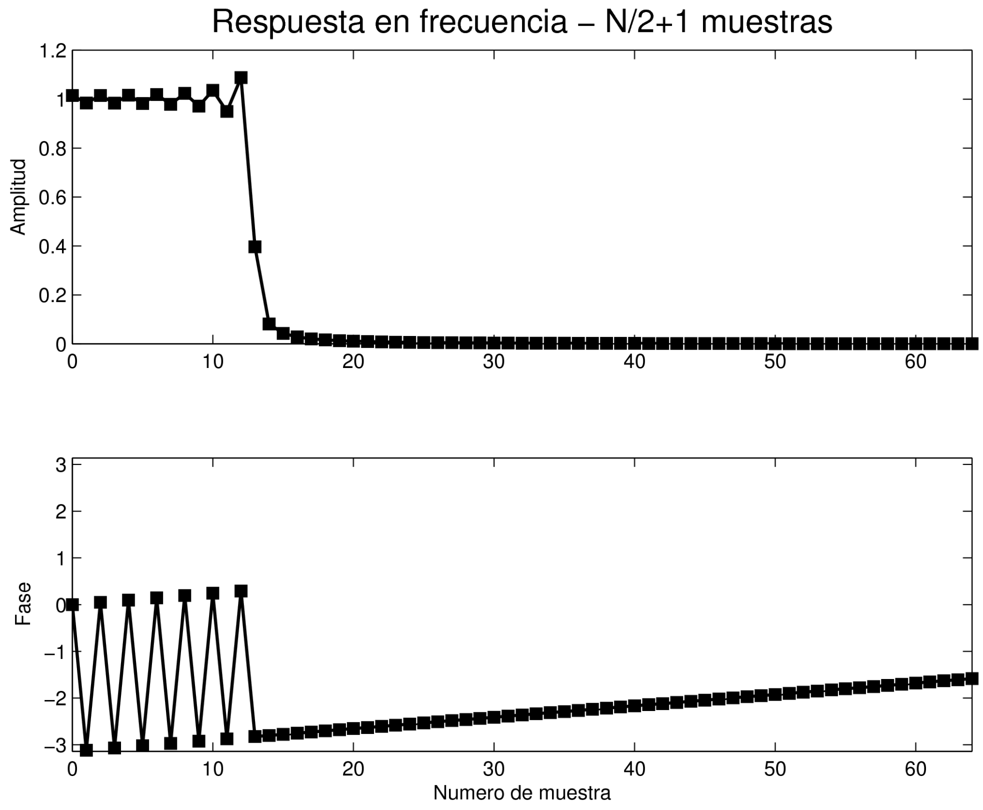




Cálculo de la Respuesta en Frecuencia

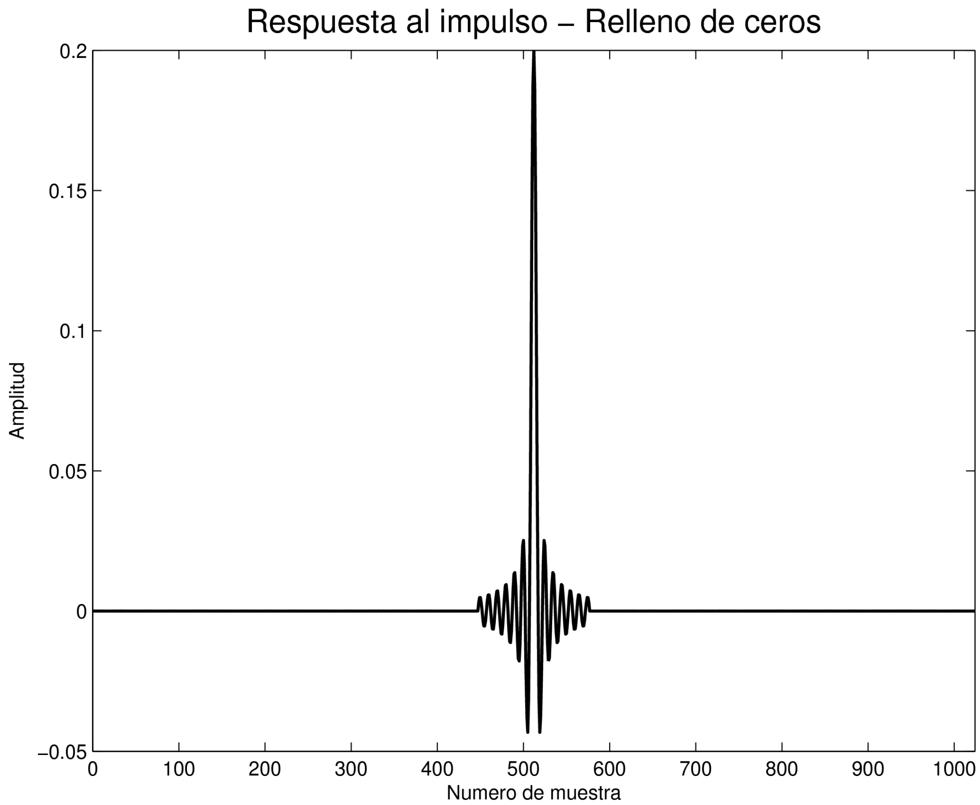
Representación en magnitud y fase

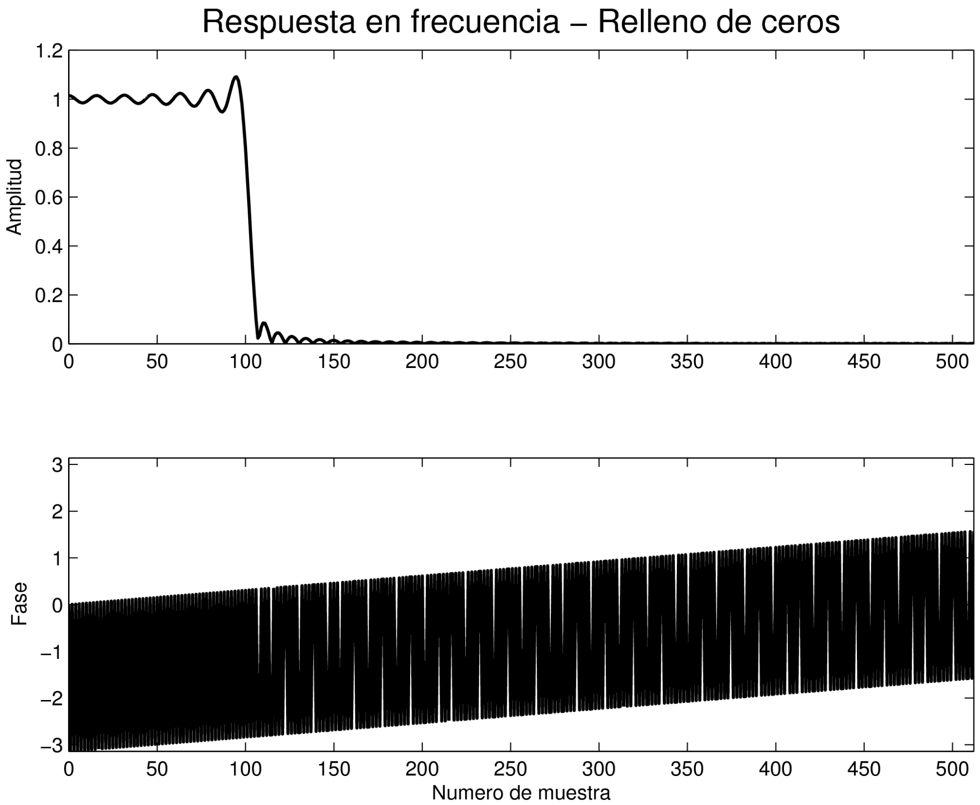




Cálculo de la Respuesta en Frecuencia

Relleno de ceros



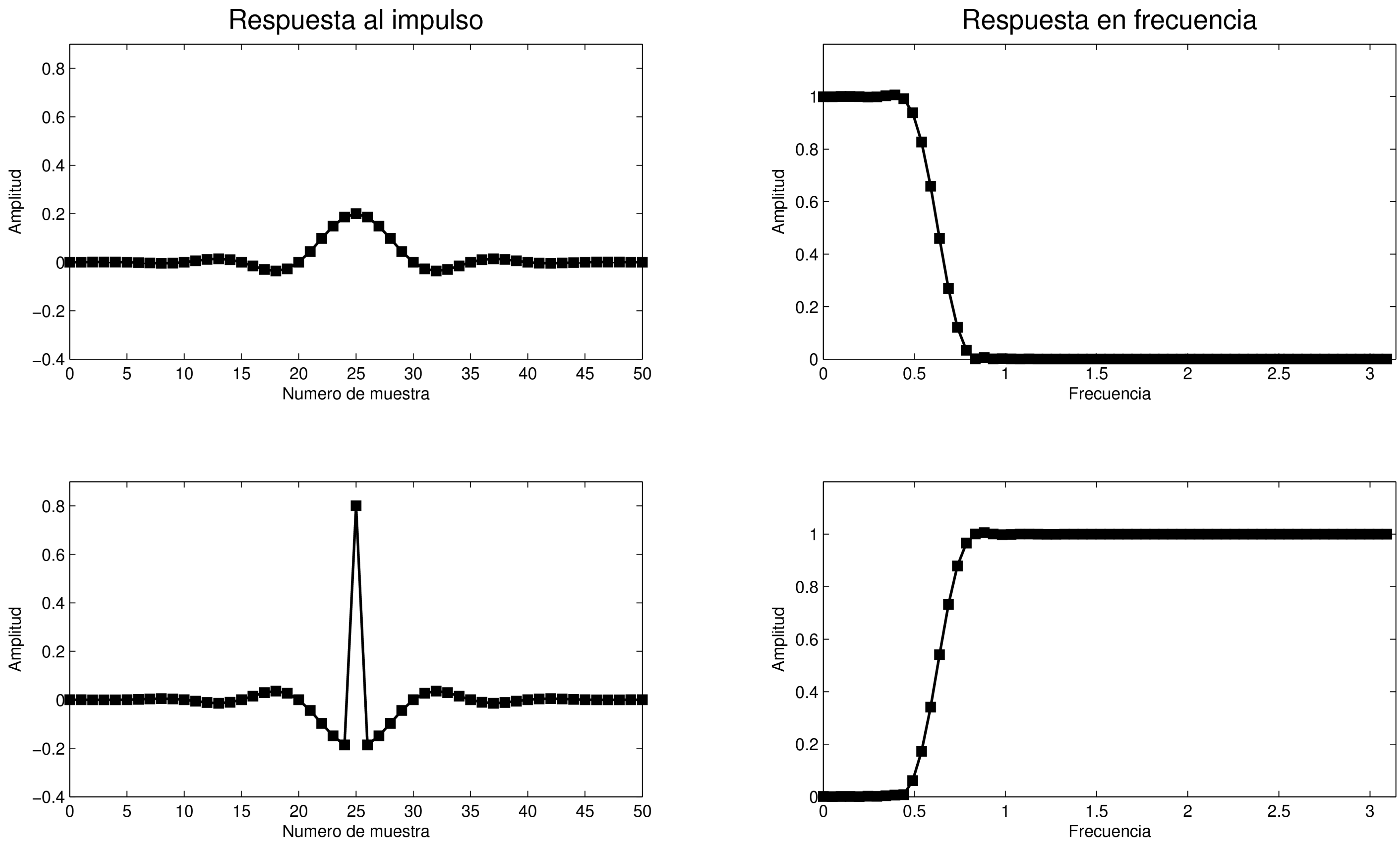


Diseño a partir de Pasa-bajos

- Todos los tipos de filtros de selección de frecuencias (pasalto, pasabanda y suprimebanda) pueden diseñarse a partir de filtros pasabajos.
- Hay que concentrarse solo en las técnicas de diseño de filtros pasabajos que cumplan los requerimientos exigidos por la aplicación (ripple, roll-off, retardo). Las otras variantes de filtros selectores de frecuencias diseñados a partir del pasabajos, tendrán las mismas características de calidad.

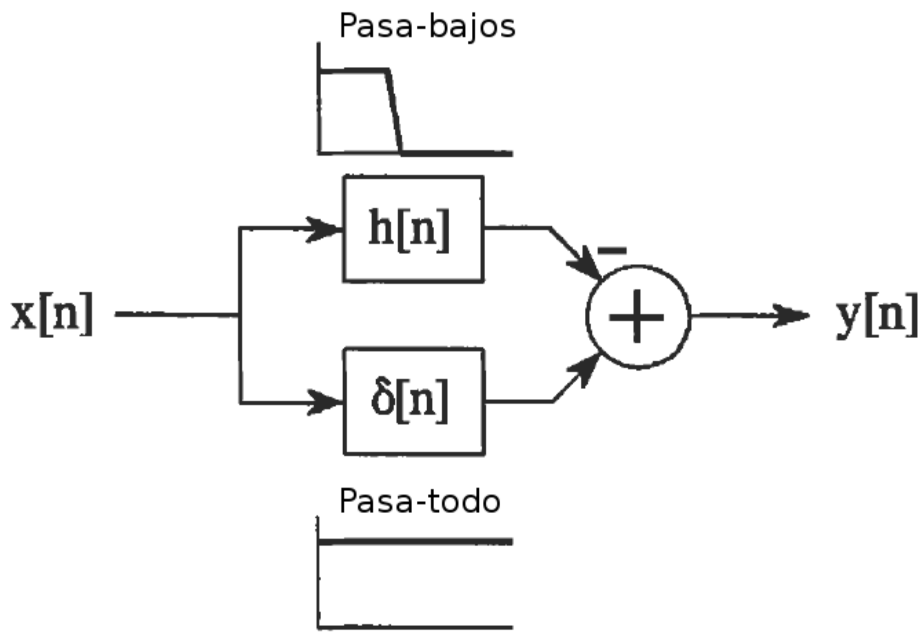
Diseño a partir de Pasa-bajos

Inversión espectral



Diseño a partir de Pasa-bajos

