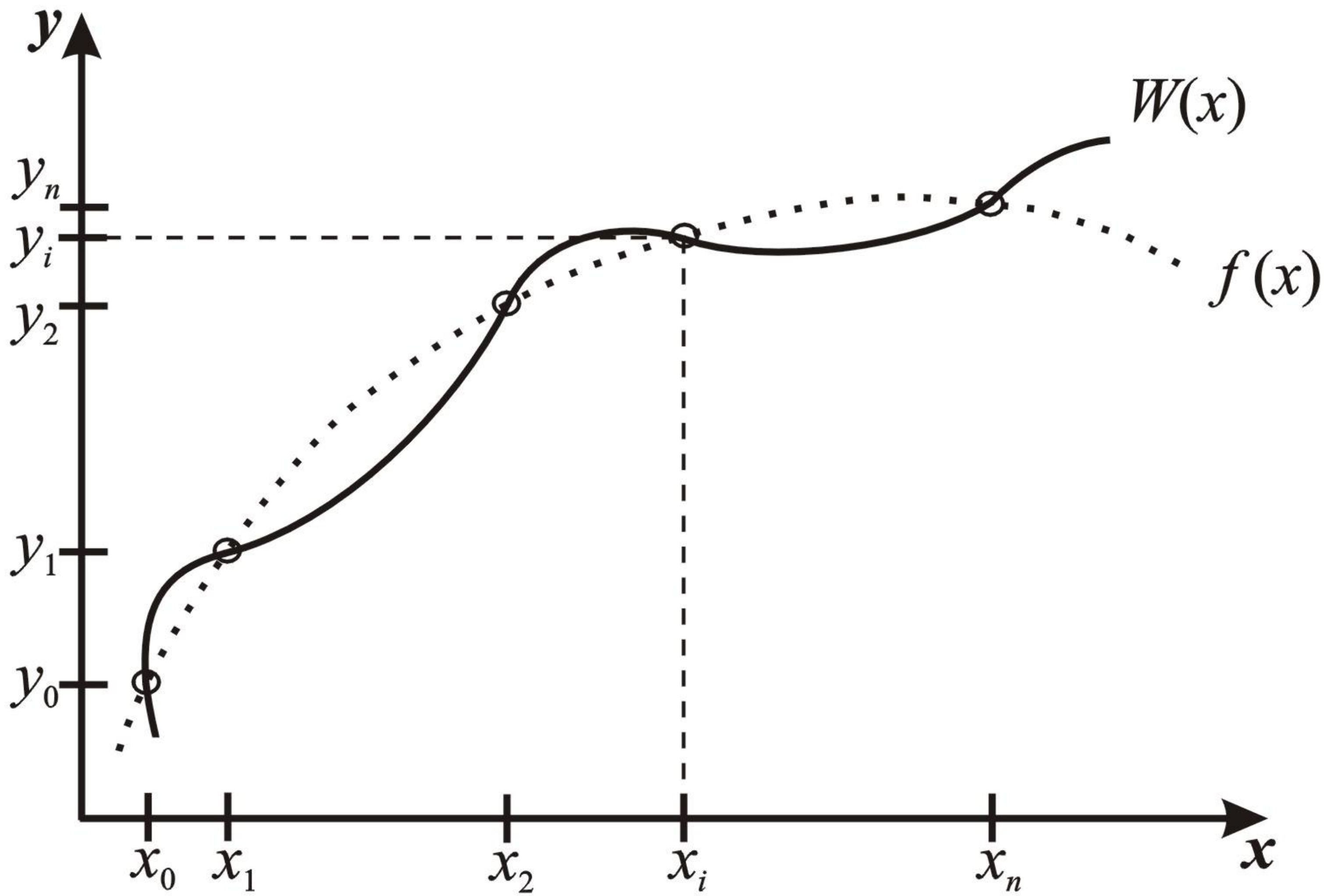
INTERPOLACJA

Definicja interpolacji


y
W(x)
y_n
y_i
f (x)
y_2
y_1
y_0
x_0
x_1
x_2
x_i
x_n
x

Dana jest funkcja

$y = f(x),\ x \in [x_0, x_n]$.

Znamy tablice wartości tej funkcji, czyli:

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= y_0 \\
f(x_1) &= y_1 \\
&\vdots \\
f(x_i) &= y_i \\
&\vdots \\
f(x_n) &= y_n
\end{aligned}
$$

Wyznaczamy funkcję $W(x)$ spełniającą warunki:

$$
\begin{aligned}
W(x_0) &= y_0 \\
W(x_1) &= y_1 \\
&\vdots \\
W(x_i) &= y_i \\
&\vdots \\
W(x_n) &= y_n
\end{aligned}
$$

Wyznaczenie funkcji $W(x)$

Dobór w postaci kombinacji liniowej $n + 1$ funkcji bazowych

Funkcje bazowe: $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_i(x), \ldots, \varphi_n(x)$

Wielomian uogólniony:

$$\boxed{W(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)}$$

a_i - współczynniki

Wprowadzając:

Macierz bazową: $\mathbf{\Phi} = \left[\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x) \right]$

