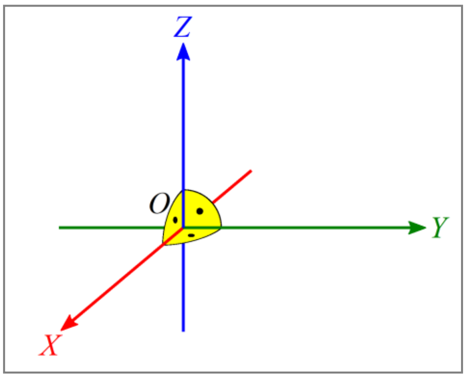
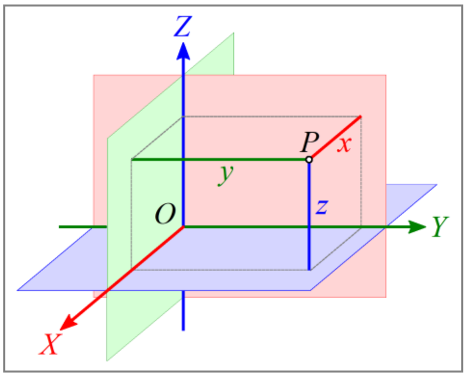
Koordináta-rendszerek

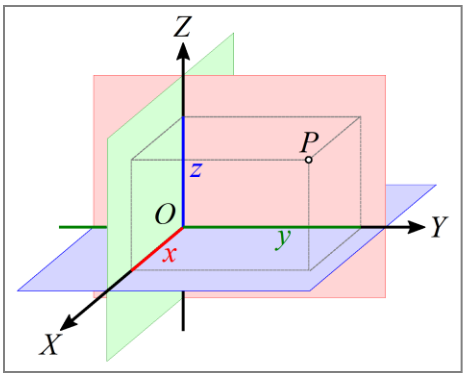
A tér pontjainak helyét megadhatjuk számokkal, amelyek bizonyos alapelemekhez (bázishoz) viszonyítva határozzák meg a pont helyét. Ezek az alapelemek alkotják a koordináta-rendszert, a pont helyét megadó számokat koordinátáknak nevezzük.



Általában a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert használjuk. Ebben a bázis három egymásra merőleges, közös kezdőpontú számegyenes: *X*, *Y* és *Z*. Ezeket a számegyeneseket a koordináta-rendszer tengelyeinek, a közös kezdőpontot origónak nevezzük. Az origót többnyire *O*-val jelöljük. A *koordináta-rendszer jobbsodrású* vagy *balsodrású* lehet aszerint, hogy az origóból kiinduló, az *X*, *Y* és *Z* tengelyek mentén pozitív irányába mutató **i**, **j** és **k** egységvektorok milyen vektorrendszert alkotnak. Egy tetszőleges *P* pont Descartes-féle koordinátáin a tengelyek által meghatározott síkoktól mért előjeles távolságát értjük:

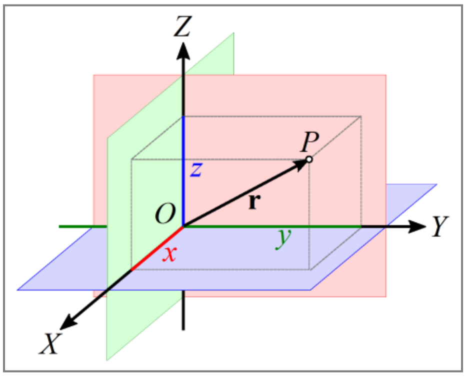


- *x* a *P* pont előjeles távolsága az [*YZ*] síktól,
- *y* a *P* pont előjeles távolsága az [*XZ*] síktól,
- *z* a *P* pont előjeles távolsága az [*XY*] síktól.



A koordináták latin eredetű elnevezései: ordináta (*x*), abszcissza (*y*) és applikáta (*z*). A *P* pont helyzete tehát három valós számból álló, rendezett számhármassal (*x*, *y*, *z*) adható meg. A koordinátákat rajzban gyakran a tengelyeken tüntetik fel, könnyen belátható, hogy a kétféle megadási mód egyenértékű.