Inversión espectral



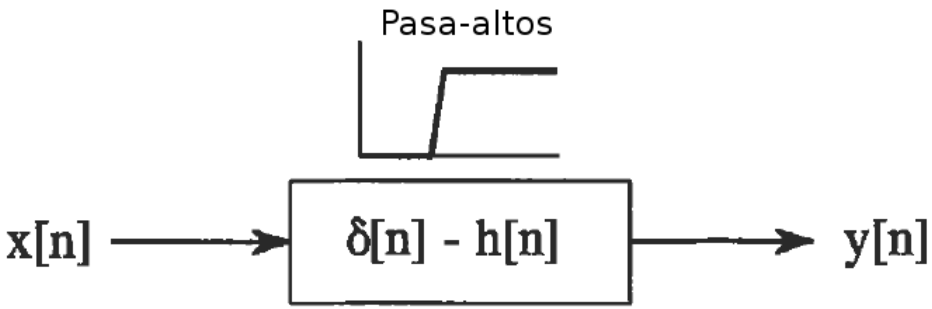
Filtros en paralelo

En el tiempo

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * \delta[n] - x[n] * h[n] \\
&= x[n] * (\delta[n] - h[n])
\end{aligned}
$$

En frecuencia

$$H_{hp}[k] = 1 - H[k]$$



Diseño a partir de Pasa-bajos

Inversión espectral

- La motivación de inversión espectral proviene de observar que la resta entre la señal original y la señal filtrada pasabajos, contiene solo los componentes altos de frecuencia. Por lo tanto, el procedimiento equivale a un filtro pasa-alto.
- El espectro se da vuelta de arriba hacia abajo, cambiando las bandas pasantes en bandas atenuadas y las bandas atenuadas en bandas pasantes.
- Cambia pasabajos en pasaaltos y viceversa, y pasabandas en suprimebandas y viceversa.
- La frecuencia de corte del pasa-altos es la misma que la del pasa-bajos original.

