(Vorversion des Artikels
Glade, Matthias / Schink, Andrea (2011): Vom Anteile bestimmen zur Multiplikation von Brüchen. Ein Weg mit System: fortschreitende Schematisierung, in: Mathematik lehren 164, 43-47.)

Matthias Glade / Andrea Schink

Vom Anteil vom Anteil zur Multiplikation von Brüchen –

Das Prinzip der fortschreitenden Schematisierung als Beitrag zum Systematisieren

Lerngruppe 6.-7. Schuljahr

Idee Am Beispiel der Multiplikation von Brüchen wird das Potential des Prinzips der Fortschreitenden Schematisierung illustriert und die Notwendigkeit von sichernden und systematisierenden Elementen aufgearbeitet.

Weitere Materialien: Elemente der Lernumgebung finden Sie unter___

Vorkenntnisse Gleichwertigkeit von Brüchen

Zeitbedarf: ca. 5 Stunden für den im Internet abgelegten Teil

Brüche sind zum Rechnen da – das ist die Erfahrung vieler Jugendlicher: Viele können erfolgreich Brüche formal multiplizieren – aber nur wenige können sich inhaltlich etwas darunter vorstellen und sich zu einem gegebenen Term eine passende Situation ausdenken (Prediger 2009).

Deshalb besteht die Forderung danach, zunächst auf der inhaltlichen Ebene zu arbeiten und die Kalkülebene erst nachgeschaltet als „Denk“-Entlastung für inhaltlich verstandene Konzepte einzuführen. Dabei sollen die Lernenden auch nach der Erarbeitung der Regel diese immer wieder auf die inhaltliche Ebene zurückbeziehen (vgl. z.B. Winter 1999, Prediger 2009). Was bedeutet das für das Systematisieren und Sichern? Wie kommt man vom inhaltlichen Denken zur Rechenregel?

Grundidee der Fortschreitenden Schematisierung

Die Idee, die Schülerinnen und Schüler die Rechenregel durch eine „*fortschreitende Schematisierung“* (Treffers 1983 und 1987) *ihrer individuellen Herangehensweisen entwickeln zu lassen*, wird am Beispiel einer Sequenz zur Hinführung zur Multiplikation von Brüchen als Anteil-vom-Anteil-Nehmen erläutert (aus

Prediger/Schink/Schneider/Verschragen 2012). Das in **Abb. 1** angedeutete Phasenschema zur fortschreitenden Schematisierung lässt sich für die Gestaltung vieler Lernsequenzen nutzen.

Allgemeines Phasenschema		**Konkrete Unterrichtsreihe** **Kinder in Entwicklungsländern- Anteile von Anteilen in Statistiken**
Phase 1	Inhaltliches Erkunden eines reichhaltigen Kontextes - mit Integration kognitiver Konflikte, Einführung lernförderlicher Anschauungsmittel und zielführender Fokussierungen	Einstieg mit Problemfragen: Wie viele Kinder leben unter welchen Bedingungen? Wie lese ich Rechteckbilder von Anteilen von Anteilen? Was ist hier das Ganze, auf das sich der Anteil bezieht? Warum haben wir hier unterschiedliche Ergebnisse? Wie muss präzisiert werden?
Phase 2	Lösungswege vereinfachen und formalisieren – mit Ermöglichung des wiederholten Austauschs unter Lernenden	Wie kann man Anteile von Anteilen einfacher bestimmen? Braucht man immer eine Zeichnung? Gibt es eine Regel?
Phase 3	Erstes Formulieren der Regel	
Phase 4	Zurückbinden: die gefundene Regel anschaulich begründen	Wie kann man die gefundene Regel an den Bildern erklären und damit den Kalkül rechtfertigen? Gibt es nur ein Bild, oder auch mehrere?
Phase 5	Erarbeitung alternativer Vorstellungen (inhaltliche Verknüpfung)	Ergänzende Vorstellung zur Multiplikation von Brüchen: Wie bestimme ich Flächeninhalte? Was haben diese mit dem Anteil-vom-Anteil zu tun?
Phase 6	Üben, Klassenarbeit: immer wieder auf verschiedenen Mathematisierungsniveaus aktivieren und verknüpfen	Beispielaufgabe: Gib ein Bild und eine Situation zu 2/3 mal 4/5 an.

