Комбинаторна геометрија

прва-6 верзија: 13.3.2014.

Душан Ђукић

Граница између комбинаторне геометрије и геометрије, односно комбинаторике, често је замрљана. Под комбинаторном геометријом обично подразумевамо геометријске задатке са великим или неограниченим степеном слободе, укључујући геометрију распореда, или оне који садрже комбинаторне идеје.

Један основни тип комбинаторно-геометријских задатака су *егзистенцијални* задаци. У њима је често од помоћи Дирихлеов принцип.

Задатак 0.1. Дато је 100 тачака унутар круга полупречника 1. Доказати да су неке две од ових тачака на међусобном растојању не већем од $\frac{2}{9}$.

Решење. Опишимо око сваке тачке круг полупречника $\frac{1}{9}$. Свих 100 кругова леже унутар круга k полупречника $\frac{10}{9}$ концентричног са датим кругом. При том је површина круга k једнака $\frac{100}{81}\pi$, а површина сваког од малих кругова је $\frac{1}{81}\pi$. Следи да нека два од ових кругова имају заједничку тачку. Нека су то кругови описани око тачака A и B. Тада је $AB \leq \frac{2}{9}$. $\triangle$

У егзистенцијалним задацима често се посматра неки екстремални објекат. То може бити нпр. троугао максималне површине, скуп дужи минималне укупне дужине, права на минималном растојању од дате тачке, итд.

Задатак 0.2 (Силвестеров проблем). Дат је коначан скуп S тачака у равни, које нису све на истој правој. Доказати да постоји права која садржи тачно две од датих тачака.

Решење. Посматрајмо недегенерисани троугао ABC са најкраћом могућом висином - нека је то висина h_A из тачке A. Тврдимо да на правој BC нема тачака из S осим B и C. Претпоставимо супротно, да $D \in S \setminus \{B, C\}$ лежи на правој BC. Можемо да претпоставимо без смањења општости да је распоред $B - C - D$ и да је $\angle ACD \geq 90°$. Тада је $AD \geq CD$, па је у троуглу ACD висина из C краћа од висине из A, дакле краћа од h_A, што је контрадикција. $\triangle$

Напомена. Овај проблем је поставио Џ.Џ. Силвестер 1893. године, а прво тачно решење дао је Т. Галаи 1944. Горњи доказ је дао Л.М. Кели 1986.

У Силвестеровом проблему, постојање троугла минималне висине је гарантовано коначношћу скупа тачака S. У бесконачним скуповима, међутим, ситуација је компликованија и екстремна вредност не мора обавезно да се достиже. На пример, не постоји многоугао максималне површине уписан у јединични круг - та површина може бити произвољно близу π, али се једнакост не може достићи.

Ипак, достизање екстремума можемо да јамчимо и у бесконачном скупу, под условом да тај скуп поседује својство тзв. компактности. Уместо најопштије дефиниције, даћемо дефиницију компактних скупова у метричким просторима попут $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција. Подскуп S метричког простора M је *компактан* ако сваки бесконачан низ тачака у S има подниз који конвергира некој тачки у S.

Тврђење. Сваки затворен скуп у $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ је компактан.

Тврђење. Свака непрекидна функција на компактном скупу S достиже своје екстремне вредности у неким тачкама тог скупа.

Тако, на пример, знамо да свака непрекидна функција на затвореном интервалу на реалној правој достиже свој максимум. То не важи за отворене интервале - нпр. функција $f(x) = x$ на $(0, 1)$ има горњу границу 1, али не достиже максимум унутар интервала.

Варијанте следећег комбинаторно-геометријског тврђења се често користе. Као што ћемо видети кроз задатке, посматрање троугла максималне површине је прилично популарна идеја.

Задатак 0.3. Дат је конвексан многоугао $\mathcal{P}$ површине 1. Доказати да постоји троугао површине бар $\frac{1}{4}$ који је садржан у $\mathcal{P}$.

Решење. Од сада па надаље, са $[X]$ означавамо површину фигуре X.

Постоји троугао ABC максималне површине садржан у $\mathcal{P}$. Зашто? Дефинишимо функцију површине на скупу $\mathcal{P}^3$: $f(A, B, C) = [ABC]$ за $A, B, C \in \mathcal{P}$. Скуп $\mathcal{P}^3$ је затворен подскуп $\mathbb{R}^6$ и као такав је компактан. На основу горњег тврђења, функција f достиже максимум у некој тачки тог скупа - нека је то тачка $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$. То значи да је $\triangle ABC$ троугао максималне површине са теменима у $\mathcal{P}$.

Нека праве паралелне са BC, CA, AB кроз A, B, C редом одређују троугао $A_1B_1C_1$, где је $A \in B_1C_1$, $B \in C_1A_1$ и $C \in A_1B_1$. Претпоставимо да се нека тачка D многоугла $\mathcal{P}$ налази ван троугла $A_1B_1C_1$, и то (без смањења општости) да лежи на оној страни праве B_1C_1 на којој није тачка A_1. Тада је $[BCD] > [BCA]$, што је контрадикција са избором $\triangle ABC$. Овим смо показали да је цео многоугао $\mathcal{P}$ садржан у $\triangle A_1B_1C_1$, па је $1 = [\mathcal{P}] \leq [A_1B_1C_1] = 4[ABC]$, тј. $[ABC] \geq \frac{1}{4}$. $\triangle$

Напомена. Константа $\frac{1}{4}$ није оптимална. Једно побољшање је показано у задатку 9. Најбоља оцена је заправо $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, и достиже се када је $\mathcal{P}$ круг.

Поменимо и *изопериметријски проблем*. То је питање одређивања равне фигуре датог обима која има максималну површину. Није тешко показати да одговор не може бити ништа осим круга - ако постоји. Међутим, није уопште очигледно да ли екстремална фигура заиста постоји. Тако је још античким Грцима било познато да је одговор круг, али је потпун доказ тога дат тек у 19. веку.

Задаци

1. Доказати да међу ма које четири тачке унутар јединичног круга постоје две које су на растојању мањем од $\sqrt{2}$.

   Решење. Нека је O центар круга. Међу четири тачке, за неке две, рецимо A и B, важи $\angle AOB \le 90^\circ$, што заједно са $OA, OB \le 1$ даје $AB \le \sqrt{2}$.

2. Доказати да међу ма којих пет тачака унутар јединичне лопте постоје две које су на растојању мањем од $\sqrt{2}$.

