Laboratorio de Aerodinámica y Fluidos

T.P. Caja de Hele Shaw

1- Resumen

Esta guía tiene como objetivo introducir al alumno en los conocimientos básicos necesarios para poder realizar correctamente el trabajo práctico denominado "Caja de Hele Shaw". Además se lo familiarizará con el instrumento empleado para la realización del mismo que es el que le da su nombre al presente trabajo. Para finalizar se citará el procedimiento a seguir, las mediciones que son necesarias tomar y las planillas para la adquisición de datos.

2-Introducción teórica

CINEMÁTICA DE FLUIDOS

La Cinemática de Fluidos tiene una correspondencia biunívoca con el Primer Principio de la Termodinámica aplicado a sistemas abiertos. En un fluido en movimiento, cada partícula tiene una velocidad V que es función de la posición (x,y,z) de dicha partícula y del tiempo *t*, por lo tanto:

$$V = f(x,y,z,t)$$

y las proyecciones de dicha velocidad sobre los tres ejes son función también de dichas variables, siendo representadas por u, v y w respectivamente:

$$u = u\ (x,y,z,t)$$
$$v = v\ (x,y,z,t)$$
$$w = w\ (x,y,z,t)$$

A su vez, es importante definir un concepto importante en la cinemática de los fluidos. Hablamos de movimiento permanente o estacionario. Este de define como aquel en que sus características (presión, velocidad, densidad, etc.) son independientes del tiempo. Siendo entonces sólo función de la posición (x, y, z)

p = P (x,y,z) ▫ V = v (x,y,z) =>

u = u (x,y,z)
v = v (x,y,z)
w = w(x,y,z)

Además, es importante tener en cuenta otros conceptos tales como *trayectoria*, *campo de velocidades* y *línea de corriente*.

Las posiciones oque ocupa una misma partícula a lo largo de un intervalo de tiempo *t* definen la *trayectoria*.

Por otro lado, si en un instante determinado se asigna a cada punto del flujo un vector representando la velocidad instantánea en dicho punto, se obtiene un conjunto de vectores denominado *campo de velocidades*.

A su vez, La *línea de corriente* y es una línea que representa la tangente, en cada uno de los puntos del campo, al vector velocidad en ese punto y en el instante considerado. Otra definición dice que la *línea de corriente* representa la envolvente del vector velocidad en todos los puntos del campo. La condición que satisface es la siguiente:

$$dx/u = dy/v = dz/w$$

En un movimiento estacionario estas son fijas y son coincidentes con las trayectorias; pero si no lo es, estas varían a lo largo de un intervalo de tiempo.

Cuando en un punto, línea, superficie o volumen ocurre la aparición de ciertas cantidades de fluido que a partir de ese momento pasan a formar parte del flujo, se dice que en dicho punto, línea, superficie o volumen, existe una fuente.

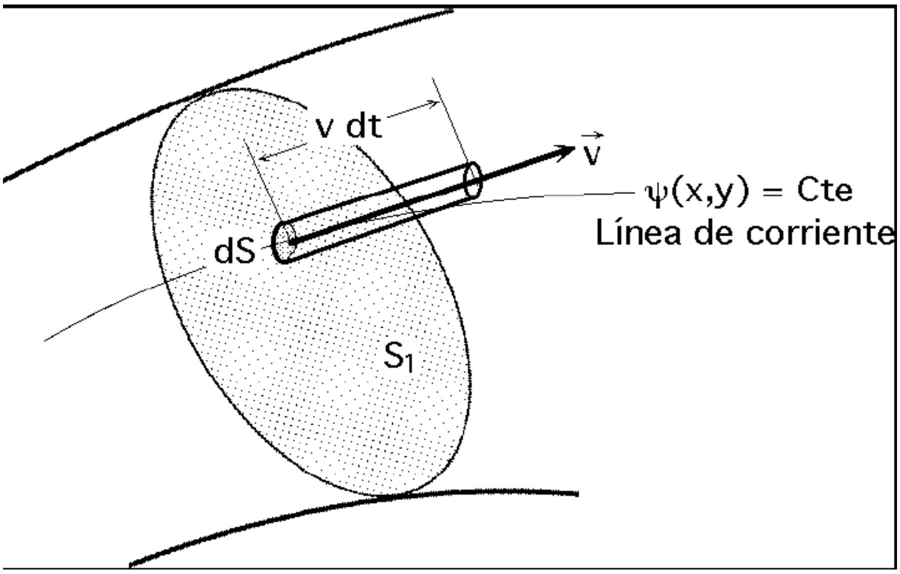
Por el contrario, si en un punto, línea, superficie o volumen desaparecen ciertas cantidades que antes habían participado en la circulación, se dice que en dicha locación hay un sumidero

Generalmente, un flujo se representa gráficamente mediante las líneas de corriente.

Como se dijo anteriormente, cuando estamos en un régimen permanente las partículas fluidas se mueven a lo largo de trayectorias que coincidentes con las líneas de corriente □. En cada línea de corriente se cumple que la función □ tiene un valor constante. Por lo que un flujo queda representado al asignar distintos valores a dicha constante.

Por el contrario, si el flujo no es permanente (régimen transitorio), la disposición de las líneas de corriente revela únicamente la representación instantánea del fluido en movimiento, no existiendo generalmente, una correspondencia tan sencilla entre las trayectorias y las líneas de corriente □.

Un *tubo de corriente* se define como el conjunto de las líneas de corriente que pasan por todos los puntos de una curva cerrada C arbitraria en el espacio tridimensional, en un instante determinado, que forman un tubo.



Es de gran utilidad en el estudio de los fenómenos fluidos. Dada la definición de línea de corriente (tangente en todo punto al vector velocidad) es evidente que no existe paso de flujo a través de la superficie lateral del tubo de corriente; comportándose como un conducto de paredes impermeables y espesor nulo, de sección recta infinitesimal.

Un número infinito de tubos de corriente adyacentes, da lugar a un tubo de sección recta finita, conocido frecuentemente como *vena fluida.*

El método de estudio puede realizarse a partir del concepto de campo de velocidades V(x, y, z, t), haciendo dos tipos de consideraciones:

i) Método de Euler: Se fija un punto del espacio de coordenadas (x_a, y_a , z_a) , siendo las velocidades de las diversas partículas que pasan por ese punto solo función del tiempo, por lo que en la expresión:

$V = V(x_a, y_a, z_a, t)$

la única variable que interviene es el tiempo. Es decir se centra el estudio en un punto fijo del espacio a lo largo del tiempo.

ii) Método de Lagrange: se diferencia del anterior en que el estudio se centra en la partícula, es decir, siguiendo a dicha partícula, en todo el campo de movimiento a lo largo de un tiempo determinado. Esto significa que (x, y, z) no permanecen constantes en la expresión V= V(x, y, z, t), sino que varían de forma continua siendo función del tiempo, dando en cada instante la posición de la partícula genérica.

Ambos métodos son independientes de si el flujo es estacionario o no.

Laboratorio de Aerodinámica y Fluidos

Función de corriente

Consideremos un flujo estacionario bidimensional. Si recordamos lo expuesto anteriormente, la condición que debía cumplir una línea de corriente es:

$dy / dx = v/u$

Si u y v son funciones conocidas de x e y, entonces la ecuación anterior puede integrarse para obtener una función algebraica para la línea de corriente.

