Tema 5: PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Carlos Alberola López

Lab. Procesado de Imagen, ETSI Telecomunicación

Despacho 2D014

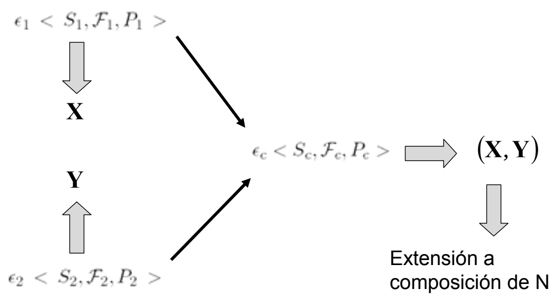
caralb@tel.uva.es, jcasasec@tel.uva.es,

http://www.lpi.tel.uva.es/sar

Proceso estocástico (PE)

- Término sinónimo de “señal aleatoria”
- En este tema conectaremos los conceptos de Teoría de la Probabilidad con conceptos de Tratamiento de Señal (mediante Sistemas Lineales).
- Las señales útiles en Telecomunicación precisan de herramientas de modelado probabilístico:
  - A) Toda señal que transporta información tiene algún grado de aleatoriedad.
  - B) Sobre toda señal deseada se superpone de forma natural algún tipo de señal perturbadora
- Se pretende disponer de alguna herramienta que caracterice las señales del mismo “tipo” con independencia de su contenido concreto.
- Y tener herramientas que permitan minimizar el efecto del ruido.

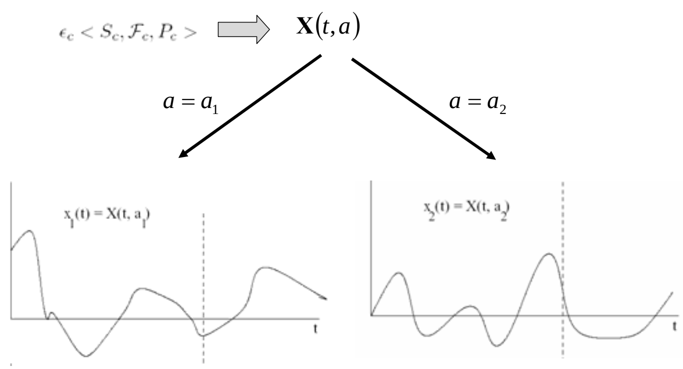
Concepto de VA

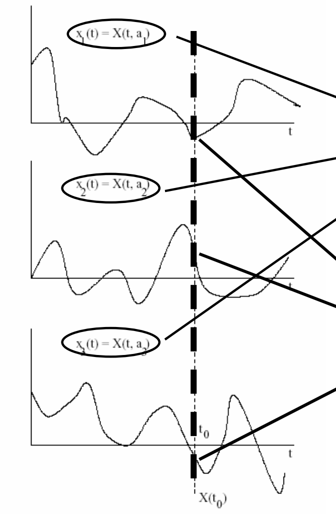


Extensión a composición de N experimentos ε_i

$$\overline{\mathbf{X}} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_N)$$

Concepto de Proceso Estocástico





INTERPRETACIÓN 1

Colección de funciones determinísticas del tiempo (cada una de ellas se denomina *realización* del proceso)

INTERPRETACIÓN 2

$\mathbf{X}(t_0, a)$

Colección de VAs indexadas por índice *t*

Concepto de Proceso Estocástico

- Sea el proceso estocástico: $\mathbf{X}(t,a) = A\cos(\omega_0 t + \mathbf{\Theta})$

con $\mathbf{\Theta} \sim \mathrm{U}(-\pi,\pi)$

- Como hicimos en temas anteriores, daremos por supuesta la dependencia con el resultado del experimento aleatorio. Escribiremos $\mathbf{X}(t) = A\cos(\omega_0 t + \mathbf{\Theta})$
  - Si $\mathbf{\Theta} = \pi/4$ tenemos $\mathbf{X}(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$: función determinística del tiempo
  - Si $t = t_0$ tenemos $\mathbf{X}(t_0) = A\cos(\omega_0 t_0 + \mathbf{\Theta})$ que es una variable aleatoria, la cual podemos denotar por $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, …
  - Si $\mathbf{\Theta} = \pi/4$ y $t = t_0$ tenemos: $\mathbf{X}(t_0) = A\cos\left(\omega_0 t_0 + \frac{\pi}{4}\right)$ que es un número real.

Una posible clasificación

- En función del índice temporal
  - Proceso estocástico (PE): $\mathbf{X}(t)$
  - Secuencia aleatoria (SA): $\mathbf{X}[n]$
- En función de que cada VA sea continua o discreta
  - PE continuo $\mathbf{X}(t) \sim \mathrm{N}(0, \sigma(t))$
  - PE discreto $\mathbf{X}(t) \sim \mathrm{B}(N(t), p(t))$
  - SA continua $\mathbf{X}[n] \sim \mathrm{N}(0, \sigma[n])$
  - SA discreta $\mathbf{X}[n] \sim \mathrm{B}(N[n], p[n])$
- Predecible/no predecible
  - Predecible: $\mathbf{X}(t) = A\cos(\omega_0 t + \mathbf{\Theta})$
  - No predecible: sin expresión analítica asociada

Caracterización de PEs

- **Funciones de primer orden**: caracterización de las VAs del proceso por separado. Se requiere un único índice temporal.
  - Función de distribución: $F_{\mathbf{X}}(x;t) = P(\mathbf{X}(t) \leq x)$
  - Función de densidad: $f_{\mathbf{X}}(x;t) = \frac{dF_{\mathbf{X}}(x;t)}{dx}$
- **Funciones de segundo orden**: caracterización de *pares* de VAs del proceso. Hacen falta dos índices para indicar sobre qué dos VAs se definen las funciones:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\mathbf{X}(t_1) \leq x_1, \mathbf{X}(t_2) \leq x_2) \quad \cap$$

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

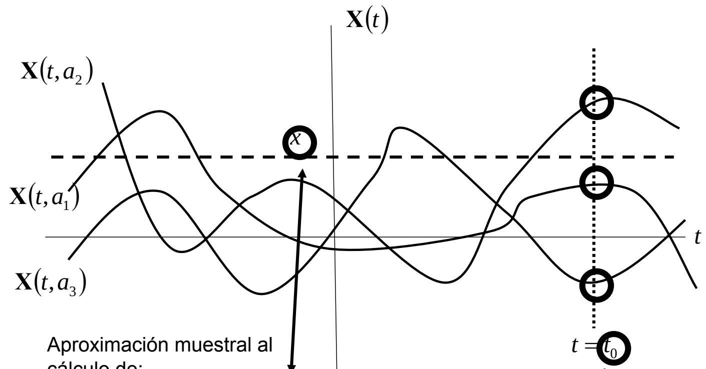
Caracterización de PEs

- **Eliminación de dependencias**: se lleva a cabo siguiendo las reglas vistas en los temas anteriores. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
F_{\mathbf{X}}(x_1, t_1) &= F_{\mathbf{X}}(x_1, \infty; t_1, t_2) \\
f_{\mathbf{X}}(x_1, t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2
\end{aligned}
$$