Diseño a partir de Pasa-bajos

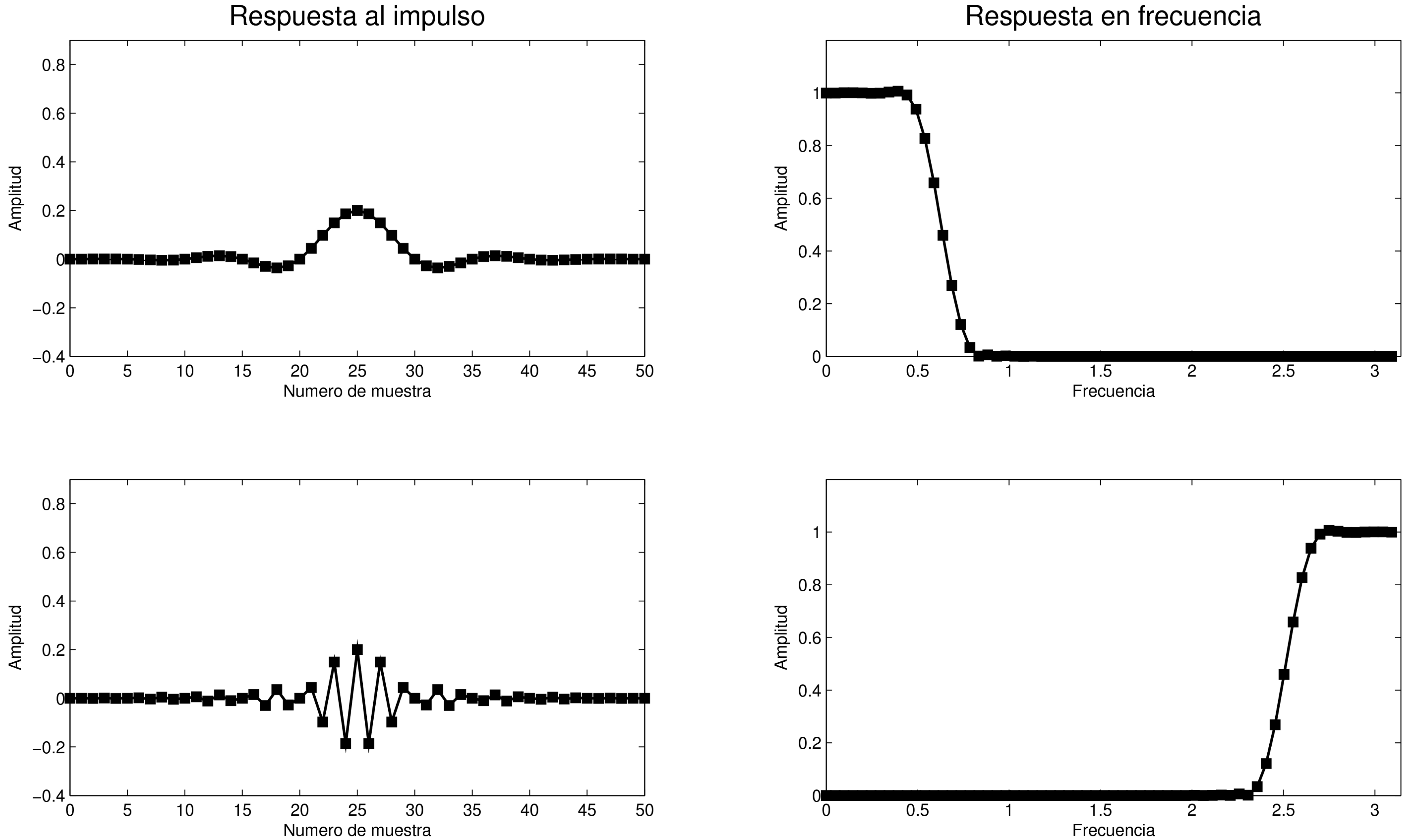
Inversión espectral

Restricción: La fase en la banda pasante del filtro pasa-bajos debe ser igual a la fase en la misma región de frecuencias del pasa-todo. En caso contrario, no se puede efectuar la resta de componentes espectrales muestra a muestra.

En otras palabras, el filtro pasa-bajos debe ser de fase nula o lineal. Eso se logra haciendo que la respuesta al impulso sea simétrica.

Diseño a partir de Pasa-bajos

Reversión espectral



Diseño a partir de Pasa-bajos

Reversión espectral

Propiedad de desplazamiento en frecuencia de la DFT

$$x[n] \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N} = X[k]$$

$$x[n]e^{-j2\pi nr/N} \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi n(k+r)/N} = X[k+r]$$

Reversión del eje de frecuencias

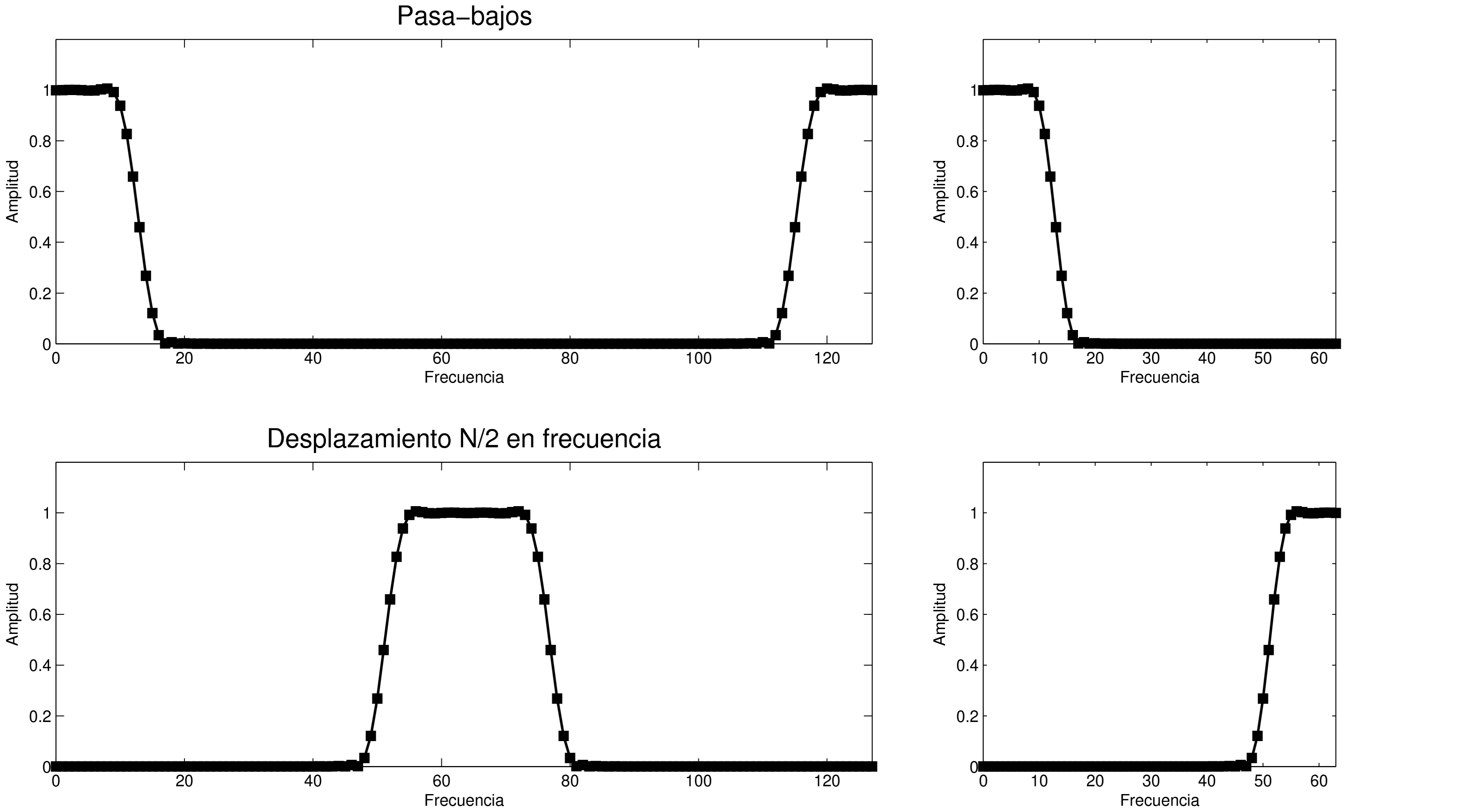
$$\text{Si } r = \frac{N}{2} \Longrightarrow e^{-j2\pi nr/N} = e^{-j\pi n} = (-1)^n$$

