HYDROMECHANIKA

HYDROSTATIKA
základní zákony hydrostatiky

Část 3

Literatura :
Otakar Maštovský; HYDROMECHANIKA
Jaromír Noskijevič, MECHANIKA TEKUTIN
František Šob; HYDROMECHANIKA

Hydrostatika - obsah

Základny hydrostatiky

- Definice hydrostatického problému
    - Orientace plochy
- Příklady kde je využívána hydrostatika v praxi
- Šíření tlaku v kapalině - Pascalův zákon
- Eulerova rovnice hydrostatiky - rovnice rovnováhy
- Přírůstek tlaku v kapalině, tlakové plochy, hladina

Aplikace hydrostatických zákonů

- Nestlačitelná kapalina za působení zemské tíže.
- Stlačitelná kapalina za působení zemské tíže.
- Hydraulický lis
- Hydrostatika v relativním prostoru

Konec

Hydrostatika

Čím se budeme v hydrostatice zabývat?

V hydrostatice *se budeme zabývat kapalinou, která je v klidu. To je kapalinou, jejíž částice se nepohybují vůči sobě a vůči stěnám nádoby.*

Síly *působící na element kapaliny.*

Hmotnostní síly *(Objemové síly)*

Gravitační síla

$$d\mathbf{F}_G = \mathbf{g} \cdot \rho \cdot dV$$

Setrvačná síla

$$d\mathbf{F}_{SE} = \mathbf{A} \cdot \rho \cdot dV$$

Plošné síly *pouze ve směru normály k ploše - není tam vzájemný pohyb.*

$$d\mathbf{F}_S = p \cdot d\mathbf{S}$$

Orientace plochy????

Obsah

Poznámka

Orientace plochy *aneb plocha jako vektor a její složky*

$$\mathbf{n} = (n_x, \quad n_y, \quad n_z) = (\cos\varphi, \quad \sin\varphi, \quad 0)$$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$$

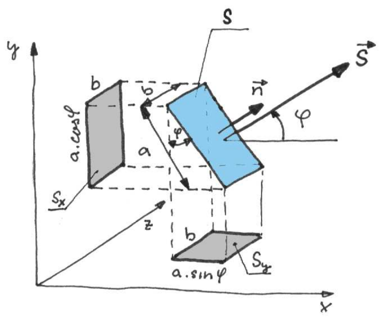
$$S = a \cdot b$$

$$\mathbf{S} = a \cdot b \cdot \mathbf{n}$$

$$S_x = a \cdot b \cdot n_x = a \cdot b \cdot \cos\varphi$$

$$S_y = a \cdot b \cdot n_y = a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

$$S_z = a \cdot b \cdot n_z = a \cdot b \cdot 0 = 0$$



Obsah

Příklady z praxe

Hydraulický píst na ovládání rozváděcích lopatek turbíny.

Obsah

Příklady z praxe

Rozváděcí lopatky oběžného kola
kaplanovy turbíny

Obsah

Příklady z praxe

Obsah

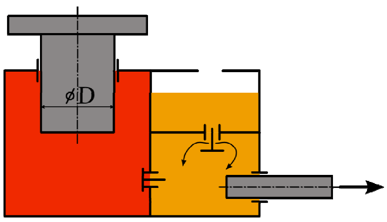
Příklady z praxe

Obsah

Příklady z praxe

Obsah

Příklady z praxe



Obsah

Hydrostatika-Pascalův zákon

Blaise Pascal
(1623-1662)

Je-li kapalina v hydrostatické rovnováze pak se tlak v kapalině šíří všemi směry stejně.

Silová rovnováha ve směru

x:

$$p_x \cdot dy \cdot dz = p \cdot dl \cdot dz \cdot \sin\alpha$$

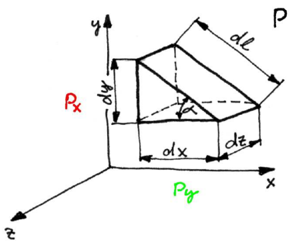
$$p_x \cdot S_x = p \cdot S_x$$

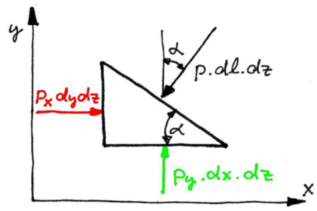
$$p = p_x = p_y = p_z$$

y:

$$p_y \cdot dx \cdot dz = p \cdot dl \cdot dz \cdot \cos\alpha$$

$$p_y \cdot S_y = p \cdot S_y$$





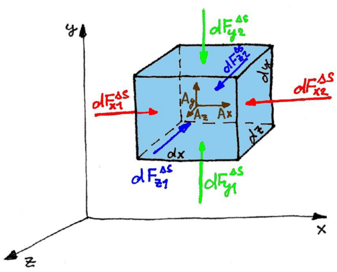
Obsah

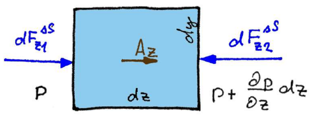
Hydrostatika-Eulerova rovnice hydrostatiky

Euler Leonardo (1707-1783)

Eulerova rovnice hydrostatiky vyjadřuje **rovnováhu sil** působících na makroskopickou částici, za předpokladu, že kapalina se nachází hydrostatické rovnováze

Odvození:





Obsah

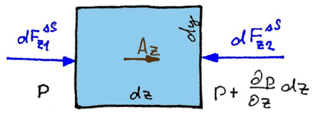
Hydrostatika-Eulerova rovnice hydrostatiky

Ve složkách:

ve směru x: $$A_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

ve směru y: $$A_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

ve směru z: $$A_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$



Vektorově:

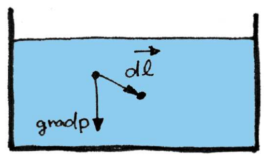
$$\mathbf{A} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(p) = 0$$

Obsah

Hydrostatika-Přírůstek tlaku v kapalině

Přírůstek tlaku můžeme vyjádřit obecně platnou diferenciální rovnicí:

$$dp = \mathrm{grad}(p).d\mathbf{l}$$



Eulerova rovnice hydrostatiky (ERHS)

$$\mathbf{A} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(p) = 0$$

Po dosazení z ERHS dostaneme obecnou diferenciální rovnici funkce tlaku

$$dp = \rho\mathbf{A}.d\mathbf{l}$$

Integrací pak dostáváme funkci tlaku

$$p = \int_{\ell}\rho\mathbf{A}.d\mathbf{l} = \int_{\ell}\rho\left(A_x.dx + A_y.dy + A_z.dz\right)$$

Obsah

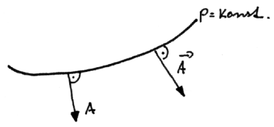
Hydrostatika-Tlakové hladiny

Tlaková hladina je plocha, kde je tlak konstantní. Platí pro ni tato diferenciální rovnice:

$$\rho \mathbf{A}.\mathrm{d}\mathbf{l} = 0$$

Objemové zrychlení (objemová jednotková síla) je na tlakovou hladinu kolmé

$$\mathbf{A} \perp \mathrm{d}\mathbf{l}$$



Konkrétní tlakovou hladinu dostaneme z tlakové funkce.

$$p = \int_{\ell} \rho \mathbf{A}.\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{\ell} \rho \left(A_x.dx + A_y.dy + A_z.dz\right)$$

Dosadíme konkrétní tlak

Co je to hladina?

Obsah

Hydrostatika-Přírůstek tlaku v kapalině

Nestlačitelná kapalina v klidu za působení zemské tíže

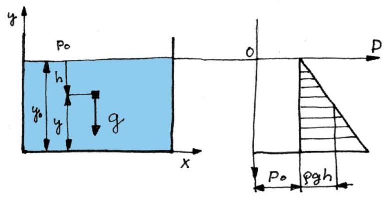
Přírůstek tlaku můžeme vyjádřit již zmiňovanou rovnicí:

$$dp = \rho \cdot \mathbf{A} \mathrm{d}\mathbf{l}$$

$$\mathbf{A}(0 \quad ; \quad -g \quad ; \quad 0)$$

$$\mathrm{d}\mathbf{l}(dx \quad ; \quad dy \quad ; \quad dz)$$

$$dp = -\rho \cdot g dy$$



Po integraci

$$p = -\rho \cdot gy + C$$

Okrajové podmínky

$$y = y_0 \qquad p = p_0$$

$$p = p_0 + \rho \cdot gh$$

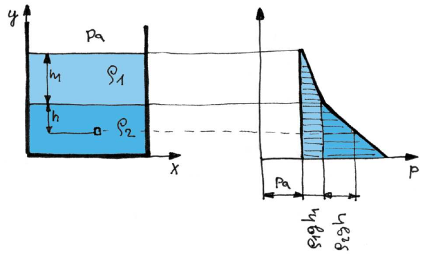
$$p_h = \rho \cdot gh$$

Obsah

Hydrostatika-Přírůstek tlaku v kapalině

Nestlačitelná kapalina v klidu za působení zemské tíže

Jak to bude vypadat, když budeme mít dvě kapaliny, které se vzájemně nebudou mísit?



$$p = p_0 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h$$

$$p_h = \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h$$

Obsah

Hydrostatika-Přírůstek tlaku v kapalině

Stlačitelná kapalina v klidu za působení zemské tíže

Musíme nejdříve vyjádřit závislost hustoty na tlaku. Vycházíme ze vztahu při definici modulu objemové pružnosti:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K}$$

Předpoklad K=konst.

Po integraci, s uvážením okrajové podmínky že pro $p=p_0$, $\rho=\rho_0$

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{p-p_0}{K}}$$

Přírůstek tlaku je dán diferenciální rovnicí

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dy = -\rho_0 \cdot g \cdot dy \cdot e^{\frac{p-p_0}{K}}$$

$$e^{-\frac{p-p_0}{K}} dp = -\rho_0 \cdot g \cdot dy$$

Obsah

Hydrostatika-Přírůstek tlaku v kapalině

Stlačitelná kapalina v klidu za působení zemské tíže

Tuto rovnici budeme integrovat:

$$-K\cdot e^{-\frac{p-p_0}{K}} = -\rho_0\cdot g\cdot y + C$$

S uvážením okrajové podmínky že pro $y=y_0$ je $p=p_0$, dostaneme výsledný vztah:

$$p = p_0 - K\cdot \ln\left(1-\frac{\rho_0\cdot g\cdot h}{K}\right)$$

Zkusme srovnat tlak vody v hloubce 1000 m bez uvažování stlačitelnost a s uvažováním stlačitelnosti. Modul objemové stlačitelnosti při t=20°C, $K=2{,}36.10^9$.

a) nestlačitelná kapalina   ph = 10 000 000 Pa = 10 MPa

b) stlačitelná kapalina   ph = 10 021 246 Pa = 10, 021246 MPa

Rozdíl je 21 246,5 Pa to odpovídá hloubce 2,1 m

Rozdíl při 2000 m odpovídá tlaku 8,5 m vodníhosloupce

Obsah

Hydrostatika-Pascalův zákon a hydraulický lis

U hydraulických lisů můžeme hmotnostní síly **zanedbat** vůči silám plošným.

$$\mathbf{F}^{O} \ll \mathbf{F}^{\Delta S}$$

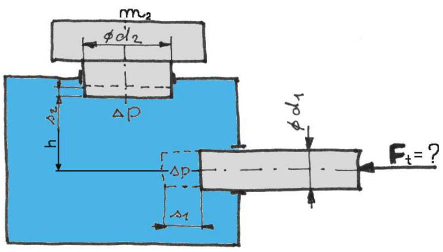
Předpokládáme-li že ρ = konst., pak Eulerova rovnice hydrostatiky má tvar:

$$\mathrm{grad}(p) = 0$$

Ztoho vyplývá, že p= konst. Pak platí:

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_2 = F_1\frac{S_2}{S_1}$$



Obsah

Hydrostatika - Relativní prostor

- rovnoměrně zrychlený/zpomalený ve vodorovném směru
- rovnoměrně zrychlený/zpomalený ve svislém směru
- Rotující nádoba