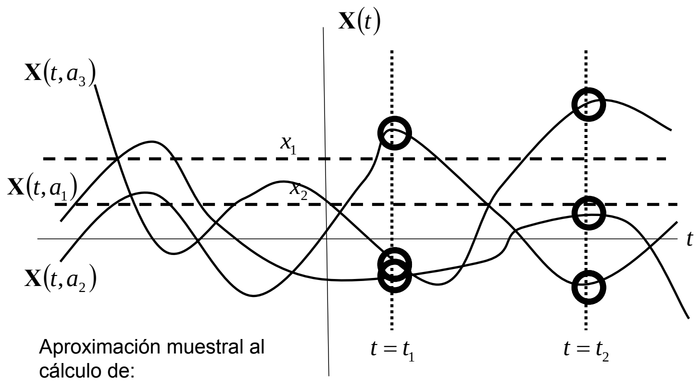
- **Funciones de orden N**: caracterización de VAs N-dimensionales extraídas del proceso. Hacen falta N índices para indicar sobre qué N VAs se definen las funciones:

$$
\begin{aligned}
F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_N; t_1, t_2, ..., t_N) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{N} \mathbf{X}(t_i) \leq x_i\right) \\
f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_N; t_1, t_2, ..., t_N) &= \frac{\partial^N F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_N; t_1, t_2, ..., t_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N}
\end{aligned}
$$



Aproximación muestral al cálculo de:

$$F_{\mathbf{X}}(x; t_0) = P(\mathbf{X}(t_0) \leq x) \approx \frac{2}{3}$$



Aproximación muestral al cálculo de:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\mathbf{X}(t_1) \leq x_1 \cap \mathbf{X}(t_2) \leq x_2) \approx \frac{1}{3}$$

Caracterización de 2 PEs

- Si tuviésemos dos procesos estocásticos, su caracterización vendría dada por la función de densidad conjunta de órdenes N y M, es decir:

$$f_{\mathbf{XY}}(\underbrace{x_1, \ldots, x_N}, \underbrace{y_1, \ldots, y_M}; \overbrace{t_1, \ldots, t_N}, \overbrace{t'_1, \ldots, t'_M})$$

- En la práctica, salvo para procesos gaussianos, es impensable poder disponer de esta información. Por ello, lo normal es trabajar con parámetros de caracterización parcial de los PEs.

Caracterización parcial de PEs

- Media

$$\eta_{\mathbf{X}}(t) = E\{\mathbf{X}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathbf{X}}(x;t)dx$$

- VCM $$E\{\mathbf{X}^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\mathbf{X}}(x;t)dx$$

- Varianza

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\mathbf{X}}(t) &= E\{(\mathbf{X}(t)-\eta_{\mathbf{X}}(t))^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta_{\mathbf{X}}(t))^2 f_{\mathbf{X}}(x;t)dx \\ &= E\{\mathbf{X}^2(t)\} - \eta^2_{\mathbf{X}}(t)\end{aligned}$$

Caracterización parcial de PEs

- Correlación (Autocorrelación)

$$R_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) = E\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- Covarianza (Autocovarianza)

$$\begin{aligned}C_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) &= E\{(\mathbf{X}(t_1)-\eta_{\mathbf{X}}(t_1))(\mathbf{X}(t_2)-\eta_{\mathbf{X}}(t_2))\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\eta_{\mathbf{X}}(t_1))(x_2-\eta_{\mathbf{X}}(t_2))f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2 \\ &= R_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) - \eta_{\mathbf{X}}(t_1)\eta_{\mathbf{X}}(t_2)\end{aligned}$$

- Coeficiente de correlación $$r_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) = \frac{C_{\mathbf{X}}(t_1,t_2)}{\sigma_{\mathbf{X}}(t_1)\sigma_{\mathbf{X}}(t_2)}$$

Caracterización parcial de PEs

- Procesos complejos:

$$\sigma^2_{\mathbf{X}}(t) = E\{|\mathbf{X}(t)-\eta_{\mathbf{X}}(t)|^2\} = E\{|\mathbf{X}(t)|^2\} - |\eta_{\mathbf{X}}(t)|^2$$
$$R_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) = E\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^*(t_2)\}$$
$$C_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) = E\{(\mathbf{X}(t_1)-\eta_{\mathbf{X}}(t_1))(\mathbf{X}(t_2)-\eta_{\mathbf{X}}(t_2))^*\} = R_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) - \eta_{\mathbf{X}}(t_1)\eta^*_{\mathbf{X}}(t_2)$$

- Secuencias aleatorias: reemplazar *t* por *n*
- Procesos de variables discretas: operadores discretos

$$\eta_{\mathbf{X}}(t) = E\{\mathbf{X}(t)\} = \textstyle\sum_i x_i P(\mathbf{X}(t)=x_i)$$
$$\sigma^2_{\mathbf{X}}(t) = \textstyle\sum_i (x_i-\eta_{\mathbf{X}}(t))^2 P(\mathbf{X}(t)=x_i)$$
$$R_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) = \textstyle\sum_i\sum_j x_{1_i}x_{2_j} P(\mathbf{X}(t_1)=x_{1_i}, \mathbf{X}(t_2)=x_{2_j})$$
$$C_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) = \textstyle\sum_i\sum_j (x_{1_i}-\eta_{\mathbf{X}}(t_1))(x_{2_j}-\eta_{\mathbf{X}}(t_2)) \times P(\mathbf{X}(t_1)=x_{1_i}, \mathbf{X}(t_2)=x_{2_j})$$

Caracterización parcial de PEs

- Proceso de ruido blanco (definición):
  - Ruido blanco en sentido amplio: proceso constituido por VAs incorreladas: $$C_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) = q(t_1)\delta(t_1-t_2)$$
    - Si fuese una secuencia aleatoria:

$$C_{\mathbf{X}}[n_1,n_2] = q[n_1]\delta[n_1-n_2]$$

- Ruido blanco en sentido estricto: proceso constituido por VAs independientes ($\forall N$)

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,\ldots,x_N;t_1,t_2,\ldots,x_N) = \prod_{i=1}^{N} f_{\mathbf{X}}(x_i;t_i)$$

Caracterización parcial de dos PEs

- Correlación cruzada

$$R_{\mathbf{XY}}(t_1,t_2) \;=\; E\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{Y}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\mathbf{XY}}(x,y;t_1,t_2)dxdy$$

- Covarianza cruzada

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{XY}}(t_1,t_2) &= E\{(\mathbf{X}(t_1)-\eta_{\mathbf{X}}(t_1))(\mathbf{Y}(t_2)-\eta_{\mathbf{Y}}(t_2))\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\eta_{\mathbf{X}}(t_1))(y-\eta_{\mathbf{Y}}(t_2))f_{\mathbf{XY}}(x,y;t_1,t_2)dxdy \\ &= R_{\mathbf{XY}}(t_1,t_2)-\eta_{\mathbf{X}}(t_1)\eta_{\mathbf{Y}}(t_2) \end{aligned}$$