Abb. 1: Phasenschema – nicht streng in zeitlicher Abfolge zu denken (angelehnt an Treffers 1987, Prediger 2009)

Erkunden im Kontext

Die Schülerinnen und Schüler erkunden im Kontext „Kinder weltweit“ Anteile von Anteilen, indem sie sich zunächst in Rechteckbildern zu Statistiken orientieren und diese interpretieren, um Aussagen wie z.B. „Die rote Fläche im Rechteck steht für alle Kinder, die in Entwicklungsländern leben“ zu treffen und zu erkennen, wie wichtig es ist, genau zu schauen, auf welches Ganze sich ein Anteil bezieht (**Phase 1**).

Anschließend bestimmen sie selbst Anteile von Anteilen, indem sie eigene Rechteckbilder zu Schulbesuchsquoten in anderen Ländern anfertigen (siehe auch **Arbeitsmaterial 1**).

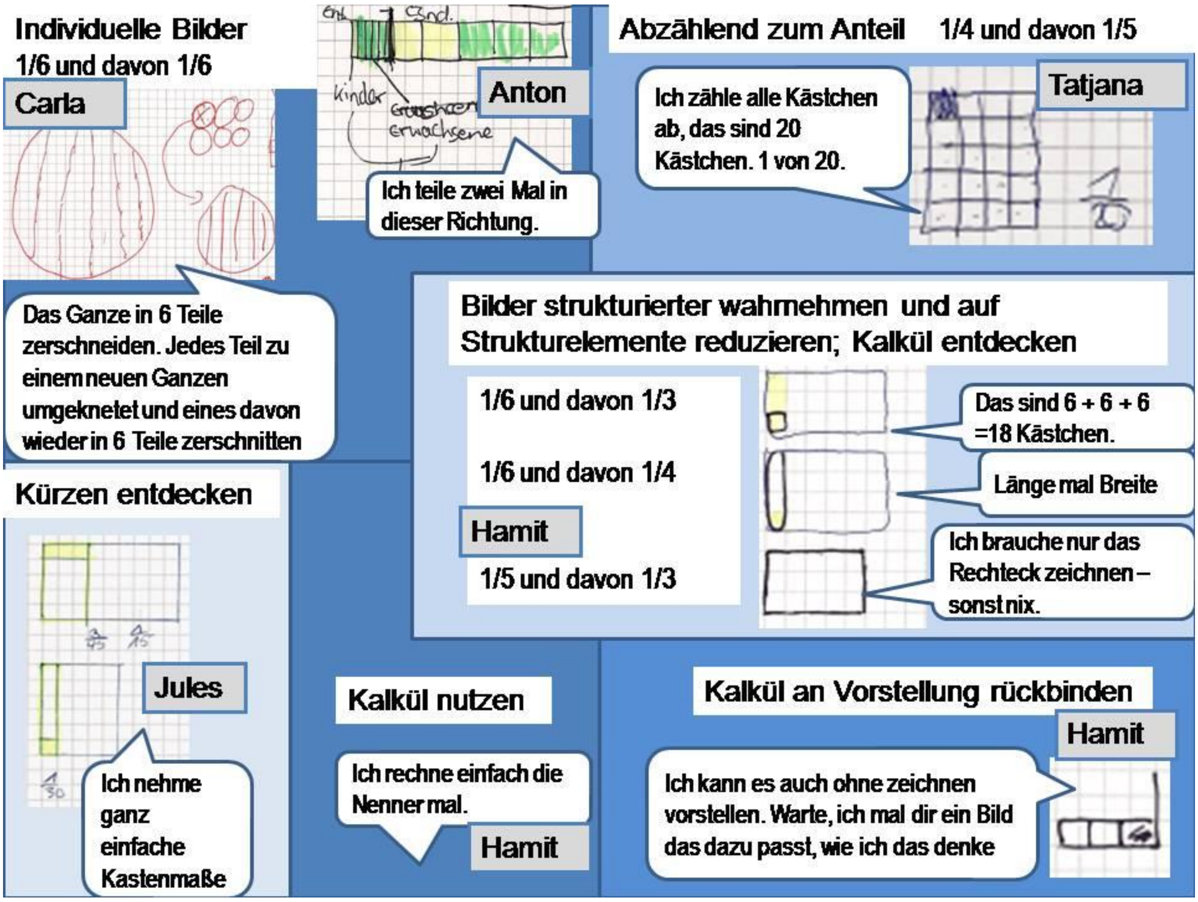


Abbildung 2: Entwicklung eines Verfahrens aus individueller Vielfalt

Abb. 2 zeigt einige Schülerarbeiten, die während der Bearbeitungsprozesse entstanden sind: Individuelle Bilder zum Bestimmen des Anteils-vom-Anteil. Jeder in der Klasse kann also auf seinem Niveau im konkreten Kontext eigene, zunächst informelle, Lösungsansätze finden.

Entwicklung formalerer Strukturen