$f(x,y) = c$

donde c es una constante arbitraria de integración, con diferentes valores para diferentes líneas de corriente. Si a la función anterior la llamamos Ψ, entonces:

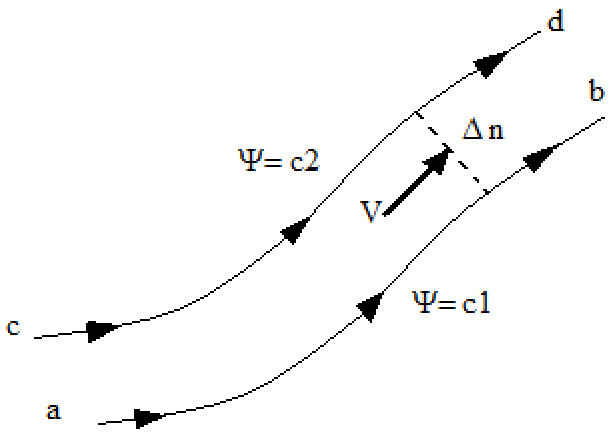
$\Psi = (x,y) = c$

Esta función se llama función de corriente. Se aprecia que la ecuación de una línea de corriente se obtiene al establecer distintos valores para la constante c ($c1$,$c2$, $c3$…). Dos líneas de corriente se ilustran en la figura de más abajo; ab y cd están dadas por $\Psi=c1$ y $\Psi=c2$ respectivamente.

Hay una cierta arbitrariedad en la expresión dada más arriba dada la presencia de la constante de integración, por lo que definiremos la función de corriente para disminuir esta arbitrariedad. Referidos a la figura de más abajo, definiremos un valor numérico para Ψ, de tal forma de que la diferencia ΔΨ entre $\Psi=c2$ (línea de corriente cd) y $\Psi=c1$ (ab) sea igual al flujo másico entre ambas líneas de corriente. Dado que consideramos un flujo bidimensional, este flujo másico será definido por unidad de ancho perpendicular a la página. Es decir, consideráramos el flujo másico dentro de un tubo de corriente definido por ab y cd, con una sección transversal rectangular de altura Δn veces el ancho unitario perpendicular a la hoja. En este caso, Δn será la distancia normal entre las 2 líneas de corriente consideradas. Así, el caudal másico para la sección de altura Δn y ancho unitario estará definido por:

$\Delta\Psi = c2-c1$

La definición superior no elimina completamente la arbitrariedad de la constante de integración, pero hace las cosas un poco más precisas. En la realidad, el valor de dicha constante estará dado por la geometría del flujo.



En flujo estacionario, el flujo másico es constante dentro de un tubo de corriente a lo largo del mismo y, como $\Delta\Psi$ está dado por dicho flujo, se llega a la conclusión de que $\Delta\Psi$ es constante para dicho tubo. Si la línea de corriente inferior está dada por $\Psi 1=c1$ entonces, basándose en la definición de tubo de corriente, el límite superior también es una línea de corriente, estando definida por $\Psi 2=c2=c1+\Delta\Psi$ =constante.

Aún queda por definir la propiedad más importante de la función de corriente, las derivadas de Ψ conllevan al campo de velocidades del flujo. Para obtener esta relación, supondremos que la distancia entre las líneas de corriente ab y cd es infinitesimal (Δn pequeño) de tal modo que la velocidad del flujo sea constante, quedando el caudal másico definido por:

$$\Delta\Psi = \rho \text{ Área } V = \rho\,(1)\,\Delta n\, V \quad \Rightarrow \quad \Delta\Psi / \Delta n = \rho V$$

Y considerando el límite de la ecuación anterior ($\Delta n \to 0$), tenemos:

$$\rho V = \lim_{\Delta n \to 0} \Delta\Psi / \Delta n = \partial \Psi / \partial n \qquad (1)$$

Esta ecuación establece que si conocemos Ψ, luego podremos obtener el producto ρV diferenciando Ψ en la dirección *normal* a V. Para obtener una forma práctica de dicha ecuación en coordenadas cartesianas, consideremos la figura de más abajo. Debe notarse que la distancia Δn equivale a moverse positivamente en y (Δy) para luego hacerlo negativamente en x ($-\Delta x$). Debido al principio de conservación de la masa, el caudal másico que atraviesa la sección Δn (ancho unitario) es equivalente al que lo hace en Δy y $-\Delta x$ combinados ∴.

$$\text{Caudal másico} = \Delta\Psi = \rho\,\Delta n\, V = \rho\, u\,\Delta y - \rho\, v\,\Delta x$$

Si acercamos infinitesimalmente cd y ab, la ecuación anterior en el límite se transforma en:

$d\Psi \;=\; \rho\, u\, dy - \rho\, v\, dx$

Por otro lado, dado que $\Psi = (x,y)$, aplicando la regla de la cadena para derivadas parciales:

$d\Psi \;= (\partial\Psi / \partial x)\, dx + (\partial\Psi / \partial y)\, dy$

Si comparamos las 2 ecuaciones anteriores llegaremos a la conclusión de que:

$\boxed{\rho\, u = \partial\Psi / \partial y}$ □ $\boxed{\rho\, v = -\partial\Psi / \partial x}$ (2)

Es decir, si $\Psi = (x,y)$ es conocida para un campo de flujo dado, entonces en cualquier punto del flujo los productos $\rho \cdot u$ y $\rho \cdot v$ pueden obtenerse al diferenciar Ψ en las direcciones normal a u y v, respectivamente. Para coordenadas polares, y operando de la misma forma se obtiene:

$\boxed{\rho\, V_r = (1/r)\, (\partial\Psi / \partial\theta)}$ □ $\boxed{\rho\, V_\theta = -\partial\, \Psi / \partial r}$ (3)

Nótese que la función de corriente Ψ definida más arriba se aplica tanto a flujo compresible como incompresible. Si consideramos el caso incompresible solamente, ρ=constante, por lo que la ecuación (1) se vuelve:

$V = \partial\, (\Psi / \rho) / \partial\, n$ (4)

Por lo que definimos una nueva función de corriente (para flujo incompresible únicamente) con ψ □ Ψ / ρ. Por ende, la ecuación (4) se transforma en:

$V = \partial\, \psi / \partial\, n$

Y las ecuaciones (2) y (3) pueden reescribirse como:

$\boxed{u = \partial\, \psi / \partial y}$ □ $\boxed{v = -\partial\, \psi / \partial x}$ (2a)

$\boxed{V_r = (1/r)\, (\partial\psi / \partial\theta)}$ □ $\boxed{V_\theta = -\partial\, \psi / \partial r}$ (3a)

Suponiendo que la función de corriente es conocida, es posible enumerar ciertas conclusiones:

i) ψ = constante (o Ψ = constante) da la ecuación de una línea de corriente
ii) la velocidad del flujo puede obtenerse al diferenciar ψ (o Ψ) según las expresiones (2) y (3) para flujo compresible y (2a) y (3a) para incompresible.

Laboratorio de Aerodinámica y Fluidos

Potencial de velocidades

Dado un campo de velocidades V, se dice que el flujo es irrotacional si se cumple:

$$\nabla \times V = 0$$

Si consideramos una función escalar φ, se cumple la siguiente relación (recordando que el rotor del gradiente es SIEMPRE NULO):

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$$

Esta ecuación establece que para un flujo irrotacional, siempre existe una función escalar φ tal que la velocidad esta dada por el gradiente de dicha función. A esta función φ se la denomina potencial de velocidades, siendo función de las coordenadas espaciales; por ejemplo $\varphi = \varphi(x, y, z)$ o $\varphi = \varphi(r, \theta, z)$. Partiendo de la definición de gradiente en coordenadas cartesianas, tenemos:

$$u\, i + v\, j + w\, k = [\partial \varphi/\partial x]\, i + [\partial \varphi/\partial y]\, j + [\partial \varphi/\partial z]\, k$$

Dado que los coeficientes que acompañan a los distintos versores deben ser iguales =>

$$\boxed{u=[\partial \varphi/\partial x] \quad \square \quad v=[\partial \varphi/\partial y] \quad \square \quad w=[\partial \varphi/\partial z]} \qquad (\alpha)$$