   Решење. Претпоставимо супротно. Ниједна тачка није у центру O. Посматрајмо две тачке A_1 и A_2. Полураван OA_1A_2 дели лопту на две полулопте, од којих једна, "северна", садржи бар још две тачке A_3 и A_4. Ниједна од њих није у северном полу N. Посматрајмо сада четири полуравни одређене правом ON и тачкама A_1, A_2, A_3, A_4. Оне деле северну полулопту на четири сегмента, од којих је бар један садржан у четвртини полулопте. Како је дијаметар четвртине полулопте $\sqrt{2}$, тврђење следи.

3. Дато је неколико тетива јединичног круга тако да сваки пречник сече највише k тетива. Доказати да збир дужина ових тетива мањи од $k\pi$.

   Решење. Придружимо свакој тетиви лук одређен њеним крајевима и дијаметрално супротан лук. Тако је збир дужина лукова придружених тетиви дужине d бар $2d$. Пречник круга сече тетиву ако и само ако сече оба придружена лука. То значи да сваки пречник сече највише $2k$ лукова, па је збир дужина тих лукова највише $2k\pi$. Следи да је збир дужина тетива мањи од $k\pi$.

4. Равна фигура Φ површине веће од 1006 је смештена у правоугаоник P димензија 1×2011. Доказати да Φ садржи две тачке на међусобном растојању 1.

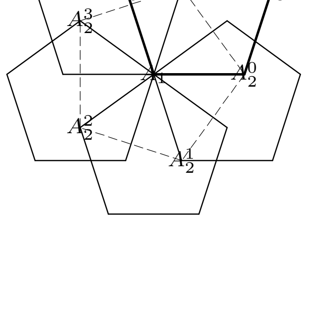
   Решење. Посматрајмо слику Φ' фигуре Φ при транслацији $\mathcal{T}$ за вектор v дужине 1 у правцу дуже странице правоугаоника. Фигура Φ' лежи у правоугаонику $\mathcal{T}(P)$, па унија $\Phi \cup \Phi'$ припада правоугаонику $P \cup \mathcal{T}(P)$ димензија 1×2012. То значи да унија $\Phi \cup \Phi'$ има површину не већу од 2012, а како свака од фигура Φ, Φ' има површину већу од 1006, њихов пресек не може бити непразан. Нека је X тачка у $\Phi \cup \Phi'$. Тада и тачка Y која се при транслацији $\mathcal{T}$ слика у X припада Φ, и при том је $XY = 1$.

5. Унутар круга k полупречника R налазе се мрље. Површина сваке мрље је највише 1. Сваки полупречник круга, као и сваки њему концентричан круг, сече највише једну мрљу. Доказати да је укупна површдхина мрља мања од $\pi\sqrt{R} + \frac{1}{2}R\sqrt{R}$.

   Решење. Заменимо сваку мрљу простором исте површине ограниченим са два полупречника и два концентрична круга; услов задатка остаје на снази.

6. Нека је $n > 2$ цео број и f пресликавање из равни у скуп реалних бројева такво да је $f(A_1) + f(A_2) + \cdots + f(A_n) = 0$ за сваки правилан n-тоугао $A_1A_2\ldots A_n$. Доказати да је f константно једнако нули.

   Решење. Посматрајмо један правилан n-тоугао $A_1A_2^0\ldots A_n^0$. Нека се ротацијом за $2k\pi/n$ око тачке A_1 тачка A_i^0 $(i > 1)$ слика у A_i^k. Тада је $A_1A_2^k\ldots A_n^k$ правилан n-угао за свако $k = 0, 1, \ldots, n-1$, па је по услову задатка $f(A_1) + f(A_2^k) + \cdots + f(A_n^k) = 0$. Сумирање по k даје $nf(A_1) + \sum_k f(A_2^k) + \cdots + \sum_k f(A_n^k) = 0$. С друге стране, за $i > 1$ је $\sum_k f(A_i^k) = 0$ јер је $A_i^0A_i^1\ldots A_i^{n-1}$ правилан n-тоугао. Сада се претходна једнакост своди на $nf(A_1) = 0$, па тврђење следи.



7. Затворена полигонална линија у равни састоји се од парног броја дужи дужине 1. Доказати да постоје два темена ове полигоналне линије која су на растојању већем од 1.

   Решење. Претпоставимо да тврђење није тачно. Нека је $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{2n-1}A_{2n} = A_{2n}A_1 = 1$. Ако су за неко $3 \leq i \leq 2n-1$ тачке A_i и A_{i+1} са исте стране праве A_1A_2, онда су четири тачке A_1, A_2, A_i, A_{i+1} темена конвексног четвороугла са двема наспрамним страницама једнаким 1, па је збир његових дијагонала већи од 2, те је бар једна од њих дужа од 1, контрадикција. Према томе, A_i и A_{i+1} су са разних страна праве A_1A_2 за свако i, одакле следи да су тачке $A_3, A_5, \ldots, A_{2n-1}$ са једне стране те праве, а $A_4, A_6, \ldots, A_{2n}$ са друге. Међутим, тада је $A_{2n}A_1A_2A_3$ конвексан четвороугао и у њему је $A_{2n}A_2 + A_1A_3 > A_{2n}A_1 + A_2A_3 = 2$, што је опет контрадикција.

8. Дато је n плавих и n црвених тачака у равни међу којима никоје три нису колинеарне. Доказати да се може нацртати n дужи са по једним црвеним и једним плавим теменом тако да никоје две немају заједничких тачака.

   Решење. Ако се неке две дужи секу, рецимо AB и CD (при чему су A, C црвене и B, D плаве), можемо их заменити дужима AD и BC - како је $AB + CD > AD + BC$, овако се смањује збир дужина свих повучених дужи. Зато повуцимо n дужи тако да збир њихових дужина буде најмањи могући. Међу њима се никоје две не секу, иначе бисмо могли да смањимо збир дужина.

9. Дат је скуп S са n тачака у равни, међу којима никоје три нису колинеарне. Доказати да постоји скуп P са $2n-5$ тачака тако да сваки троугао са теменима у S садржи бар једну тачку из P у унутрашњости.

   Решење. Погодним одабиром оса и означавањем можемо да претпоставимо да су $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ тачке у S у координатној равни. Нека је d мање од дужине најкраће висине међу свим троугловима са теменима у S.

   Дефинишимо скуп T са $2n-4$ тачке: $T = \{(x_i, y_i - d), (x_i, y_i + d) \mid i = 2, 3, \ldots, n-1\}$. Сваки троугао $P_kP_lP_m$ са $k < l < m$ садржи једну од тачака $(x_l, y_l \pm d) \in T$. Притом бар једну тачку у T можемо да избацимо. Заиста, бар једно теме конвексног омотача скупа S је различито од тачака P_1 и P_n: нека је то P_j. Како једна од тачака $(x_j, y_j \pm d)$ лежи ван конвексног омотача, може се избацити из скупа T. Остаје скуп са $2n-5$ тачака који задовољава услове.