$$x[n](-1)^n = \begin{cases} x[n] & \text{si n es par} \\ -x[n] & \text{si n es impar} \end{cases}$$

$$x[n](-1)^n \longleftrightarrow X[k+N/2]$$

Diseño a partir de Pasa-bajos

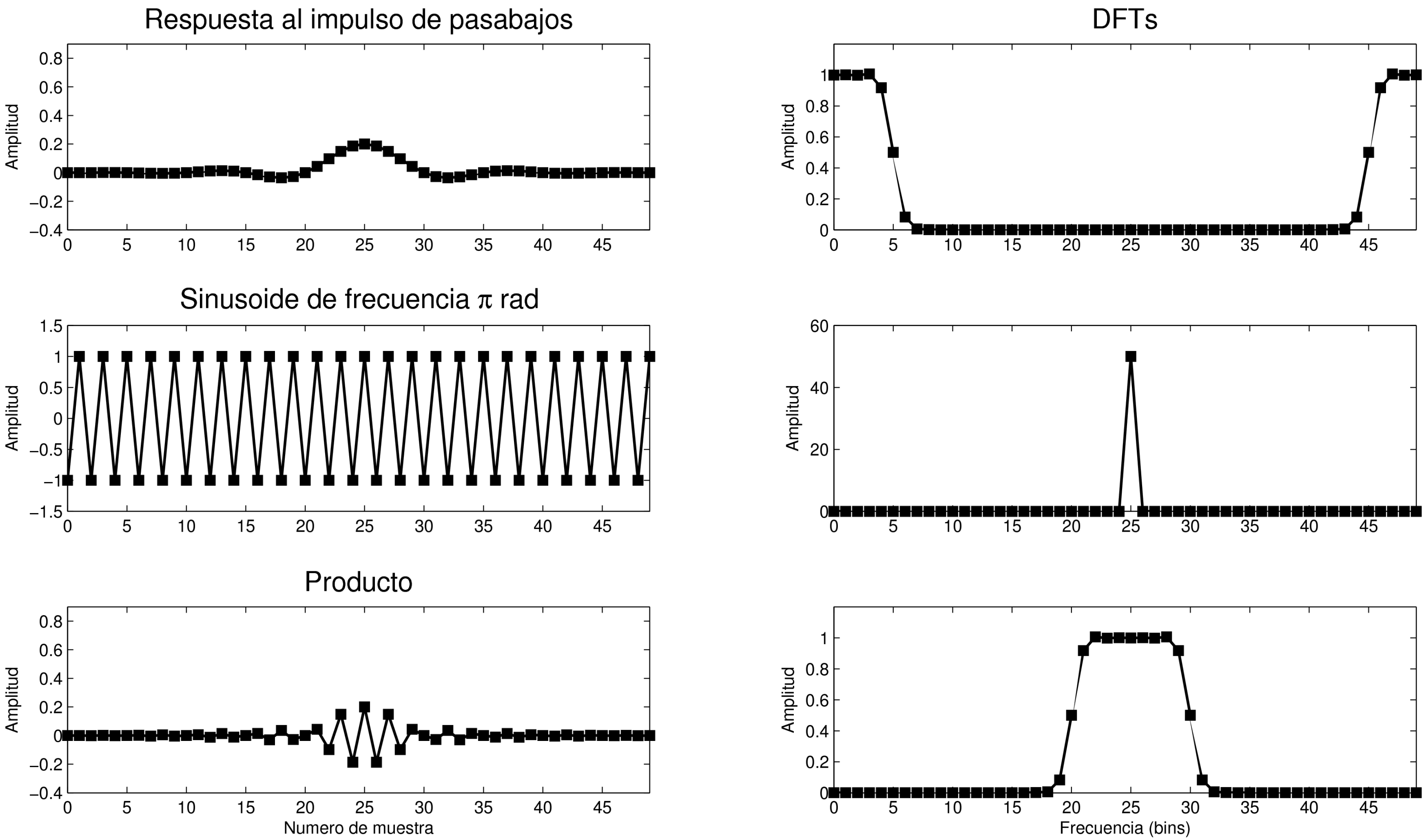
Reversión espectral



Diseño a partir de Pasa-bajos

Reversión espectral

Deducción alternativa



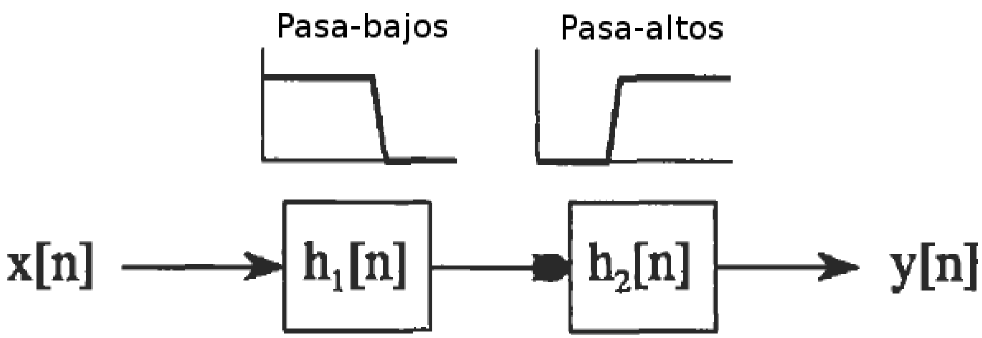
Diseño a partir de Pasa-bajos

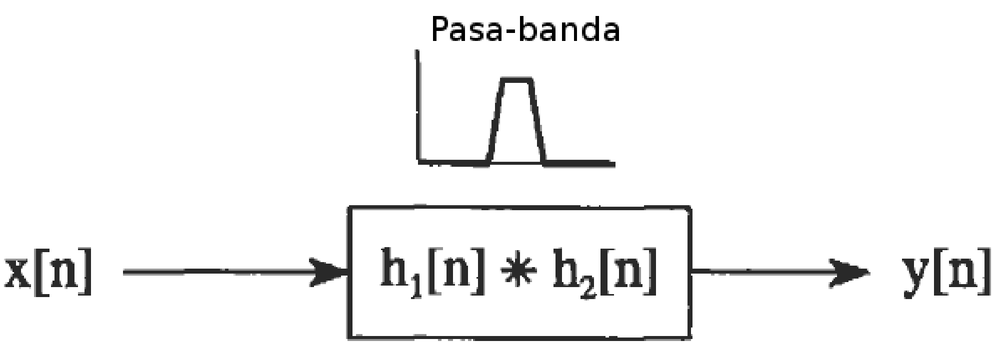
Reversión espectral

- El espectro de *N* muestras se desplaza circularmente *N/2* muestras. Equivalentemente, el espectro se da vuelta de izquierda a derecha.
- La frecuencia de corte del pasaaltos es *pi – la frecuencia de corte del pasabajos.*