De manera similar se pueden obtener las componentes en coordenadas cilíndricas y esféricas.

$$\boxed{V_r = [\partial \varphi/\partial r] \quad \square \quad V_\theta = (1/r)\, [\partial \varphi/\partial \theta] \quad \square \quad V_z = [\partial \varphi/\partial z]} \qquad (\beta)$$

$$\boxed{V_r = [\partial \varphi/\partial r] \quad \square \quad V_\theta = (1/r)\, [\partial \varphi/\partial \theta] \quad \square \quad V_\Phi = [1/\ (r \sin \Phi)]\ [\partial \varphi/\partial \Phi]} \qquad (\gamma)$$

Función de corriente y potencial de velocidades, comparación:

El potencial de velocidades φ es análogo a la función de corriente ψ en el sentido de que las derivadas de φ conducen a las velocidades del campo. Sin embargo, hay diferencias distintivas entre ψ (o Ψ) y φ, a saber:

i) El campo de velocidades del flujo se obtienen al diferenciar φ en la misma dirección que las velocidades (α, β y γ), mientras tanto ψ (o Ψ) se diferencia en dirección normal a la velocidad (2, 2a, 3,3a).

ii) El potencial de velocidades está definido SOLAMENTE para flujo irrotacional. Por el contrario, la función de corriente puede usarse para flujo irrotacional o rotacional.

iii) El potencial de velocidades se aplica a flujos tridimensionales, mientras que la función de corriente solamente está definida para flujos bidimensionales.

En los problemas de flujo irrotacional, en vez de partir de 3 incógnitas (u,v y w) que requieren la solución de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas; se puede plantear una única incógnita (la función de potencial φ) que solo necesita resolver una sola ecuación. Una vez obtenida, mediante las expresiones α, ß y γ es posible caracterizar el campo de velocidades del flujo facilitando la resolución de dichos problemas. En esta razón radica el hecho de distinguir entre flujos rotacionales o irrotacionales ya que el análisis de estos últimos es mucho menos oneroso que el correspondiente a los rotacionales.

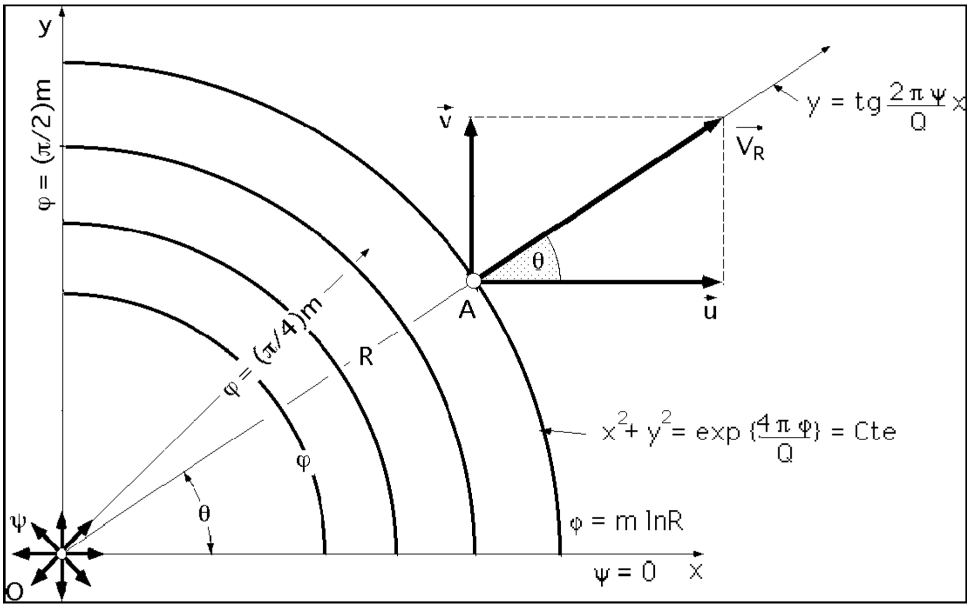
Potencial de velocidades para fuentes y sumideros en flujo bidimensional

En los distintos flujos pueden existir singularidades de distintos géneros; la más simple consiste en la introducción de otro fluido en el campo o la extracción del mismo. La primera recibe el nombre de fuente y la última sumidero.

Las singularidades modifican el campo de velocidades de la corriente fluida no perturbada. Si se suman algebraicamente los potenciales de velocidad de la corriente no perturbada y los de las singularidades, se define el potencial en un punto cualquiera del campo fluidodinámico total.

Está demostrado que combinando los potenciales de la corriente no perturbada y de las diversas singularidades se obtienen corrientes con características iguales a las que se tendrían si se sumergiesen en el fluido cuerpos de forma determinada.

Para comenzar, si suponemos una fuente situada en el origen de coordenadas, y un punto A genérico de coordenadas (x,y), las líneas de corriente son rectas radiales con origen en la fuente y las líneas equipotenciales corresponden a círculos concéntricos en dicha fuente .



Laboratorio de Aerodinámica y Fluidos

La velocidad resultante en A debida al manantial es V_R .Las componentes de dicha velocidad son: $u = V_R \cdot Cos[\theta]$ ∩ $v = V_R \cdot Sin[\theta]$

Las coordenadas del punto A son: $x_A = R \cdot Cos[\theta]$ ∩ $y_A = R \cdot Sin[\theta]$. (i)

Si se define el flujo por unidad de tiempo Q (caudal), de la forma:

$$Q = 2\pi R V_R \Rightarrow V_R = Q / (2\pi R) \qquad \text{(ii)}$$

Definiéndose la intensidad de la fuente (para dos y tres dimensiones) en la forma:

$$m_{(x,y)} = Q / (2\pi) \quad \cap \quad m_{(x,y,z)} = Q / (2\pi b)$$

con b= longitud de la fuente perpendicular al plano de la hoja.

Entonces, podremos iniciar la deducción de la función del potencial de velocidades para la fuente. Sabiendo que:

$$u = V_R \cdot Cos[\theta] \Rightarrow \text{por (ii)} \quad u = Q\, Cos[\theta]\, \mathbf{R} / (2\pi R \mathbf{R}) = Q\, x / (2\pi R^2) \qquad \text{ver (i)}$$

A su vez, sabiendo que $R^2 = (x^2 + y^2)$ queda:

$$u = Q\, x / [2\pi (x^2+y^2)] = [Q/(2\pi)] \cdot x / (x^2+y^2) = [\partial \varphi / \partial x]$$

haciendo un razonamiento análogo para y, llegamos a :

$$v = [Q/(2\pi)] \cdot y / (x^2+y^2) = [\partial \varphi / \partial y]$$

Por lo que integrando cualquiera de las expresiones anteriores podremos obtener la función de potencial φ.

$$\varphi = \int \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2}\, dx = \frac{Q}{4\pi} \ln\left(x^2+y^2\right) = \frac{Q}{4\pi} \ln\left(R^2\right) = \frac{Q}{2\pi} \ln(R)$$

Por otro lado, para las líneas de corriente ψ se cumple:

$$\partial \varphi/\partial x = \partial \psi/\partial y = u = [Q/(2\pi)] \cdot x / (x^2+y^2) \qquad \cap$$
$$\partial \varphi/\partial y = -\partial \psi/\partial x = v = [Q/(2\pi)] \cdot y / (x^2+y^2)$$

Integrando la primera (elección arbitraria), estaremos en condiciones de saber ψ

$$\psi = \int \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2}\, dy = \frac{Q}{2\pi} \text{ArcTan}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{Q}{2\pi} \theta$$

<u>Combinación de un flujo uniforme y una fuente</u>

Para comenzar es menester citar las funciones de corriente y potencial para un flujo uniforme de velocidad u_o ya que no fueron citadas anteriormente:

$$\Phi_{\text{flujo uniforme}} = u_o\, x \qquad \Psi_{\text{flujo uniforme}} = u_o\, y$$