Obsah

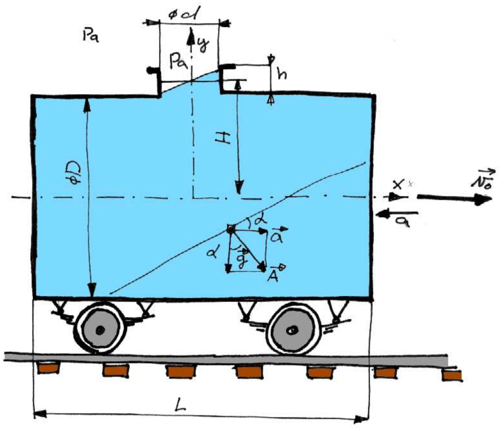
Hydrostatika - Relativní prostor

Rovnoměrně zrychlený/zpomalený ve vodorovném směru

$$dp = \rho \cdot \mathbf{A} d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{A}(a \quad ; \quad -g \quad ; \quad 0)$$

$$d\mathbf{l}(dx \quad ; \quad dy \quad ; \quad dz)$$



Obsah

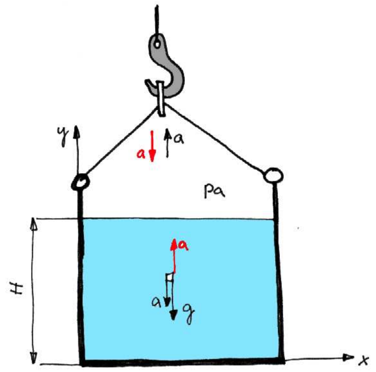
Hydrostatika - Relativní prostor

Rovnoměrně zrychlený/zpomalený ve svislém směru

$$dp = \rho \cdot \mathbf{A} d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{A}(0 \quad ; \quad \pm a - g \quad ; \quad 0)$$

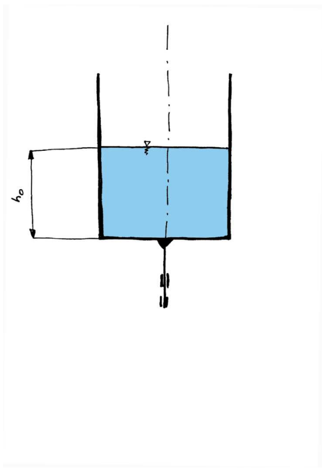
$$d\mathbf{l}(dx \quad ; \quad dy \quad ; \quad dz)$$



Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Nádoba je v klidu.
Známe:
poloměr R,
výšku hladiny v nádobě h_0,
výšku nádoby H_v



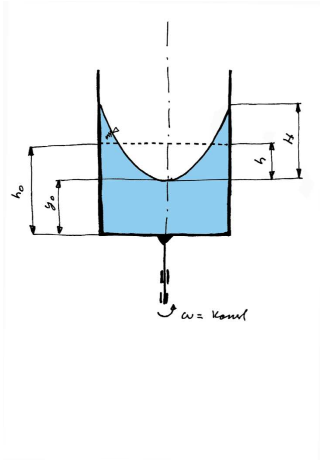
Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Nádoba rotuje konstantní úhlovou rychlostí.

Známe:
úhlovou rychlost w

Hledáme:
tvar hladiny,
vztah pro určení tlaku v nádobě.



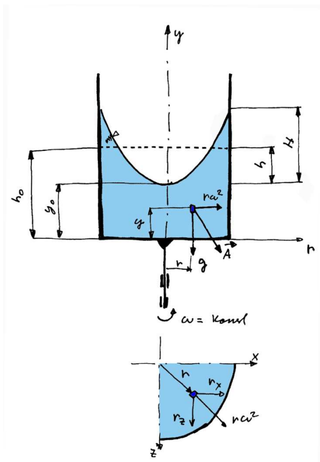
Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Vycházíme ze vztahu pro přírůstek tlaku v kapalině

$$dp = \rho \cdot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{A}\left(r\omega^2, \quad -g\right) \qquad d\mathbf{l}\left(dr, \quad dy\right)$$



Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Vycházíme ze vztahu pro přírůstek tlaku v kapalině

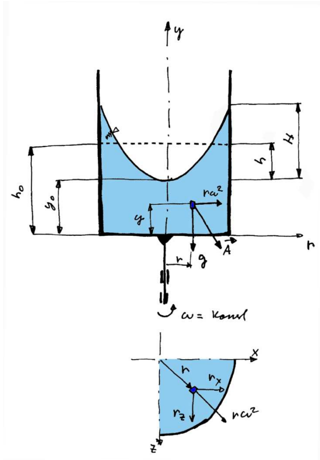
$$dp = \rho \cdot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{A}\left(r\omega^2, \quad -g\right) \qquad d\mathbf{l}\left(dr, \quad dy\right)$$

