Problemas de Geometría Proyectiva

José Luis Guijarro

1 Temario

1. Espacio proyectivo. Subespacios y aplicaciones proyectivas.
2. Referencias proyectivas. Coordenadas homogéneas. Expresiones analíticas de subespacios y aplicaciones proyectivas.
3. Espacio proyectivo asociado a un espacio afín. Extensiones proyectivas de subespacios y aplicaciones afines. Estructura afín sobre el complementario de un hiperplano en un espacio proyectivo.
4. La razón doble
5. Clasificación de homografías
6. Algunos teoremas de geometría proyectiva y afín
7. El espacio proyectivo dual. Haces de hiperplanos. La razón doble de 4 hiperplanos de un haz. El principio de dualidad. Colineaciones y correlaciones.
8. Cuádricas proyectivas. Polaridad asociada a una cuádrica. Subespacio tangente a una cuádrica. Homografía inducida sobre una recta: Teorema de simetría. Haces de cuádricas. Clasificación proyectiva de cuádricas proyectivas.
9. Cuádricas afines. Centro y diámetros. Subespacio tangente a una cuádrica. Propiedades de cuádricas afines no degeneradas y con centro. Clasificación afín de cuádricas afines.

2 Espacio proyectivo. Subespacios y proyectividades

1. a) Demostrar que los hiperplanos de un espacio proyectivo son maximales, es decir, no existe un subespacio proyectivo, salvo el total, que lo contenga

   b) Sea H hiperplano y M subespacio de un espacio proyectivo E. Demostrar que si M no está contenido en H entonces $M \cap H$ es un hiperplano de M
2. Sea M un subconjunto no vacío de un espacio proyectivo E. Demostrar que M es subespacio proyectivo de E si y sólo si contiene a cada recta que pasa por dos puntos cualesquiera de M
3. Sea E un espacio proyectivo de dimensión impar n=2m+1, y A,B,C tres subespacios de E de dimensión m, tales que $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ Finalmente

sea L un hiperplano de A y $M = (L+B)\cap(L+C)$. Determinar las dimensiones de M, $A\cap M$, $B\cap M$, $C\cap M$

4. Sea P$_n$ espacio proyectivo de dimensión n. Demostrar que si L$_1$, L$_2$, ...L$_r$ son subespacios, entonces $dim \bigcap\limits_{i=1}^{r} L_i \geq (\sum\limits_{i=1}^{r} dim L_i) - n(r-1)$

5. Demostrar que el conjunto de puntos fijos de una proyectividad no es necesariamente un subespacio proyectivo

6. Probar que el retículo de los subespacios proyectivos de un espacio proyectivo P no cumple en general, las propiedades distributivas

7. Probar que el retículo de los subespacios proyectivos de un espacio proyectivo P es modular, es decir que si L, M, N son subespacios proyectivos de P y $L \subset M$ entonces $L + (M\cap N) = (L+N)\cap M$

3 Coordenadas homogéneas

1. En $P(\mathbb{R}^3)$ se consideran los puntos a$_0$ = $(1:0:1)$ a$_1$ = $(0:2:1)$ a$_2$ = $(0:0:1)$ a$_3$ = $(1:-1:0)$ Comprobar que R = {a$_0$, a$_1$, a$_2$; a$_3$} es referencia proyectiva y hallar una base asociada a R .Determinar en dicha referencia las coordenadas homogéneas de los puntos $(1:-2:1)$ y $(1:-1:-1)$

2. Comprobar que R = { $(1:0:0)$, $(1:-1:0)$, $(0:2:-1)$, $(3:-3:1)$ } es referencia proyectiva de $P(\mathbb{R}^3)$ y hallar una base asociada a R.Determinar en dicha referencia las coordenadas homogéneas de un punto arbitrario $(x_0:x_1:x_2)$ de $P(\mathbb{R}^3)$

3. Sea R = {a$_0$, a$_1$, a$_2$; a$_3$} una referencia proyectiva de $P(\mathbb{R}^3)$ Demostrar que R ´={a$_2$, a$_3$, a$_1$; a$_0$} también es referencia proyectiva de $P(\mathbb{R}^3)$ y determinar las ecuaciones del cambio de coordenadas entre ambas referencias

4. En $P(\mathbb{R}^3)$ se consideran las referencias proyectivas R = { $(2:0:-1)$, $(1:-1:0)$, $(1:-1:1)$; $(1:0:-1)$ } y R ´={ $(1:1:1)$, $(0:1:1)$, $(1:0:1)$; $(2:2:3)$ } Determinar las ecuaciones del cambio de coordenadas entre ambas referencias. Dada la recta definida por la ecuación $x_0+2x_1-x_2=0$ en la referencia R obtener su ecuación en la referncia R ´

5. En $P(\mathbb{R}^4)$ se consideran los puntos a = $(1:2:-1:1)$ a' = $(1:-1:2:-1)$ b = $(3:0:1:1)$ b$_k$' = $(-1:1:0:k)$ donde k es un elemento arbitrario de $\mathbb{R}$ .Sean A = a+a' B$_k$ = b+b$'_k$ Determinar k para que $A\cap B_k \neq \emptyset$ y determinar los subespacios $A+B_k$

6. En $P(\mathbb{R}^5)$ sea M_1 el subespacio engendrado por los puntos $(1:0:-1:0:1)$ $(0:1:0:1:-1)$ $(2:2:-2:1:2)$ y sea M_2 el subespacio definido por las ecuaciones $x_0 - x_1 + x_4 = 0$ $2x_0 + x_2 - x_3 = 0$ en la referencia proyectiva canónica. Determinar los subespacios $M_1 \cap M_2$ y $M_1 + M_2$

7. En el plano proyectivo real, se da el sistema de referencia proyectivo R = {a_0, a_1, a_2; a_3}. Determinar en el sistema de coordenadas homogéneas inducidas por R las ecuaciones de la recta [(a_0+a_1)∩(a_2+a_3)]+[(a_3+a_1)∩(a_0+a_2)]

8. Sean $\alpha = (1:-1:0:2)$ $\beta = (3:0:1:-1)$ $\gamma = (2:1:1-3)$ $\delta = (1:2:1:-7)$ puntos de $P(\mathbb{R}^4)$ Sea L = $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ Obtener las ecuaciones de L y calcular dim L

9. En $P(\mathbb{R}^5)$ sean $H_1 \equiv x_0 - x_1 - x_3 - x_4 = 0$ $H_2 \equiv x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0$ $H_3 \equiv x_0 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ Hallar dim($H_1 \cap H_2 \cap H_3$)

10. Sean R y S dos rectas del e.p. real tridimensional E, tales que R+S = E

    a) demostrar que $R \cap S = \emptyset$

    b) probar que para cada punto $p \notin R \cup S$ existe una única recta proyectiva T_p que pasa por p y corta a R y S

    c) Sea $R \equiv \{x_1 = 0, x_0 + x_2 - x_3 = 0\}$ $S \equiv \{x_3 = 0, x_0 - x_2 = 0\}$ $p = (-1:0:1:-2)$ Probar que se dan las condiciones anteriores y calcular T_p

11. En $P(\mathbb{R}^3)$ sean $a = (0:1:1)$ y r una recta que pasa por a, distinta de $x_1 - x_2 = 0$. Sean $m_r = r \cap ((1:0:0) + (0:0:1))$ $n_r = (a + (1:0:0)) \cap ((0:0:1) + b_r)$ donde $b_r = r \cap ((1:0:0) + (0:1:0))$. Demostrar que al variar r las rectas $m_r + n_r$ pasan todas por un mismo punto

12. En el espacio proyectivo $P(\mathbb{R}^5)$ se dan los subespacios $\pi_1 \equiv (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = (-\alpha + 2\beta, \alpha - \beta, -\alpha + k\beta, m\alpha + \beta, -\alpha + 3\beta)$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x_0 + x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

    Obtener su suma y su intersección, según los valores reales de los parámetros k y m

13. Determinar la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ que transforma los puntos $(1:0:0)$, $(1:-1:0)$, $(0:2:-1)$, $(3:-3:1)$ en los puntos $(1:0:1)$, $(0:2:1)$, $(0:0:1)$, $(1:-1:0)$ respectivamente

14. Una homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ transforma las rectas de ecuaciones $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ en las rectas de ecuaciones $x_0 - x_1 + x_2 = 0$, $x_0 + 2x_2 = 0$, $x_0 + x_1 = 0$ respectivamente, y deja fijo el punto de coordenadas $(1:1:1)$. Determinar la expresión analítica de dicha homografía

15. Sean a_0, a_1, a_2, a_3 cuatro puntos distintos de $P(\mathbb{R}^2)$ Demostrar que existe una homografía única de $P(\mathbb{R}^2)$ que transforma los puntos a_0, a_1, a_2, a_3 en los puntos a_2, a_3, a_0, a_1 respectivamente

16.Sean a_0, a_1, a_2, a_3 cuatro puntos distintos de $P(\mathbb{R}^3)$ tales que $a_3 \notin a_0+ a_1+ a_2$ Demostrar que existe una homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ que transforma los puntos a_0, a_1, a_2, a_3 en los puntos a_1, a_2, a_0, a_3 respectivamente. ¿Es única esa homografía?

