EXAMEN DE
CURVAS ALGEBRAICAS
(Grupos C y D)
5 de septiembre de 2006

(3 horas)

1) a) Sean $f, g \in \mathbf{C}[X, Y]$ dos polinomios y sean $C_1 = V(f)$ y $C_2 = V(g)$ las dos curvas algebraicas afines planas complejas que definen. Demuestra que si f es irreducible y $C_1 \subset C_2$, entonces f divide a g.

b) Sea $g = (X - Y)^2(X^2 + Y^2 - 1)$ y $D = V(g) \subset \mathbf{C}^2$. Demuestra que los polinomios que se anulan en todos los puntos de D son de la forma $h \cdot g$ para algún $h \in \mathbf{C}[X, Y]$.

2) Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Decide si por 6 puntos cualesquiera del plano afín pasa una cúbica que además es singular en el origen.

b) Escribe la ecuación de una cúbica irreducible que tenga un punto singular y un único punto de inflexión.

c) Se considera una curva afín plana compleja irreducible C de grado 4 con la siguiente propiedad: el máximo número de puntos de intersección de una recta vertical (paralela a $X = 0$) con C es 3. Como es usual identificamos al punto (x, y) del plano afín $\mathbf{C}^2$ con el punto $(1 : x : y)$ del plano proyectivo. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta (puede haber más de una correcta):

- El punto $(0 : 0 : 1)$ es un punto del infinito de C.
- El punto $(0 : 0 : 1)$ es un punto singular de la clausura proyectiva de C.
- C posee necesariamente una asíntota vertical.
- Es imposible que C tenga una asíntota vertical.

3) Se consideran las curvas afines planas en $\mathbf{C}^2$, $C = V(2X^2 + Y^5 - 5X^2Y + 2X^3)$ and $D = V(X^2 - Y^3)$.

a) Encuentra los puntos singulares de la clausura proyectiva de C y calcula las tangentes en los mismos.

b) Encuentra los puntos de C en el infinito y calcula las tangentes en los mismos.

c) Encuentra los puntos de intersección de las clausuras proyectivas de C y D.

d) Calcula las multiplicidades de intersección en los puntos del apartado c).

e) Calcula las ramas de C en el origen.