Caracterización parcial de dos PEs

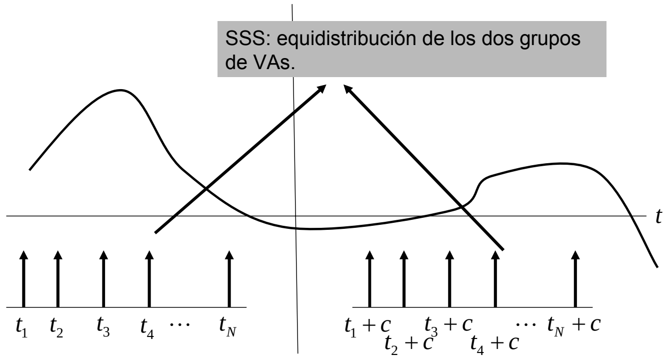
- Procesos incorrelados $C_{\mathbf{XY}}(t_1,t_2)=0, \forall t_1,t_2$
- Procesos ortogonales $R_{\mathbf{XY}}(t_1,t_2) \;=\; 0, \forall t_1,t_2$
- Procesos independientes

$$f_{\mathbf{XY}}(x_1,...,x_N,y_1,...,y_M;t_1,...,t_N,t'_1,...,t'_M) \;=\; f_{\mathbf{X}}(x_1,...,x_N;t_1,...,t_N)f_{\mathbf{Y}}(y_1,...,y_M;t'_1,...,t'_M)$$

Concepto de estacionariedad

- La estacionariedad hace referencia al mantenimiento de las propiedades del proceso a lo largo del tiempo.
- Se distinguen dos sentidos:
  - Sentido estricto (SSS, de *strict sense stationary*): las propiedades de las que hablaremos se definen sobre la función de densidad del proceso.
  - Sentido amplio (WSS, de *wide sense stationary):* en este caso las propiedades se definen sobre *momentos* de la función de densidad.
- Empezaremos por SSS.

Estacionariedad en sent. estricto



$$f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,...,x_N;t_1,t_2,...,t_N) = f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,...,x_N;t_1+c,t_2+c,...,t_N+c)$$

Estacionariedad en sent. estricto

- Por tanto un proceso es SSS si se verifica que

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_N; t_1, t_2, ..., t_N) = f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_N; t_1+c, t_2+c, ..., t_N+c)$$

$\forall N$ y para todo valor de la constante c.

- Si esta propiedad se verifica sólo hasta un cierto valor de N (y no se verifica para valores de N mayores) el proceso se denominaría estacionario de orden N.
- Dos casos particulares de la expresión anterior son

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x;t) &= f_{\mathbf{X}}(x) \\ f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1 - t_2) \end{aligned}$$

Estacionariedad en sent. amplio

- Un proceso estocástico es WSS si se verifica que

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{X}(t)\} &= \eta_{\mathbf{X}}(t) = \eta_{\mathbf{X}} \\ R_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) &= R_{\mathbf{X}}(\underbrace{t_1 - t_2}_{}) = R_{\mathbf{X}}(\tau) \end{aligned}$$

- Evidentemente si un proceso es SSS (o estacionario al menos de orden 2) también es WSS. Esto se debe a que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x;t) &= f_{\mathbf{X}}(x) \\ f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1 - t_2) \end{aligned}$$

- El recíproco, en general, no es cierto.

Caso de procesos gaussianos

- Un proceso estocástico es gaussiano si la función de densidad conjunta de orden N es conjuntamente gaussiana.
- En particular, un proceso gaussiano tiene una función de densidad de orden 2 del tipo:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{X}}(t_1)\sigma_{\mathbf{X}}(t_2) 2\pi\sqrt{1-\rho_{\mathbf{X}}^2(t_1, t_2)}} \times$$
$$e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho_{\mathbf{X}}^2(t_1,t_2)}\left(\frac{(x_1-\eta_{\mathbf{X}}(t_1))^2}{\sigma_{\mathbf{X}}^2(t_1)} - 2\rho_{\mathbf{X}}(t_1,t_2)\frac{(x_1-\eta_{\mathbf{X}}(t_1))(x_2-\eta_{\mathbf{X}}(t_2))}{\sigma_{\mathbf{X}}(t_1)\sigma_{\mathbf{X}}(t_2)} + \frac{(x_2-\eta_{\mathbf{X}}(t_2))^2}{\sigma_{\mathbf{X}}^2(t_2)}\right)}$$

Caso de procesos gaussianos

- Si un proceso gaussiano es WSS se verifica que:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{X}}(t_1)\sigma_{\mathbf{X}}(t_2) 2\pi\sqrt{1-\rho_{\mathbf{X}}^2(t_1, t_2)}} \times$$
$$e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho_{\mathbf{X}}^2(t_1,t_2)}\left(\frac{(x_1-\eta_{\mathbf{X}}(t_1))^2}{\sigma_{\mathbf{X}}^2(t_1)} - 2\rho_{\mathbf{X}}(t_1,t_2)\frac{(x_1-\eta_{\mathbf{X}}(t_1))(x_2-\eta_{\mathbf{X}}(t_2))}{\sigma_{\mathbf{X}}(t_1)\sigma_{\mathbf{X}}(t_2)} + \frac{(x_2-\eta_{\mathbf{X}}(t_2))^2}{\sigma_{\mathbf{X}}^2(t_2)}\right)}$$

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{X}}\sigma_{\mathbf{X}} 2\pi\sqrt{1-\rho_{\mathbf{X}}^2(t_1 - t_2)}} \times$$
$$e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho_{\mathbf{X}}^2(t_1-t_2)}\left(\frac{(x_1-\eta_{\mathbf{X}})^2}{\sigma_{\mathbf{X}}^2} - 2\rho_{\mathbf{X}}(t_1-t_2)\frac{(x_1-\eta_{\mathbf{X}})(x_2-\eta_{\mathbf{X}})}{\sigma_{\mathbf{X}}\sigma_{\mathbf{X}}} + \frac{(x_2-\eta_{\mathbf{X}})^2}{\sigma_{\mathbf{X}}^2}\right)} = f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1 - t_2)$$

- Sucede igual para la función de orden N: por ello es SSS

Estacionariedad conjunta

- Dos procesos son conjuntamente estacionarios si lo son cada uno de ellos por separado y, además, se verifica que:

$$f_{\mathbf{XY}}(x_1,...,x_N,y_1,...,y_M;t_1,...,t_N,t'_1,...,t'_M) = f_{\mathbf{XY}}(x_1,...,x_N,y_1,...,y_M;t_1+c,...,t_N+c,t'_1+c,...,t'_M+c)$$

- Si se trata de sentido amplio, cada proceso debe ser WSS y debe cumplirse, adicionalmente, que

$$R_{\mathbf{XY}}(t_1,t_2) = R_{\mathbf{XY}}(t_1-t_2) = R_{\mathbf{XY}}(\tau)$$

- Aceptemos como convenio que:

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{X}}(\tau) &= E\{\mathbf{X}(t+\tau)\mathbf{X}^*(t)\} \\
C_{\mathbf{X}}(\tau) &= E\{(\mathbf{X}(t+\tau)-\eta_{\mathbf{X}})(\mathbf{X}(t)-\eta_{\mathbf{X}})^*\} = R_{\mathbf{X}}(\tau)-|\eta_{\mathbf{X}}|^2 \\
R_{\mathbf{XY}}(\tau) &= E\{\mathbf{X}(t+\tau)\mathbf{Y}^*(t)\} \\
C_{\mathbf{XY}}(\tau) &= E\{(\mathbf{X}(t+\tau)-\eta_{\mathbf{X}})(\mathbf{Y}(t)-\eta_{\mathbf{Y}})^*\} = R_{\mathbf{XY}}(\tau)-\eta_{\mathbf{X}}\eta_{\mathbf{Y}}^*
\end{aligned}$$

Propiedades de procesos WSS

Ejercicio: El proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$ se define de la forma

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{A}_k e^{j(k\omega_o t+\mathbf{\Theta}_k)}$$

con $\mathbf{A}_k$ VAs complejas de VCM conocido y $\mathbf{\Theta}_k$ VAs uniformes en un rango de 2π radianes (k={1,...,K}). Supóngase que todas las VAs involucradas son independientes entre sí. Se pide que obtega la media y la autocorrelación del proceso $\mathbf{X}(t)$ e indique si el proceso es estacionario en sentido amplio.

Propiedades de procesos WSS

- **Solución**: recordando la linealidad del operador esperanza:

$$\begin{aligned}
\eta_{\mathbf{X}}(t) &= E\{\mathbf{X}(t)\} = E\left\{\sum_{k=1}^{K}\mathbf{A}_k e^{j(k\omega_o t+\mathbf{\Theta}_k)}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{K} e^{jk\omega_o t} E\left\{\mathbf{A}_k e^{j\mathbf{\Theta}_k}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{K} e^{jk\omega_o t} E\left\{\mathbf{A}_k\right\} E\left\{e^{j\mathbf{\Theta}_k}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{K} e^{jk\omega_o t} E\left\{\mathbf{A}_k\right\} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}(cos(\theta_k)+jsen(\theta_k))d\theta_k\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

independencia
→incorrelación

(media constante)

Propiedades de procesos WSS

- Respecto de la autocorrelación:

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{X}}(t_1,t_2) &= E\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^*(t_2)\} \\
&= E\left\{\sum_{p=1}^{K}\mathbf{A}_p e^{j(p\omega_0 t_1+\mathbf{\Theta}_p)}\sum_{q=1}^{K}\mathbf{A}_q^* e^{-j(q\omega_0 t_2+\mathbf{\Theta}_q)}\right\} \\
&= E\left\{\sum_{p=1}^{K}\sum_{q=1}^{K}\mathbf{A}_p\mathbf{A}_q^* e^{j(p\omega_0 t_1+\mathbf{\Theta}_p)} e^{-j(q\omega_0 t_2+\mathbf{\Theta}_q)}\right\} \\
&= \sum_{p=1}^{K}\sum_{q=1}^{K} e^{j(p\omega_0 t_1-q\omega_0 t_2)} E\left\{\mathbf{A}_p\mathbf{A}_q^* e^{j\mathbf{\Theta}_p} e^{-j\mathbf{\Theta}_q}\right\} \\
&= \sum_{p=1}^{K}\sum_{q=1}^{K} e^{j(p\omega_0 t_1-q\omega_0 t_2)} E\left\{\mathbf{A}_p\mathbf{A}_q^*\right\} E\left\{e^{j\mathbf{\Theta}_p} e^{-j\mathbf{\Theta}_q}\right\}
\end{aligned}$$

incorrelación

Propiedades de procesos WSS

$$R_{\mathbf{X}}(t_1,t_2)=E\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^*(t_2)\}$$
$$=\sum_{p=1}^{K}\sum_{q=1}^{K}e^{j(p\omega_0 t_1-q\omega_0 t_2)}E\{\mathbf{A}_p\mathbf{A}_q^*\}E\{e^{j\boldsymbol{\Theta}_p}e^{-j\boldsymbol{\Theta}_q}\}$$

- Si p≠q $\quad E\{e^{j\boldsymbol{\Theta}_p}e^{-j\boldsymbol{\Theta}_q}\}=E\{e^{j\boldsymbol{\Theta}_p}\}E\{e^{-j\boldsymbol{\Theta}_q}\}=0\times 0=0$
- Si p=q $\quad E\{e^{j\boldsymbol{\Theta}_p}e^{-j\boldsymbol{\Theta}_p}\}=E\{e^{j0}\}=1$
- Por ello, tenemos

$$R_{\mathbf{X}}(t_1,t_2)=\sum_{p=1}^{K}e^{jp\omega_0(t_1-t_2)}E\{|\mathbf{A}_p|^2\}=\sum_{p=1}^{K}e^{jp\omega_0\tau}E\{|\mathbf{A}_p|^2\}=R_{\mathbf{X}}(\tau)$$

Propiedades de procesos WSS

- La autocorrelación presenta un máximo en el cero:

$$|R_{\mathbf{X}}(\tau)|\le R_{\mathbf{X}}(0)$$
$$|R_{\mathbf{X}}(\tau)|=\left|\sum_{p=1}^{K}e^{jp\omega_0\tau}E\{|\mathbf{A}_p|^2\}\right|\le\sum_{p=1}^{K}\left|e^{jp\omega_0\tau}\right|E\{|\mathbf{A}_p|^2\}=\sum_{p=1}^{K}E\{|\mathbf{A}_p|^2\}=R_{\mathbf{X}}(0)$$

- La autocorrelación es una función con simetría conjugada:

$$R_{\mathbf{X}}(-\tau)=R_{\mathbf{X}}^*(\tau)$$
$$R_{\mathbf{X}}(-\tau)=\sum_{p=1}^{K}e^{-jp\omega_0\tau}E\{|\mathbf{A}_p|^2\}=R_{\mathbf{X}}^*(\tau)$$

- Si el proceso es periódico, su autocorrelación también lo es (y del mismo periodo)

$$\mathbf{X}(t)=\sum_{p=1}^{K}\mathbf{A}_p e^{j(p\omega_0 t+\boldsymbol{\Theta}_p)}\qquad R_{\mathbf{X}}(\tau)=\sum_{p=1}^{K}E\{|\mathbf{A}_p|^2\}e^{jp\omega_0\tau}$$

Propiedades de procesos WSS

- El ruido blanco WSS tiene una función de covarianza del tipo:

$$C_{\mathbf{X}}(\tau)=q\delta(\tau)$$

- Nótese que la covarianza de un proceso WSS es

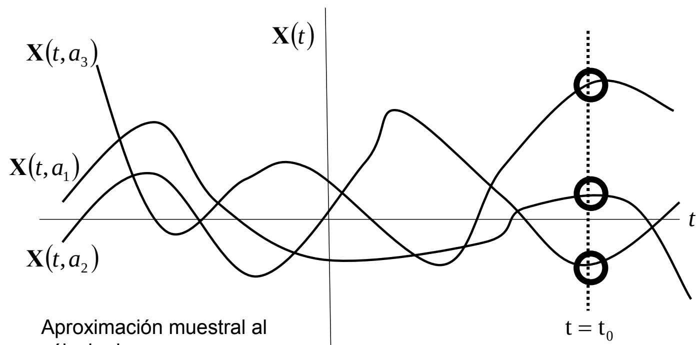
$$C_{\mathbf{X}}(\tau)=C_{\mathbf{X}}(t_1-t_2)$$