17.En $P(\mathbb{R}^3)$ se consideran las referencias proyectivas R = $\{a_0, a_1, a_2; a_3\}$ y R '= $\{a_2, a_3, a_1; a_0\}$. Determinar la expresión analítica de la homografía que transforma R en R$'$ con respecto a la referencia R.Determinar la expresión analítica de la misma homografía, con respecto a la referencia R´´= $\{a_3, a_2, a_0; a_1\}$

18.Sean H y K dos hiperplanos de un espacio proyectivo E / dim E ≥ 2, $p \in E - H$, $q \in E - K$. Demostrar que $\forall x \in E \;\; f(x) = [((p + x) \cap H) + q] \cap K$ es un punto o el conjunto vacío, y que la correspondencia $x \longrightarrow f(x)$ es proyectiva. Determinar su centro según las posiciones relativas de p,q,H,K. Determinar las ecuaciones y el centro de f en los siguientes casos:

a) E = $P(\mathbb{R}^3)$ $H \equiv \{x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$ $K \equiv \{x_1 + x_2 = 0\}$ $p = (1 : 1 : -3)$ $q = (0 : -1 : -2)$

b) E, H, p como antes, $K \equiv \{2x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$ $q = (1 : 0 : -1)$

19.Sean en $P(\mathbb{R}^3)$ dos rectas $A \neq B$ y dos puntos $m \neq n \;\; m, n \notin A \cup B$ Se consideran $f : A \longrightarrow B \;\; f' : B \longrightarrow A$ definidas por $f(x) = (m + x) \cap B$ $\forall x \in A$, $f'(y) = (n+y) \cap A \;\; \forall y \in B$ Demostrar que $f' \circ f$ es una homografía sobre A. Obtener una expresión analítica de $f' \circ f$ respecto de $\{a_0, a_1, a_2\}$ en el caso particular $A \equiv x_0 + x_1 = 0 \;\; B \equiv x_0 - x_1 = 0 \;\; m = (1 : 0 : 0)$ $n = (2 : 0 : 1)$ $a_0 = (1 : -1 : 1)$ $a_1 = (1 : -1 : 0)$ $a_2 = (0 : 0 : 1)$

20.Hallar la matriz respecto del sistema de referencia canónico, de la homografía $f : P(\mathbb{R}^2) \longrightarrow P(\mathbb{R}^2)$ / $f((1 : 2)) = (7 : 5)$ $f((3 : 1)) = (9 : 5)$ $f((-2 : 1)) = (8 : 5)$ determinando sus puntos fijos

21.Hallar los puntos fijos y las rectas invariantes de

$$f_1 = \rho \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f_2 = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f_3 = \rho \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

22.Hallar los puntos, rectas y planos invariantes por las homografías de $P(\mathbb{R}^4)$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

23.Siendo f la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por $y_0 = -x_1 + x_2 \;\; y_1 = ax_0 - x_2$ $y_2 = x_0 - 7x_1$ determinar el valor de a para que el punto $(1 : 0 : 1)$ sea fijo y obtener en tal caso todos los puntos fijos y rectas invariantes

24.Sea f la homografía de $P(\mathbb{R}^4)$ tal que los puntos de la recta $L \equiv \{x_0 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$ son fijos, el punto $(1 : 0 : 0 : 0)$ es fijo y $f((0 : 1 : -1 : 0)) = (1 : 1 : -1 : 0)$ y $f((1 : -1 : 0 : 0) = (0 : 0 : 1 : 0)$ Hallar las ecuaciones de f

25.Sea $P(\mathbb{R}^3)$ Entre las rectas $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ se define la homografía f de ecuaciones $\rho z_0 = y_0 - y_2$, $\rho z_1 = 2y_2$; y entre $x_1 = 0$ y $x_0 = 0$ la homografía g de ecuaciones $\rho t_1 = y_2$, $\rho t_2 = y_0 - y_2$ Si $L \equiv x_1 = 0$ y $\beta = (1 : 0 : 0)$ hallar $\{(\alpha + f(\alpha)) \cap (\beta + g(\alpha)) \mid \alpha \in L\}$

26.Sea E un n-espacio proyectivo real; C y D dos subespacios con $C \cap D = \emptyset$ $dimC + dimD = n - 1$. Probar que la aplicación f(x) = (x+C)∩D está bien definida y es una proyectividad de centro C e imagen D. Se denomina proyección cónica.

27.En $P(\mathbb{R}^3)$ se consideran el punto $\alpha = (1 : -2 : 1)$ y la recta $M \equiv x_0+x_1-x_2 = 0$. Determinar las ecuaciones de la proyección cónica con centro α sobre la recta M

28.Determinar en $P(\mathbb{R}^4)$ las ecuaciones de la proyección cónica con centro $(1 : 0 : 1 : 0)$ e imagen $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calcular también las ecuaciones de la imagen inversa del punto $(1 : 1 : -1 : -1)$ y del hiperplano $x_0 + x_1 = 0$

29.Sea $\overrightarrow{g}$ el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ Demostrar que la aplicación proyectiva de $P(\mathbb{R}^3)$ en $P(\mathbb{R}^3)$ definida por $\overrightarrow{g}$ es una proyección cónica y hallar su centro y su imagen

30.En $P_3(\mathbb{R})$ se dan las rectas $C \equiv x_1 + x_2 + 2x_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, $S \equiv x_0 + x_2 = x_1 - x_2 + x_3 = 0$ Hallar las ecuaciones de la proyección cónica de centro C y base S

31.Si $P = P(\overrightarrow{E})$ es espacio proyectivo y L subespacio proyectivo de P, se llama espacio proyectivo cociente de P sobre L a $P(\overrightarrow{E}/\overrightarrow{L})$. Se denota P/L. Sea $P = P(\mathbb{R}^5)$, $M = \{x_0 - 2x_1 + x_2 + x_4 = 0; x_0 + x_1 - 3x_3 = 0\}$, $N \equiv x_0 - x_2 = 0$, $L = M \cap N$, $\beta_0 = (1 : 0 : 0 : 2 : 0)$, $\beta_1 = (1 : 0 : 0 : 0 : -1)$, $\beta_2 = (1 : 0 : -2 : 0 : 0)$, $\beta_3 = (1 : 0 : -1 : 0 : 1)$. Probar que R = $\{\beta_0 + L$, $\beta_1 + L, \beta_2 + L, \beta_3 + L\}$ es referencia de P/L y expresar M/L respecto a R

32.Sean las rectas $A \equiv x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$, $B \equiv 2x_0 + x_1 - x_2 = 0$, $C \equiv x_0 - 4x_1 + 7x_2 = 0$, $D \equiv 8x_0 + x_1 + x_2 = 0$ de $P(\mathbb{R}^3)$. Calcular en $P(\mathbb{R}^3)/A \cap B \cap C$ las coordenadas de D respecto a R = {A, B, C}

4 La extensión proyectiva

1. Sea E = $P(\mathbb{R}^3)$ y H recta de E con ecuación $\sum x_i = 0$

   a) en el espacio afín X = E-H determinar las coordenadas cartesianas (y_1, y_2) de un punto genérico $(x_0 : x_1 : x_2)$ de E respecto del sistema de referencia cartesiano $\{e_0, \overrightarrow{e_0 a_1}, \overrightarrow{e_0 a_2}\}$ siendo $e_0 = (1 : 1 : 1)$ $a_1 = (1 : -2 : 0)$ $a_2 = (2 : 0 : 1)$

b) calcular el punto medio de $p = (2 : -1 : 1)$ $q = (0 : -2 : 1)$ gráficamente y en coordenadas homogéneas

2. Comprobar que R = { (1,2,-1); (1,1,0) , (2,1,3) , (0,0,1) } es una referencia cartesiana de $\mathbb{R}^3$ Hallar la referencia proyectiva $\widetilde{R}$ asociada a R y calcular las coordenadas homogéneas respecto de $\widetilde{R}$ de un punto arbitrario de $\mathbb{R}^3$

3. En la recta proyectiva $P_1(\mathbb{R})$ se consideran una referencia proyectiva R = {a,b;c} y el punto x de coordenadas homogéneas $(2 : 1)$ respecto de R. En la recta afín X = $P_1(\mathbb{R}) - \{\mathbf{a}\}$ calcular las coordenadas de x respecto de la referencia cartesiana {b; $\overrightarrow{cb}$}

4. En una recta proyectiva L se consideran la referencia R = {a,b;c} y el punto d de coordenadas homogéneas $(2 : -1)$ respecto de R .En la recta afín X = $L\backslash\{a\}$ se considera la referencia cartesiana R$_X$ = {d; $\overrightarrow{dc}$}. Determinar la referencia proyectiva asociada a R$_X$, $\widetilde{R_X}$, la matriz del cambio de coordenadas entre R y $\widetilde{R_X}$, y la coordenada de b respecto de R$_X$