Po dosazení a integraci

$$p = \rho \cdot \int \left(r\omega^2 dr - g dy\right)$$

$$p = \rho \cdot \frac{r^2\omega^2}{2} - \rho \cdot g \cdot y + C$$



Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Vycházíme ze vztahu pro přírůstek tlaku v kapalině

$$dp = \rho \cdot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

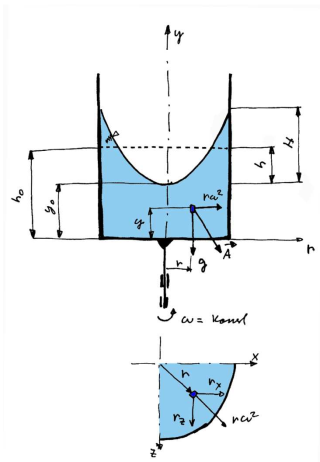
$$\mathbf{A}\left(r\omega^2, \quad -g\right) \qquad d\mathbf{l}\left(dr, \quad dy\right)$$

Po dosazení a integraci

$$p = \rho \cdot \int \left(r\omega^2 dr - g dy\right)$$

$$p = \rho \cdot \frac{r^2\omega^2}{2} - \rho \cdot g \cdot y + C$$

Jak určíme integrační konstantu?



Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

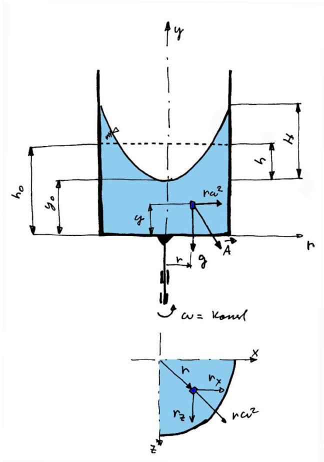
$$p = \rho \cdot \frac{r^2\omega^2}{2} - \rho \cdot g \cdot y + C$$

Určení integrační konstanty C.
Víme že pro

$$r = 0 \qquad y = y_0$$

platí

$$p = p_a$$



Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

$$p = \rho \cdot \frac{r^2\omega^2}{2} - \rho \cdot g \cdot y + C$$

Určení integrační konstanty C.
Víme že pro

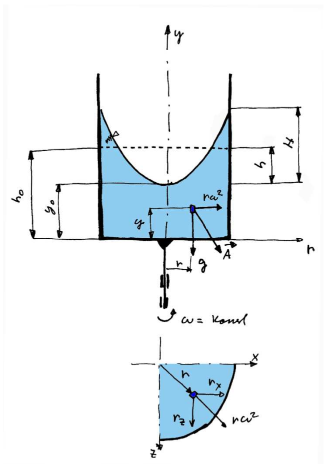
$$r = 0 \qquad y = y_0$$

platí

$$p = p_a$$

pak

$$C = p_a + \rho \cdot g \cdot y_0$$



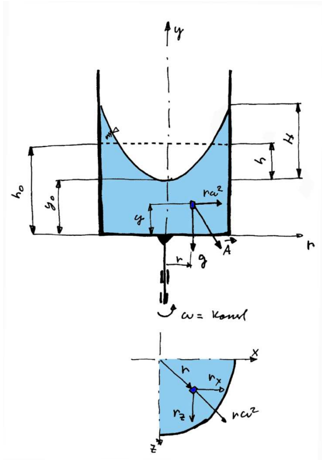
Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

$$p = \rho \cdot \frac{r^2\omega^2}{2} - \rho \cdot g \cdot y + C$$

Určení integrační konstanty C.
Víme že pro

$$r = 0 \qquad y = y_0$$



platí

$$p = p_a$$

pak

$$C = p_a + \rho \cdot g \cdot y_0$$

a tedy

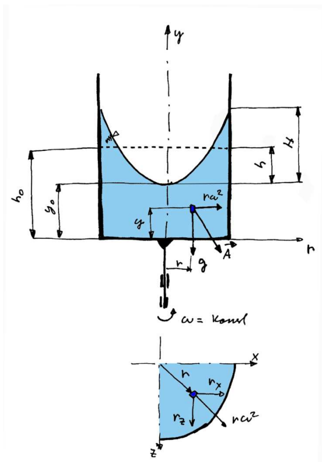
$$p = p_a + \rho \cdot \frac{r^2\omega^2}{2} + \rho \cdot g \cdot (y_0 - y)$$

Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Jak určíme velikost y_0?