Una vez conocido estos datos, podremos obtener las funciones de corriente y potencial para la combinación de una fuente y una corriente uniforme. Estas se obtienen mediante la suma algebraica de de las funciones correspondientes al flujo uniforme y la fuente, por ende:

$$\Phi = u_o\, x + [Q/(4\,\pi)] \cdot \ln (x^2 + y^2) \quad \cap \quad \psi = u_o\, y + [Q/(2\,\pi)]\ \mathrm{Arc\ Tan}[y/x]$$

Derivando, obtenemos las componentes de la velocidad:

$$u = \partial \varphi/\partial x = u_o + [Q\, x\ /(2\,\pi \cdot (x^2 + y^2)\,]$$
$$v = \partial \varphi/\partial y = [Q\, y\ /(2\,\pi \cdot (x^2 + y^2)\,]$$

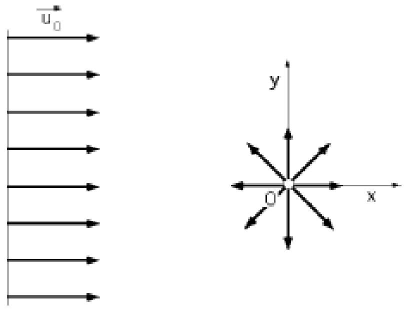


Fig IV.11.- Flujo rectilíneo y fuente

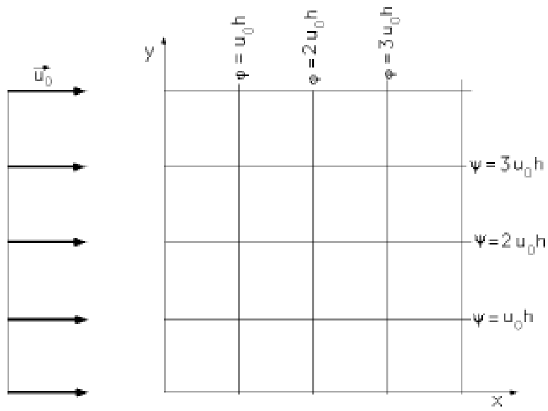


Fig IV.12.- Líneas equipotenciales y de movimiento

Por su parte, las líneas de corriente (□□= constante), toman la forma:

□□= u_o + [Q/(2□□□□□□Arc Tan [y / x] = Constante

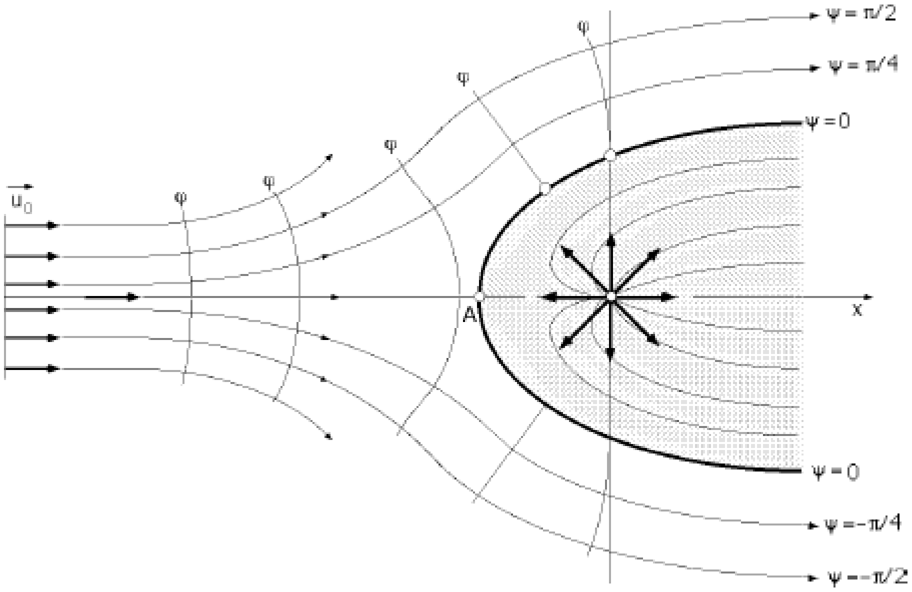
Para dibujarlas es necesario asignar distintos valores para la constante (0, ±□□/4□, □□□/ 2 …). El valor □□= 0 nos determinará el contorno del cuerpo y los restantes el flujo alrededor del cuerpo. Además quedarán definidas líneas internas al cuerpo que carecen de importancia. El cuerpo formado recibe el nombre de semicuerpo de Rankine. Para un valor nulo de la constante, tendremos:

□□= 0 ; y/x= tg (-2 □□u_o y/Q)

Este cuerpo semiinfinito separa a la corriente uniforme de la fuente; la parte superior y la parte inferior de dicho semicuerpo, coinciden en un punto de remanso (punto de velocidad nula), cumpliéndose en el mismo:

$u = u_o + [Q\,x \ / (2\,\pi \cdot (x^2 + y^2)\,] = 0$ con $x = -a$, $y = 0$ y $Q / (2\,\pi) = m$

$u = u_o - m/a = 0 \therefore \ a = m / u_o = Q / (2\,\pi\,u_o)$ quedando determinado el punto de remanso.



Las componente de las velocidades serán:

$u = u_o + (m\ /R)\cos[$□□□□□□□∩ □$v = (m\ /\ R)\,\mathrm{sen}[$□□

El punto de remanso A en coordenadas polares se obtendrá al despejar □ y R de las 2 expresiones anteriores igualadas a 0. Obteniéndose, □ = 0° ∩ $R = -\,m/u_o$.

Esta combinación de flujos representa en buen grado la parte frontal de un cuerpo cilíndrico inmerso en una corriente fluida.

<u>Ovalo de Rankine.</u>

El ovalo de Rankine es resultado de la colocación de una fuente y un sumidero de igual intensidad dispuestos equidistantemente del origen de coordenadas e inmersos en una corriente uniforme ($u_o\,x$), satisfaciéndose la condición de que todo el fluido de la fuente es absorbido por el sumidero. El ovalo hace las veces de línea de corriente divisoria entre el fluido de la corriente uniforme y el fluido transferido de la fuente al sumidero.

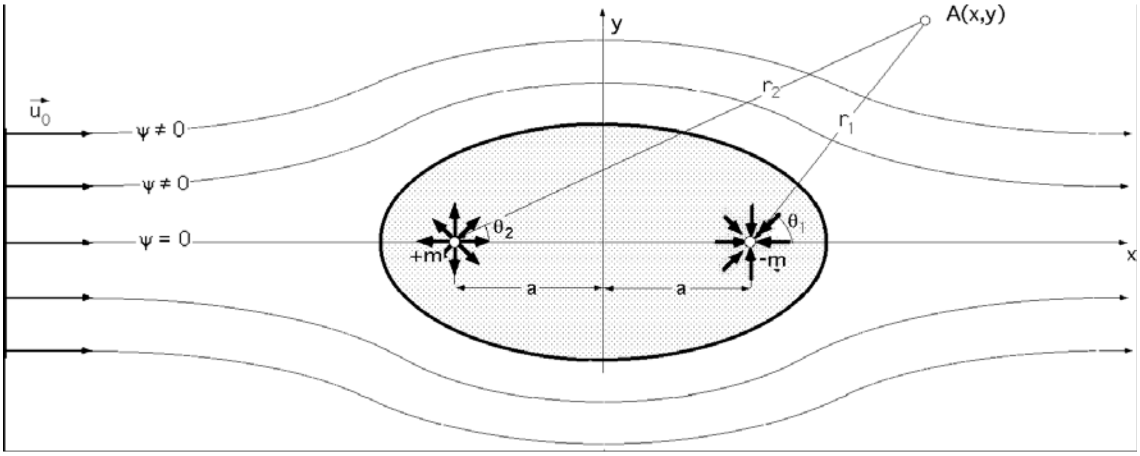
La superposición de los flujos antes mencionados da lugar a un flujo externo alrededor de un cilindro ovoidal. Combinando muchas fuentes y sumideros se obtiene el flujo aproximado alrededor de un cilindro de forma arbitraria, simétrico respecto al eje Ox.