5. En $P(\mathbb{R}^3)$ sea $H \equiv 3x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$.Hallar la ecuación de la recta afín a la que da lugar la recta proyectiva $r \equiv \lambda(1, 2, -3) + \mu(2, 1, 5)$ tomando en $P(\mathbb{R}^3) - H$ la referencia cartesiana $\{e_0, \overrightarrow{e_0a_1}, \overrightarrow{e_0a_2}\}$ siendo $e_0 = (0 : 1 : 1)$ $a_1 = (1 : 0 : -1)$ $a_2 = (0 : 3 : 1)$

6. En el plano afín $X = P(\mathbb{R}^3) - H$ donde $H \equiv x_0 + x_1 + x_2 = 0$ se considera la traslación definida por el vector $\overrightarrow{pq}$ siendo $p = (1 : 1 : 0)$ $q = (0 : 1 : 1)$ Determinar la ecuación de su extensión proyectiva

7. De una proyectividad se sabe que sobre $P(\mathbb{R}^3) - H$ genera una homotecia de centro $(1 : -2 : 3)$ y razón -1. Siendo $H \equiv x_0 - x_2 = 0$ calcularla

8. En E = $P(\mathbb{R}^3)$ se dan $e_0 = (1 : 1 : 0)$ $e_1 = (1 : 1 : 1)$ $a_1 = (0 : 1 : 1)$ $a_2 = (2 : 1 : 2)$ $p = (1 : 0 : 0)$

   a) encontrar H recta de E / en $X = E - H$ se tenga que $\overrightarrow{e_0e_1} = \overrightarrow{e_0a_1} + \overrightarrow{e_0a_2}$

   b) determinar las coordenadas cartesianas del punto p respecto del sistema de referencia cartesiano en X $\{e_0, \overrightarrow{e_0a_1}, \overrightarrow{e_0a_2}\}$

   c) ¿induce la siguiente proyectividad de E, un isomorfismo afín sobre X ? En caso afirmativo, determinarlo

$$\rho \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

9. En $P_2(\mathbb{R})$ se dan los puntos a = $(1 : 2 : -1)$, b = $(0 : 2 : 1)$, c = $(-1 : 0 : 1)$, x = $(2 : 0 : 1)$. De una recta H de dicho espacio se sabe

   a) su intersección con la recta determinada por los puntos {a, x} es el punto p = $(3 : 2 : 0)$

   b) en X = $P_2(\mathbb{R}) - \mathbf{H}$ con su estructura afín asociada, es $\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{ab} + \alpha\overrightarrow{ac}$

Hallar la ecuación de la recta H y el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$

10.Dada la siguiente proyectividad en $P(\mathbb{R}^3)$

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) hallar el valor de a y la ecuación de un hiperplano H tales que en $P(\mathbb{R}^3) - H$ la proyectividad genere una traslación

b) dados $a = (1 : 0 : 0)$ $b = (-1 : 2 : 3)$ hallar $c \in P(\mathbb{R}^3)$, para que en $P(\mathbb{R}^3) - H$ se tenga que la razón simple sea -1

11.Siendo E = $P(\mathbb{R}^3)$ $p_0 = (2 : 0 : 1)$ $p_1 = (1 : -2 : 0)$ $p_2 = (1 : 0 : 1)$ $p = (2 : -1 : 1)$ determinar la ecuación de H sabiendo que p es el baricentro de $\{p_0, p_1, p_2\}$

12.Demostrar que si dim X = 1 siendo X un espacio afín real, entonces D(X) = GA(X), es decir el grupo afín solo consta de las dilataciones

13.Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación afín tal que f(1,0) = (2,2,0), f(-1,1) = (0,-1,1), f(1,2) = (-2,0,-2). Hallar la expresión analítica de la extensión proyectiva $\widetilde{f}$ de f, y el centro y la imagen de $\widetilde{f}$

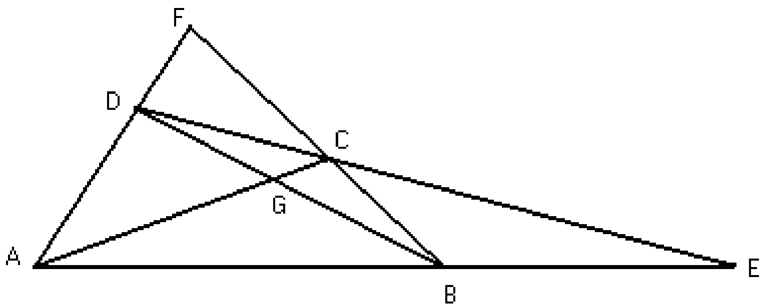
14.Un isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transforma P = (-1,-3) en P'= (1,-2) y P' en P''= (3,-1), y tiene una recta de puntos fijos paralela a la recta determinada por P,P',P''. Además, la extensión proyectiva de f transforma la recta $S \equiv x_0 + x_1 + x_2 = 0$ en la recta $S' \equiv x_0 + x_1 + 4x_2 = 0$. Determinar las expresiones de f y $\widetilde{f}$ en las referencias canónicas

15.Sea X el plano afín $P(\mathbb{R}^3) - S$, donde S es la recta definida por la ecuación $x_1 - x_2 = 0$ en la referencia proyectiva canónica. En X se considera la homotecia de centro $(1 : 0 : 1)$, que transforma el punto $(1 : -1 : 1)$ en el $(2 : -1 : 2)$.Determinar la razón de dicha homotecia y las ecuaciones de su extensión proyectiva

16.En el plano afín $X = P(\mathbb{R}^3) - S$, donde S es la recta definida por la ecuación $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ en la referencia proyectiva canónica, se considera la traslación que transforma el punto $(1 : 0 : 1)$ en el punto $(1 : 2 : 1)$.Obtener las ecuaciones de la extensión proyectiva de dicha traslación

17.Sea $\widetilde{f}$ la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por las ecuaciones $\rho y_0 = x_1 + x_2$, $\rho y_1 = x_0 + x_2$, $\rho y_2 = x_0 + x_1$.Demostrar que $\widetilde{f}$ tiene una recta S de puntos fijos, y que la restricción de $\widetilde{f}$ al plano afín $P(\mathbb{R}^3) - S$ es una homotecia. Hallar el centro y la razón de dicha homotecia

18.En un plano proyectivo $\widetilde{X}$ se considera la figura siguiente:



Sea X el plano afín $\widetilde{X}-(B+C)$

a) demostrar que R $=\{A,B,F;G\}$ es la referencia proyectiva asociada a una referencia E de X. Hallar las coordenadas cartesianas de D y E en E

b) hallar las coordenadas baricéntricas de D en la referencia {A, E, G}, y de A en la referencia {G, E, D}

c) sean $\widetilde{f}$ la homografía de $\widetilde{X}$ que transforma A, B, F, G en E, B, F, D y $\widetilde{g}$ la homografía que transforma A, B, C, D en E, F, B,G, respectivamente. Hallar las expresiones analíticas de ambas homografías en la referencia R. Comprobar que existen aplicaciones afines f,g:X$\longrightarrow$X cuyas extensiones proyectivas son $\widetilde{f},\widetilde{g}$

d) se considera la homografía $\widetilde{h}$ de $\widetilde{X}$ tal que $\widetilde{h}(A)=E\ \widetilde{h}(E)=C\ \widetilde{h}(C)=F$ $\widetilde{h}(F)=A$. Demostrar que $\widetilde{h}$ es la extensión proyectiva de un isomorfismo afín h del plano $\widetilde{X}-(B+D)$ Escribir la matriz de $\widetilde{h}$ en la referencia {A, B, F; G} y la de h en la referencia {A, E, F}. Demostrar que h$\circ$h es una homotecia, cuyo centro es el punto de intersección de las rectas A+C y E+F

19. Sea X un plano afín, R referencia cartesiana de X. Sea la recta $L\equiv x_1+x_2-1=0$, $\widetilde{L}$ su completado proyectivo y $f:\widetilde{L}\longrightarrow\widetilde{L}$ la homografía que transforma (0,1) en L_∞, L_∞ en (1,0) y (1,0) en (0,1). Hallar la imagen por f de (1/2,1/2)