10. Посматрајмо 4027 тачака у равни, никоје три колинеарне, међу којима има 2013 црвених и 2014 плавих. Повлачењем правих, раван се дели на области. Кажемо да је распоред правих *добар* ако су задовољена следећа два услова:

    - ниједна права не пролази кроз неку тачку из конфигурације;
    - ниједна област не садржи тачке различитих боја.

    Наћи најмањи број k такав да за сваки овакав распоред 4027 тачака постоји добар распоред k правих.

    Решење. Посматрајмо конфигурацију тачака $A_1, A_2, \ldots, A_{4027}$ у којој је $A_1A_2\ldots A_{4027}$ **2.**
    правилан 4027-угао и тачка A_n је плава за $2 \nmid n$ и црвена за $2 \mid n$. У добром распореду правих, свака од 4026 дужи A_nA_{n+1} за $n = 1, 2, \ldots, 4026$ мора да буде пресечена бар једном правом. С друге стране, свака права може да сече највише две такве дужи. Зато нам је у овом случају потребно бар $2013 = \frac{4026}{2}$ правих за добар распоред, тј. $k \geqslant 2013$.

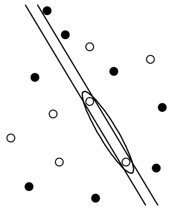
    Покажимо сада да за сваку колумбијску конфигурацију постоји добар распоред 2013 правих.

    За почетак приметимо да се ма које две тачке исте боје могу издвојити из конфигурације помоћу две праве: довољно је узети две праве паралелне правој одређеној овим двема тачкама и довољно близу њих (сл.1).

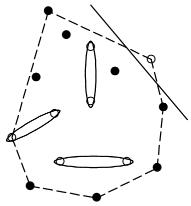
    Посматрајмо конвексни омотач $\mathcal{P}$ датих 4027 тачака. Разликујемо два случаја.

(i) Ако на $\mathcal{P}$ постоји црвена тачка, можемо је издвојити једном правом (сл.2). Преосталих 2012 црвених тачака можемо поделити у 1006 парова и, по претходном, издвојити их из конфигурације помоћу 2012 правих. Овако смо повукли 2013 правих које чине добар распоред.

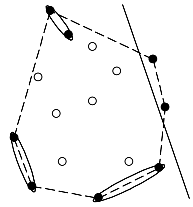
(ii) Ако су све тачке на $\mathcal{P}$ плаве, можемо издвојити две плаве тачке једном правом (сл.3). На исти начин као у случају (i), преосталих 2012 плавих тачака можемо издвојити помоћу 2012 правих, чиме добијамо укупно 2013 правих у добром распореду.



слика 1



слика 2



слика 3

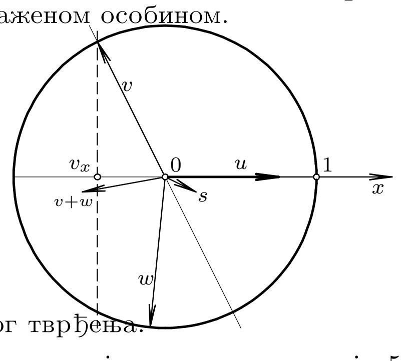
11. Дат је скуп са $n > 2$ вектора у равни. Вектор зовемо *дугачким* ако његова дужина није мања од дужине збира свих осталих вектора. Ако је сваки вектор у скупу дугачак, доказати да је збир свих вектора из скупа једнак нули.

Решење. Нека је збир свих вектора $\vec{s}$. Поставимо координатну осу x дуж њега тако да је $\vec{s} = (x_s, 0)$, $x_s > 0$. Посматрајмо било који вектор $\vec{a} = (x_a, y_a)$ из скупа. Он је по услову дугачак, тј. $|\vec{s}-\vec{a}| = \sqrt{(x_s - x_a)^2 + y_a^2} \leq |\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$. Добијамо $x_a^2 \geq (x_s - x_a)^2$, одакле следи да је $x_a \geq \frac{1}{2}x_s$. Према томе, збир x-координата свих вектора у скупу је бар $\frac{n}{2}x_s$, тј. $x_s \geq \frac{n}{2}x_s$, контрадикција.

12. Доказати да се, међу сваких 111 јединичних вектора у равни са збиром нула, може наћи 55 чији збир има дужину не већу од 1.

Решење. Показаћемо следеће помоћно тврђење: *Ако постоји k вектора са дужином збира не већом од* 1, *онда такође постоји $k+1$ или $k+2$ вектора са том особином.*

Нека је изабрано k вектора чији је збир вектор u, $|u| \leq 1$. Означимо са V скуп преосталих $111 - k$ вектора. Можемо сматрати без смањења општости да u лежи на x-оси са смером удесно. Пошто је збир свих вектора 0, у V постоје вектори са негативном x-координатом. Нека је v вектор у V са најмањом x-координатом v_x и нека је без смањења општости y-координата v позитивна. Ако је $v_x \leq -\frac{1}{2}$, онда је $|u+v| \leq |u|$, чиме смо нашли $k+1$ вектора са траженом особином.



Претпоставимо сада да $v_x > -\frac{1}{2}$. Пошто u показује десно од праве l која садржи v, постоји неки вектор $w \in V$ који показује лево од праве l. Међутим, x-координата вектора w је већа од v_x, па зато w мора да има негативну y-координату. Тада $v + w$ лежи испод x-осе, и то унутар круга са центром у $(-\frac{1}{2}, 0)$ и полупречником $\frac{1}{2}$. Закључујемо да вектор $s = u + v + w$ има дужину не већу од 1, што завршава доказ помоћног тврђења.

Одавде одмах следи тврђење задатка. Заиста, индукцијом следи да постоји 55 или 56 вектора са дужином збира не већом од 1; у другом случају довољно је узети преосталих 55 вектора.

13. Дато је n^2 тачака у унутрашњости или на граници јединичног квадрата. Доказати да се све ове тачке могу повезати полигоналном линијом дужине мање од $2n+1$.

Решење. Нека је $A_0A_nB_nB_0$ дати квадрат, $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ тачке на A_0A_n, а $B_1, \ldots, B_{n-1}$ тачке на B_0B_n тако да је $A_{i-1}A_i = B_{i-1}B_i = \frac{1}{n}$ за све i. Међу датих n^2 тачака, означимо са $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_{k_i}^i$ оне које леже у правоугаонику $A_{i-1}A_iB_iB_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$, поређане тако да њихове y-координате чине неопадајући низ. Дужина изломљене линије $A_0X_1^1X_2^1\dots X_{k_1}^1B_1$ је мања од $\frac{k_1+1}{n}+1$. Слично, дужине изломљених линија $B_1X_{k_2}^2\dots X_1^2A_2$, $A_2X_1^3\dots X_{k_3}^3B_3$ итд. су редом мање од $\frac{k_2+1}{n}+1$, $\frac{k_3+1}{n}+1,\dots$ Спајање ових изломљених линија даје изломљену линију дужине мање од $\sum_i(\frac{k_2+1}{n}+1)=2n+1$ јер је $k_1+\cdots+k_n=n^2$.