Die Rechteckbilder und deren Deutungen verändern sich im Laufe der Lernprozesse: Es wird ökonomischer gezeichnet, es werden verschiedene Richtungen des Einzeichnens ausprobiert und die Bilder werden zunehmend mit mathematischen Strukturen gedeutet. Schließlich stellt sich die Frage nach einer „einfacheren“ Berechnungsmöglichkeit für den Anteil-vom-Anteil, die die Lernenden finden, wenn sie die Strukturen ihrer eigenen Bilder analysieren und Zusammenhänge zwischen Bild und Aufgabe herstellen oder stärker auf die Zahlen schauen. Erste Vermutungen werden angestellt, die selbst geprüft und in der Gruppe verglichen und überprüft werden. So entsteht die Regel „*Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner*“

(Phase 3) in einem Prozess des wiederholten Aushandelns (**Phase 2**) und wird nicht losgelöst von der eigenen Vorstellungswelt gelernt. Im gemeinsamen Ringen um einfachere Lösungen werden immer wieder Argumente auf unterschiedlichen Mathematisierungsniveaus miteinander verknüpft und auf das ausgewählte Anschauungsmittel – hier die Rechteckbilder – bezogen: Die Bilder sind Vorstellungshilfe, Argumentationshilfe beim Aushandeln und Veranschaulichungshilfe beim Erklären der gefundenen Regel (**Phase 4**).