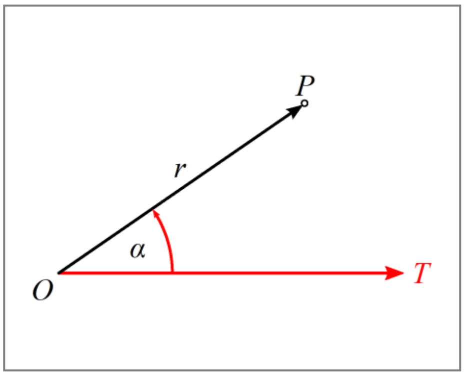
A P pont helyét a három koordinátája helyett egy olyan vektorral is megadhatjuk, amelynek a kezdőpontja az origóban van, végpontja pedig a P pont. Ezt a vektort a P pont helyvektorának nevezzük. A helyvektor jele általában $\mathbf{r}$. Egyszerűen belátható, hogy a P ponthoz tartozó helyvektor koordinátái megegyeznek a P pont koordinátáival. A Pitagorasz-tétel kétszeri alkalmazásával bizonyítható a helyvektor abszolútértéke és a koordináták közötti összefüggés:



$$|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Gyakran csak egyetlen sík pontjait kell leírni, vizsgálni, ilyenkor a koordináta-rendszert úgy érdemes megválasztani, hogy az $[XY]$ sík egybeessen az adott síkkal. Ekkor a sík minden pontjának a Z koordinátája 0 lesz, emiatt ez a koordináta és a Z tengely akár el is hagyható.

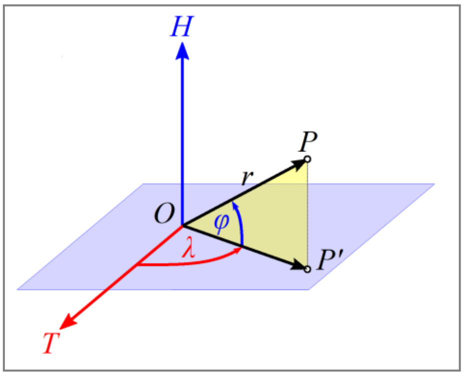
A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer mellett a sík pontjainak leírására más koordináta-rendszerek is használhatók. Ezek közül a legfontosabb a síkbeli polárkoordináta-rendszer. Ennek bázisa az O kezdőpont (origó) és az O-ból kiinduló, skálázott T félegyenes (polártengely). A sík egy tetszőleges P pontjának a polárkoordinátái (r, α) a következők:



- r a P pont távolsága az O kezdőponttól, a vezérsugár $(0 \leq r)$,
- α a T polártengely és az OP félegyenes közti szög, a polárszög $(0° \leq \alpha < 360°)$.

A két polárkoordináta latin eredetű elnevezése: rádiusz (r) és azimut (α).

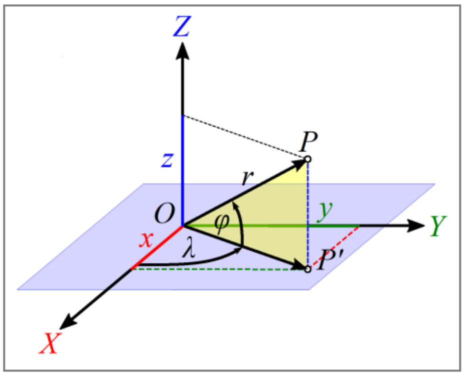
A síkbeli polárkoordináta-rendszer egyik térbeli továbbfejlesztésének tekinthető az ekvatoriális gömbkoordináta-rendszer. Ennek bázisa az alapsík (horizont), az alapsíkban fekvő O kezdőpont (origó) és az O pontból kiinduló, két skálázott félegyenes (H és T), melyek közül a H merőleges a horizontra, a T pedig a horizont síkjában fekszik. Jelöljük a tér egy tetszőleges pontját P-vel, a P pont horizontra eső merőleges vetületét pedig P'-vel! Ekkor a P pont ekvatoriális gömbkoordinátái (r, λ, φ) a következők:



- r a P pont távolsága az O kezdőponttól, a vezérsugár ($0 \leq r$),
- λ a T polártengely és az OP' félegyenes közti szög ($0° \leq \lambda < 360°$),
- φ a horizont és az OP félegyenes közti előjeles szög ($-90° \leq \varphi \leq 90°$).