Las líneas equipotenciales y de corriente definidas por el ovalo de Rankine tienen por ecuaciones las siguientes:

$\square\square = u_o\, x - [Q/(2\ \square\square]\ \ln r_1 + [Q/(2\ \square\square]\ \ln r_2$
$\square\square = u_o\, x + [Q/(4\ \square\square]\ \ln[\ \{(x + a)^2 + y^2\ \}/\ \{(x - a)^2 + y^2\}\ ]$

$\square\square = u_o\, y - [Q/(2\ \square\square]\ \square_1 + [Q/(2\ \square\square]\ \square\square_2 = u_o\, y - [Q/(2\ \square\square]\ \{ArcTan[y/(x-a)] - ArcTan[y/(x+a)]\} = u_o\, r\ sen[\square\square\square - m\ (\square_1 - \square_2)$
$\square\square = u_o\, y - m\ ArcTan[2\ a\ y\ /(x^2+y^2-a^2)]$

Recordando del apartado anterior que se definió la constante $Q/\ (2\ \pi) = m$



Los semiejes del óvalo, L y *h*, dependen de la intensidad relativa de la fuente y de la corriente uniforme, es decir, de la relación ($m/\ u_o\ a$). La línea oval estará determinada por la línea de corriente que corresponde a $\square\square = 0$. Al variar la relación anterior desde 0 a valores más altos, los semiejes del ovalo sufren un incremento, desde una placa plana de longitud (2a), hasta un cilindro casi circular.

Pasando al límite:

$m/(\ a)\ \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\ (L/h)\ \square 1\ \cap\ (u_{máx}\ /\ u_o)\square\square 2\ \}$

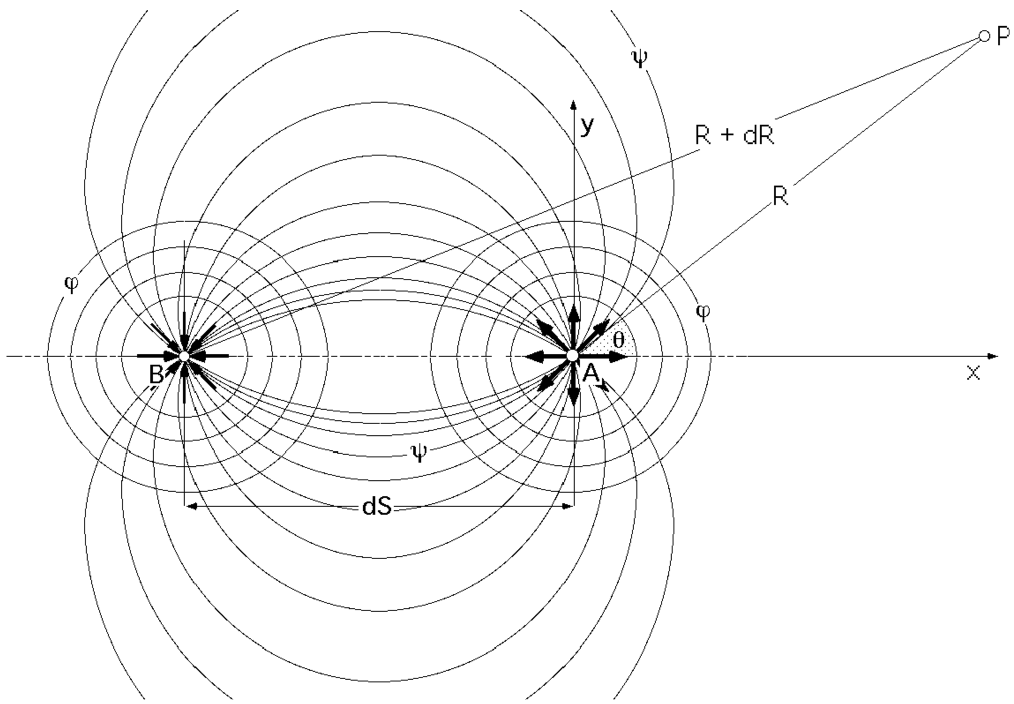
correspondiente al flujo en torno a un cilindro de sección circular.

Doblete

Partimos de la hipótesis de una fuente situada en el punto A (ver figura más adelante) que consideramos como origen de coordenadas, y un sumidero en B (de idéntica intensidad) lo cual supone el mismo valor de Q. Están distanciados una magnitud dS infinitesimal, cumpliendo siempre la condición de estar tan cerca como se quiera, siempre que se mantenga constante el producto de su intensidad por la distancia que los separa (m ds = 0). La función potencial φ_D en cualquier punto P es la suma de las funciones potenciales de la fuente y del sumidero; por ende:

$$\varphi_D = \{Q/(2\ \pi)\}\ \ln R - \{Q/(2\ \pi)\}\ \ln (R + dR) = - \{Q/(2\ \pi)\}\ \ln[(R + dR)/R] \quad □>$$

$$\varphi_D = - \{Q/(2\ \pi)\}\ \ln (1 + dR/R)$$



Si esta expresión la desarrollamos como serie de potencias se obtiene:

$□_D$ = -{Q/2 □□ [dR/R- 0.5 $(dR/R)^2$+ ...) = Q dR /(2 □□R)

$□_D$ = - Q dS Cos□□/ (2 □□R)

Siendo el valor Q dS/(2 □) = Constante = F y definiéndose la intensidad (m) de la fuente y del sumidero como: Q/(2 □□□□□la función potencial $\square_D$ para el doblete será:

$\square_D$ =-F Cos[□□□□R= - F x /R^2 = - F x / $(x^2 + y^2)$

Con la función de potencial conocida, estaremos en condiciones de obtener el campo de velocidades del flujo:

u = □□□$_D$ / □x = -[F$(x^2 + y^2)$ - 2 F x^2] / $(x^2 + y^2)^2$ = -F $(x^2 - y^2)$ /$(x^2 + y^2)^2$
v = □□$_D$/□y = 2 F x y / $(x^2 + y^2)^2$

Pero de las relaciones antes establecidas:

□□□$_D$ / □x = □□$_D$ / □y ∩   □□$_D$/□y=-□□$_D$ /□x

Podremos obtener la función de corriente $\square_D$ para el doblete integrando:

$\square_D$ = - □□□□2 F x y / $(x^2+ y^2)^2$]dx = F y / $(x^2 + y^2)$

Esta expresión marca el hecho de que las *líneas de corriente son círculos* (ver (i)) con centros desplazados del origen de coordenadas sobre el eje *y*. Misma conclusión llegamos para el caso de las *líneas equipotenciales*,(ver (ii)) pero diferenciándose en el hecho de tener sus centros sobre el eje x.