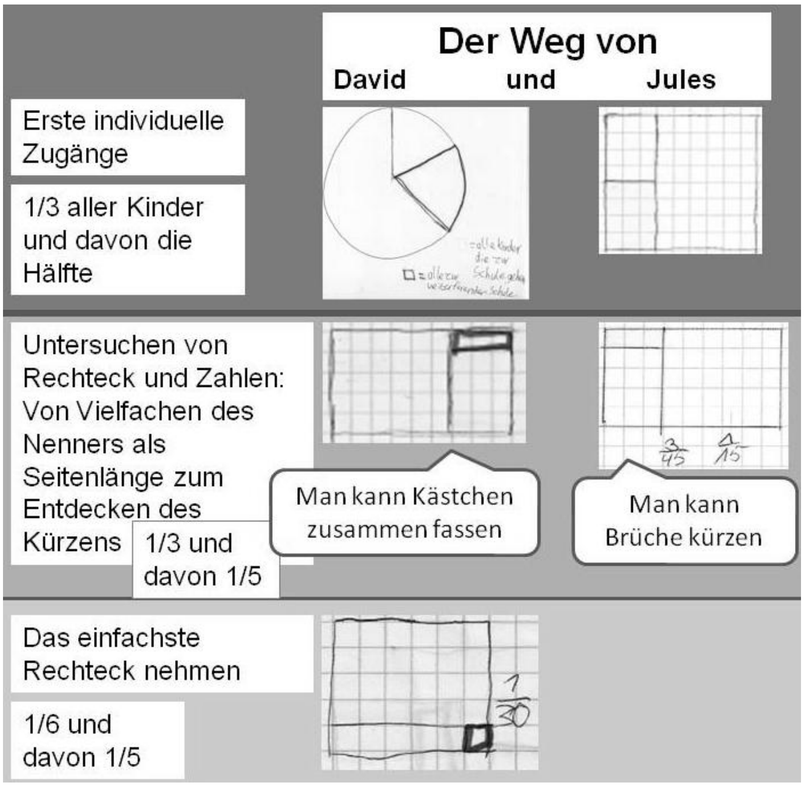


Abb. 2: Davids und Jules Weg zum Anteil-vom-Anteil

Schematisieren konkret: Zwei Schüler im Blick

Jules und Davids erste Zugänge

Den Phasen 2 bis 4 wollen wir an einem konkreten Lernprozess zweier Gesamtschüler gründlicher nachgehen. Die Dokumentation entstammt einem Interview im Rahmen eines Forschungsprojekts, das die Erprobung der Einheit im normalen Klassenunterricht begleitet, um die Innenwelt der Lernprozesse genauer untersuchen zu können.

David und Jules haben die erste Phase der Lernsequenz bereits durchlaufen, indem sie Anteile aus verschachtelten Rechteckbildern abgelesen und über die Rolle des Ganzen diskutiert haben. Als sie sich mit Aufgabe 4 im **Arbeitsmaterial 1** beschäftigen, entwickeln sie unabhängig voneinander die in **Abb. 3** oben abgedruckten Zeichnungen.

Jules stellt bereits Zahlbeziehungen zwischen dem einen Anteil und der einen Seitenlänge des Rechtecks her, denn die horizontale Einteilung wählt er bewusst („In der Länge habe ich 9 Kästchen gemacht, weil das kann man besser durch 3 teilen.“). Die vertikale Einteilung hat er hingegen, wie er erläutert, „einfach so, zack, ohne Zählen“ probiert - und Glück gehabt.

Im Unterricht

Zu Anteilen von Anteilen können verschiedene Bilder gezeichnet werden: Horizontal-Vertikal-Strukturierung, Strukturierungen nur in einer Richtung (wie Anton in **Abb. 2**), Kreisbilder.

Die Vorzüge unterschiedlicher Darstellungen zum Finden einer Regel können im Unterricht jedoch nicht ökonomisch entdeckt werden. Hier erfolgen Vorstrukturierungen durch die Lernumgebung, oder der Lehrer gibt unterstützende Hinweise (vgl. auch die Schematisierungsimpule in **Kasten 3** ganz am Ende).

Die Horizontal-Vertikal-Strukturierung von David und Jules hat den Vorteil, dass sie der räumlich simultanen Auffassung der Multiplikation am nächsten kommt und sich die Rechenregel mit ihr gut entdecken lässt. Zudem lassen sich Bilder für Nichtstammbrüche nur in dieser Darstellung einfach strukturieren.

Jules und David finden ökonomischere Darstellungen

Als nächstes bestimmen die beiden Jungen *1/5 von 1/3*. Jules fertigt erneut ein 9 x 8 Rechteck an, bestimmt 1/3 des Rechtecks und stutzt: „Durchzuteilen ist das Problem …jetzt durch 5 … eine andere Größe bräuchte man. Hm, die Länge ist gut.“