Diseño de Pasa-banda

Pasa-bajos y pasa-altos en serie





Filtros en serie

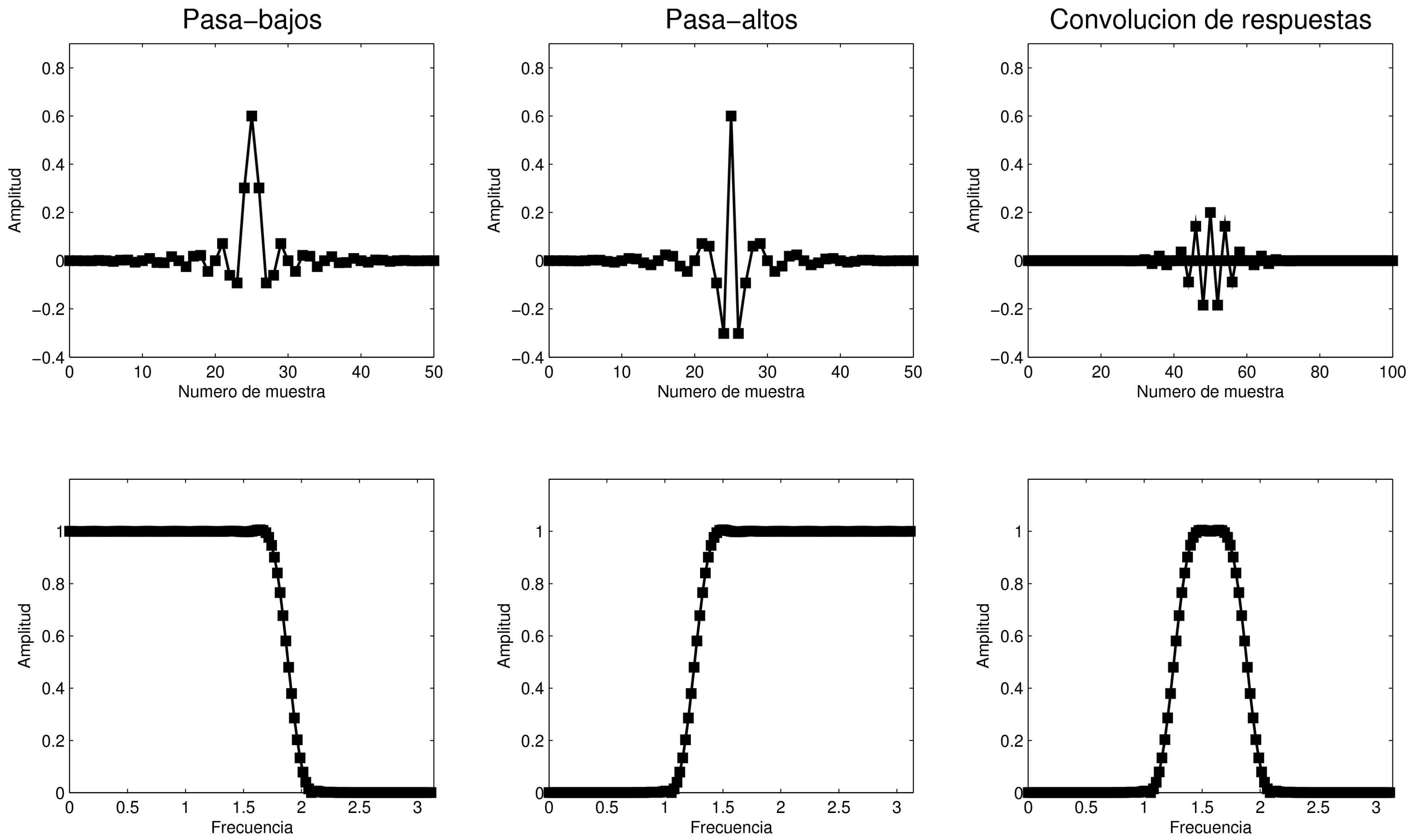
En el tiempo

$$
\begin{aligned}
y[n] &= (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \\
&= x[n] * (h_1[n] * h_2[n])
\end{aligned}
$$