14. Дат је коначан скуп тачака у равни. Доказати да се из њега увек може избацити једна тачка и остатак поделити на два подскупа, од којих сваки има дијаметар строго мањи од полазног скупа.

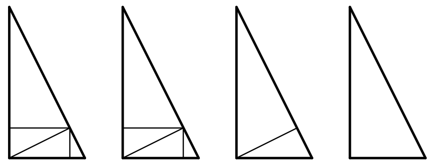
    Решење. Посматрајмо две тачке A и B датог скупа M којое су на растојању d датог скупа. Тада свака тачка скупа M припада пресеку кругова полупречника d са центрима у A и B. Нека се ови кругови секу у C и D. Тврдимо да бар један од (краћих) лукова AC и BD не садржи тачке скупа M различите од A и B. Заиста, ако претпоставимо да лукови AC и BD садрже тачке K и L скупа M редом, имамо $KB=AB=AL=d$ и $AB+KL>BK+AL$, па је $KL>d$, што је контрадикција.

    Претпоставимо без смањења општости да лук AC не садржи тачке скупа M. Избацимо из скупа M тачку A, а остатак поделимо на скупове M_1 и M_2, при чему је M_1 скуп тачака скупа $M\setminus\{A\}$ које су на правој AB или на истој страни те праве као тачка C. Јасно је да скупови M_1 и M_2 имају дијаметре мање од d.

15. Дата су нам четири подударна правоугла троугла од папира. У сваком кораку смемо да пресечемо један од троуглова по висини из правог угла. Да ли је могуће после неколико корака добити скуп троуглова међу којима нема подударних?

    Решење. Претпоставимо да смо то успели да постигнемо, и то тако да број добијених троуглова буде минималан (означимо га са n).

    Означимо полазне троуглове са T_1,T_2,T_3,T_4. Бар три од ова четири троугла морамо да поделимо висином: нека су то T_1,T_2,T_3, и нека су добијени троуглови $T_{11}\cong T_{21}\cong T_{31}$ и $T_{12}\cong T_{22}\cong T_{32}$. Даље, бар два међу троугловима T_{i1} и бар два међу T_{i2} морамо да поделимо висином. Али тада добијамо 4 мања подударна троугла. По претпоставци, ова четири троугла бисмо морали да поделимо на укупно $n-7$ неподударних троуглова, у супротности са избором броја n. Према томе, тражено сечење је немогуће.

16. У равни је дата фамилија једнакостраничних троуглова који се сви добијају транслацијама један из другог. Свака два троугла у фамилији се секу. Доказати да постоје три тачке такве да сваки троугао садржи бар једну од њих.

    Решење. Нека је MNP један троугао у фамилији, а његова висина h. Пошто се свака два троугла секу, они сви леже у неком појасу ширине $2h$ паралелном са MN. Посматрајући аналогне појасеве паралелне са MN и NP, закључујемо да сваки троугао лежи унутар шестоугаа $ABCDEF$ са угловима од по 120° и одстојањима $2h$ између наспрамних страница. Нека су ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c праве паралелне страницама шестоугла и једнако удаљене од њих, а X,Y,Z средишта одсечака ових правих унутар шестоугла. Тада сваки троугао мора да садржи бар једну од њих.

17. Доказати да сваки троугао са теменима на страницама централно симетричног шестоугла има површину не већу од половине површине шестоугла.

    Решење. Површина троугла се мења линеарно са померањем тачке дуж фиксне праве. Према томе, можемо да теме троугла померимо у теме шестоугла тако да троуглу не смањимо површину. Ужинимо исто и са преостала два темена троугла. Тако добијамо троугао са теменима у теменима шестоугла и површином не мањом од површине полазног троугла. Како површина таквог троугла не прелази половину површине шестоугла, тврђење одмах следи.

18. *Подсецање* конвексног многоугла је замена неке две његове суседне странице AB и BC дужима AM, MN, NC, где су M и N редом средишта дужи AB и BC. Тако подсецањем конвексног n-угла добијамо конвексан $(n+1)$-угао. Ако је у почетку дат правилан шестоугао површине 1, доказати да се низом подсецања увек добија многоугао површине веће од $\frac{1}{3}$.

   Решење. Многоугао који добијамо низом подсецања садржи бар по једну тачку на свакој страници полазног шестоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$: нека је на страници A_iA_{i+1} то тачка B_i. Површина овако добијеног многоугла је већа од површине шестоугла $B_1B_2\dots B_6$. С друге стране, површина шестоугла $B_1B_2\dots B_6$ је већа од површине шестоугла одређеног дијагоналама A_iA_{i+2}, $i=1,\dots,6$, а она је тачно $\frac{1}{3}$.

19. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао површине 1 чије су сваке две супротне стране паралелне. Праве AB, CD и EF се секу у паровима, одређујући троугао. Слично, праве BC, DE и FA одређују други троугао. Доказати да бар један од ова два троугла има површину не мању од $\frac{3}{2}$. (*БМО 2011.4*)

   Решење. Нека AB, CD и EF одређују троугао $A_1C_1E_1$ и нека BC, DE, FA одређују троугао $B_1D_1F_1$ ($CD \cap EF = \{A_1\}$, $DE \cap FA = \{B_1\}$, итд.). Означимо $AB/F_1B_1 = a$, $BC/A_1C_1 = b$, $CD/B_1D_1 = c$, $DE/C_1E_1 = d$, $EF/D_1F_1 = e$, $FA/E_1A_1 = f$. Тада је $[ABD_1] = a^2[B_1D_1F_1]$ итд, па добијамо $[ABCDEF] = (1-a^2-c^2-e^2)[B_1D_1F_1]$ и $[ABCDEF] = (1-b^2-d^2-f^2)[A_1C_1E_1]$.

   Можемо да изразимо b, d, f преко a, c, e: $b = \frac{BC}{A_1C_1} = \frac{D_1F_1 - D_1B - CF_1}{EF} \cdot \frac{EF}{A_1E + EF + FC_1} = \frac{1-a-c}{2-a-c-e}$, $d = \frac{1-c-e}{2-a-c-e}$ и $f = \frac{1-e-a}{2-a-c-e}$. Означимо $a+c+e = p$. Тада је $a^2+c^2+e^2 \geq \frac{1}{3}p^2$ и $b^2+d^2+f^2 = \frac{3-4p+p^2+a^2+c^2+e^2}{(2-p)^2} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{3-2p}{2-p}\right)^2$.