Určíme ho z rovnosti objemů.

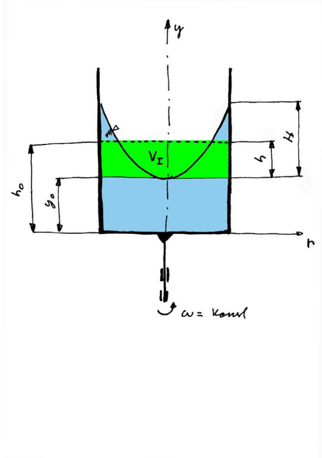


Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Nejdříve určíme objem V_I

$$V = \pi . R^2 . h$$



Obsah

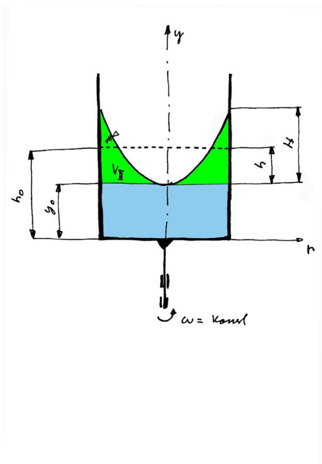
Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Nejdříve určíme objem V_I

$$V_I = \pi . R^2 . h$$

Objem V_{II}

$$V_{II} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \omega^2}{2 \cdot g} r d\varphi dr = \frac{R^2 \omega^2}{2 \cdot g} \frac{\pi R^2}{2}$$

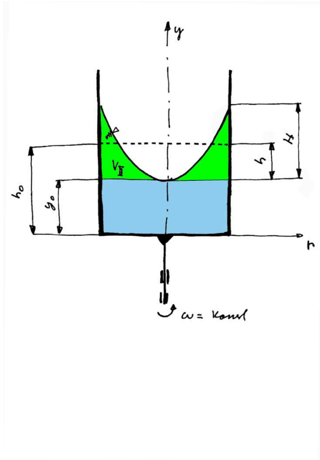


Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Nejdříve určíme objem V_I

$$V_I = \pi.R^2.h$$



Objem V_{II}

$$V_{II} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r^2\omega^2}{2\cdot g} r d\varphi dr = \frac{R^2\omega^2}{2\cdot g}\frac{\pi R^2}{2}$$

Srovnáním dostaneme

$$h = \frac{R^2\omega^2}{4\cdot g}$$

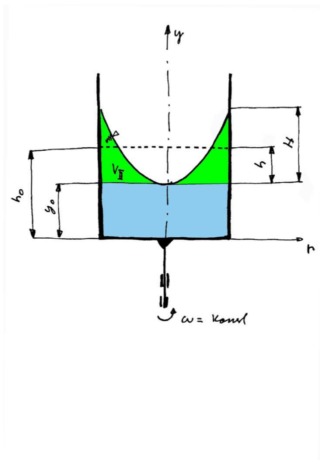
$$y_0 = h_0 - h = h_0 - \frac{R^2\omega^2}{4\cdot g}$$

Obsah

Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Dále platí:

$$H = \frac{R^2\omega^2}{2\cdot g} = 2.h$$



Obsah

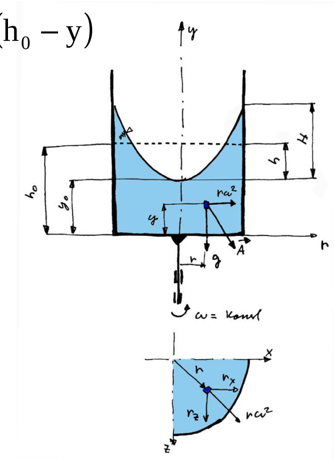
Hydrostatika – relativní prostor – rotující nádoba

Výsledná rovnice pro přírůstek tlaku v rotující nádobě tedy je:

$$p = p_a + \rho \cdot \frac{\omega^2}{2}\left(r^2 - \frac{R^2}{2}\right) + \rho \cdot g \cdot (h_0 - y)$$

Rovnice hladiny pak je

$$y = h_0 + \rho \cdot \frac{\omega^2}{2.g}\left(r^2 - \frac{R^2}{2}\right)$$



Obsah