Davids Empfehlung („Ich würde bei der Größe 5 nehmen, weil 1/5.“) wird von Jules sofort aufgegriffen und zur Verbesserung der Zeichnung genutzt („Das kann man dann besser durchteilen.“). Dann bestimmen beide den Anteil vom Anteil als 3/45 (vgl. **Abb. 3**).
Auf den Impuls zur Schematisierung: „*Kann man das auch einfacher aufschreiben?“* finden beide den Ausdruck 1/15.
Jules: „Man hätte einfach alles durch 3 rechnen können.“ Er kürzt, löst also symbolisch.
David strukturiert sein Bild gedanklich um und vergröbert die Kästcheneinteilung: „Ich habe einfach die ganze Dreierreihe genommen, statt halt die Kästchen.“
Jules „Durchteilungsproblem“ und die Frage nach der Vereinfachung des Ergebnisses haben die beiden dazu angeregt, die Struktur des Rechteckbildes genauer zu betrachten und mit den Zahlen in der Aufgabenstellung (1/5, 1/3) zu verknüpfen: Ab der folgenden strukturgleichen Aufgabe verwenden beide die Zahlen im Nenner und nicht mehr echte Vielfache dieser Zahlen als Höhe und Breite des Rechtecks (vgl. **Abb. 3** mittig und oben).

Im Unterricht

An dieser Stelle begegnet man einer Vielzahl von Ansätzen, die sich im Grad der Mathematisierung stark unterscheiden: Einige Lernende zählen an dieser Stelle noch die Kästchen aus (**Abb. 2 Tatjana**), andere addieren zunächst zeilenweise (**Abb. 2 Hamit 1**) oder steigen direkt mit der von David und Jules am Ende genutzten ökonomischeren Form ein.

Wichtig ist es hier, den Austausch zwischen den Lernenden anzuregen, um die Weiterentwicklung der je eigenen Zugänge voranzutreiben. Das nutzt auch dem, der das Muster bereits multiplikativ deutet, indem er sich z. B. im Austausch mit dem zeilenweise Addierenden an eine andere Vorstellung zur Multiplikation erinnern kann. Dazu bedarf es wechselnder Formen von Partner- und Kleingruppenarbeit und wechselnder Gesprächspartner.

Jules und David lösen sich vom Bild

Beide bearbeiten noch zwei weitere Aufgaben der Form: „Wie viel sind ¼ von 1/5?“. Wieder werden sie zum Schematisieren angeregt: *„Kann man das auch ohne das Zeichnen von Bildern machen?“*
Die beiden Jungen verstehen das als Aufforderung, die nächste Aufgabe im Kopf zu lösen. David gelingt es, Jules bestätigt. Die beiden erklären im Dialog:
Jules: „Ich habe mir das Rechteck bildlich vorgestellt und dann so ein Strich.“

David: „5 Kästchen Breite und 4 Kästchen Tiefe.

Jules: „Das sind dann 20 insgesamt.“

David: „Und davon 1 Kästchen, das sind dann 1/20."
Das Lösen von Aufgaben ohne Anschauungsmittel kann eine Verinnerlichung der vorher getätigten Handlungen und damit einen weiteren Abstraktionsschritt forcieren. Teilweise benötigen Kinder auch nur Teile der bildlichen Darstellung (wie Hamit in Abb. 2, der nur den Rahmen des Rechtecks verwendet). Das Denken der Kinder nutzt immer mathematischere und ökonomischere Strukturen und verzichtet zunehmend auf die Nutzung strukturunterstützender Anschauungsmittel.
Jules gelingt es so, nach und nach eine Regel zu formulieren:

„Wenn man das im Kopf rechnen will, muss man die unteren zusammen rechnen, das sind 20, … also malrechnen." und „1·1 ist ja 1 und dann 5·4 ist 20. Dann hat man 1/20 und so viele gehen dann zur weiterführenden Schule oder anders, wie das dann in dem Beispiel ist."

David will ihn korrigieren: Wenn der Zähler 1 ist, muss man nur die Nenner malnehmen. Jules lässt sich darauf ein. So wird noch keine Regel für alle Brüche gefunden bzw. vermutet, sondern nur eine für den gründlich durchdachten Spezialfall der Stammbrüche formuliert. Jules wird gezwungen ein Niveau zurückzugehen. Es kommt zwar nicht zu einem diskursiven Abgleich und insofern zu keinem systematischen Vergleich der beiden Standpunkte, aber Jules nimmt diese Sicht damit das erste Mal ein. Seine allgemeine Sicht aktiviert er später an Nichtstammbrüchen nochmal. Bei dieser ersten Formulierung einer Regel argumentiert er formal auf die mathematischen Strukturen bezogen, die er in seiner inhaltlichen Deutung aber selbst an den vorgegebenen, als paradigmatisch verstandenen Kontext zurückbindet.