- Luego la covarianza en el cero es

$$C_{\mathbf{X}}(\tau=0)=C_{\mathbf{X}}(t_1-t_1)=\sigma_{\mathbf{X}}^2$$

- Por ello, un ruido blanco tiene varianza infinita

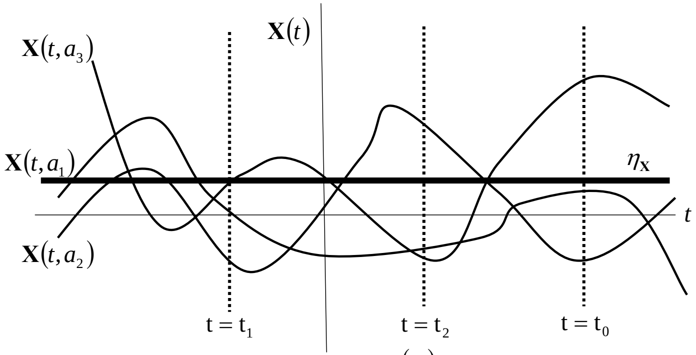
Ergodicidad de un PE



Aproximación muestral al cálculo de:

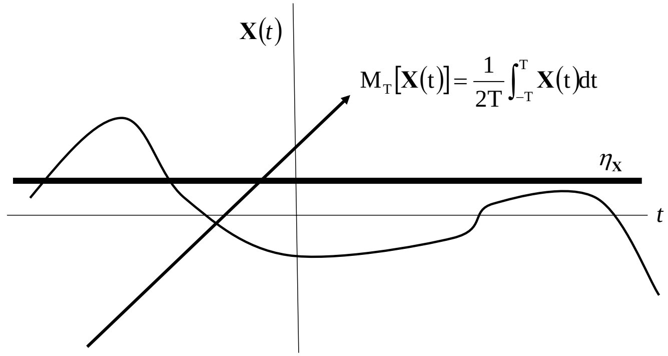
$$\eta_{\mathbf{X}}(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}x f_{\mathbf{X}}(x;t_0)dx\ \approx\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}(t_0,a_i)$$

Ergodicidad de un PE



Si el proceso fuese (al menos) WSS $\eta_X(t_0) = \eta_X$

Ergodicidad de un PE



En la práctica se observa una única realización. La pregunta es: ¿se puede hallar el valor medio de un proceso WSS únicamente observando una realización y aplicando un operador temporal ?

Ergodicidad de un PE

- Se dice que un proceso WSS es ergódico con respecto a la media si se verifica que:

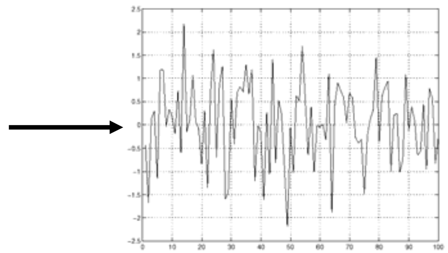
$$\eta_X = \lim_{T\to\infty} M_T[\mathbf{X}(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathbf{X}(t)dt$$

- Si dice que un proceso WSS es ergódico respecto de la autocorrelación si se verifica que:

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} M_T[\mathbf{X}(t+\tau)\mathbf{X}^*(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathbf{X}(t+\tau)\mathbf{X}^*(t)dt$$
$$= \lim_{T\to\infty} A_T[\mathbf{X}(t)]$$

Algunas consecuencias de la ergodicidad

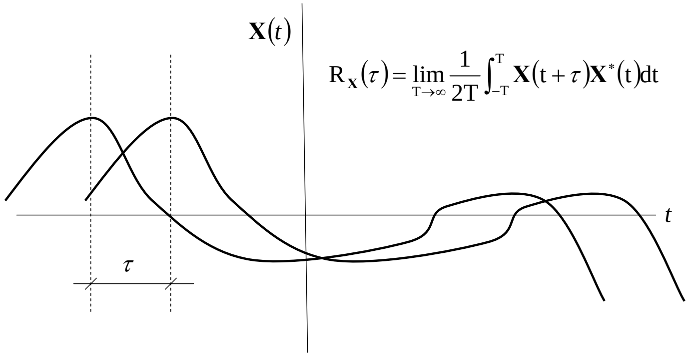
- Si un proceso es ergódico de media cero, una realización típica fluctuará con respecto a ese valor de forma más o menos simétrica alrededor del mismo.



Algunas consecuencias de la ergodicidad

- Justificación del máximo de la correlación en cero:

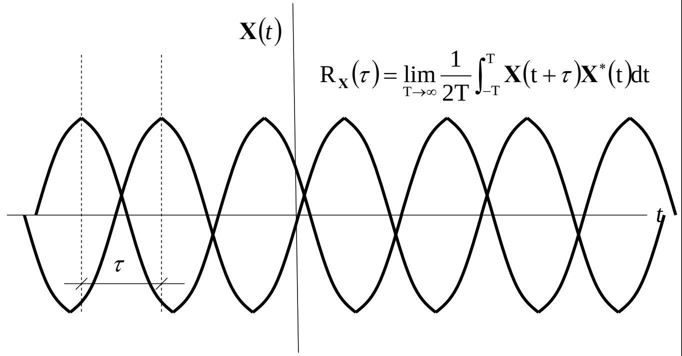
$$R_X(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathbf{X}(t+\tau)\mathbf{X}^*(t)dt$$



Algunas consecuencias de la ergodicidad

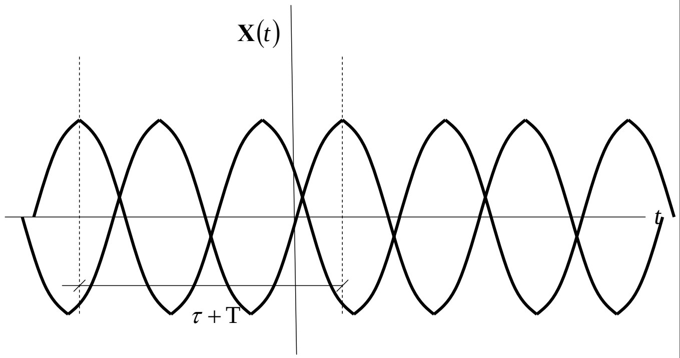
- Justificación del periodicidad en autocorrelación para PE periódico

$$R_X(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathbf{X}(t+\tau)\mathbf{X}^*(t)dt$$



Algunas consecuencias de la ergodicidad

- La posición relativa de las curvas se mantiene constante



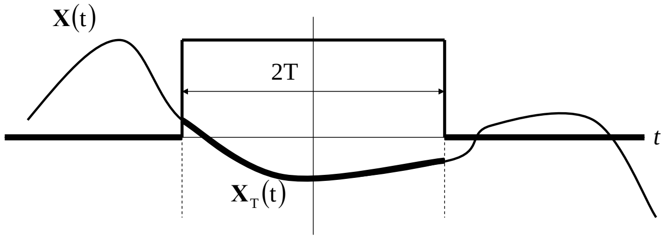
Densidad espectral de potencia de un PE

- Vamos a definir una función que caracterice a un proceso estocástico en el dominio de la frecuencia.
- Bien es cierto que, dado que un proceso estocástico es una colección de funciones del tiempo, nos podríamos limitar a calcular una *colección de Transformadas de Fourier.*
- Esto sería poco práctico. Se trata de definir una *única* función que caracterice a *todas* las realizaciones del proceso de forma conjunta.
- A tal función se le denomina densidad espectral de potencia.