Az ekvatoriális gömbkoordináták latin eredetű elnevezései: rádiusz (r), azimut (λ) és deklináció (φ). A deklináció pozitív, ha a P pont a horizontnak a H félegyenessel megegyező oldalán van. Ha a P pont a horizontnak a H félegyenessel ellentétes oldalán van, akkor a deklináció negatív.

A *Descartes-féle derékszögű koordináták* és az *ekvatoriális gömbkoordináták* közti kapcsolat egyszerűen meghatározható, ha a két koordinátarendszer kezdőpontja egybeesik, a horizont az [XY] sík, továbbá a T *és* H félegyenesek az X *és* Z tengelyekkel azonos irányúak. A rajz alapján ugyanis ebben az esetben



$$x = OP' \cdot \cos(\lambda) = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda)$$

$$y = OP' \cdot \sin(\lambda) = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda)$$

$$z = r \cdot \sin(\varphi)$$

illetve

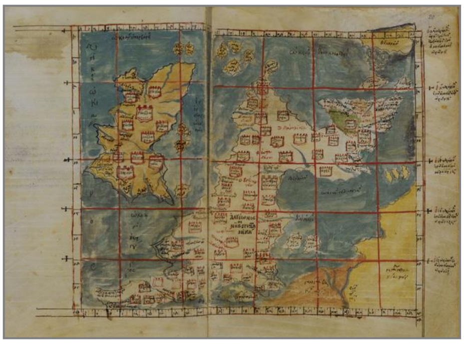
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arcsin\frac{z}{r} = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\lambda = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{ha } x > 0 \\ \operatorname{sgn}(y) \cdot 90°, & \text{ha } x = 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180°, & \text{ha } x < 0 \text{ és } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 180°, & \text{ha } x < 0 \text{ és } y < 0 \end{cases}$$

Kiegészítés

1. A koordinátarendszer gondolata az ókori görög tudósokig nyúlik vissza. *Klaudiosz Ptolemaiosz* (100 körül–170 körül) görög matematikus, csillagász, földrajztudós *Geographia* című művében már használta a földrajzi szélesség és hosszúság fogalmát. Lényegében egy Földhöz rögzített koordináta-rendszerben meghatározta mintegy 8000 földrajzi objektum (városok, folyók stb.) helyét. A fotón az egyik általa készített térkép görög nyelvű másolata látható, amely a 14. században Konstantinápolyban (Isztambulban) készült. (A fokbeosztást jelölő számokat az akkori szokásoknak megfelelően még a görög ábécé betűivel jelölték: α→1, β→2, γ→3 stb.)



2. A derékszögű koordinátarendszer elterjesztésében jelentős szerepet játszott *René Descartes* (1596–1650), latinosított nevén *Renatus Cartesius* francia matematikus, fizikus, filozófus. *Geometria* című művében a koordinátarendszer segítségével már geometriai problémákat tárgyalt algebrai módszerekkel, ezzel megalapozta a matematika egyik ágát, a *koordinátageometriát*.

3. A *földrajzi koordinátarendszer* lényegében egy ekvatoriális gömbkoordináta-rendszer. Ennek a rendszernek az origója a Föld középpontjában van, horizontja az *Egyenlítő* (latinul: *equator*) síkja, a H az Északi-sark felé, a T a *greenwichi délkör* és az Egyenlítő metszéspontja felé mutat. Mivel a Föld megközelítőleg gömb alakú, ezért a felszínén lévő minden pontjának vezérsugara (rádiusza) ugyanakkora, kb. 6371 km. Emiatt csak az azimutot és a deklinációt szokás megadni. A földrajzi koordináták megadásánál azonban hagyományosan az első koordináta a földrajzi szélesség (deklináció) a második pedig a földrajzi hosszúság (azimut). Például *Newton* szülőházának földrajzi koordinátái: é. sz. 52° 48′ 33.18″, ny. h. 0° 37′ 50.03″. (A képen látható Newton-szülőház helye a koordinátákra kattintva a Google térképén is megnézhető).

Képek jegyzéke

	**Descartes arcképe** W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg
	**Newton szülőháza** W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Woolsthorpe_Manor_-_west_fascade.jpg

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.