Si realizamos unos artilugios matemáticos muy simples veremos que:

$\square_D$ = F y / $(x^2 + y^2)$ = □□(constante) => $x^2 + y^2$- y F/K = 0 =>

x^2+y^2- y F/K + $(F/ 2K)^2$ = $(F/ 2K)^2$ => x^2+ (y- F/ $(2K))^2$ = $(F/ 2K)^2$ (i)

Lo que marca que el centro del circulo será: $x_{O\square D}$= 0 ∩ $y_{O\square D}$ = F/(2 $\square_D$)

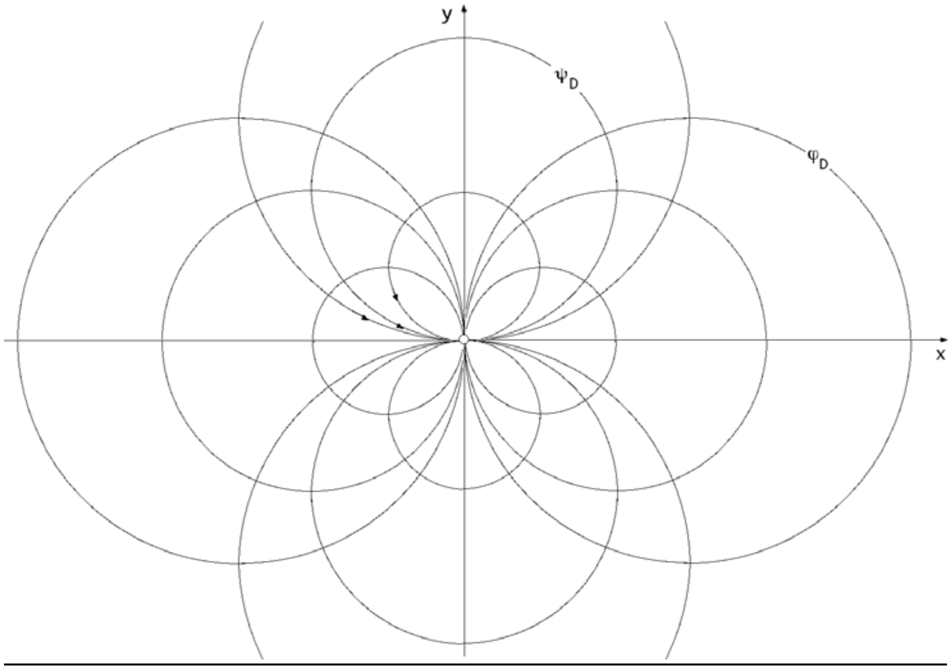
Si trabajamos análogamente con la función de potencial, tendremos:

$\square_D$ = W (constante) = - F x / $(x^2 + y^2)$ => $x^2 + y^2$+ x F/W+ $(F/ 2W)^2$ = $(F/ 2W)^2$ =>

y+ (x+ F/ $(2W))^2$ = $(F/ 2W)^2$ (ii)

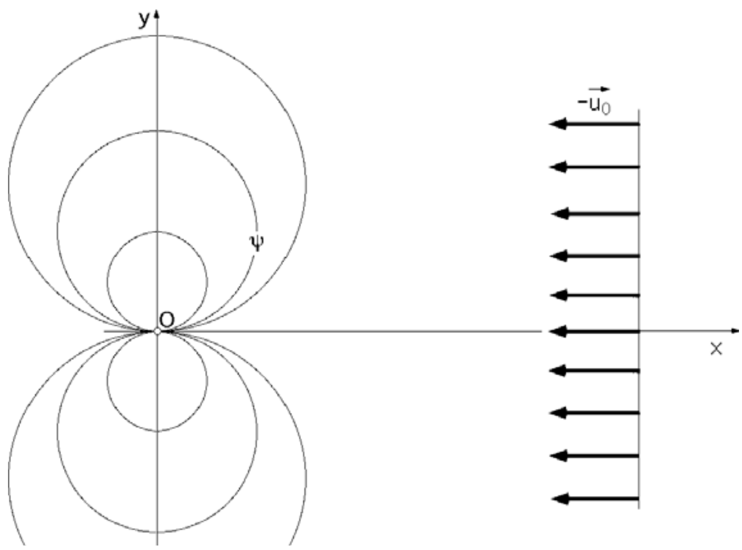
indicando que el centro estará ubicado en las coordenadas: $x_{O\square D}$= 0 ∩ $y_{O\square D}$ =- F/(2 $\square_D$)

Un doblete visto desde muy lejos (ver figura abajo) supone que las líneas de corriente son círculos tangentes al eje *x* en el origen, mientras que visto desde muy cerca se corresponde con la representación hecha anteriormente.



Combinación de un flujo uniforme y un doblete

Si suponemos un doblete ubicado en el origen O sumergido en un flujo uniforme rectilíneo con velocidad $-u_o$ a largo del eje Ox.



Laboratorio de Aerodinámica y Fluidos

El potencial de velocidades para el flujo rectilíneo como se definió anteriormente es de la forma

$$□_{corriente\ uniforme} = (-u_o\ x)$$

Por otro lado, el potencial de velocidades total□□ para el flujo combinado es:

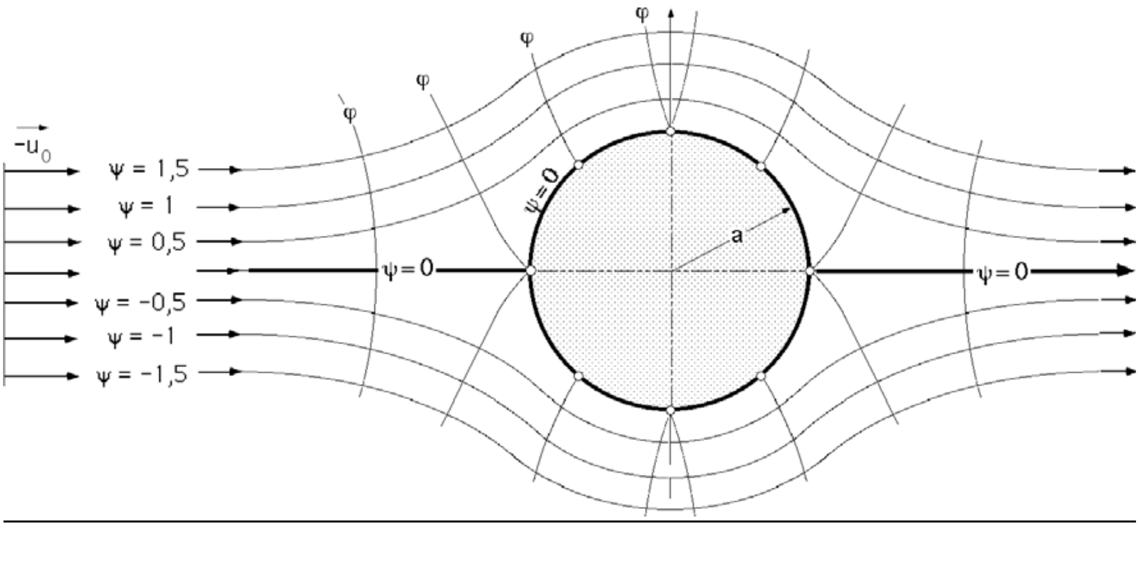
$$□□ = -u_o\ x - F\ x\ /\ (x^2+y^2)$$

La función de corriente total □, para el flujo combinado es:

$$□□□ = -\ u_o\ y + F\ y\ /\ (x^2+y^2)$$

Las líneas que cumplen la condición □□= Cte, son las líneas de corriente; para el caso particular de, □□= 0,se obtiene el llamado “Cuerpo de Rankine”:

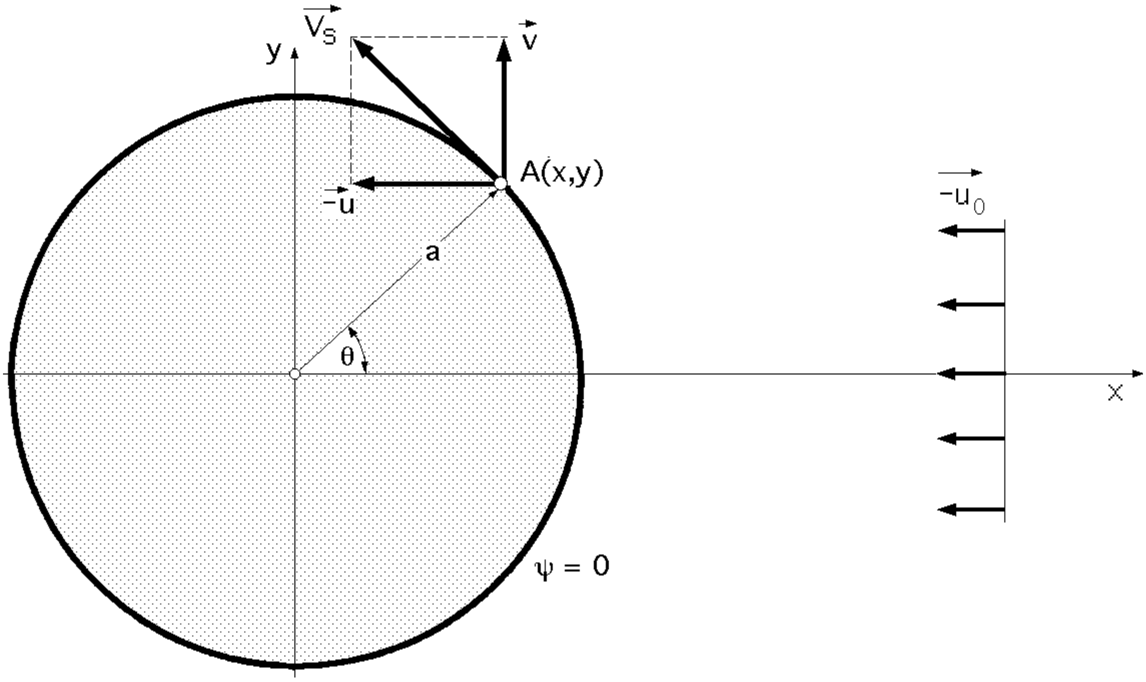
$F\ \ y\ /(x^2 + y^2) - u_o\ y = 0 \ \rightarrow y = 0\ \cap\ x^2 + y^2 = F\ /\ u_o = a^2$ que corresponde a la ecuación de una circunferencia de radio: $a = (F\ /\ u_o)^{1/2}$



<u>Distribución de velocidades en torno a un cilindro circular.</u>

Si consideramos un cilindro circular sometido a una corriente fluida uniforme, las coordenadas cartesianas de un punto genérico sobre la superficie del cilindro estarán dadas por :

$$x = a\ Cos[□□□□□□□□□\cap \qquad y = a\ \ Sin[□□$$



La velocidad V_S en dicho punto es de la forma: $V_s = (u_s{}^2 + v_s{}^2)^{1/2}$

Pero por definición de función de potencial:

u_S = □□□□□x □□∩ v_S = □□□□□y ➔

$u_s = - u_o - u_o a^2 (y^2 - x^2) / (x^2 + y^2)^2$
= $- u_o - u_o a^2$ (a^2 Sin^2[□□ - a^2 Cos[□□) / (a^2 Sin^2[□□ + a^2 Cos^2[□□$)^2$ ➔
$u_s = - 2\ u_o$ Sin^2[□□

$v_s = 2 a^2 x u_o y / (x^2 + y^2)^2$
=2 a^2 u_o a^2 Cos[□□ Sin[□□ / {a^4 (Sin^2[□□ + Cos^2[□□$)^2$ } ➔
$v_s = 2 u_o$ Sin[□□ Cos[□□

Por lo que reemplazando en la expresión citada unos renglones más arriba:

V_S = (4 u_o 2 Sin^4[□□ + 4 $u_o{}^2$ Sin^2[□□ Cos^2[□□ $)^{1/2}$ = 2 u_o Sin[□□

que es la distribución de velocidades en torno a un cilindro de sección circular. Se aprecia que es función del ángulo □□que define sobre la circunferencia de radio **a**, la posición del punto genérico A(x,y).

Conservación de la masa y la ecuación de continuidad

Una de las leyes empíricas que forma la base de la “mecánica Newtoniana” establece que la masa no puede ser creada ni destruida. Este principio de conservación se aplica a un elemento de fluido de identidad fija y, para expresar el principio en términos de las propiedades del campo del flujo, se aplicará el siguiente razonamiento físico.

Considere un volumen de control *R* fijo en el campo de movimiento (ver figura). Si la masa que abandona a dicho volumen es mayor a la que entra, entonces la masa dentro de *R* irá decreciendo. Específicamente, el flujo másico neto a través de S es igual a la tasa de variación de la masa con el tiempo dentro de R (decreciente). A través de un elemento diferencial *dS* de la superficie de control, el flujo de masa por unidad de tiempo es

$\rho V \cdot n\, dS$ con n = el versor normal que define a dS (positivo cuando sale del volumen de control)

Por lo tanto, el flujo másico es (por aplicación del teorema de la divergencia)

$$\iint_S \rho \vec{V} \cdot n \, dS = \iiint_R \operatorname{div} \rho \vec{V} \, dR$$

Donde ρ y V son propiedades del campo. La masa total dentro de *R* es

$$\iiint_R \rho \, dR$$

Donde $\rho \, dR$ es la contribución infinitesimal de masa en un punto dado al total dentro de la región *R*

Entonces, el principio de conservación de la masa puesto en términos de las propiedades del campo es:

$$\iiint_R \operatorname{div} \rho \vec{V} \, dR = - \iiint_R \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dR$$

Esta ecuación simplemente establece que la taza neta con la que la masa fluye a través de los límites de una región cerrada deber ser igual a la taza con la cual la masa dentro de la región está disminuyendo

Como una simple aplicación del principio enunciado más arriba, considere el flujo estacionario de un fluido a través del tubo de corriente en la figura anterior (en línea de trazos). El volumen de control está contenido dentro de 2 líneas de corriente vecinas y las líneas punteadas. No hay flujo a través de las líneas de corriente debido a que son tangentes a la velocidad local del fluido en todo punto del campo, y se asume que ρ_1 y V_1 tiene valores constantes a través del área A_1. Lo mismo es válido para ρ_2 y V_2 a través de A_2. Debido a que el flujo es estacionario, el miembro derecho de la ecuación de anterior es nulo, quedando entonces:

$$\rho_1 V_1 A_1 - \rho_2 V_2 A_2 = 0$$

La ecuación de continuidad es un…………….. del principio de conservación de la masa en términos de las propiedades del campo en un punto. Esto se deduce simplemente de la ecuación de continuidad escrita de la forma:

$$\oint_R \rho \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dR = 0$$

Esta ecuación debe ser válida para todo los volúmenes de control independientemente del tamaño, por lo tanto el integrando debe ser nulo. Entonces, la ecuación de continuidad, aplicada a las condiciones de un punto se vuelve:

$$\boxed{\mathrm{div}\, \rho V = - \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Esta expresión es satisfecha en un flujo físicamente posible, esto es, un flujo en el cual la masa se conserva. Cuando el flujo es estacionario, las propiedades del campo no son funciones del tiempo y la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\mathrm{div}\, \rho \mathbf{V} = 0$$

Es posible simplificar aún más esta expresión si consideramos un flujo incompresible. En este caso ρ es constante y puede ser eliminado, obteniendo:

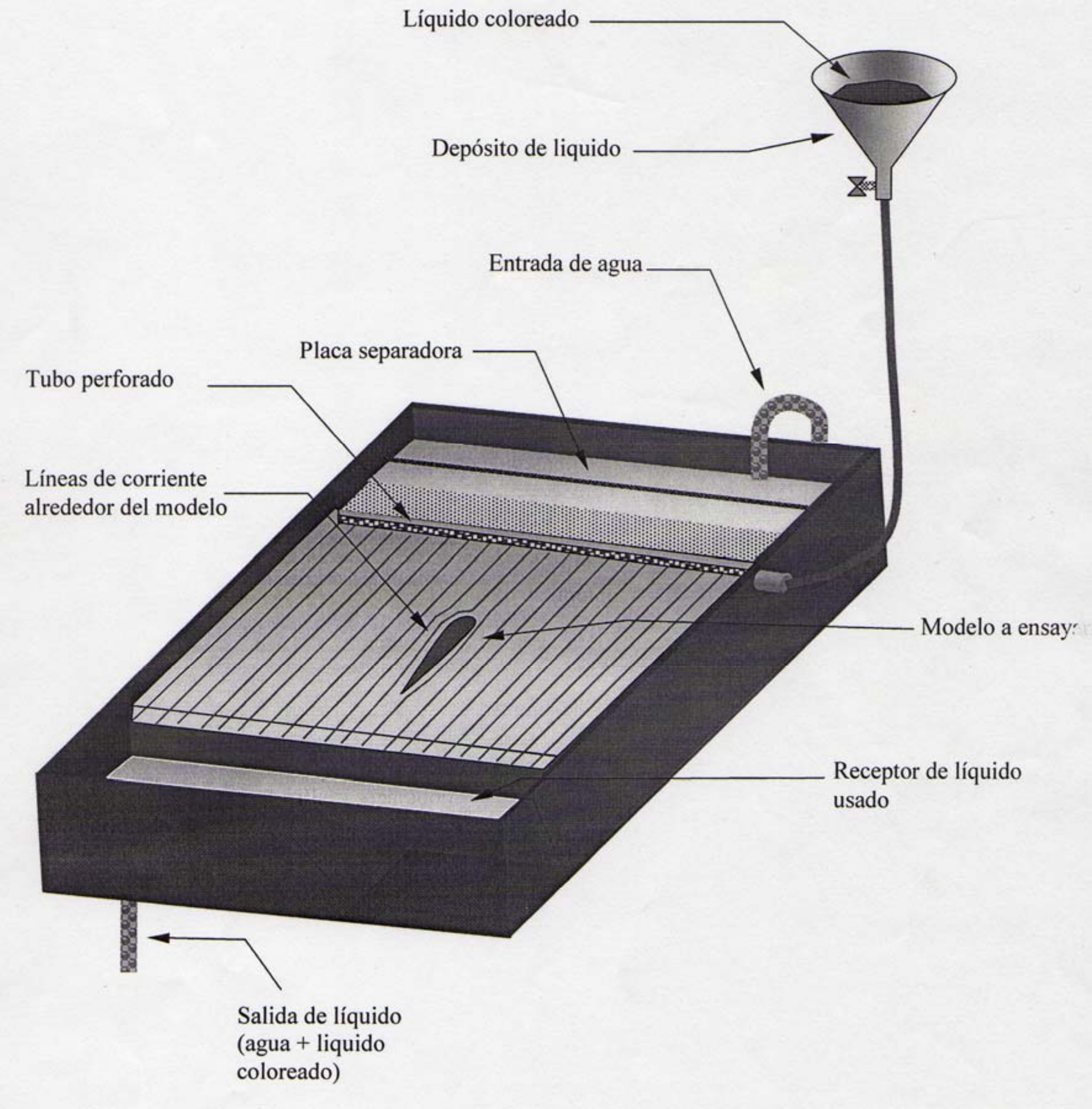
$$\mathrm{div}\, \mathbf{V} = 0$$

De todas estas expresiones es posible sacar una conclusión. “Un campo de velocidad dado es físicamente posible solamente si la continuidad, definida por alguna de estas ecuaciones adecuadas al flujo bajo consideración, se satisface”.

3- Laboratorio de ensayos aeronáuticos

4-Instrumentación

La caja de Hele Shaw presenta las siguientes partes constitutivas



Además son necesarios instrumentos de medición tanto de tiempo como de distancia: cronómetro y reglas milimetradas para medir la velocidad del flujo y las medidas características de los modelos a ensayar.

Por otro lado, para registrar los patrones de flujo (líneas de corriente) es menester contar con dispositivos fotográficos.

5-Ensayo

Objetivo

Observar el comportamiento de las líneas de corriente en función de las variables consideradas: geometría de la pieza y velocidad del flujo; y sacar conclusiones basándose en los argumentos teóricos volcados en el presente trabajo.

Laboratorio de Aerodinámica y Fluidos

Tareas preparatorias
i-Realizar la conexión de las mangueras de alimentación y desagote de agua de la caja
ii-Verificar la nivelación lateral y longitudinal de la caja. Como el agua se desplaza por capilaridad, la sección aguas debajo de la caja debe estar en un nivel más alto que su contrapartida aguas arriba. La nivelación lateral debe ser la correcta para evitar la desviación del flujo.
iii-Preparar el colorante y depositarlo en el balón que acompaña a la caja (previa comprobación de que la llave del mismo esté cerrada).
iv- Habilitar la alimentación de agua y verificar su correcta circulación sobre la caja.
v- Elegir los perfiles a utilizar en la práctica.

Procedimiento
i- Colocar el vidrio sobre la superficie de la caja cuidando de no dejar burbujas entre el vidrio y el área de ensayo de ensayo
ii- Abir ligeramente la llave del balón hasta observar que el colorante manifiesta las líneas de corriente, asegurarse que el flujo sea laminar y cerrarla nuevamente.
iii- En caso de que el flujo no sea laminar ajustar el caudal de alimentación hasta conseguirlo.
iv- Fijar una longitud de referencia sobre la superficie de ensayo (20-30cm).
v- Abrir la llave del balón, cronometrar el tiempo que la línea de corriente coloreada toma en cubrir la longitud de referencia anterior y cerrar la llave.
vi- Volcar los datos en la planilla adjunta.
vii- Repetir el procedimiento 3 veces y sacar la velocidad media del flujo
viii- Elegir los modelos que van a ser utilizados en el ensayo.
ix- Medir la longitud característica de dichos modelos (cuerda, largo o diámetro) y volcarla en la tabla adjunta.
x- Extraer el vidrio y colocar el modelo a ensayar.
xi- Colocar de nuevo el vidrio evitando la formación de las burbujas antes mencionadas
xii- Abrir levemente la llave del balón.
xiii- Observar el comportamiento de las líneas de corriente alrededor del modelo.
xiv- Retratar el patrón de las mismas por cualquier medio fotográfico disponible.
xv- Repetir x- a xiv- variando la disposición del modelo primero y luego con otros modelos.
xvi- Cerrar el balón y la alimentación de agua.
xvii- Obtener el Número de Reynolds para cada modelo

Longitud de referencia [m]	Tiempo$_i$ [seg]	Velocidad$_i$ [m/seg]	Velocidad$_{Promedio}$ [m/seg]

Laboratorio de Aerodinámica y Fluidos

Modelo	Longitud característica [m]	Número de Reynolds

Cuestionario

1-Descripción y funcionamiento de la caja de Hele Shaw

2- Dibujar las líneas de corriente para todas las geometrías utilizadas

3-Explique qué ocurre cuando hay un acercamiento/alejamiento de las líneas de corriente y en a base que principio físico se apoya dicho comportamiento.

4- ¿Porqué las líneas de corriente son paralelas cuando no colocamos ningún cuerpo?

5-Obtener las líneas de corriente mediante la superposición de distintos flujos elementales (fuente, sumidero, doblete, etc) de un cilindro, un óvalo de Rankine y un perfil simétrico son curvatura.

6- Comparar las líneas de corriente obtenidas en 2) y en 5). Si hay diferencias explíquelas.

7- Compare las líneas de corriente de un perfil con cierto angulo de ataque, estado inmerso en un flujo potencial y en un flujo real, explique sus diferencias.