Densidad espectral de potencia de un PE

- Con el objetivo de garantizar convergencia de la integral de Fourier partimos del proceso *enventanado*:

$$\mathbf{X}_T(t) = \begin{cases} \mathbf{X}(t) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$



Densidad espectral de potencia de un PE

- Por ser una señal de duración finita, es de cuadrado integrable:

$$\int_{-T}^{T} |\mathbf{X}_T(t)|^2 dt = \int_{-T}^{T} |\mathbf{X}(t)|^2 dt = E_{R=1\Omega}$$

y resulta en energía disipada finita sobre una resistencia de 1 Ω.

- El Teorema de Parseval permite escribir de forma alternativa

$$E_{R=1\Omega} = \int_{-T}^{T} |\mathbf{X}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2 d\omega$$

Densidad espectral de potencia de un PE

- De energía pasamos a potencia dividiendo por el tiempo de integración:

$$P_{R=1\Omega} = \frac{E_{R=1\Omega}}{2T} = \underbrace{\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\mathbf{X}(t)|^2 dt}_{} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T} d\omega}_{}$$

- Calculamos la *potencia media* mediante el operador esperanza y extraemos el límite para considerar todo el proceso

$$\begin{aligned} \overline{P}_{\mathbf{X}} &= \lim_{T \to \infty} E\{P_{R=1\Omega}\} \\ &= \lim_{T \to \infty} E\left\{\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\mathbf{X}(t)|^2 dt\right\} = \\ &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E\left\{|\mathbf{X}(t)|^2\right\} dt = \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= \lim_{T \to \infty} E\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T} d\omega\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \to \infty} E\left\{\frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T}\right\} d\omega \end{aligned}$$

Densidad espectral de potencia de un PE

- Por ello, se define la densidad espectral de potencia de la forma :

$$\underbrace{S_{\mathbf{X}}(\omega)}_{} = \lim_{T \to \infty} E\left\{\frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T}\right\}.$$

es decir, **la** función que integrada en todo el eje de frecuencias da lugar a la potencia media desarrollada por el proceso.

$$\overline{P}_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\lim_{T \to \infty} E\left\{\frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T}\right\}}^{} d\omega$$

Densidad espectral para procesos WSS

- Para el caso en el que los procesos sean (al menos) WSS las expresiones anteriores particularizan a resultados mucho más sencillos (y recordables). En efecto:

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_{\mathbf{X}} &= \lim_{T\to\infty} E\{P_{R=1\Omega}\} \\
&= \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\mathbf{X}(t)|^2dt\right\} = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T}d\omega\right\} \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\left\{|\mathbf{X}(t)|^2\right\}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T}\right\}d\omega
\end{aligned}
$$

$$\lim_{T\to\infty} M_T\left[E\left\{|\mathbf{X}(t)|^2\right\}\right]$$

$$= E\left\{|\mathbf{X}(t)|^2\right\}$$

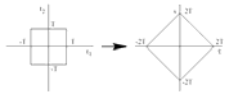
Densidad espectral para procesos WSS

- Respecto de la densidad espectral:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_T^f(\omega) &= \int_{-T}^{T}\mathbf{X}(t)e^{-j\omega t}dt \\
E\left\{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2\right\} &= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\left\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^*(t_2)\right\}e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2
\end{aligned}
$$

- El cambio natural de variables es:

$$
\begin{aligned}
s &= t_1+t_2 \\
\tau &= t_1-t_2
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\overline{P}_{\mathbf{X}} &= \lim_{T\to\infty} E\{P_{R=1\Omega}\} \\
&= \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\mathbf{X}(t)|^2dt\right\} = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T}d\omega\right\} \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\left\{|\mathbf{X}(t)|^2\right\}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T}\right\}d\omega
\end{aligned}
$$

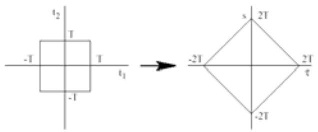
Densidad espectral para procesos WSS

- El resultado anterior:

$$E\left\{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2\right\} = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\left\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^*(t_2)\right\}e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2$$

expresado en las nuevas variables:

$$
\begin{aligned}
\frac{E\left\{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2\right\}}{2T} &= \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}d\tau\int_{-(2T-|\tau|)}^{(2T-|\tau|)}R_{\mathbf{X}}(\tau)e^{-j\omega\tau}\frac{1}{2}ds \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}R_{\mathbf{X}}(\tau)e^{-j\omega\tau}\frac{1}{2}2(2T-|\tau|)d\tau \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}R_{\mathbf{X}}(\tau)e^{-j\omega\tau}2T(1-\frac{|\tau|}{2T})d\tau \\
&= \int_{-2T}^{2T}R_{\mathbf{X}}(\tau)e^{-j\omega\tau}(1-\frac{|\tau|}{2T})d\tau
\end{aligned}
$$



Densidad espectral para procesos WSS

- Calculando ahora el límite tenemos:

$$S_{\mathbf{X}}(\omega) = \lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}R_{\mathbf{X}}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

- Por tanto

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{X}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}R_{\mathbf{X}}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
R_{\mathbf{X}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{\mathbf{X}}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega
\end{aligned}
$$

Expresiones conocidas como relaciones de *Wiener-Khinchin.*

Propiedades de la dens. espectral

- Es una función real y no negativa:

$$S_{\mathbf{X}}(\omega) = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{|\mathbf{X}_T^f(\omega)|^2}{2T}\right\}.$$

- Para un proceso real y WSS, la densidad espectral es una función par:

$$S_{\mathbf{X}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{X}}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

- El área bajo ella coincide con el VCM para un proceso WSS

$$\overline{P}_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{X}}(\omega)d\omega = R_{\mathbf{X}}(0) = E\{\mathbf{X}^2(t)\}$$

Densidad espectral cruzada

- Se define, por conveniencia, como la transformada de Fourier de la correlación cruzada entre dos procesos WSS:

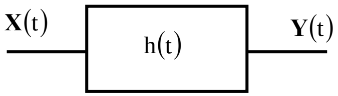
$$\begin{aligned} S_{\mathbf{XY}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{XY}}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ R_{\mathbf{XY}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{XY}}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \end{aligned}$$

- Surge de forma natural en el caso de suma de procesos. Por ejemplo, si $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{Y}(t)$, entonces

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{Z}}(\tau) &= E\{\mathbf{Z}(t+\tau)\mathbf{Z}^*(t)\} \\ &= E\{(\mathbf{X}(t+\tau)+\mathbf{Y}(t+\tau))(\mathbf{X}(t)+\mathbf{Y}(t))^*\} \\ &= E\{\mathbf{X}(t+\tau)\mathbf{X}^*(t)\} + E\{\mathbf{X}(t+\tau)\mathbf{Y}^*(t)\} + \\ &\quad E\{\mathbf{Y}(t+\tau)\mathbf{X}^*(t)\} + E\{\mathbf{Y}(t+\tau)\mathbf{Y}^*(t)\} \\ &= R_{\mathbf{X}}(\tau) + R_{\mathbf{Y}}(\tau) + R_{\mathbf{XY}}(\tau) + R_{\mathbf{YX}}(\tau) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_{\mathbf{Z}}(\omega) = S_{\mathbf{X}}(\omega) + S_{\mathbf{Y}}(\omega) + S_{\mathbf{XY}}(\omega) + S_{\mathbf{YX}}(\omega)}$$

Sistemas lineales con entradas estocásticas



$$\mathbf{Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

- Se trata de obtener los parámetros de caracterización (parcial) del proceso de salida como función de estos parámetros del proceso de entrada y de la respuesta al impulso del sistema lineal e invariante.

