5. Tétel
Gyökvonás, gyökfüggvények és tulajdonságaik

Bevezető:

A gyökfüggvények és tulajdonságaik témakörben definiálni szeretném a négyzetgyök, majd az n-edik gyök fogalmát. Ezt követően a gyökfüggvények ábrázolásáról, s ezen függvények jellemzéséről szeretnék beszélni. Megemlítem a témakörhöz kapcsolódó tételeket, s egyet ezek közül bizonyítok. Végül a gyökvonás, s gyökfüggvények gyakorlati, s matematikai hasznukról mondanék pár szót.

0. Egy kis történeti bevezető a témához:

Már az ókorban kialakult a racionális és irracionális szám fogalma. A számok gyökének jelölésére a középkori Európában a latin radix (gyökér) szó első betűjét, az *R*-t használták. Körülbelül 400 éve váltak általánossá a mai jelek.

1. Négyzetgyök definíciója:

Egy nemnegatív valós szám négyzetgyöke az a nemnegatív valós szám, amelynek a négyzete az eredetiszám.

Formulával: $\sqrt{a}=b$, ha $b^2=a$, vagy röviden: $(\sqrt{a})^2=a$

Feltételek: $a\in \mathbb{R}|a\geq 0$, $b=\sqrt{2}\in \mathbb{R}|\sqrt{2}\geq 0$

A definíció szerint $(\sqrt{a})^2=a$. A $\sqrt{a^2}$ esetén azonban előbb van a négyzetre emelés, és utána a négyzetgyökvonás. Ennek az a következménye, hogy az **a** változó negatív szám is lehet. Az eredmény azonban mindenképpen egy nemnegatív szám lesz.

Tehát: $\sqrt{a^2}=|a|$

2. n-edik gyök definíciója:

Páros gyökkitevő esetén: Egy nemnegatív valós szám n-edik páros kitevőjű gyöke az a nemnegatív valós szám, amelynek a n-edik hatványa az eredeti szám.

Páratlan gyökkitevő esetén: Egy valós szám n-edik páratlan kitevőjű gyöke az a valós szám, amelynek a n-edik hatványa az eredeti szám.

Mint látható, a különbség csak a feltételekben van.

Formulával: $\sqrt[n]{a}=b$, ha $\mathbf{b^n = a}$, vagy röviden: $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

Feltételek:

Páros gyökkitevő ($n = 2k$, $k\in \mathbb{N}^+$) esetén:

$a\in \mathbb{R} \mid a\geq 0$, $b=\sqrt[n]{a}\in \mathbb{R} \mid \sqrt[n]{a}\geq 0$.

Páratlan gyökkitevő ($n = 2k + 1$, $k\in \mathbb{N}^+$) esetén:

$a\in \mathbb{R}$, $b=\sqrt[n]{a}\in \mathbb{R}$. (Kikötés nélkül)

Racionális kitevőjű hatvány:

$a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}; \quad a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$

3. Gyökök azonosságai:

Azonos alapú gyökök:

$\sqrt[n]{a} * \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{k-n}}$

$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \qquad \sqrt[k]{a^n} = (\sqrt[k]{a})^n = a^{\frac{n}{k}}$

Azonos kitevőjű gyökök:

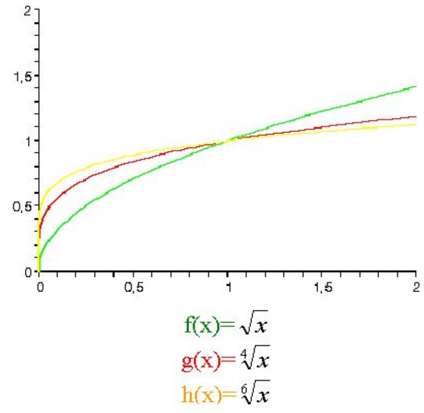
$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$

4. Gyökfüggvények

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvények tulajdonságai:

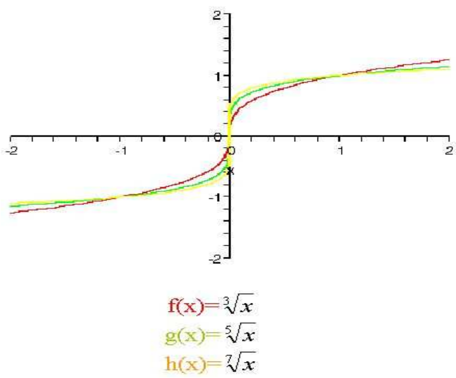
Páros gyökkitevő esetén:

• a függvény legbővebb értelmezési tartománya a nem negatív számok halmaza
• értékkészlete a nemnegatív számok halmaza
• szigorúan monoton növekedő
• minimuma x= 0 helyen van, értéke 0



Páratlan gyökkitevő esetén:

• a függvény minden valós számra értelmezve van
• értékkészlete a valós számok halmaza
• szigorúan monoton növekedő



Tételek:

• $\sqrt{2}$ **irracionális szám**

• **Szorzat n-edik gyöke:** Szorzat n-edik gyöke megegyezik a tényezők n-edik gyökének szorzatával.

Az állításban szereplő változókra az n-edik gyök definíciójában szereplő **feltételek** vonatkoznak.
Az **n** gyökkitevő 1-nél nagyobb egész szám lehet, azaz **n ∈ N**, **n** > **1**, és **a,b ∈ R**.
A gyök alatt nemnegatív valós szám állhat, azaz **a ≥ 0, b ≥ 0.**

Állítás:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Bizonyítás:

Emeljük n-edik hatványra az állítás mindkét oldalát. A baloldal n-edik hatványa:
$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$, az n-edik gyök definíciója szerint.
A jobboldal n-edik hatványa felhasználva, hogy egy szorzat tényezőnként hatványozható, és hivatkozva az n-edik gyök definíciójára:
$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$.
Mivel mindkét esetben ugyanazt kaptuk, az állítás tehát igaz.

• **Hányados n-edik gyöke**:
Tört n-edik gyöke egyenlő a számláló és a nevező n-edik gyökének hányadosával.

Az állításban szereplő változókra az n-edik gyök definíciójában szereplő **feltételek** vonatkoznak.
Az **n** gyökkitevő 1-nél nagyobb egész szám lehet, azaz **n ∈ N**, **n** > **1**, és **a,b ∈ R**.
Ha **n** gyökkitevő **páros** (n= 2m), akkor a gyök alatt nemnegatív valós szám állhat, azaz **a≥0, b** > **0.** A **b ≠ 0** feltételnek teljesülnie kell a nevező miatt.

Állítás:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Bizonyítás:
Emeljük n-edik hatványra az állítás mindkét oldalát. A baloldal n-edik hatványa:
$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$, az n-edik gyök definíciója szerint.
A jobboldal n-edik hatványa, felhasználva, hogy egy törtnél a számláló és a nevező külön-külön is hatványozható, és hivatkozva az n-edik gyök definíciójára:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

Mivel mindkét estben ugyanazt kaptuk, az állítás tehát igaz.

Alkalmazások:

Matematikai:
• másod- és magasabb fokú egyenletek megoldása
• gyökös egyenletek megoldása
• mértani sorozatok
• fárasztó témazáró feladatsorok

Egyéb:
• kamatszámítás
• inga lengésidejének meghatározása
• **harmonikus rezgőmozgás periódusának kiszámítása:**

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ D: direkciós erő (rugóállandó)

m: tömeg

T: periódusidő

<u>Kidolgozója</u>: *Rapp Tamás* 12.D