   Претпоставимо да је $[A_1C_1E_1] < \frac{3}{2}$ и $[B_1D_1F_1] < \frac{3}{2}$. Тада из горњих једнакости добијамо $a^2+c^2+e^2 < \frac{1}{3}$ и одатле $p < 1$, а такође и $b^2+d^2+f^2 < \frac{1}{3}$ и одатле $\frac{3-2p}{2-p} < 1$, што је контрадикција.

20. Означимо са θ највећи од шест углова између ивица правилног тетраедра и неке равни. Одредити најмању могућу вредност θ.

   Решење. Нека су ивице тетраедра дужине 1. Означимо са A', B', C', D' пројекције темена тетраедра A, B, C, D на раван π. Тада је $\cos\angle(AB,\pi) = A'B'$ итд.

   Ако је конвексни омотач тачака A', B', C', D' четвороугао $A'B'C'D'$, онда је један од његових унутрашњих углова, нпр. $\angle A$, није мањи од 90°. Из $B'D' \leq 1$ следи $A'B' \leq 1/\sqrt{2}$ или $A'D' \leq 1/\sqrt{2}$, дакле бар једна од ивица AB и AD прави угао од бар 45° са π. У другом случају, ако је конвексни омотач тачака A', B', C', D' троугао $A'B'C'$, тада можемо узети без смањења општости да је $\angle A'D'B' \geq 120^\circ$, а тада је $A'D' \leq 1/\sqrt{3}$ или $B'D' \leq 1/\sqrt{3}$, па је угао између π и једне од ивица AD, BD не мањи од $\arccos 1/\sqrt{3} > 45^\circ$.

   Минимална вредност $\theta = 45^\circ$ се достиже када су ивице AC и BD паралелне равни π, те је $A'B'C'D'$ квадрат.

21. Дат је конвексан многоугао $\mathcal{P}$ површине 1. Доказати да постоји троугао површине бар $\frac{3}{8}$ који је садржан у $\mathcal{P}$.

   Решење. Нека су p_0, p_1, p_2, p_3 и p_4 паралелне праве са одстојањима једнаким d између p_i и p_{i+1} такве да p_0 и p_4 додирују $\mathcal{P}$, и нека p_i сече многоугао у тачкама A_i и B_i ($i = 0, \dots, 4$; може бити $A_i = B_i$ за $i \in \{0, 4\}$). Повуцимо праве a_i и b_i у тачкама A_i и B_i редом које додирују $\mathcal{P}$ ($i = 1, 3$). Трапез одређен правим p_0, p_2, a_1, b_1 и трапез одређен правим p_2, p_4, a_3, b_3 покривају цео многоугао $\mathcal{P}$; при том су површине ових трапеза редом $2d \cdot A_1B_1$ и $2d \cdot A_3B_3$, одакле закључујемо да је $[\mathcal{P}] \leq 2d(A_1B_1 + A_3B_3)$. Како су површине троуглова $A_1B_1A_4$ и $A_3B_3A_0$ редом једнаке $\frac{3}{2}d \cdot A_1B_1$ и $\frac{3}{2}d \cdot A_3B_3$, њихов збир није мањи од $\frac{3}{4}[\mathcal{P}]$, дакле бар једна од њих није мања од $\frac{3}{8}[\mathcal{P}]$.

22. Назовимо *w-траком* скуп свих тачака у равни које леже између две паралелне праве на растојању w или на једној од њих. Нека је S скуп n тачака у равни такав да се ма

које три тачке из S могу покрити 1-траком. Доказати да се цео скуп S може покрити 2-траком. (*БМО 2010.3*)

Решење. Посматрајмо троугао ABC максималне површине са теменима у S. Конструишимо већи троугао $A'B'C'$ са $C \in A'B' \parallel AB$, $A \in B'C' \parallel BC$ и $B \in C'A' \parallel CA$. Троугао $A'B'C'$ је сличан троуглу ABC са коефицијентом 2. Због начина избора троугла ABC, цео скуп S лежи унутар или на граници троугла $A'B'C'$. Како се $\triangle ABC$ може покрити 1-траком, $\triangle A'B'C'$ се може покрити 2-траком, па тврђење одмах следи.

23. Нека је K конвексан многоугао у равни. Ако је T било који троугао минималне површине описан око K, доказати да средишта његових страница леже на K.

Решење. Означимо темена троугла T са A, B и C. Претпоставимо да средиште A_1 странице BC не лежи на K, и да је D тачка на BC која је најближа A_1 и припада K. Претпоставимо ради одређености да $DB > DC$. Повуцимо праву p кроз D која нема заједничких унутрашњих тачака са K и која сече праву BC под малим углом ϵ. Нека p сече праве AB и AC у B' и C' редом. Тада је $[AB'C'] = [ABC] + [DCC'] - [DBB'] = [ABC] - \frac{1}{2}(DB \cdot DB' - DC \cdot DC') \sin \epsilon$. За довољно мало ϵ имаћемо $DB' > DC'$ и одатле $[AB'C'] < [ABC]$, што је контрадикција са избором T.

24. Правилан n-угао је помоћу $n-3$ дијагонала које се не секу подељен на троуглове. Доказати да је међу њима тачно један оштроугли или тачно два правоугла.

Решење. Ако центар n-угла лежи унутар неког троугла, он је правоугли. Ако лежи на страници коју деле два троугла, та два троугла су правоугла.

25. За које n је могуће поделити правилан n-угао на једнакокраке троуглове помоћу $n-3$ дијагонале које се не секу?

Решење. Посматрајмо троугао који садржи центар n-угла. Његове странице деле n-угао на три дела који се састоје од x, x и y страница ($2x + y = n$). Како се део n-угла који се састоји од $k < \frac{n}{2}$ страница може поделити на једнакокраке троуглове ако и само ако је k степен двојке, добијамо $n = 2^a + 2^b$ за неке природне a и b ($n > 2$).

26. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тачке на кругу, $n \geq 3$. Наћи највећи могући број оштроуглих троуглова са теменима у тим тачкама.