SLs con entradas estocásticas

- Empecemos con el valor medio:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{Y}(t)\} &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(t-\tau)h(\tau)d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E\{\mathbf{X}(t-\tau)\}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\eta_{\mathbf{X}}(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

- Si el proceso de entrada es (al menos) WSS

$$E\{\mathbf{Y}(t)\} = \eta_{\mathbf{X}}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = \eta_{\mathbf{X}}H(\omega=0)$$

DC

SLs con entradas estocásticas

- VCM:

$$
\begin{aligned}
E\{|\mathbf{Y}(t)|^2\} &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)\mathbf{X}(t-\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau_2)\mathbf{X}^*(t-\tau_2)d\tau_2\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left\{\mathbf{X}(t-\tau_1)\mathbf{X}^*(t-\tau_2)\right\} h(\tau_1)h^*(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}
$$

- Si el proceso de entrada es WSS

$$
E\{|\mathbf{Y}(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{X}}\left(\tau_2-\tau_1\right) h(\tau_1)h^*(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2
$$

SLs con entradas estocásticas

- Caso particular de interés: $\mathbf{X}(t)$ ruido blanco de media nula y función de autocorrelación $R_X(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$

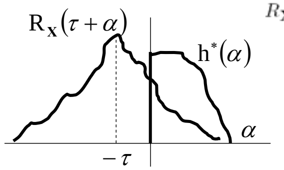
$$
E\{\mathbf{Y}(t)\} = \eta_{\mathbf{X}} H(\omega=0) = 0
$$

$$
\begin{aligned}
E\{|\mathbf{Y}(t)|^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{X}}\left(\tau_2-\tau_1\right) h(\tau_1)h^*(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\delta(\tau_2-\tau_1)h(\tau_1)h^*(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^2 d\tau
\end{aligned}
$$

SLs con entradas estocásticas

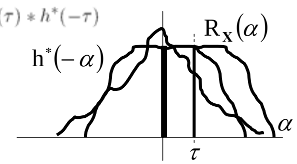
- Correlación cruzada:

$$
\begin{aligned}
R_{\mathbf{XY}}(t_1,t_2) &= E\left\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{Y}^*(t_2)\right\} = E\left\{\mathbf{X}(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}^*(t_2-\alpha)h^*(\alpha)d\alpha\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)E\left\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^*(t_2-\alpha)\right\}d\alpha \\
&\overset{\text{WSS}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)R_{\mathbf{X}}\left(\underbrace{t_1-t_2}_{\tau}+\alpha\right)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)R_{\mathbf{X}}\left(\tau+\alpha\right)d\alpha \\
&= R_{\mathbf{XY}}\left(\tau\right)
\end{aligned}
$$



$$
R_{\mathbf{XY}}(\tau) = R_{\mathbf{X}}(\tau) * h^*(-\tau)
$$

$\equiv$



SLs con entradas estocásticas

- Autocorrelación de salida:

$$
\begin{aligned}
R_{\mathbf{Y}}(t_1,t_2) &= E\left\{\mathbf{Y}(t_1)\mathbf{Y}^*(t_2)\right\} = E\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\mathbf{X}(t_1-\alpha)d\alpha\right]\mathbf{Y}^*(t_2)\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)E\left\{\mathbf{X}(t_1-\alpha)\mathbf{Y}^*(t_2)\right\}d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)R_{\mathbf{XY}}\left(t_1-t_2-\alpha\right)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)R_{\mathbf{XY}}\left(\tau-\alpha\right)d\alpha \\
&= R_{\mathbf{Y}}\left(\tau\right) = h(\tau) * R_{\mathbf{XY}}\left(\tau\right)
\end{aligned}
$$

- Que con el resultado anterior da lugar a

$$
R_{\mathbf{XY}}(\tau) = R_{\mathbf{X}}(\tau) * h^*(-\tau)
\qquad
\begin{aligned}
R_{\mathbf{Y}}(\tau) &= h(\tau) * R_{\mathbf{XY}}(\tau) \\
&= h(\tau) * h^*(-\tau) * R_{\mathbf{X}}(\tau)
\end{aligned}
$$

SLs con entradas estocásticas

- Densidad cruzada

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{XY}}(\omega) &= \mathcal{F}\{R_{\mathbf{XY}}(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_{\mathbf{X}}(\tau) * h^*(-\tau)\} \\
&= S_{\mathbf{X}}(\omega) H^*(\omega)
\end{aligned}
$$

- Densidad espectral de potencia de salida:
  - A partir de

$$
\begin{aligned}
R_{\mathbf{Y}}(\tau) &= h(\tau) * R_{\mathbf{XY}}(\tau) \\
&= h(\tau) * h^*(-\tau) * R_{\mathbf{X}}(\tau)
\end{aligned}
$$

obtenemos $S_{\mathbf{Y}}(\omega) = S_{\mathbf{X}}(\omega) H^*(\omega) H(\omega) = S_{\mathbf{X}}(\omega)|H(\omega)|^2$

3.- Considere el proceso estocástico real $\mathbf{X}[n]$, $(n \in \mathcal{Z})$, estacionario en sentido amplio y de media nula, con secuencia de autocorrelación $R_{\mathbf{X}}[m]$ conocida ($R_{\mathbf{X}}[m] < R_{\mathbf{X}}[0]\ \forall m \neq 0$). Se pide:

a) Identifique el valor de a_{11} que hace que $\hat{\mathbf{X}}[n] = a_{11}\mathbf{X}[n-1]$ sea el estimador lineal de $\mathbf{X}[n]$ de mínimo error cuadrático medio. Obtenga la varianza σ^2 del error en la estimación.

b) Un filtro causal con $H(z) = \frac{1}{1-a_{11}z^{-1}}$ es excitado por un ruido blanco $\mathbf{W}[n]$, real y estacionario, de media nula y secuencia de autocorrelación $R_{\mathbf{W}}[m] = \sigma^2\delta[m]$, originando así un nuevo proceso $\mathbf{Y}[n]$. Obtenga la secuencia de autocorrelación $R_{\mathbf{Y}}[m]$.

c) Para mejorar la calidad de la estimación de $\mathbf{X}[n]$ se propone el estimador

$$\hat{\mathbf{X}}[n] = a_{21}\mathbf{X}[n-1] + a_{22}\mathbf{X}[n-2]$$

Obtenga los valores de los coeficientes a_{11} y a_{22} de modo que $\hat{\mathbf{X}}[n]$ sea el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio, y deduzca la relación entre éstos y σ^2.