20. Sea P plano proyectivo real, R = $\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2;\alpha\}$ referencia proyectiva de P. Sean $\alpha_0'=(\alpha_0+\alpha_1)\cap(\alpha_2+\alpha)$, $\alpha_2'=(\alpha_0+\alpha)\cap(\alpha_1+\alpha_2)$, $\alpha'=(\alpha_0+\alpha_2)\cap(\alpha_1+\alpha)$. Probar que R$'$ = $\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2';\alpha'\}$ es también referencia de P. Si $\overrightarrow{a}_0\ \overrightarrow{a}_1\ \overrightarrow{a}'_2\ \overrightarrow{a}'$ son vectores que definen a los puntos de R$'$ y $\alpha'=\rho(\overrightarrow{a}_0+\overrightarrow{a}_1+\overrightarrow{a}'_2)$ probar que $R_X=\{\overrightarrow{a}_0;\overrightarrow{a}_1,\overrightarrow{a}'_2\}$es referencia cartesiana de X = P-H siendo H = $\alpha_1+\alpha_2'$ Determinar las coordenadas de α , $\alpha_0'\in X$ respecto de R_X y de α_2 , α , $\alpha_0'\in P$ respecto de R$'$. Sea $h:P\longrightarrow P$ la homografía definida por $h(\alpha_0)=\alpha_0'$, $h(\alpha_1)=\alpha_1$, $h(\alpha_2')=\alpha_2'$, $h(\alpha')=\alpha$ hallar las ecuaciones de h respecto de R$'$ y del isomorfismo afín $h\mid_X$respecto de R_X

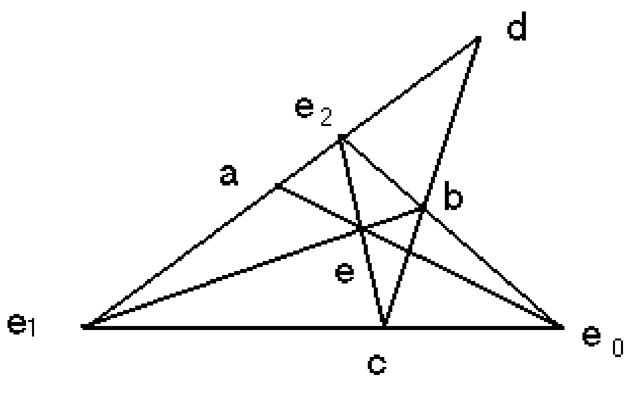
21. Sea X espacio afín, $f:X\longrightarrow X$ aplicación afín de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Hallar los hiperplanos de X invariantes por f

5 La razón doble

1. En $P(\mathbb{R}^2)$ sean A = $(1:-1)$ B = $(3:-1)$ C = $(1:0)$ D = $(2:1)$ Hallar la razón doble [A, B, C, D]. Dado $k \in \mathbb{R}$ hallar el punto D_k tal que [A, B, C, D_k] = k
2. En $P(\mathbb{R}^3)$ sean A = $(1:-1:0)$, B = $(0:1:-1)$, C = $(1:1:-2)$. Hallar los puntos C' y D tales que [A, B, C, D] = -1/2 y [A, B, C', D] = -2/3
3. En un plano proyectivo se consideran los puntos A = $(1:0:0)$, B = $(1:1:1)$, C = $(0:1:1)$, D = $(-2:1:1)$. Comprobar que dichos puntos están alineados y calcular [A, B, C, D]. Hallar el punto A' tal que [A', B, C, D] = -1
4. Sean A, B, C puntos distintos de una recta afín X. Demostrar que si D_∞ es el punto del infinito de X, es [A, B, C, D_∞] = -1 (en $\widetilde{X}$) si y sólo si C = $\frac{A+B}{2}$ en la recta X
5. En una recta afín X, se consideran cuatro puntos distintos A, B, C, D. Se supone que las coordenadas de estos puntos, en una referencia cartesiana de origen P_0, son a, b, c, d, respectivamente. Demostrar que:
   a) si P_0= A es [A, B, C, D] =-1 si y sólo si $\frac{1}{b} = (\frac{1}{c} + \frac{1}{d})/2$
   b) si P_0= (A+B)/2 es [A, B, C, D] =-1 si y sólo si a^2 = cd
6. Sea P plano proyectivo real y R = $\{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha\}$ referencia proyectiva de P. Sean $\alpha_3 = (\alpha_0 + \alpha) \cap (\alpha_1 + \alpha_2)$, $\alpha_4 = (\alpha_0 + \alpha_1) \cap (\alpha_2 + \alpha)$, $\alpha_5 = (\alpha_1 + \alpha) \cap (\alpha_3 + \alpha_4)$, $\alpha_6 = (\alpha_0 + \alpha_2) \cap (\alpha_3 + \alpha_4)$ Hallar $[\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6]$
7. Determinar en la siguiente figura del plano proyectivo real, la razón doble [e_1,e_2,d,a]



8. En $P(\mathbb{R}^3)$ sean A, B, C, D puntos alineados y A', B', C', D' puntos alineados tales que [A, B, C, D] = [A', B', C',D']

   a) probar que si AA', BB', CC' son concurrentes entonces DD' pasa también por el punto de concurrencia

   b) probar que si A = A' entonces BB', CC', DD' son concurrentes

9. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que entre dos rectas proyectivas haya una homografía que transforme a, b, c, d en a', b', c', d' es que [a, b, c, d] = [a', b', c', d']

10. La razón doble de un punto d de una recta proyectiva $P(\overrightarrow{E})$ se define mediante una homografía $f : P(\overrightarrow{E}) \longrightarrow P(\widehat{X})$ (donde $P(\widehat{X})$ es la recta afín ampliada) tal que a, b, c $\longrightarrow 0, \infty, 1$. Calcular cómo varía la razón doble de d al cambiar dicha homografía por otra $g : P(\overrightarrow{E}) \longrightarrow P(\widehat{X})$ tal que a', b', c' $\longrightarrow 0, \infty, 1$. (Transformaciones de Moebius)

11. En $P_3(\mathbb{R})$ sea a = $(1 : 1 : 1 : 1)$, b = $(-1 : 2 : 2 : -1)$, c = $(2 : -1 : -1 : 2)$ y el hiperplano $H \equiv x_0 + x_1 - x_2 = 0$

    a) demostrar que a, b, c están situados sobre una recta proyectiva R; calcular el punto $h = H \cap R$ y determinar [a, b, c, h]

    b) determinar las ecuaciones de la transformación proyectiva que deja fijos los puntos de $H \cup \{c\}$ y transforma a en b

12. En una recta proyectiva P(E) se consideran la referencia R = $\{$A, B; C$\}$ y el punto D de coordenadas homogéneas $(2 : -1)$ respecto de R En la recta afín X = P(E)-$\{$A$\}$ se considera la referencia cartesiana E = $\{$D; DC$\}$ Determinar la referencia proyectiva $\widetilde{E}$ asociada a E, la matriz de R respecto de $\widetilde{E}$ y la coordenada de B en la referencia E

6 Homografías de la recta

1. Una homografía h de $P(\mathbb{R}^2)$ deja fijos los puntos A = $(1 : 0)$ y B = $(1 : -1)$ Sabiendo que [A, B, C, h(C)] = 2 para C = $(1 : 1)$ obtener la expresión analítica de h en la referencia proyectiva canónica

2. Determinar la expresión analítica de una homografía de $P(\mathbb{R}^2)$ sabiendo que deja fijo únicamente el punto $(0 : 1)$ y que transforma el punto $(1 : 2)$ en el $(2 : 5)$

3. Una homografía h de $P(\mathbb{R}^2)$ transforma los puntos distintos A y B en los puntos B y A respectivamente. Demostrar que h es involutiva. Suponiendo que h deja fijo un punto C, ¿qué transformación resulta al restringir h a la recta afín $P(\mathbb{R}^2) - \{C\}$?

4. Sea h la homografía de $P(\mathbb{R}^2)$ tal que h(A) = A, h(B) = C, h(C) = D siendo A = $(1 : 0)$, B = $(0 : 1)$, C = $(1 : 1)$, D = $(2 : 3)$ ¿Qué transformación afín

$f : X \longrightarrow X$ resulta al restringir h a la recta X = $P(\mathbb{R}^2) - \{A\}$? Determinar la matriz de f en la referencia cartesiana {B; CB} y la coordenada del punto f(D) en la referencia cartesiana {C; BC}

5. Sean a, b, c, d cuatro puntos distintos de una recta proyectiva L. Probar que existen homografías f, g de L tales que f:(a,b,c,d)⟶(b,a,d,c) y g:(a,b,c,d)⟶(c,d,b,a). Determinar las ecuaciones de f y g respecto de la referencia R ={a, b, c}

6. Sean a_i i = 1..4 cuatro puntos de una recta proyectiva real R tales que $[a_1,a_2,a_3,a_4]$ = 2

   a) demostrar que existe una única transformación proyectiva f de R que deja fijos a_1 y a_3 y transforma a_2 en a_4 y a_4 en a_2

   b) demostrar que f es involución hiperbólica y determinar sus ecuaciones respecto del sistema de referencia proyectivo $\{a_1, a_3, a_2\}$

   c) siendo $a_1 = (1 : -1)$ $a_2 = (-2 : 1)$ $a_3 = (1 : -2)$ $a_4 = (4 : -5)$ demostrar que $[a_1,a_2,a_3,a_4] = 2$ y determinar las ecuaciones de f