En frecuencia

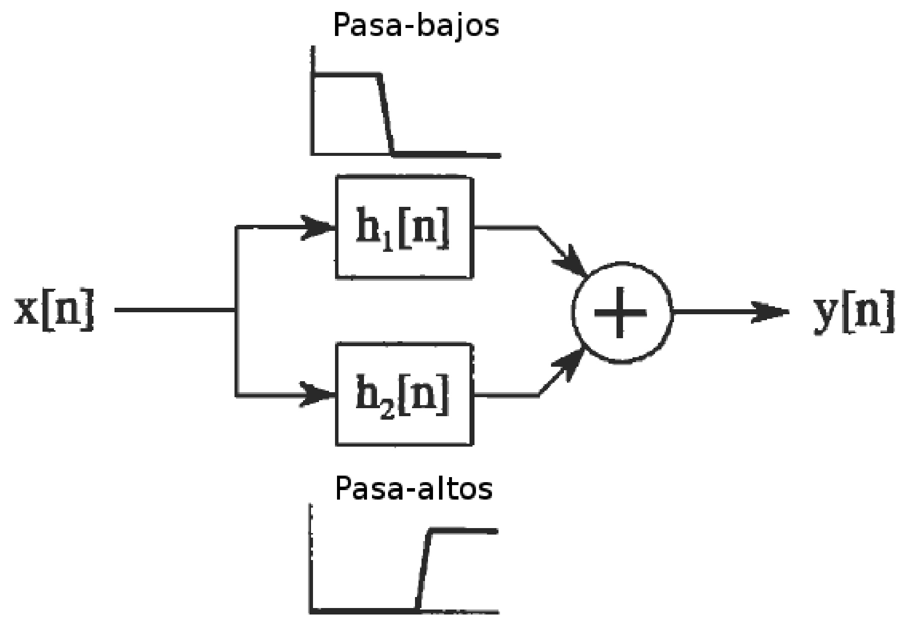
$$H_{bp}[k] = H_1[k]H_2[k]$$

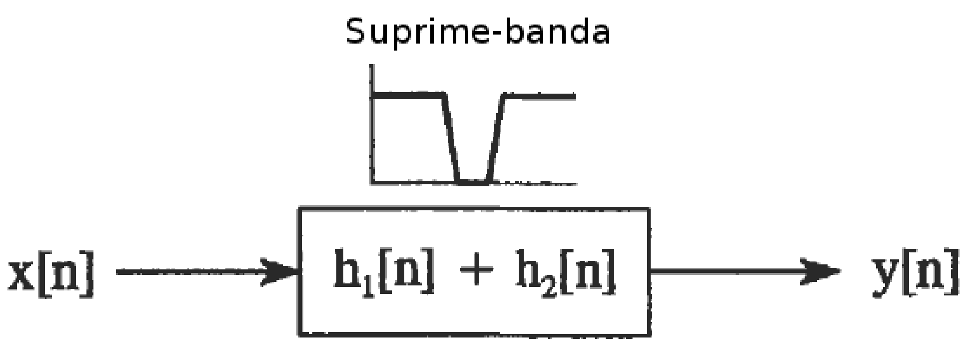
Diseño de Pasa-banda



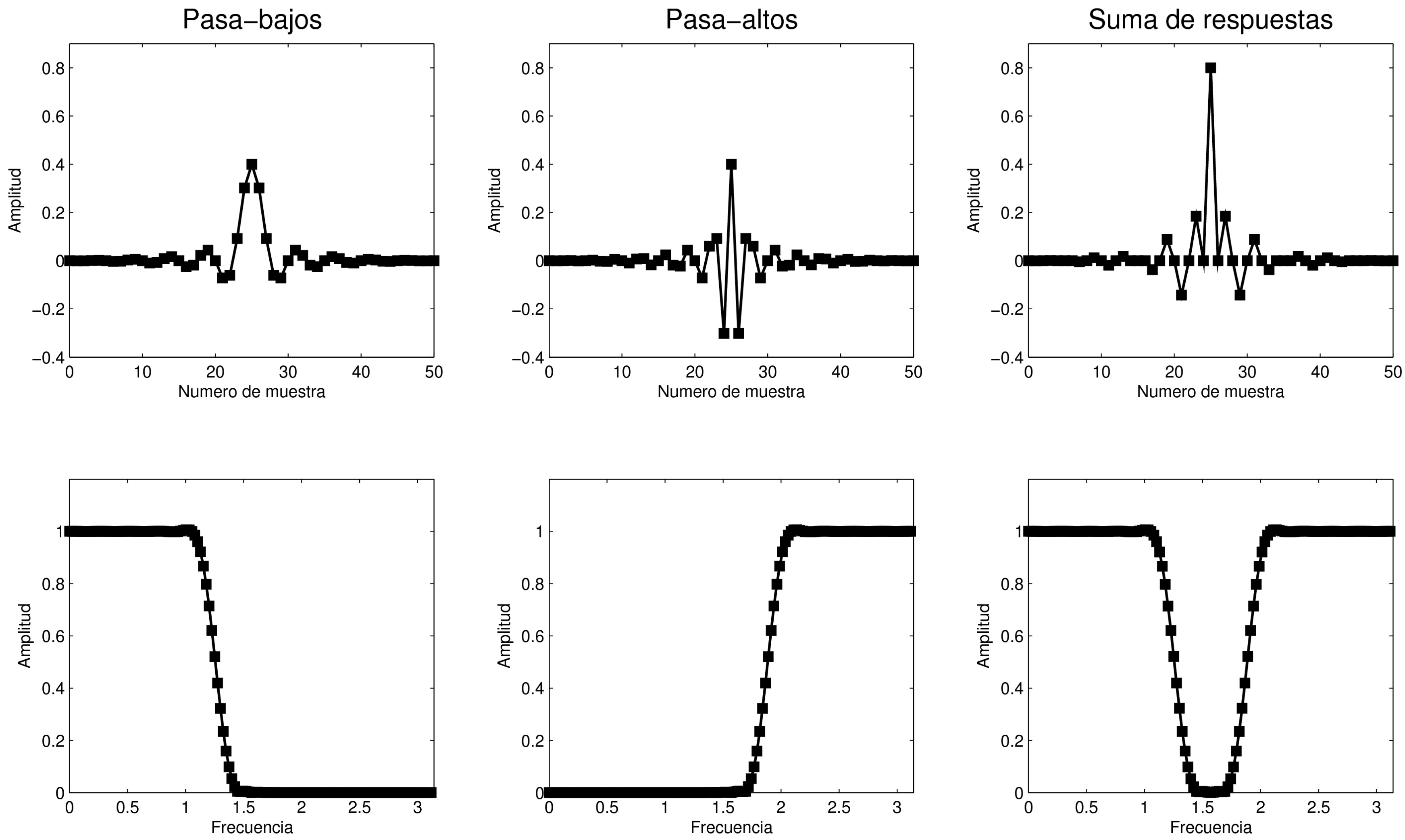
Diseño de suprime-banda

Pasa-bajos y pasa-altos en paralelo





Diseño de suprime-banda



Clasificación de filtros

		IMPLEMENTADO MEDIANTE **Convolución** *Respuesta al impulso finita (FIR)*	**Recursión** *Respuesta al impulso infinita (IIR)*
USADO PARA	**Dominio del tiempo** *suavizado*	Media móvil	Un polo
	Dominio de la frecuencia *separación de frecuencias*	Sinc enventanado	Chebychev
	Personalizado *deconvolución*	FIR personalizado	Diseño iterativo

Filtros de media móvil

Implementación por convolución

En un filtro de media móvil de largo *M*, la salida actual consiste en el promedio de las últimas *M* muestras de la entrada.

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

Ejemplo del cálculo de la muestra *n=80* de la salida de un filtro de largo *M=5.*

$$y[80] = \frac{x[80] + x[79] + x[78] + x[77] + x[76]}{5}$$

Respuesta al impulso

Ecuación del filtro de media móvil:

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} x[n-k]$$

Ecuación del filtro de respuesta al impulso *h[n]* (convolución):

$$(h * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k]$$

Respuesta al impulso

Ecuación del filtro de media móvil:

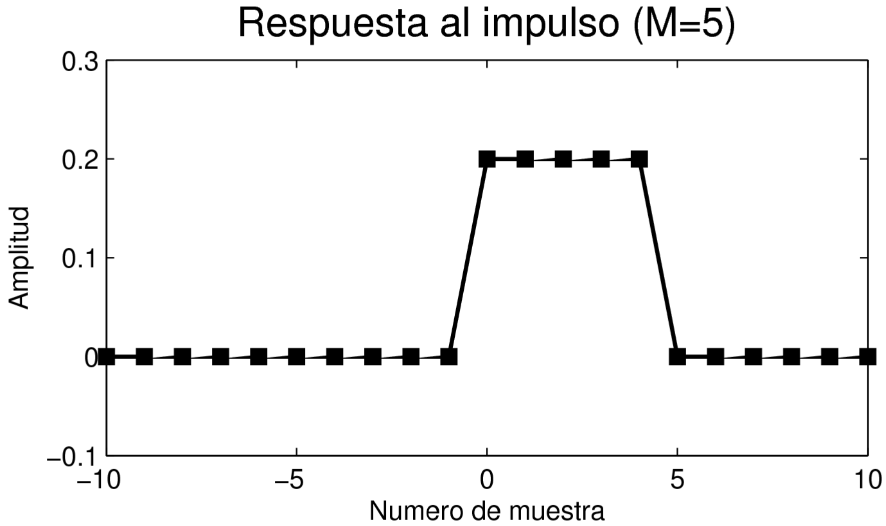
$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} x[n-k]$$

Ecuación del filtro de respuesta al impulso *h[n]* (convolución):

$$(h * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

Por lo tanto, la respuesta al impulso del filtro de media móvil es:

$$h_{ma}[n] = \begin{cases} \frac{1}{M} & \text{si } n = 0 \ldots M-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Respuesta al impulso

Planteo alternativo (promediado simétrico):