Решење. Сматраћемо без смањења општости да су тачке $A_1, \ldots, A_n$ поређане тим редом у позитивном смеру. Под луком A_iA_j подразумевамо онај који је у позитивном смеру; тако је збир дужина лукова A_iA_j и A_jA_i једнак 2π. Кажемо да је лук A_iA_j *туп* ако је његова дужина бар π. Означимо са x_k број индекса i за које је лук A_iA_{i+k} туп (индекси се рачунају по модулу n). Пошто је бар један од лукова A_iA_{i+k} и $A_{i+k}A_{i+n}$ туп, важи $x_k + x_{n-k} \geq n$, уз једнакост ако и само ако су A_i и A_{i+k} дијаметрално супротне за неко i. Укупан број неоштроуглих троуглова једнак је броју неоштрих углова $A_pA_qA_r$; при том за сваки од x_k тупих лукова A_pA_r са $r = p + k$ постоји тачно $n-k-1$ таквих углова. Према томе, број N неоштроуглих троуглова је једнак $N = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)x_k$. Користећи релацију $x_k + x_{n-k} \geq n$, добијамо $N \geq \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(k-1)(x_k + x_{n-k}) \geq n\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(k-1) = \frac{n(n-1)(n-3)}{8}$ за непарно n, и слично $N \geq \frac{n(n-2)^2}{8}$ за парно n. Једнакости се достижу када нема дијаметрално супротних тачака и сваки полукруг садржи највише $\frac{n}{2} + 1$ тачака. Максималан број оштроуглих троуглова је наравно једнак $\binom{n}{3} - N$.

27. За природан број $n \geq 3$, означимо са $m(n)$ највећи могући број тачака у унутрашњости или на граници правилног n-тоугла странице 1, од којих су сваке две на растојању већем од 1. Одредити све n за које је $m(n) = n-1$.

Решење. Очигледно је $m(3) = 1$. Показаћемо да је $m(n) \geq n-1$ за $n \geq 4$. Означимо темена n-тоугла са $A_1, \ldots, A_n$ редом и његов центар са O. Одаберимо тачке $B_i \in A_iA_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) тако да је $B_1 = A_1$ и $B_iB_{i+1} = 1 + \varepsilon$ за све i, где је $\varepsilon \geq 0$ константно. За $\varepsilon = 0$ имамо $B_i = A_i$; видимо да се за свако i тачка B_i непрекидно мења у зависности од ε, па ће за довољно мало $\varepsilon > 0$ свако B_i бити једнозначно одређено и B_{n-1} ће се налазити произвољно близу тачки A_{n-1}, тако да за такво ε имамо $B_1B_{n-1} > 1$. Овако смо одабрали тачке $B_1, \dots, B_{n-1}$ на граници n-тоугла тако да је $B_iB_j > 1$ за све i, j.

За $n \geq 7$ тачка O је на растојању већем од 1 од сваке странице n-тоугла, па прикључујући њу скупу добијамо да је $m(n) \geq n$. С друге стране, за $n \leq 6$ је $m(n) \leq n-1$. Заиста, ако су $C_1, \dots, C_n$ n тачака у правилном n-тоуглу или на граници, онда за неке две тачке C_i, C_j $(i \neq j)$ важи $\angle C_iOC_j \leq 2\pi/n$, што заједно са $OC_i, OC_j \leq OA_1 = OA_2$ даје $C_iC_j \leq A_1A_2 = 1$. Према томе, одговор су бројеви $4, 5, 6$.

28. Дат је коначан скуп дужи у равни, укупне дужине мање од $\sqrt{2}$. Доказати да постоји бесконачна јединична квадратна решетка која не сече ни једну дуж.

Решење. Означимо са $\pi(l)$ збир дужина пројекција датих дужи на праву l. Ако је $\pi(l) < 1$, можемо повући фамилију правих нормалних на l, на јединичном међусобном одстојању, тако да ниједна не сече дате дужи. Према томе, тврђење ће следити ако покажемо да постоје две међусобно нормалне праве l_1 и l_2 за које је $\pi(l_1) < 1$ и $\pi(l_2) < 1$. У ствари, показаћемо да постоје нормалне праве l_1 и l_2 такве да је $\pi(l_1) = \pi(l_2)$. Наиме, збир пројекција дужи дужине d на праве l_1 и l_2 није већи од $d\sqrt{2}$, одакле следи да је $\pi(l_1) + \pi(l_2) < 2$, дакле $\pi(l_1) = \pi(l_2) < 1$.

Одаберимо две нормалне праве l_1 и l_2. Ако је $\pi(l_1) = \pi(l_2)$, завршили смо. У супротном, ако је нпр. $\pi(l_1) < \pi(l_2)$, нека ротација у позитивном смеру за угао ϕ слика l_1 и l_2 у l_1^ϕ и l_2^ϕ редом. Како је $f(\phi) = \pi(l_1^\phi) - \pi(l_2^\phi)$ непрекидна функција по ϕ и $f(0) < 0 < f(\frac{\pi}{2})$, постоји $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ за које је $f(\phi) = 0$, тј. $\pi(l_1^\phi) = \pi(l_2^\phi)$ и при том $l_1^\phi \perp l_2^\phi$, што смо и тврдили.

29. Дат је природан број n. Колико највише целобројних тачака може да садржи квадрат странице $n + \frac{1}{2n+1}$ у унутрашњости?

Решење. Означимо $\epsilon = \frac{1}{2n+1}$. Квадрат са наспрамним теменима $(-\frac{\epsilon}{2}, -\frac{\epsilon}{2})$ и $(n+\frac{\epsilon}{2}, n+\frac{\epsilon}{2})$ садржи $(n+1)^2$ целобројних тачака. Доказаћемо да не може више.

За $n = 1$ квадрат странице $\frac{4}{3}$ може да покрије највише 4 целобројне тачке: заиста, међу ма којих 5 целобројних тачака постоје две на растојању $\sqrt{5}$, што је дуже од дијагонале квадрата странице $\frac{4}{3}$.

Нека је $n \geq 2$. Нека квадрат K странице $n + \epsilon$ покрива m целобројних тачака и нека је H њихов конвексни омотач. По Пиковој теореми, површина фигуре H је једнака $m - \frac{k}{2} - 1$, где је k број целобројних тачака на граници H. Притом је обим фигуре H не већи од обима квадрата K, тј. $4(n+\epsilon) < 4n+1$, па како су сваке две целобројне тачке на растојању бар 1, следи $k \leq 4n$. Сада је $(n+\epsilon)^2 \geq m - \frac{k}{2} - 1 \geq m - 2n - 1$, одакле је $m \leq (n+\epsilon)^2 + 2n + 1 < (n^2+1) + 2n + 1$, тј. $m \leq (n+1)^2$.

30. Међу четвороугловима $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ $(i = 1, \dots, n,\ n \geq 5$; индекси се сабирају по модулу $n)$ наћи највећи могући број тангентних, ако је $A_1A_2 \dots A_n$ конвексан многоугао.