7. En $P(\mathbb{R}^3)$ con las coordenadas homogéneas canónicas, se consideran los puntos a = $(1 : 0 : 1)$ y b = $(0 : 1 : 1)$. Si las ecuaciones de una homografía del plano son

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \rho y_0 & = & 3x_0 & + & x_1 & - & x_2 \\ \rho y_1 & = & 3x_0 & + & x_1 & - & 3x_2 \\ \rho y_2 & = & 4x_0 & & & - & 2x_2 \end{array}\right.$$

   a) hallar el conjunto de puntos fijos de f

   b) probar que f induce una involución en la recta a+b

8. De una homografía en $P(\mathbb{R}^4)$ se sabe que fija $H \equiv x_0 + x_1 + x_3 = 0$ punto a punto, y restringida a $R \equiv \{x_0 + 3x_1 - x_2 = 0 \ , \ x_1 - x_3 = 0\}$ es una transformación hiperbólica involutiva de puntos fijos $(-2 : 1 : 1 : 1)$ y $(1 : 0 : 1 : 0)$

   a) hallar las ecuaciones de la homografía

   b) en el espacio afín $P(\mathbb{R}^4) - H$ determinar la aplicación afín a la que da lugar dicha homografía

9. De una homografía en $P(\mathbb{R}^3)$ se sabe que transforma el punto $(1 : 0 : 0)$ en el conjugado armónico de $(0 : 3 : 2)$ respecto de $(1 : 1 : 1)$ y $(2 : -1 : 0)$. Por otro lado, deja fijo el punto $(1 : 0 : 1)$. Calcular las ecuaciones de la homografía sabiendo que la imagen de $(0 : 1 : -3)$ cae en la recta $r \equiv 3x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$ y restringida a la recta $s \equiv x_0 - x_1 + x_2 = 0$ es una transformación proyectiva involutiva sin puntos fijos.

10. Sea f homografía de $P(\mathbb{C}^2)$ que deja un sólo punto fijo. Demostrar que existe alguna referencia proyectiva de $P(\mathbb{C}^2)$ respecto a la cual la matriz de f es $\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Demostrar que f no es involutiva

7 Homografías del plano

1. Sea f la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ que transforma $(-1:1:0)$ en $(1:0:0)$; $(1:0:0)$ en $(5:-3:-4)$; $(0:0:1)$ en el conjugado armónico de $(2:1:-3)$ con respecto a $(1:0:-1)$ y $(0:1:-1)$; y el punto $(2:-1:1)$ en la intersección de la recta $x_0+2x_1=0$ con la que pasa por los puntos $(1:0:-1)$ y $(3:-4:0)$. Obtener la matriz de f con respecto a la referencia canónica, y los puntos y rectas invariantes por f
2. Determinar los subespacios invariantes de la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por las ecuaciones $\rho y_0=-2x_1+4x_2$, $\rho y_1=9x_0-6x_1$, $\rho y_2=6x_2$ Hallar la matriz canónica y una base canónica de un endomorfismo asociado a la homografía
3. Determinar una homología de $P(\mathbb{R}^3)$ cuya base es la recta $x_0+x_1-2x_2=0$ sabiendo que el vértice es el punto $(1:1:0)$ y que transforma el punto $(0:1:-1)$ en el $(1:0:1)$
4. Demostrar que la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por las ecuaciones $\rho y_0=3x_0$, $\rho y_1=3x_1$, $\rho y_2=-x_0-2x_1+x_2$ es una homología. Hallar su vértice, base y característica. Idem para $\rho y_0=x_1+x_2$, $\rho y_1=x_0+x_2$, $\rho y_2=x_0+x_1$
5. Determinar la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ que deja invariantes los puntos $(2:0:-1)$, $(0:-1:1)$, $(0:0:-1)$ y transforma el punto $(1:1:-1)$ en el $(4:-6:5)$
6. Una homología de $P(\mathbb{R}^3)$ de característica -1/2, transforma la recta $x_0+x_1+x_2=0$ en la recta $x_0-x_1=0$ y deja invariante la recta $x_1=0$. Determinar su expresión analítica, sabiendo que la base es la recta $2x_0+x_2=0$
7. Determinar una homología de $P(\mathbb{R}^3)$ sabiendo que el vértice está contenido en la base, y que transforma las rectas $x_0+x_1=0$ y $x_0-x_1=0$ en las rectas $x_0+x_2=0$ y $x_0-x_2=0$ respectivamente
8. Dadas las homografías f_k del plano proyectivo real $\rho y_0=kx_0+x_1+x_2$, $\rho y_1=x_0+x_2$, $\rho y_2=x_0+x_1$ Hallar k para que f_k sea una homología y determinar su eje, su vértice y su razón
9. Demostrar que las únicas homografías involutivas de $P(\mathbb{R}^3)$ son las homologías de característica -1 y la identidad
10. Probar que existe una única proyectividad f de $P(\mathbb{R}^3)$ tal que $f((0:1:0))=(0:1:1)$, $f((0:0:1))=(1:0:1)$ y $\{x\in P(\mathbb{R}^3)\mid f(x)=x\}=\{(1:0:0)\}$ y hallar las ecuaciones de f
11. De una homografía h se sabe que tiene un único punto fijo P = $(1:2:0)$ y una única recta invariante $r\equiv 2x_0-3x_2=0$; y $h\mid_r$ es involutiva y manda A = $(1:0:0)$ en A' = $(0:3:-1)$

   a) calcular la expresión analítica de h

   b) decir qué tipo de homografía es h^2

c) en el plano afín $P^2 - r$ ¿genera h un isomorfismo afín ? ¿por qué? En caso afirmativo, calcular su expresión analítica en la referencia cartesiana R = {P; $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PA'}$}

d) calcular la razón simple de A, A' y el punto $(-2,3)_R$

8 Homografías del espacio

1. En $P(\mathbb{R}^4)$ se considera el plano $M \equiv x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$. Una homografía f de M deja invariante el punto $(2:0:1:0)$, transforma el punto $(0:2:1:1)$ en el punto $(0:2:1:-3)$ y éste en $(8:-6:1:5)$ Sabiendo que $f((1:-1:0:1)) = (4:-4:0:3)$ determinar la matriz de Jordan de un endomorfismo asociado a f, y los subespacios invariantes por la homografía, expresándolos en la referencia canónica de $P(\mathbb{R}^4)$
2. Determinar una homografía f de $P(\mathbb{R}^4)$ sabiendo que sobre el plano $x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$ coincide con la homografía del ejercicio precedente, y que deja fijos los puntos de la recta $x_1 = x_3 = 0$. Obtener la matriz de Jordan de un endomorfismo asociado a f, y explicar cuáles son los subespacios de $P(\mathbb{R}^4)$ que permanecen invariantes
3. Sea f la homografía de $P(\mathbb{R}^4)$ definida por las ecuaciones $\rho y_0 = -2x_0 + x_1 + 3x_3$, $\rho y_1 = -x_1$, $\rho y_2 = 3x_0 + x_2 - 3x_3$, $\rho y_3 = x_1 + x_3$

   a) comprobar que el plano $M \equiv x_1 + 2x_3 = 0$ es invariante, y hallar la matriz de la restricción de f a M, en una referencia formada por los puntos $(0:0:1:0)$, $(0:2:0:-1)$ y sus sucesivas imágenes

   b) determinar las rectas invariantes contenidas en el plano M

   c) obtener la matriz de Jordan de un endomorfismo asociado a f y explicar cuáles son los subespacios de $P(\mathbb{R}^4)$ que permanecen invariantes
4. Sea f la colineación de $P(\mathbb{R}^4)$ de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

   estudiar si $H \equiv x_0 - x_2 + x_3 = 0$ contiene rectas de $P(\mathbb{R}^4)$ invariantes por f
5. Sea X espacio afín, $f : X \longrightarrow X$ aplicación afín de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Hallar los hiperplanos de X invariantes por f

6. En $P(\mathbb{R}^4)$ sean las rectas $L \equiv x_0 = x_1 = 0$, $M \equiv x_2 = x_3 = 0$, $N \equiv x_0 - x_2 = x_1 - x_3 = 0$ Demostrar que existe una única homografía f tal que $\{\alpha \in P(\mathbb{R}^4) \mid f(\alpha) = \alpha\} = L$ y $f(\alpha) = (\alpha + L) \cap N \; \forall \alpha \in M$ y obtener sus ecuaciones

7. Sea la homografía de $P(\mathbb{R}^4)$ de matriz

$$\rho \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 & -1 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Obtener todas las variedades proyectivas invariantes por esta homografía

8. Sea P espacio proyectivo de dimensión $n \geq 2$ y φ homología de P, distinta de la identidad. Sea H un hiperplano de P distinto de la base de φ y no incidente con el vértice de φ. Probar que $\varphi\mid_H : H \longrightarrow \varphi(H)$ es restricción de una proyección cónica de P y hallar su centro y su imagen