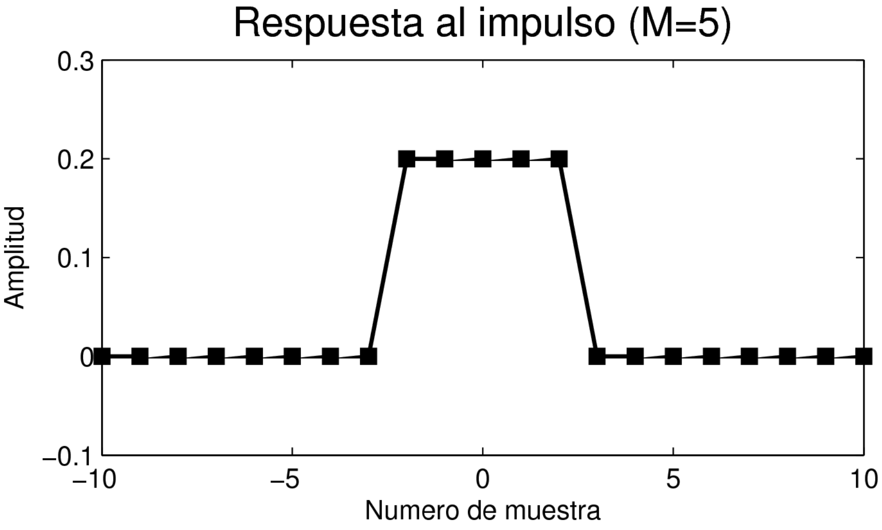
$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} x[n-k]$$

Ejemplo del cálculo de la muestra *n=80* de la salida de un filtro de largo *M=5*

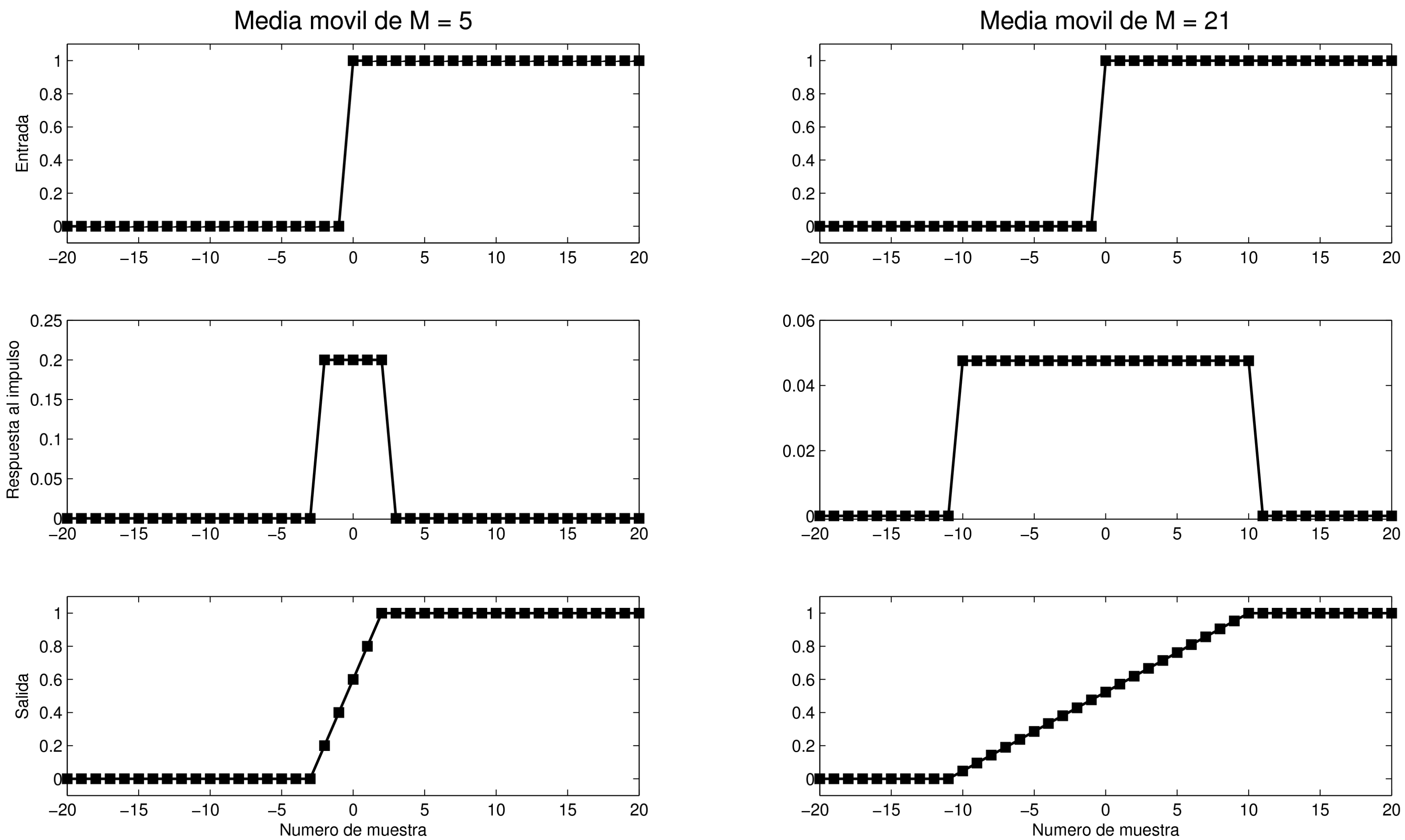
$$y[80] = \frac{x[78] + x[79] + x[80] + x[81] + x[82]}{5}$$

La respuesta al impulso en este caso es:

$$h_{ma}[n] = \begin{cases} \frac{1}{M} & \text{si } n = -\frac{M-1}{2} \dots \frac{M-1}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Respuesta al escalón



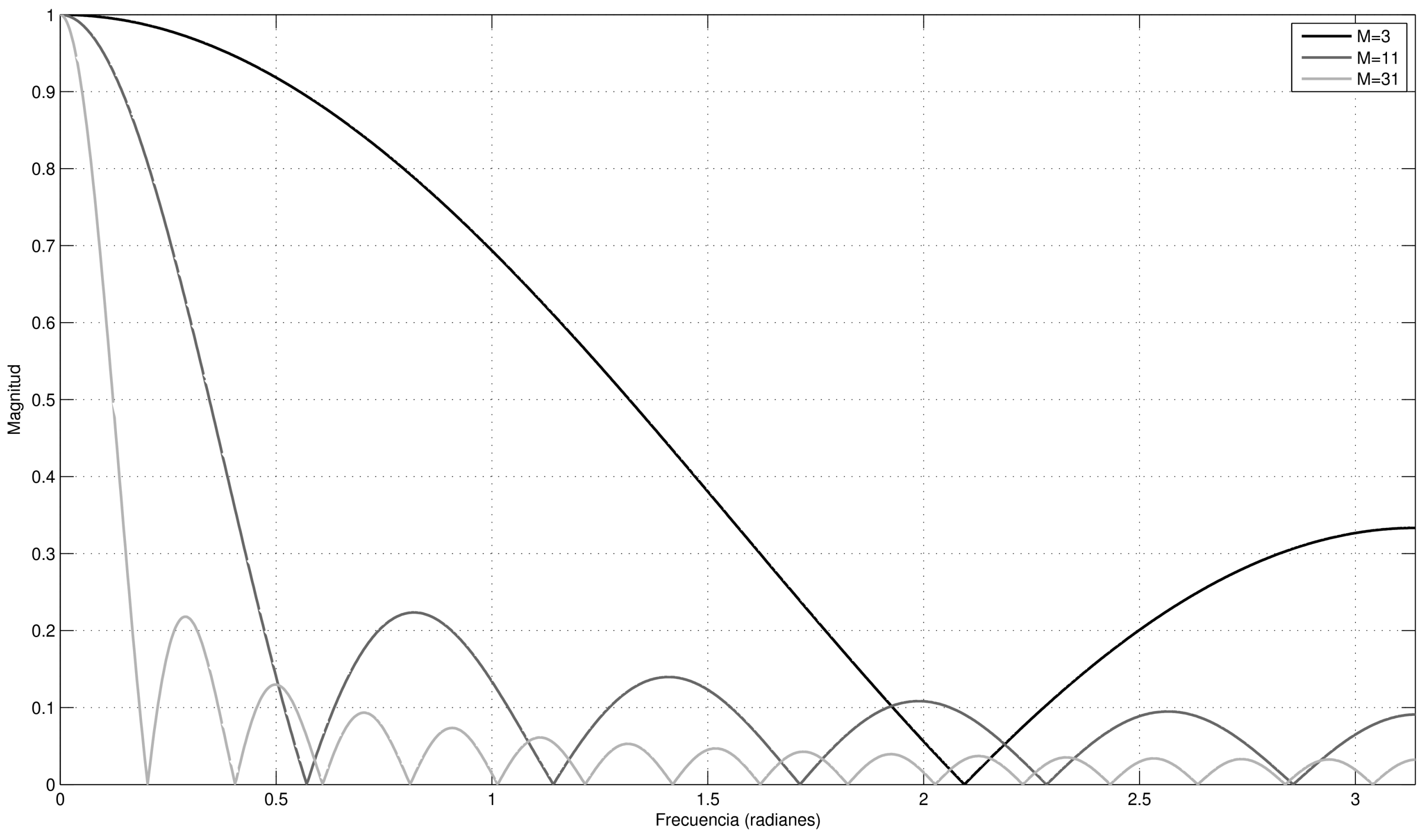
El tiempo de subida es *M* y el sobretiro es nulo

Respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\theta}) = \frac{\sin(\theta M/2)}{M\sin(\theta/2)}$$

Seno cardinal discreto

Mal desempeño como pasa-bajos (roll-off lento, mala atenuación en la banda atenuada).



Respuesta en frecuencia

Cálculo de la respuesta en frecuencia

La respuesta al impulso del filtro de media móvil causal de largo M es

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M} & \text{si } n = 0, \ldots, M-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para obtener la respuesta en frecuencia, se aplica la DTFT,

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\theta n} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\theta n}$$

Considerando que la suma de los primeros M términos de una serie geométrica es

$$\sum_{n=0}^{M-1} r^n = \frac{1-r^M}{1-r},$$

la DTFT queda,

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{M}\frac{1-e^{-j\theta M}}{1-e^{-j\theta}} = \frac{1}{M}\frac{e^{-j\theta M/2}}{e^{-j\theta/2}}\frac{e^{j\theta M/2}-e^{-j\theta M/2}}{e^{j\theta/2}-e^{-j\theta/2}}$$

Finalmente, la respuesta en frecuencia buscada es,

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta(M-1)/2}\frac{1}{M}\frac{\sin(\theta M/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Implementación por recursión

Cálculo de dos muestras adyacentes con filtro de orden M=7:

$$y[80] = \frac{x[77] + x[78] + x[79] + x[80] + x[81] + x[82] + x[83]}{7}$$

$$y[81] = \frac{x[78] + x[79] + x[80] + x[81] + x[82] + x[83] + x[84]}{7}$$

Se puede calcular y[81] a partir de y[80] realizando menos cuentas:

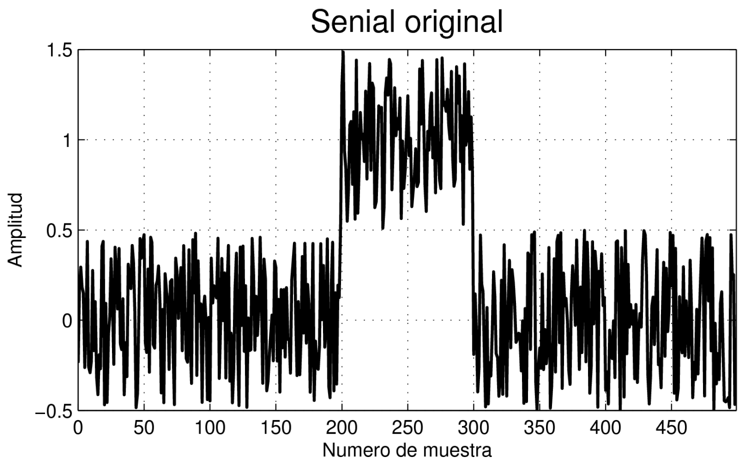
$$y[81] = y[80] + \frac{x[84] - x[77]}{7}$$

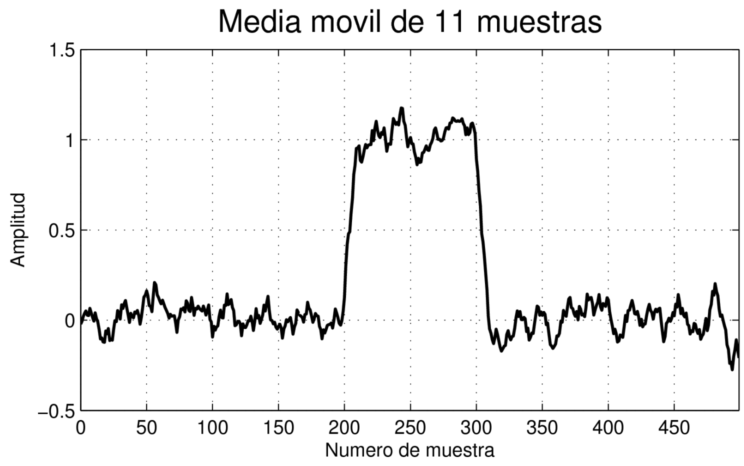
Ecuación en recurrencia genérica del filtro de media móvil:

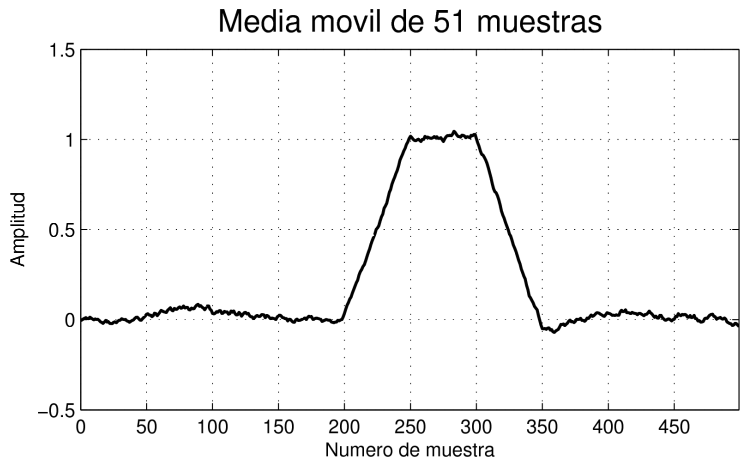
$$y[n] = y[n-1] + \frac{x\left[n + \frac{M-1}{2}\right] - x\left[n - \frac{M-1}{2} - 1\right]}{M}$$

Aplicación: suavizado

Desempeño óptimo para eliminación de ruido blanco.







- La amplitud del ruido se reduce como la raíz cuadrada de *M*.
- El tiempo de subida es *M.*

Conclusiones

Características del filtro de media móvil:

- La salida actual es el promedio de las últimas M muestras de la entrada.
- Su desempeño es óptimo para eliminar ruido blanco.
- Es el filtro mas veloz gracias a su implementación en recurrencia (2 sumas y una multiplicación en cada paso).
- Pobre desempeño como pasa-bajos.

Bibliografía

- Smith, S.W., “*The Scientist & Engineer's Guide to Digital Signal Processing*”, 1997, California Technical Pub.
  - Cap. 14: Introducción a los filtros digitales
  - Cap. 15: Filtro de media móvil

- Smith, Julius, “*Introduction to Digital Filters with Audio Applications*”, 2007, W3K Publishing.
  - Cap. 1: El filtro pasabajos mas simple
  - Cap. 4: Filtros lineales invariantes en el tiempo
  - Cap. 5: Representaciones en el dominio del tiempo