3.- Sea $\mathbf{W}(t)$ un proceso real de ruido blanco gaussiano, estacionario en sentido amplio, de media nula, y función de autocorrelación $R_W(\tau) = \delta(\tau)$. A partir de $\mathbf{W}(t)$ se crea el proceso $\mathbf{X}(t)$ mediante la expresión $\mathbf{X}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{t-T}^{t}\mathbf{W}(\alpha)d\alpha$. Se pide:

a) Media y autocorrelación del proceso $\mathbf{X}(t)$. ¿Es estacionario en sentido amplio?

b) Las funciones de densidad de primer y segundo orden del proceso $\mathbf{X}(t)$.

c) El espectro de potencia del proceso $\mathbf{X}(t)$.

d) Demuestre si el proceso es ergódico respecto de la media.

e) Obtenga el estimador lineal óptimo (en sentido MMSE) de $\mathbf{X}(t)$ como función de $\mathbf{X}(t-\tau)\ \forall\tau \leq 0$.

3.- Un proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$, real, gaussiano, de media nula y función de autocorrelación $R_X(\tau) = exp(-\alpha|\tau|)$ $(\alpha \geq 0)$ es muestreado a intervalos de T segundos, originándose así el proceso estocástico de índice discreto $\mathbf{X}[n] = \mathbf{X}(nT)$, $n \in Z$. En tales condiciones, se pide:

a) Media y autocorrelación del proceso $\mathbf{X}[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?

b) Densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{X}[\mathrm{n}]$.

A partir del proceso $\mathbf{X}[n]$ se obtiene el proceso $\mathbf{Y}[n]$ mediante la transformación

$$\mathbf{Y}[n] = a_0\mathbf{X}[n] + a_1\mathbf{X}[n-1]$$

c) Obtenga la funciones de densidad de probabilidad de primer y segundo orden del proceso $\mathbf{Y}[\mathrm{n}]$.

Finalmente, se crea el proceso $\mathbf{Z}[n]$ mediante la transformación

$$\mathbf{Z}[n] = \frac{1}{\sigma_Y[n]\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\mathbf{Y}[n]} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma_Y^2[n]}}d\tau$$

siendo $\sigma_Y[n]$ la desviación típica del proceso $\mathbf{Y}[n]$ definido anteriormente.

d) Obtenga la función de densidad de probabilidad de primer orden del proceso $\mathbf{Z}[n]$.

Sep 97, núm. 3

2.- La función de densidad de probabilidad $f_{XY}(x,y)$ de la variable aleatoria $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tiene la expresión $f_{XY}(x,y)= K|x|y$, en el interior del triángulo de vértices A(1,0), B(-1,0) y C(0,1), siendo nula en el exterior del mismo. Se pide:

a) El valor de la constante K, y las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. ¿Son independientes?

b) La función de densidad conjunta $f_{ZW}(z,w)$ y funciones de densidad marginales $f_Z(z)$ y $f_W(w)$ de las variables aleatorias $\mathbf{Z}=\mathbf{X}^2$ y $\mathbf{W}=\mathbf{Y}^2$.

c) $E\{\mathbf{W}|_\mathbf{Z}\}$ y $E\{\mathbf{W}|_\mathbf{Y}\}$.

Sep 97, núm. 2

3.- Sea el proceso estocástico real $\mathbf{X}(t)$ definido como sigue:

$$\mathbf{X}(t) = Asen\left(\omega_0 t + B[n]\frac{\pi}{2}\right)$$

con $nT < t \leq (n+1)T$, $n \in \mathcal{Z}$, $T > 0$ y $B[n]$ una secuencia de variables independientes de Bernoulli que toma los valores ± 1 con igual probabilidad $\forall n \in \mathcal{Z}$. Se pide:

a) Obtenga la media del proceso $\mathbf{X}(t)$.

b) Obtenga la autocorrelación del proceso $\mathbf{X}(t)$. Discuta si el proceso es WSS.

c) Obtenga la función de densidad de primer orden $f_X(x,t)$ del proceso.

3.- Sea $\mathbf{X}(t)$ un proceso estocástico real con media η_X y función de autocorrelación $R_X(\tau)$ conocidas. Se pide:

a) Proporcione una cota para la expresión $P(|\mathbf{X}(t+\tau)-\mathbf{X}(t)| \geq a)$, en función de $R_X(\tau)$. Considere que $a > 0$.

b) Obtenga una expresión integral para la anterior probabilidad como función de $f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$ Obtenga un resultado numérico considerando que el proceso es gaussiano, para $\eta_X = a/2$ y $R_X(\tau) = a^2 exp(-2|\tau|)$, con $\tau = 0{,}039$.

c) Si el proceso $\mathbf{X}(t)$, con independencia de su distribución, es SSS de orden 2, demuestre que el proceso $\mathbf{Y}(t)$=$\mathbf{X}(t-\epsilon)$ es también SSS del mismo orden, con ϵ una variable aleatoria independiente de $\mathbf{X}(t)$.

3.- Sea un proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$, gaussiano, estacionario al menos en sentido amplio, con funció le autocorrelación $R_X(\tau)$. A partir de dicho proceso se crea $\mathbf{X_d}(t) = \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}$. Se pide:

a) Demuestre que el proceso $\mathbf{X_d}(t)$ es gaussiano y obtenga su media y varianza.

b) Considerando el instante temporal $t=t_0$, razone si las variables aleatorias $\mathbf{X}(t_0)$ y $\mathbf{X_d}(t_0$ on incorreladas.

c) Razone si los procesos $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{X_d}(t)$ son incorrelados.

3.- Sea $\mathbf{X}[n]$ un proceso estocástico WSS. Se pide:

a) Haciendo uso de la desigualdad $E^2\{\mathbf{ZW}\} \leq E\{\mathbf{Z}^2\}E\{\mathbf{W}^2\}$, demuestre que si $R_X[N] = R_X[0]$ entonces $R_X[kN] = R_X[0] \quad \forall k \in Z$.

b) Suponiendo que $\mathbf{X}[n] = \mathbf{A}e^{j\omega_0 n}$, con $\mathbf{A}$ una variable aleatoria de media nula y ω_0 un parámetro, discuta qué condiciones son necesarias para que el proceso cumpla la propiedad del apartado a) (con independencia de que lo haya demostrado o no).

c) Suponiendo ahora que $\mathbf{X}[n] = Ae^{j\boldsymbol{\omega} n}$, con A una constante y $\boldsymbol{\omega}$ una variable aleatoria cuya función de densidad es no nula exclusivamente en el intervalo $|\omega| \leq \pi$, obtenga una expresión para $S_X(\Omega)$ como función de la función de densidad $f_{\boldsymbol{\omega}}(\omega)$, indicando la extensión espectral de la misma.