Im Unterricht

Vermutlich wäre an dieser Stelle schon lange eine Regel unter den Lernenden durchgesickert. Mancher hätte sich entspannt zurückgelehnt und sein Werk für beendet erklärt, da er jetzt die Regel kennt. Den Moment, in dem ein Schüler den letzten gewinnbringenden Schritt wie Jules tut, bekommt man als Lehrkraft leider meist nicht mit – und setzt wieder an, die Regel inhaltlich erklären zu lassen. So auch bei David und Jules.

Jules und David erklären nochmal

Die beiden erfahren gerade die entlastende Wirkung des Rechenkalküls (schnelle Antwort zur Aufgabe ½ und davon ¼: „2 mal 4 (ist) 8. 1/8. Ganz einfach!"). Sie werden dann jedoch aufgefordert, die gefundene Regel zu begründen, um den entwickelten Kalkül direkt wieder an das inhaltliche Denken rückzubinden: „2 Breite, 4 Tiefe und davon dann die Hälfte und davon dann ¼….“ (David)

Im Unterricht

Das Einfordern einer Erklärung (etwa **„***Erkläre am Bild, wieso deine Regel funktioniert***“)** ist für die Sicherung des inhaltlichen Verständnisses der gewonnen Regel fundamental. Sonst fußt die Erkenntnis der Regel vielleicht nur auf dem Hörensagen oder dem Erkennen von Zahlbeziehungen. (Wenn genügend gelöste Aufgaben in der symbolischen Darstellung verglichen werden, stellen die Schüler empirisch fest, dass man immer das Produkt der Zähler und der Nenner bildet. Warum das aber so ist, könnte sonst ungeklärt bleiben.)
Wenn die Lernenden ihre Erklärung selbst festhalten, ist es (gerade für unsichere Schüler) nützlich, weitere unterstützende Fragen oder Begriffe zur Verfügung zu stellen:

- *„Wo findest du die Zahlen aus der gerechneten Aufgabe im Bild?“*
- *„Benutze für deine Antwort die Begriffe Spalten, Zeilen und Anteil.“*

Ausblick: Die Regel für Nichtstammbrüche

Für Nichtstammbrüche wie bei „2/3 und davon 3/5“ wird naturgemäß zunächst eine zurückliegende Schematisierungsstufe eingenommen, da die Regel noch nicht erkannt wurde: Das äußere Rechteck zu zeichnen, zu deuten und mit der symbolischen Ebene der Zahlen in den Brüchen zu verknüpfen, ist so eher kein Problem. Dass aber auch den Zahlen im Zähler eine Rechteckstruktur entspricht, muss wieder ganz neu im Zeichnerischen entwickelt und dann zunehmend mathematischer beschrieben werden.

Fazit: Über das Beispiel hinaus

Der hier beschriebene Prozess hat diesen erfolgreichen Weg genommen, da die Lernenden ungestört, ohne Zeitlimit aber mit sanften Impulsen mit ihren eigenen Produkten weiterarbeiten konnten und immer wieder aufgefordert waren, verschiedene Darstellungen in Beziehung zu setzen.

Typische Schematisierungsimpulse
• Vergleicht untereinander. Erklärt einander. • Kann man das auch einfacher / mathematischer schreiben / lösen? • Kann man das auch ohne Bilder / ohne Anwenden des Anschauungsmittels lösen? • Kannst du eine Regel finden? • Ist das immer so? Warum ist das immer so? Erläutere an einem Bild oder einer Geschichte.