9. Sea f una homografía de $\mathbb{P}^3$ que restringida al plano $H : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$ tiene por ecuaciones

$$\lambda x'_0 = -2x_0 - x_1, \quad \lambda x'_1 = x_0, \quad \lambda x'_2 = -x_2$$

Además f deja fijo el punto $(1:0:0:0)$ e induce una homografía involutiva (distinta de la identidad) en el haz de planos de base la recta $r : x_3 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Se pide:

   (a) Los puntos fijos y las rectas invariantes de f en H
   (b) Mostrar que el punto $(0:1:0:1)$ se transforma en un punto del tipo $(3+\alpha : -2 : 0 : -1)$ y que $\alpha = 2$
   (c) Mostrar que $(1:0:0:0)$ es el único punto fijo de f fuera de H y encontrar todas las rectas invariantes de f

9 Geometría proyectiva y afín

1. Cuatro puntos A, B, C, D y cuatro rectas a, b, c, d de un plano proyectivo real son tales que los puntos $b \cap c$, $c \cap a$, $a \cap b$, $a \cap d$ y $b \cap d$ están respectivamente sobre las rectas AD, BD, CD, BC, AC. Probar que el punto $c \cap d$ está sobre AB

2. Probar que si 3 triángulos son homológicos 2 a 2 respecto de un mismo centro, los 3 ejes de homología concurren en un punto

3. Demostrar que el triángulo de vértices A’ = $(a : a' : a'')$, B’ = $(b : b' : b'')$, C’ = $(c : c' : c'')$ es homológico con el de vértices A = $(1 : 0 : 0)$ B = $(0 : 1 : 0)$ C = $(0 : 0 : 1)$ si y sólo si se cumple la relación $a''bc' = a'b''c$

4. Demostrar que si el triángulo ABC es homológico con el A’B’C’ y con B’C’A’, también lo es con el C’A’B’

5. Sea ΔABC un triángulo en un plano proyectivo real , R, R’ dos rectas que cortan los lados AB, BC, AC del triángulo en c, c’, a, a’, b, b’ respectivamente. Demostrar que [B,C,a,a’] [C,A,b,b’] [A,B,c,c’] = 1

6. Si A, B, C son puntos de una recta r, A’, B’, C’ otros de otra recta r’, tales que AA’, BB’, CC’ sean rectas concurrentes, probar que los puntos AB’∩A’B BC’∩B’C AC’∩A’C están alineados con el punto r∩r’

7. Se da en un plano proyectivo, un triángulo ABC y una recta r que corta en los puntos P, Q, R a los lados BC, AC, AB respectivamente. Las rectas AP, BQ, CR determinan un nuevo triángulo A’B’C’. Demostrar que las rectas AA’, BB’, CC’ son concurrentes

8. Se llama cuadrivértice al conjunto de 4 puntos de un plano, de los cuales no haya 3 alineados. Los 4 puntos se llaman vértices, ellos determinan 6 rectas llamadas lados. Los 3 puntos de intersección de dos lados, que no sean vértices, se llaman puntos diagonales. Demostrar que en el plano proyectivo real, los 3 puntos diagonales de un cuadrivértice, no están alineados (Teorema de Fano)

9. Sea X un plano afín, A, B, C y A’, B’, C’ dos triángulos de X

   a) si se verifica que $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $AA' \parallel BB'$, $AA' \parallel CC'$ probar que $BC \parallel B'C'$

   b) si $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, AA' corta a BB' en $O \in X$ y $O \in CC'$, probar que $BC \parallel B'C'$

10. Sea X plano afín, r,s dos rectas de X, A, B, A’, B’ puntos distintos de X, tales que A,B∈r, A’,B’∈s Sean a, b, a’, b’ rectas de X tales que $A \in a$, $a \parallel s$, $B \in b$, $b \parallel s$, $A' \in a'$, $a' \parallel r$, $B' \in b'$, $b' \parallel r$ Si $a \cap a' = \{P\}$, $b \cap b' = \{Q\}$, $AB' \cap BA' = \{R\}$ entonces P, Q, R están alineados

11. Sea X plano afín, r recta de X, A, B, C tres puntos distintos de r. Sean a, b, c, a’, b’, c’ rectas de X tales que $A \in a$, $C \in c'$, $a \parallel c'$, $B \in b$, $C \in c$, $b \parallel c$, $A \in a'$, $B \in b'$, $a' \parallel b'$ .Si $a \cap b = \{D\}$, $c \cap a' = \{E\}$, $b' \cap c' = \{F\}$ entonces D, E, F están alineados

12. Sea X plano afín, r,s dos rectas de X, A, B, C, A’, B’, C’ puntos de X tales que A, B, C∈r, A’, B’, C’∈s . Si $AB' \parallel BA'$ y $BC' \parallel CB'$ entonces $AC' \parallel CA'$

13. En un plano afín, sean r, s dos rectas paralelas; sobre ellas se dan los puntos B, B’∈r , C, C’∈s de tal forma que $BC \not\parallel B'C'$. Se dan además las rectas b, c tales que $B \in b$, $C \in c$, $b \parallel c \not\parallel r$, y las rectas b’, c’ tales que $B' \in b'$, $C' \in c'$, $b \not\parallel b' \parallel c' \not\parallel r$. Demostrar que los puntos $c \cap c'$, $b \cap b'$, $BC \cap B'C'$ están alineados

14.En el plano afín, sean l, m dos rectas no paralelas. Sean A,C y A',B' dos puntos sobre l y m respectivamente, distintos de l∩m Sea E el punto donde AB' corta a la recta que pasa por A' paralela a l. Sea F el punto donde A'C corta a la recta que pasa por A paralela a m. Demostrar que EF y B'C son paralelas

15.a) sean p, q, r, s 4 rectas no 3 de ellas concurrentes, y sean $A = p \cap q$, $B = p \cap r$, $C = p \cap s$, $D = q \cap r$, $E = q \cap s$, $F = r \cap s$, $a = AF$, $b = CD$, $c = BE$ Demostrar que $\alpha = (a \cap b) + B$, $\beta = (b \cap c) + F$, $\gamma = (a \cap c) + C$ son concurrentes

b) enunciar el teorema dual haciendo un dibujo que satisfaga las hipótesis

c) enunciar y hacer un dibujo del teorema dual, en el plano afín, cuando PQ es la línea del infinito, siendo P y Q los puntos duales de las rectas p y q

10 Dualidad

1. Sea $p \in P(\overrightarrow{E})$ un punto del plano proyectivo. Se define $f : P(\overrightarrow{E}) - p \longrightarrow P(\overrightarrow{E}^*)$ que a cada punto x le asocia una forma lineal sobre $\overrightarrow{E}$ cuyo núcleo es la recta vectorial que pasa por $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{x}$ Demostrar que f es una proyectividad y deducir sus ecuaciones
2. Dadas las rectas $A \equiv x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$, $B \equiv 2x_0 + x_1 - x_2 = 0$, $C \equiv x_0 - 4x_1 + 7x_2 = 0$, $D \equiv 8x_0 + x_1 + x_2 = 0$ de $P(\mathbb{R}^3)$ Calcular [A, B, C, D]
3. Dados los hiperplanos $H_1 \equiv -x_1+3x_2 = 0$, $H_2 \equiv x_2 = 0$, $H_3 \equiv 5x_1-x_2 = 0$, $H_4 \equiv 4x_1 - 3x_2 = 0$ de $P(\mathbb{R}^4)$ Hallar $[H_1, H_2, H_3, H_4]$
4. Calcular la razón doble de 4 rectas paralelas en el plano afín real
5. En el plano afín real, demostrar que la razón doble de 4 rectas concurrentes tiene la expresión

$$\pm\frac{sen(ad)\ sen(bc)}{sen(ac)\ sen(bd)}$$

   donde sen(ac) es el seno del ángulo que va de la recta a a la recta c ¿Cuándo es dicha expresión negativa? (Teorema de Moebius)
6. En $P(\mathbb{R}^4)$ se consideran los planos $H_1 \equiv x_0+x_1-x_2 = 0$, $H_2 \equiv x_0+x_2-x_3 = 0$. Calcular las ecuaciones de los miembros H_3 H_4 del haz al que pertenecen H_1 y H_2 tales que $(1 : 0 : 0 : 0) \in H_3$ y $(0 : 0 : 1 : 0) \in H_4$ y hallar $[H_1, H_2, H_3, H_4]$
7. Se define un cuadrilátero como el conjunto que verifica la propiedad dual del cuadrivértice. Definir explícitamente un cuadrilátero y enunciar el dual del teorema de Fano
8. Enunciar y poner un ejemplo gráfico del teorema dual de los problemas 1, 2, 6, 7, de la sección anterior.