Решење. Приметимо да је немогуће да за неко i оба четвороугла $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ и $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}$ буду тангентни. Заиста, у супротном бисмо имали $A_iA_{i+1} + A_{i+2}A_{i+3} = A_{i+1}A_{i+2} + A_iA_{i+3}$ и $A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+3}A_{i+4} = A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+1}A_{i+4}$, одакле сабирањем добијамо $A_iA_{i+1} + A_{i+3}A_{i+4} = A_iA_{i+3} + A_{i+1}A_{i+4}$, што је немогуће јер је четвороугао $A_iA_{i+1}A_{i+3}A_{i+4}$ конвексан. Према томе, тангентних четвороугла нема више од $[n/2]$.

Остаје да конструишемо пример када се достиже оцена $[n/2]$. За парно n довољно је узети n-тоугао $A_1A_2 \dots A_n$ такав да је $A_{2i-1}A_{2i} = x$ и $A_{2i}A_{2i+1} = y$ за све i, са свим унутрашњим угловима $\frac{n-2}{n}\pi$, такав да је четвороугао $A_1A_2A_3A_4$ тангентан. За непарно n конструишимо одговарајући пример са $n+1$ темена, избришимо A_{n+1} и померимо A_n тако да четвороугао $A_{n-2}A_{n-1}A_nA_1$ буде тангентан.

31. Нека су k и n цели бројеви са $0 \leq k \leq n-2$. Посматрајмо скуп L од n правих у равни међу којима никоје две нису паралелне и никоје три нису конкурентне. Означимо са I скуп пресечних тачака правих у L. Нека је O тачка у равни ван свих правих у L.

Обојимо тачку $X \in I$ црвено ако отворена дуж (OX) сече највише k правих у L. Доказати да I садржи бар $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ црвених тачака.

Решење. Користићем индукцију по k. Тврђење је тачно за $k = 0$ јер постоји бар једна тачка P таква да (OP) не сече ниједну праву у L.

Претпоставимо да тврђење важи за $k-1$. Посматрајмо тачку O и неку праву $l \in L$ на минималном растојању од O. Права l садржи $n-1$ тачака из I. Показаћемо да је међу њима бар $k+1$ црвених. Приметимо прво да постоји тачка $P \in l \cap I$ таква да (OP) не сече ниједну праву у L. Тачка P дели праву l на две полуправе – нека једна од њих садржи тачке $P_1, P_2, \ldots, P_u \in I$, а друга тачке $Q_1, \ldots, Q_{n-2-u} \in I$, при чему је $OP_1 < \cdots < OP_u$ и $OQ_1 < \cdots < OQ_{n-2-u}$. Посматрајмо отворене дужи (OP_i) и (OP_{i+1}). Свака права у L која не пролази кроз P_i и P_{i+1} сече или обе ове дужи, или ниједну. Осим тога, права кроз P_{i+1} не може да сече (OP_i) јер би у супротном та права била ближа тачки O него што је то l. Једино права кроз P_i различита од l може да сече (OP_{i+1}). То значи да се бројеви пресека (OP_i) и (OP_{i+1}) са правим у L разликују за највише 1. Следи да су тачке $P_1, P_2, \ldots, P_{\min\{k,u\}}$ црвене, а аналогно важи и за тачке Q_i, што даје бар $k+1$ црвених тачака на l.

Ако уклонимо праву l са $n-1$ тачака на њој, по индукцијској претпоставци постоји бар $\frac{k(k+1)}{2}$ тачака $G \in I \setminus l$ за које (OG) сече највише $k-1$ правих у $L \setminus \{l\}$. Следи да постоји бар $\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ црвених тачака.

32. За сваки скуп S од пет тачака у равни, међу којима никоје три нису колинеарне, означимо са $M(S)$ и $m(S)$ редом највећу и најмању међу површинама троуглова са теменима у S. Одредити најмању могућу вредност $M(S)/m(S)$.

Решење. Када је S скуп темена правилног петоугла, лако се добија $\frac{M(S)}{m(S)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$. Тврдимо да је ово најбоља оцена; тј. ако је $S = \{A, B, C, D, E\}$ и $[ABC] = M(S)$, онда неки од троуглова са теменима у S има површину на већу од $M(S)/\alpha$.

Конструишимо већи троугао $A'B'C'$ са $C \in A'B' \parallel AB$, $A \in B'C' \parallel BC$ и $B \in C'A' \parallel CA$. Тачке D и E леже са исте стране праве $B'C'$ као B и C, јер би у супротном $\triangle DBC$ имао већу површину од $\triangle ABC$. Сличан закључак важи за остале странице, па према томе D, E леже унутар троугла $A'B'C'$ или на његовим страницама. Шта више, бар један од троуглова $A'BC, AB'C, ABC'$, нека је то ABC', не садржи ни D ни E. Тако можемо да претпоставимо да D, E леже унутар четвороугла $A'B'AB$.

Ако афино трансформишемо S тако да A, B, C постану темена правилног петоугла $ABMCN$, размера $M(S)/m(S)$ се не мења. Ако сада D или E лежи унутар $ABMCN$, завршили смо. Зато претпоставимо да су и D и E унутар троуглова CMA' и CNB'. Тада је $CD, CE \leq CM$ (јер $CM = CN = CA' = CB'$), и $\angle DCE$ или није већи од 36° или није мањи од 108°, одакле добијамо да површина $\triangle CDE$ не превазилази површину $\triangle CMN = M(S)/\alpha$. Овим је доказ завршен.

33. Дат је конвексан многоугао $\mathcal{P}$ површине 1. Доказати да се у њега може уписати конвексан шестоугао површине бар 3/4.

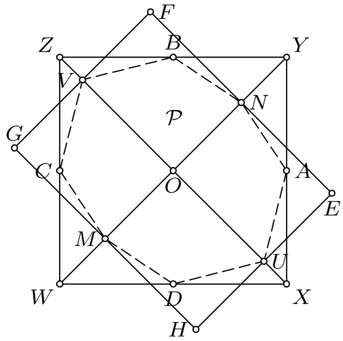
Решење. Посматрајмо троугао ABC максималне површине S садржан у $\mathcal{P}$. Нека праве паралелне са BC, CA, AB кроз A, B, C редом одређују троугао $A_1B_1C_1$, где $A \in B_1C_1$ итд. Због максималности S, цео многоугао $\mathcal{P}$ је садржан у $\triangle A_1B_1C_1$.

Повуцимо праве паралелне са BC, CA, AB које додирују $\mathcal{P}$ и не садрже A, B, C. Оне одређују конвексан шестоугао $U_aV_aU_bV_bU_cV_c$ који садржи $\mathcal{P}$, са $V_b, U_c \in B_1C_1$, $V_c, U_a \in C_1A_1$, $V_a, U_b \in A_1B_1$. Свака од дужи U_aV_a, U_bV_b, U_cV_c садржи неку тачку $\mathcal{P}$. Одаберимо такве тачке A_0, B_0, C_0 на U_aV_a, U_bV_b, U_cV_c, редом. Конвексни шестоугао $AC_0BA_0CB_0$ је садржан у $\mathcal{P}$; показаћемо да је његова површина бар 3/4.