Die Gedanken und Darstellungen der Lernenden haben im Prozess der fortschreitenden Schematisierung einen höheren Grad an Mathematisierung angenommen. Dabei haben fortlaufend Abgleichungs- und Systematisierungsprozesse stattgefunden.
Dennoch bedarf es sichernder Impulse (siehe **Kasten 3**), um im Unterricht das systematisierende Fortschreiten und eine inhaltlich fundierte Sicherung zu ermöglichen.
Kasten 3

Sicher gehört es inzwischen zum Standard des Unterrichts und der meisten Lernumgebungen, dass man die Lernenden zunächst selber erkunden lässt. Allerdings ist das „Wie“ entscheidend: Inwiefern Lernende

- Zeit bekommen, eigene Ideen in Ruhe zu entwickeln und Antworten untereinander auszuhandeln,
- die Möglichkeiten für einen intensiven Austausch bekommen und dazu auch in Unterrichtsgesprächen mit Reflexionsanlässen angeleitet werden und
- auch nach der Erarbeitung von Rechenregeln immer wieder versucht wird, die verschiedenen Darstellungsebenen miteinander zu verknüpfen.

Der Kalkül gewinnt damit an Sinnhaftigkeit, insofern er als das Produkt des eigenen Tuns im Schematisierungsprozess erfahren werden kann (vgl. Prediger / Glade / Schmidt 2011).
Dies kann helfen, die eingangs beschriebene Isolation des mathematikbezogenen Kalkülwissens durch seine Vernetzung mit sinnstiftenden Anwendungen zu überwinden.

Anmerkung

Das Unterrichtsmaterial ist im Rahmen des langfristigen Forschungs- und Entwicklungsprojekts „Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen“ (KOSIMA) entstanden. Andrea Schink hat an der Entwicklung der Lernumgebung „Kinder weltweit“ mitgearbeitet; Matthias Glade hat die Erprobung begleitet und ausgewertet.

Literatur

Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül– Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten.- In: Fritz, A. / Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Beltz, Weinheim, S. 213-234. Vorversion unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/publikationen.htm

Prediger, S. / Glade, M. / Schmidt, U. (2011): Wozu rechnen wir mit Anteilen? Herausforderungen der Sinnstiftung am schwierigen Beispiel der Bruchoperationen. Erscheint in: PM Heft 37.

Prediger, S. / Schink, A. /Schneider, C. / Verschragen, J. (in Vorbereitung 2012): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken, - In: mathewerkstatt 6. Cornelsen, Berlin.

Treffers, A. (1983): Fortschreitende Schematisierung. Ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr.- In: mathematik lehren 1, S. 16-20.

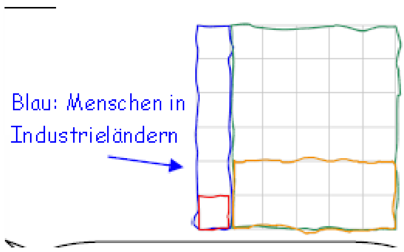
Treffers, A. (1987): Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project.- Reidel, Dordrecht.

Winter, H. (1999): Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung.

http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/37/bruchrechnung.pdf (abgerufen am 14.08.2010).

Wie viele Kinder leben unter welchen Bedingungen?

Weltbevölkerung
Im Jahr 2010 lebten fast 7 Milliarden Menschen auf der Welt. Davon lebten $\frac{1}{6}$ in Industrieländern. Davon wiederum waren $\frac{1}{6}$ Kinder unter 15 Jahren. $\frac{5}{6}$ aller Menschen lebten in Entwicklungsländern, davon waren $\frac{1}{3}$ Kinder.



1. Für welche Gruppen von Menschen steht das grün umrandete Rechteck?
Für welche Gruppen stehen das grüne und das gelbe Rechteck?

2. Maren sagt über ihre Zeichnung: „Die beiden Sechstel haben aber unterschiedliche Ganze.“
Erkläre, was sie mit den beiden Sechsteln meint.