9. Enunciar el teorema dual del teorema de Pappus

10. Sea en el plano afín ampliado, dos rectas l,m. Sean A, B, C, A', B', C' seis puntos sobre l y m respectivamente, distintos de l∩m. Sea E = $AB' \cap A'B$, F = $AC' \cap A'C$ Se supone que E, F, l∩m están alineados

    a) demostrar que AA', BB', CC' son concurrentes

    b) enunciar el teorema dual, haciendo un dibujo del enunciado

    c) enunciar y hacer un dibujo del teorema, en el plano afín, cuando m es la línea del infinito

11. Sea P espacio proyectivo de dimensión $n \geq 2$ y φ colineación de P. Probar que φ es homología si y sólo si deja invariantes todos los hiperplanos que pasan por un punto dado

12. Sea P espacio proyectivo de dimensión $n \geq 3$ y $\varphi : P \longrightarrow P$ homografía tal que $\{\alpha \in P \mid \varphi(\alpha) = \alpha\} = L$ es un subespacio de dimensión $n-2$, y si $\mathfrak{F}$ es el haz de hiperplanos que contienen a L, $\forall H \in \mathfrak{F}$ H es invariante por φ. Probar que $\forall \alpha \in P$ el subespacio $\alpha + \varphi(\alpha)$ es invariante por φ. Probar que φ está determinada conociendo L y $\varphi(M)$, siendo M una recta cualquiera de P disjunta con L

13. En $P_2(\mathbb{R})$ se da la homografía f de ecuaciones

$$\begin{cases} \rho y_0 &= & x_0 & +x_1 & \\ \rho y_1 &= & -x_0 & -2x_1 & +x_2 \\ \rho y_2 &= & x_0 & & \end{cases}$$

    Se pide:

    a) hallar sus puntos fijos y sus rectas invariantes

    b) si H_0 y H_1 son dos rectas invariantes de f, y $\mathfrak{H}$ el haz de rectas generado por ellas, hallar las ecuaciones de la homografía $g : \begin{array}{ccc} \mathfrak{H} & \longrightarrow & \mathfrak{H} \\ H & & f(H) \end{array}$ respecto de la referencia dada por las dos rectas citadas y un punto unidad arbitrario

    c) hallar el cuarto armónico de la recta $H \equiv x_0 - x_1 + 3x_2 = 0$ respecto de las dos rectas invariantes anteriores

14. a) Hallar la recta H del plano proyectivo real, conjugada armónica de $F \equiv x_0 - x_2 = 0$ respecto de las rectas $K_1 \equiv 2x_0 - x_1 = 0$ y $K_2 \equiv x_0 - x_1 + x_2 = 0$

    b) calcular las ecuaciones de la extensión proyectiva $\widetilde{\tau}$ de la traslación τ de $P_2(\mathbb{R}) - H$ que transforma el punto a = (1 : 0 : 0) en b = (2 : 2 : 1)

    c) determinar las ecuaciones de la aplicación afín obtenida al restringir $\widetilde{\tau}$ a $P_2(\mathbb{R}) - K_1$ respecto de la referencia cartesiana {a; $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ac}$} siendo c = (1 : 1 : 0)

15. Determinar la expresión analítica de una correlación de $P(\mathbb{R}^3)$ sabiendo que transforma los puntos $(1:0:0)$, $(1:-2:1)$, $(0:2:1)$, $(1:-2:0)$ en las rectas de ecuaciones $x_0 - x_1 = 0$, $x_0 + x_2 = 0$, $x_0 - x_1 + x_2 = 0$, $x_0 = 0$ respectivamente. Hallar el punto transformado de la recta $x_0 = 0$

16. Una correlación de $P(\mathbb{R}^3)$ transforma las rectas $x_0 - x_1 = 0$, $x_0 + x_2 = 0$, $x_0 - x_1 + x_2 = 0$ en los puntos $(1 : 1 : 0)$, $(1 : -1 : -2)$, $(0 : 1 : 2)$ respectivamente. Sabiendo que el punto $(1 : 0 : 0)$ se transforma en la recta $4x_1 - 3x_2 = 0$ obtener la expresión analítica de dicha correlación. Hallar el punto que se transforma en la recta $x_0 - x_1 = 0$

17. Determinar la expresión analítica de la colineación que se obtiene componiendo las correlaciones de los dos ejercicios anteriores

18. Demostrar que cualquier correlación de $P(\mathbb{R}^3)$ que transforme los vértices de un triángulo ΔABC en las rectas determinadas por los lados opuestos, es una polaridad

19. Sea $\{P_0, P_1, P_2; P_3\}$una referencia proyectiva de $P(\mathbb{R}^3)$. Demostrar que existe una correlación única, que transforma cada vértice del triángulo P_0, P_1, P_2 en el lado opuesto correspondiente, y transforma P_3 en una recta prefijada no incidente con los puntos P_0, P_1, P_2. Comprobar que dicha correlación está definida por una forma bilineal simétrica

20. Demostrar que existe una correlación única de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por una forma bilineal simétrica, que transforma cada uno de los vértices de un pentágono dado en el lado opuesto correspondiente

21. Una correlación involutiva de $P(\mathbb{R}^4)$ asociada a una forma bilineal simétrica, transforma los puntos $(1 : 0 : 0 : 0)$ y $(0 : 1 : 0 : 0)$ en los planos $4x_0 - x_1 - 2x_2 = 0$ y $x_0 - x_1 - 2x_3 = 0$ respectivamente, y transforma la recta $x_0 = x_1 = 0$ en la recta $2x_0 + 2x_1 - x_2 = 2x_0 + 4x_1 + x_3 = 0$. Determinar la expresión analítica de dicha correlación

22. Una correlación involutiva de $P(\mathbb{R}^4)$ asociada a una forma bilineal simétrica transforma en sí mismas las rectas $r \equiv x_1 = x_2 = 0$, $s \equiv x_1 = x_2 + 2x_3 = 0$, $t \equiv x_2 = 2x_0 - x_1 = 0$ y transforma el punto $(0 : 1 : -1 : 0)$ en el plano $x_0 + x_3 = 0$

    a) hallar los planos transformados de los puntos $(1 : 0 : 0 : 0)$ y $(0 : 0 : 0 : 1)$

    b) teniendo en cuenta cómo deben ser los planos transformados de los puntos $(1 : 2 : 0 : 0)$ de t, y $(0 : 0 : 2 : -1)$ de s, obtener la expresión analítica de la correlación

23. Una correlación involutiva de $P(\mathbb{R}^4)$ asociada a una forma bilineal simétrica transforma en sí mismas las rectas $x_1 = x_2 - x_3 = 0$ y $x_1 = x_2 + x_3 = 0$ y transforma los puntos $(0 : 0 : 1 : 1)$ y $(0 : 0 : 1 : -1)$ de esas rectas en planos que contienen al punto $(0 : 1 : 0 : 0)$. Sabiendo que el punto $(0 : 1 : 1 : 0)$ se transforma en el plano $x_0+x_2 = 0$ obtener la expresión analítica de la correlación

24. En $\mathbf{P} = P(\mathbb{R}^4)$ sea g la homografía de $\mathbf{P}$ en $\mathbf{P}^*$ de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

hallar $g(L)$ y $\Delta^{-1}(g(L))$ siendo $L \equiv \left\{ \begin{array}{c} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ 5x_0 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$

25.En $P(\mathbb{R}^4)$ se considera la correlación φ y la colineación ψ de ecuaciones respectivas

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \psi \equiv \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sea $N \equiv x_1 + x_2 = 0$ y $M \equiv x_0 = x_1 + x_2 = 0$. Definir en N una referencia proyectiva y hallar las ecuaciones de $\psi\mid_N$ respecto de dicha referencia. Hallar la imagen de M mediante la correlación $(\psi \circ \varphi)(M)$

26.Sea φ la polaridad de $P(\mathbb{R}^3)$ de ecuación

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

hallar el polo de $L \equiv x_1 - x_2 = 0$ respecto de φ y el hiperplano polar de $(1 : 2 : 3)$ respecto de φ

27.Dada la polaridad de $P(\mathbb{R}^3)$ de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

determinar la involución subordinada en la recta $L \equiv 3x_0 + 2x_1 - x_2 = 0$

28.Sean φ y ψ las polaridades de P de ecuaciones $\rho u = Ax$, $\rho u = Bx$ respectivamente. Hallar $\{\alpha \in P \mid \varphi(\alpha) \supset \psi(\varphi(\alpha))\}$

29.En $P(\mathbb{R}^4)$ sea φ colineación tal que $L \equiv x_0 = x_1 - x_2 = 0$ es invariante por φ.