Macierz współczynników: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left[a_0, a_1, a_2, ..., a_n \right]$

Wielomian uogólniony można zapisać w postaci:

$$W(x) = \mathbf{\Phi}(x) \cdot \mathbf{A}$$

Warunek, który musi spełnić wielomian interpolacyjny, czyli:

$$W(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Y}$$

gdzie:

A – macierz kolumnowa współczynników o $(n + 1)$ wierszach
Y – macierz kolumnowa wartości funkcji o $(n + 1)$ wierszach
X – macierz o wymiarach $(n + 1) \times (n + 1)$

Postać macierzy $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Jeżeli $\det \mathbf{X} \neq 0$ to: $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}$

Podstawiając powyższy wzór do $W(x) = \mathbf{\Phi}(x) \cdot \mathbf{A}$ otrzymuje się:

Wielomian interpolacyjny:

$$\boxed{W(x) = \mathbf{\Phi}(x) \cdot \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}}$$

gdzie:

$\mathbf{\Phi}(x)$ – macierz bazowa

$\mathbf{X}^{-1}$ – macierz interpolacyjna

$\mathbf{Y}$ – wektor wartości funkcji w węzłach

Interpolacja wielomianowa

(wielomiany w postaci naturalnej)

Baza:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = x^n$$

Postać wielomianu interpolacyjnego:

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Przy spełnionym warunku:

$$
\begin{gathered}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n
\end{gathered}
$$

Ten układ równań, jeżeli wartości x_0, x_1, ..., x_n są miedzy sobą różne posiada jedno rozwiązanie względem a_i.

Wynika to stąd, że wyznacznik macierzy $\mathbf{X}$:

$$
\det \mathbf{X} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0
$$

Wady:

- Interpolacja wielomianowa nie jest zbyt efektywna, ponieważ macierz $\mathbf{X}$ jest macierzą pełną
  – błędy przy odwracaniu (oraz czas odwracania)

- Macierz $\mathbf{X}$ nie zawsze jest dobrze uwarunkowana
  – może być osobliwa

Przykład

Dla podanych węzłów zapisz:

- macierze układu równań, z których wyznacza się współczynniki wielomianu interpolacyjnego dla interpolacji wielomianowej
- wielomian interpolacyjny

Węzły:

$$(1,3) \quad (-2,5) \quad (4,7)$$

$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 \\ (-2)^0 & (-2)^1 & (-2)^2 \\ 4^0 & 4^1 & 4^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}}$$

$\det \mathbf{X} = -54 \neq 0$ jest jedno rozwiązanie

Korzystając z: $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$ otrzymujemy:

$$a_0 = 3, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{3}$$

Wielomian interpolacyjny:

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$W(x) = 3 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2$$

Interpolacja Lagrange’a

Baza:

$$\varphi_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_n)$$

$$\varphi_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_{n-1})$$

☝ dla każdej $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ brakuje składnika $(x - x_i)$

Postać wielomianu interpolacyjnego:

$$
\begin{aligned}
W(x) &= a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) = \\
&= a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) + \\
&\quad + a_1(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n) + \ldots + \\
&\quad + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Macierz $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

☝ w punkcie $x = x_i$ wszystkie funkcje oprócz $\varphi_i(x)$ zerują się, bo występuje w nich składnik $(x - x_i)$

Współczynniki wielomianu Lagrange'a wyznacza się ze wzoru:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Y}$$

Ponieważ macierz $\mathbf{X}$ ma tylko główną przekątną niezerową to:

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} = \frac{y_0}{\varphi_0(x_0)}$$

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} = \frac{y_1}{\varphi_1(x_1)}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})} = \frac{y_n}{\varphi_n(x_n)}$$

Czyli wielomian interpolacyjny możemy zapisać jako:

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)}$$

lub:

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

Przykład

Dla podanych węzłów zapisać wielomian interpolacyjny Lagrange'a.

Węzły:

$$(1,3) \qquad (-2,5) \qquad (4,7)$$

$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$W(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$W(x) = 3\frac{(x+2)(x-4)}{(1+2)(1-4)} + 5\frac{(x-1)(x-4)}{(-2-1)(-2-4)} + 7\frac{(x-1)(x+2)}{(4-1)(4+2)}$$

☝ Liczniki ułamków to funkcje bazowe, reszta to współczynniki wielomianu interpolacyjnego

Różnice skończone

Dla funkcji stabelaryzowanej przy stałym kroku $h = x_{i+1} - x_i$ wprowadza się pojęcie różnicy skończonej rzędu k

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta\left[\Delta y_i\right] = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\vdots$$

$$\Delta^k y_i = \Delta\left[\Delta^{k-1} y_i\right] = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} y_{i+k-1}$$

Na podstawie zbioru wartości funkcji $y_i = f(x_i)$, $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$ buduje się tablicę różnic skończonych

nr	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	.
2	x_2	y_2	Δy_2	.	.
3	x_3	y_3	.	.	.
.	.	.	.	.	$\Delta^3 y_{n-3}$
.	.	.	.	$\Delta^2 y_{n-2}$	
.	.	.	Δy_{n-1}		
n	x_n	y_n			