3. Zeichne zu folgenden Aussagen Bilder. Was ist der Teil, was ist das Ganze?
Prüfe, ob die Anteile stimmen. Du kannst dafür zum Beispiel Kästchen zählen.
Korrigiere die Aussagen, wenn nötig.
a) Kinder in Industrieländern sind ein Sechstel aller Menschen.
b) 1/6 aller Menschen lebten in Industrieländern, davon sind 5/6 älter als 15 Jahre.
c)1/3 aller Kinder leben in Entwicklungsländern.

Anteile von Anteilen verstehen und bestimmen

4. Wie viele Kinder gehen zur Schule?
In Somalia geht nur ein Drittel der Kinder zur Grundschule. Der Rest muss arbeiten. Nach der Grundschule geht die Hälfte dieser Grundschulkinder auf die weiterführende Schule.

- Zeichne ein Bild zu dieser Situation.
- Wie groß ist der Anteil der Kinder, die auf die weiterführende Schule gehen?

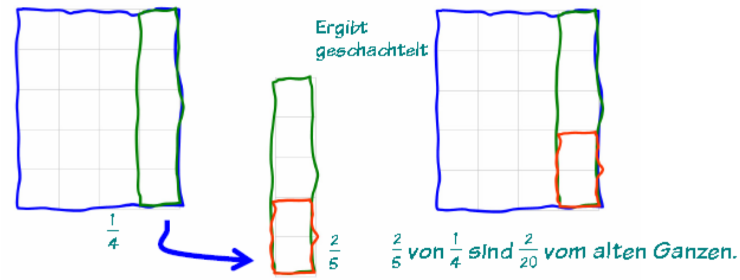
5. Wie viele gehen hier auf die weiterführende Schule?

Land	Die gehen zur Grundschule	Von den Grundschülern geht dieser Anteil danach auch zur weiterführenden Schule
Pakistan	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

Arbeitsmaterial 1

Anteile ineinander schachteln

Anteile kann man ineinander schachteln und auf das alte Ganze beziehen, z.B. so:



a) Erkläre die Bilder von links nach rechts.
Schreibe für jedes Bild auf, was das Ganze ist.

b) Wie kann man die Lösung $\frac{2}{20}$ aus dem rechten Bild ablesen?

c) Vergleicht eure Erklärungen aus **b)**

Noch mehr Anteile von Anteilen bestimmen

Würfele mit zwei / vier Würfeln weitere Aufgaben

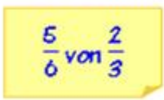
a) Nach dem Muster  heißt: 1/3 und davon ½.

Du dir auch größere Zahlen wählen.

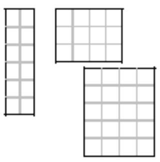
b) Nach dem Muster 

und 

heißt:



Anteile von Anteilen bestimmen



a)
- In welches der drei Rechtecke am Rand könntest du am besten $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ einzeichnen? Begründe deine Wahl.
- Übertrage das passende Rechteck in dein Heft und zeichne $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ ein.
- Wie groß ist dann $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ bezogen auf das ganze Rechteck?

b) Kannst du aus dem Beispiel in **a)** eine allgemeine Regel aufschreiben, wie man Anteile vom Anteil bestimmt? Was hat das Ergebnis mit der Zahl der Kästchen zu tun?
Was hat das Ergebnis mit der Zahl der Zeilen und Spalten im Rechteck zu tun?

c)
- Zeichne das gleiche Rechteck wie in **a)** noch einmal und markiere $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$.
- Wie viele Kästchen hat dein Rechteck? Wie viele Kästchen sind nun markiert?
  Wie groß ist also der gesuchte Anteil am gesamten Rechteck?
- Formuliere auch hier eine allgemeine Regel.

d) Mit den Überlegungen aus **c)** hast du eine Regel gefunden, wie man ohne Bild auch zum Beispiel $\frac{2}{7}$ von $\frac{4}{5}$ bestimmen kann.
Folgende Fragen helfen zur Begründung der Regel am neuen Beispiel:
- Wie viele Spalten und Zeilen kann das Rechteck haben?
- Wie viele Kästchen hat es dann insgesamt?
- Wie viele sind davon markiert?
- Wie groß ist also der Anteil vom Rechteck?