Означимо са x, y, z редом површине троуглова U_aBC, U_bCA и U_cAB. Тада је $S_1 = [AC_0BA_0CB_0] = S + x + y + z$. С друге стране, $\triangle A_1U_aV_a$ је сличан $\triangle A_1BC$ са коефицијентом $\tau = (S-x)/S$, па је његова површина $\tau^2 S = (S-x)^2/S$. Дакле, површина четвороугла U_aV_aCB је $S - (S-x)^2/S = 2z - z^2/S$. Аналогне изразе добијамо за U_bV_bAC и U_cV_cBA. Према томе, ако ставимо $p = x+y+z$, важи $[\mathcal{P}] \le [U_aV_aU_bV_bU_cV_c] = S + [U_aV_aCB] + [U_bV_bAC] + [U_cV_cBA] = S + 2p - \frac{x^2+y^2+z^2}{S} \le S + 2p - \frac{p^2}{3S}$. Сада је $4S_1 - 3[\mathcal{P}] \ge = S - 2p + p^2/S = (S-p)^2/S \ge 0$, тј. $S_1 \ge 3[\mathcal{P}]/4$.

34. Нека је $\mathcal{P}$ конвексан многоугао који је симетричан у односу на тачку O. Доказати да постоји паралелограм $\mathcal{R}$ који садржи $\mathcal{P}$ такав да је $[\mathcal{R}] \le \sqrt{2} \cdot [\mathcal{P}]$.

Решење. Нека су A и B темена $\mathcal{P}$ за која је површина $\triangle OAB$ максимална и нека су C и D тачке симетричне A и B у односу на O. Конструишимо паралелограм $WXYZ$ у коме су A, B, C и D редом средишта XY, YZ, ZW, WX и при том $WX \| OA$ и $XY \| OB$. Овај паралелограм садржи $\mathcal{P}$.



Даље, нека су U, V, M и N пресеци $\mathcal{P}$ са XZ и WY, где су распореди тачака на правим $X - U - V - Z$ и $W - M - N - Y$. Повуцимо паралелне праве $u \ni U$ и $v \ni V$ и паралелне праве $n \ni N$ и $m \ni M$, тако да $\mathcal{P}$ лежи између u и v и такође лежи између m и n. Праве u, v, n, m одређују други паралелограм $EFGH$. Показаћемо да бар једна од површина $[WXYZ]$ и $[EFGH]$ не прелази $[\mathcal{P}]\sqrt{2}$.

Афино пресликавајући слику по потреби, можемо да претпоставимо да је $WXYZ$ квадрат; тада је $EFGH$ правоугаоник. Означимо $OA = a$, $OU = x \cdot OX$ и $ON = y \cdot OY$. Имамо $[\mathcal{P}] \ge [ANBVCMDU] = 4[OAU] + 4[OAN] = 2a^2(x+y)$. С друге стране, $[WXYZ] = 4a^2$ и $[EFGH] = 8xya^2$. Како је $[WXYZ] \cdot [EFGH] = 32a^4xy \le 8a^4(x+y)^2 \le 2[\mathcal{P}]^2$, бар једна од површина $[WXYZ]$ и $[EFGH]$ није већа од $[\mathcal{P}]\sqrt{2}$.

35. Свакој страници a конвексног многоугла $\mathcal{P}$ придружена је максимална површина троугла над страницом a који је садржан у $\mathcal{P}$. Доказати да збир површина придружених свим страницама $\mathcal{P}$ није мањи од двоструке површине $\mathcal{P}$. (*ММО 2006.6*)

Решење. Нека су $A_1, \dots, A_n$ редом темена $\mathcal{P}$. Претпоставимо да су неке две странице паралелне: нека су то без смањења општости A_nA_1 и A_iA_{i+1} $(i < n)$, при чему је $A_iA_{i+1} \le A_nA_1$. За $i+1 \le j \le n$, нека је A'_j слика тачке A_j при транслацији за вектор $\overrightarrow{A_{i+1}A_i}$; за $1 \le j \le i$ означимо $A'_j = A_j$. Како је $A'_i = A'_{i+1}$, многоугао $\mathcal{P}' = A'_1 \dots A'_n$ је заправо $(n-1)$-тоугао. Такође, за ивицу $a = A_jA_{j+1}$, са означимо $a' = A'_jA'_{j+1}$ означимо ивицу (дегенерисану за $j = i$) у $\mathcal{P}'$. Видимо да ако је B теме најудаљеније од странице a у $\mathcal{P}$, онда је B' теме најудаљеније од a' у $\mathcal{P}'$. Према томе, површина $\mathcal{P}'_a$ придружена страници a' у $\mathcal{P}'$ је мања од површине $\mathcal{P}_a$ придружене a у $\mathcal{P}$ тачно за површину паралелограма над a са другом страницом паралелном и једнаком A_iA_{i+1}. Сабирањем по свим страницама a, збир придружених површина у $\mathcal{P}'$ је мањи од збира придружених површина у $\mathcal{P}$ за двоструку површину паралелограма $A_nA'_nA_iA_{i+1}$. Следи да тврђење задатка важи за $\mathcal{P}$ ако и само ако важи за $\mathcal{P}'$; овако смо свели тврђење на аналогно са мањим бројем темена.

Претпоставимо сада да у $\mathcal{P}$ нема паралелних страница. Нека је A_i теме најудаљеније од A_nA_1. Повуцимо произвољну праву $p \ni A_i$. Одредимо на p са обе стране тачке A_i тачке B_i и C_i најближе A_i за које многоуглови добијени из $\mathcal{P}$ заменом темена A_i са B_i (односно C_i) имају две паралелне стране или три колинеарна темена. Нека се A_i сада креће праволинијски од B_i до C_i. Све придружене површине $[\mathcal{P}_a]$ и површина многоугла $[\mathcal{P}]$ мењају се линеарно, па је израз $\sum_a [\mathcal{P}_a] - 2[\mathcal{P}]$ линеаран по дужини B_iA_i и према томе достиже минимум у неком крају интервала - тј. кад је $A_i = B_i$ или $A_i = C_i$, а у тим случајевима $\mathcal{P}$ има две паралелне странице или три колинеарна темена. Тако можемо да претпоставимо не губећи на општости да $\mathcal{P}$ има две паралелне странице.

Примењујући два горња поступка довољан број пута сводимо тврђење за многоугао на аналогно за тачку, а тада је оно тривијално тачно.

Београд, 2003-2011