Przykład

Dla podanych węzłów zbudować tablicę różnic skończonych

Węzły:

$$(0.2, 0.259) \quad (0.4, 0.364) \quad (0.6, 0.448)$$
$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$(0.8, 0.517) \quad (1, 0.577) \quad (1.2, 0.631)$$
$$(x_3, y_3) \quad (x_4, y_4) \quad (x_5, y_5)$$

nr	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0.2	0.259	0.105	–0.021	0.006	0	–0.003
1	0.4	0.364	0.084	–0.015	0.006	–0.003	
2	0.6	0.448	0.069	–0.009	0.003		
3	0.8	0.517	0.06	–0.006			
4	1.0	0.577	0.054				
5	1.2	0.631					

Własności różnic skończonych (wynikające z definicji):

$$y = C \quad \Rightarrow \quad \Delta y = 0$$

$$y = Cf(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = C\Delta f(x)$$

$$y = \sum_k f_k(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = C\Delta f_k(x)$$

$$y = x^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x+h)^n - x^n = nhx^{n-1} + \ldots + h^n$$

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

Twierdzenie (wynikające z ostatniej własności):

Jeżeli $f(x)$ jest wielomianem stopnia n, to różnica skończona rzędu n tej funkcji jest stała, a kolejne zerami.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Wzory interpolacyjne dla argumentów równoodległych

Dla zbioru węzłów:

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad ..., \quad x_n = x_0 + nh$$

dane są wartości funkcji:

$$f(x_0), \quad f(x_1), \quad f(x_2), \quad ..., \quad f(x_n)$$

Wielomian interpolacyjny:

$$W(x) = a_0 + a_1 q + a_2 q(q-1) + a_3 q(q-1)(q-2) + \ldots + $$
$$+ a_n q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

Dla:

$$\begin{array}{ll} x = x_0 : & q = 0 \\ x = x_1 : & q = 1 \\ x = x_2 : & q = 2 \\ \vdots & \vdots \\ x = x_n : & q = n \end{array}$$

Funkcje bazowe:

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = q$$

$$\varphi_2(x) = q(q-1)$$

$$\varphi_3(x) = q(q-1)(q-2)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = q(q-1)(q-2)(q-3)\ldots(q-n+1)$$

Postać układu równań, z którego wyznacza się współczynniki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & \dots & n! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$a_0 = y_0$$

$$a_0 + a_1 = y_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \Delta y_0$$

$$a_0 + 2a_1 + 2a_2 = y_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!}$$

$$a_0 + 3a_1 + 6a_2 + 6a_3 = y_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_0 + na_1 + n(n-1)a_2 + \ldots + n!a_n = y_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

I. Wzór interpolacyjny Newtona

$$W(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Przykład

Znaleźć wielomian interpolacyjny stopnia 3. dla danych z poprzedniego przykładu (różnice skończone).

Wykorzystujemy tablicę różnic skończonych zbudowaną w poprzednim przykładzie

$$x_0 = 0.2 \qquad\qquad q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0.2}{0.2} = 5x - 1$$

$$W(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$W(x) = 0.259 + (5x-1)\cdot 0.105 + \frac{(5x-1)(5x-2)}{2}\cdot(-0.021) + \\ + \frac{(5x-1)(5x-2)(5x-3)}{6}\cdot 0.006$$

$$W(x) = 0.125x^3 - 0.412x^2 + 0.7375x + 0.127$$

Przykład

Oblicz wartość funkcji w punkcie pośrednim tabeli (tablicy różnic skończonych z poprzednich przykładów) dla $x = 0.7$ z dokładnością do Δ^2

Przyjmujemy:

$$x_0 = 0.6 \qquad q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.7 - 0.6}{0.2} = 0.5$$

$$W(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$W(x) = 0.448 + 0.5 \cdot 0.069 + \frac{0.5 \cdot (-0.5)}{2} \cdot (-0.009) = 0.483625$$

- Zadanie nie jest wykonywalne np. dla $x = 1.1$ – „brakuje” różnic skończonych

I. wzór interpolacyjny Newtona – interpolacja w przód

II. wzór interpolacyjny Newtona – interpolacji wstecz

Wielomian interpolacyjny:

$$W(x) = a_0 + a_1 q + a_2 q(q+1) + a_3 q(q+1)(q+2) + \ldots + a_n q(q+1)(q+2)\ldots(q+n-1)$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

Współczynniki wielomianu $a_0, \ldots, a_n$ wyznaczane są identycznie

II. Wzór interpolacyjny Newtona

$$W(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

<u>Przykład</u>

Oblicz wartość funkcji w punkcie pośrednim tabeli (tablicy różnic skończonych z poprzednich przykładów) dla $x = 1.1$ z dokładnością do Δ^2

Przyjmujemy:

$$x_n = 1.2$$

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1.1 - 1.2}{0.2} = -0.5$$

$$W(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}$$

$$W(x) = 0.631 + (-0.5)\cdot 0.054 + \frac{(-0.5)\cdot 0.5}{2}\cdot(-0.006) = 0.60475$$