Sea $\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & P(\mathbb{R}^4)/L & \longrightarrow & P(\mathbb{R}^4)/L \\ & \alpha + L & & \varphi(\alpha) + L \end{array}$ de ecuaciones $\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$

respecto de la referencia $\mathsf{R}_L = \{(0 : -1 : 1 : 0) + L\ , (1 : 0 : 0 : 0) + L\ , (1 : -1 : 0 : 0) + L\}$.Hallar $\varphi_1(M/L)$ siendo $M \equiv 2x_0 + 3x_1 - 3x_2 = 0$

30.Sea φ la homología de $P(\mathbb{R}^4)$ cuyo vértice es $(0 : 1 : 0 : 0)$, su base $x_0 - x_2 = 0$ y que transforma $(0 : 0 : 1 : 0)$ en $(0 : 1 : 1 : 0)$. Sea ψ la correlación de $P(\mathbb{R}^4)$ de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Estudiar si $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ es una homología y en caso afirmativo hallar su base y su vértice

11 Cuádricas proyectivas y afines

1. En $P_3(\mathbb{R})$ $C \equiv x_0^2 + 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_0x_1 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ es una cuádrica proyectiva
   a) calcular el plano polar del punto a = $(1 : 1 : 0 : 0)$
   b) calcular la variedad tangente a C desde a
   c) determinar el plano tangente en el punto b = $(0 : 1 : 1 : -1)$
   d) calcular el polo del plano $x_0 + x_1 + x_3 = 0$
2. Sea $\overrightarrow{E}$ $\mathbf{K}-e.v.$ dim $\overrightarrow{E}$ = n ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial $Q(\overrightarrow{E})$? ¿Cuántos puntos proyectivos determinan una cuádrica proyectiva ? ¿Y una cuádrica afín ?
3. Dados en el espacio proyectivo de dimensión tres, una cuádrica no degenerada y una recta. Comprobar que los hiperplanos polares de los puntos de la recta pasan por otra recta fija. ¿Y si la cuádrica es degenerada ? ¿Y en dimensión dos ?
4. Dada la cuádrica de $P_3(\mathbb{R})$ definida por la ecuación $x_0^2 + x_1^2 + x_3^2 + x_0x_2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3 = 0$, hallar el plno tangente en el punto $(1 : 2 : -1 : -2)$. Comprobar que la intersección de la cuádrica con dicho plano es una cónica degenerada. Determinar a para que la recta $x_0 - x_1 + ax_2 = 2x_0 + x_3 = 0$ sea tangente a la cuádrica
5. Determinar las rectas de $P_2(\mathbb{R})$ que son tangentes a la cónica de ecuación $x_0^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0$ y pasan por el punto $(2 : 2 : -1)$
6. Determinar el plano polar del punto P = $(1 : 0 : 1 : 0)$ de $P_3(\mathbb{R})$ con respecto a la cuádrica de ecuación $x_1^2 - 4x_3^2 + 4x_0x_2 - 2x_0x_3 + 2x_2x_3 = 0$. Hallar la ecuación del cono formado por las rectas tangentes a la cuádrica que pasan por el punto P
7. Respecto de la cuádrica proyectiva $x_1^2 + 8x_2^2 - 8x_0x_1 + 8x_0x_2 - 8x_1x_2 = 0$ la variedad tangente de un punto es $4x_0^2 + 4x_0x_1 + 4x_0x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$. Determinar los puntos de tangencia
8. Sean r y s dos rectas distintas de un plano proyectivo real, y P un punto que no está ni en r ni en s. ¿Cuál es el lugar geométrico de los conjugados armónicos de P con respecto a las intersecciones con r y s de las rectas que pasan por P ?
9. Determinar la recta polar de la recta $S \equiv \{x_0 = 2x_3, 2x_1 = x_2 + x_3\}$ de $P_3(\mathbb{R})$ con respecto a la cuádrica de ecuación $4x_1^2 + x_3^2 - 2x_0x_2 = 0$.Hallar los planos tangentes a la cuádrica que contienen a la recta S
10. Sea la cónica $C \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 6x_0x_2 = 0$ de $P_2(\mathbb{R})$. Estudiar si la recta $x_0 - x_1 - x_2 = 0$ es tangente a C y en caso afirmativo hallar el punto de tangencia
11. La polaridad asociada a una cuádrica de $P_3(\mathbb{R})$ transforma el punto $(0 : 1 : 0 : 0)$ en el plano $x_1 - x_3 = 0$, y la recta $x_0 + x_1 = x_0 - x_1 = 0$ en la recta $x_0 + x_3 = x_1 + x_2 = 0$ ¿Cuál es el plano polar del punto $(0 : 0 : 1 : 0)$?

Sabiendo que las intersecciones de la cuádrica con los planos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ son cónicas degeneradas, determinar la ecuación de la cuádrica y encontrar los puntos de tangencia con los dos planos anteriores

12.En $P_2(\mathbb{R})$ se consideran la cónica y la recta definidas por las ecuaciones $4x_0^2 + 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0$ y $2x_1 - x_2 = 0$ respectivamente. Obtener la expresión analítica de la homografía subordinada por la cónica sobre la recta, en la referencia de ésta formada por los puntos $(1:0:0)$, $(0:1:2)$, $(1:1:2)$

13.En $P_3(\mathbb{R})$ se consideran la cuádrica y la recta definidas por las ecuaciones $2x_0^2 - 7x_0x_1 + x_0x_2 - 2x_0x_3 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = 0$ y $3x_0 - x_2 = x_1 + x_3 = 0$ respectivamente. Obtener la expresión analítica de la homografía subordinada por la cuádrica sobre la recta, en la referencia formada por el punto $(1:0:3:0)$ y los puntos de intersección de la recta con la cuádrica

14.En $P_3(\mathbb{R})$ se considera la polaridad

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

y la cuádrica $C \equiv x_0^2 + x_1^2 - x_3^2 - 2x_0x_2 + 4x_2x_3 = 0$. Hallar $\varphi(C)$

15.Sea C la cuádrica de $P(\mathbb{R}^4)$ de ecuación

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Hallar la cuádrica dual de C

16.Sea P un plano proyectivo real y las cónicas $C_\lambda \equiv x_0^2 + 2\lambda x_1x_2 = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0, 1$, $C' \equiv x_0^2 + 2x_1x_2 = 0$ Determinar λ para que todas las rectas polares a puntos de C_λ respecto de la polaridad definida por C' sean tangentes a C_λ

17.En $P(\mathbb{R}^3)$ hallar la cónica C que contiene a los puntos $(1:0:0)$ $(0:1:0)$ $(0:0:1)$ y además las rectas $2x_1 - x_2 = 0$, $x_0 + x_2 = 0$ sean tangentes a C

18.En $P(\mathbb{R}^3)$ sea el punto $\beta = (0:0:1)$, la recta $L \equiv x_2 = 0$ y $\mathfrak{F}$ el haz de rectas de base β. Sean $f: \begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \longrightarrow & L \\ M & & M \cap L \end{array}$, $\psi : L \longrightarrow L$ homografía de ecuaciones $\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\Gamma \equiv u_0u_2 - u_1^2 = 0$ cuádrica de $P(\mathbb{R}^3)^*$ y $g : L \backslash \{\alpha_0\} \longrightarrow \Gamma \backslash \{\Delta(L)\}$ aplicación tal que $\forall \alpha \in L$ con $\alpha \neq \alpha_0 = (1:0:0)$ se tiene que $\Delta^{-1}(g(\alpha)) \ni \alpha$. Sea $\varphi = g \circ \psi \circ f \mid_{\mathfrak{F} \backslash \{M_0\}}$donde $M_0 = (\psi \circ f)^{-1}(\alpha_0)$ Hallar unas ecuaciones para φ

19.Sea $f : P(\mathbb{R}^3) \longrightarrow P(\mathbb{R}^3)^*$ homografía tal que

$$\Delta \circ f : \begin{cases} (1:0:-1) & \longrightarrow & 2x_0 - 3x_2 = 0 \\ (1:0:1) & \longrightarrow & x_2 = 0 \\ (1:1:0) & \longrightarrow & x_0 + x_1 - x_2 = 0 \\ (1:1:2) & \longrightarrow & x_0 - x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Si $L \equiv x_0 + x_2 = 0$ hallar $f(L)$ y $\Delta \circ f(L)$. Si $C \equiv x_0^2 + 2x_1x_2 = 0$ hallar las ecuaciones de las tangentes a C en $C \cap L$

20. Sea la cuádrica de $P(\mathbb{R}^4)$ de ecuaciones

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

y φ_C la polaridad asociada a C. Hallar los hiperplanos polares de los puntos $(0:0:0:1)$ y $(1:1:0:1)$ respecto de φ_C y estudiar si son tangentes a C. Hallar los puntos de tangencia respectivos. Sea $L \equiv x_2 = 0$ hallar su polo respecto de φ_C y estudiar si L es tangente a C. Hallar cuáles son los hiperplanos tangentes a C que pasan por el punto $(0:0:0:1)$

21. Sea C una cónica no degenerada del plano proyectivo real y A, B, C, D cuatro puntos distintos de C. Si α, β, γ son los puntos diagonales correspondientes, demostrar que el triángulo determinado por α, β, γ es autopolar respecto a C (es decir, la polar de cada vértice es el lado opuesto)

22. Clasificar proyectivamente y dar una referencia proyectiva que simplifique las siguientes cuádricas:

a) $x_1^2 - x_2^2 + x_0x_1 - x_0^2 = 0$

b) $3x_2^2 - x_1x_2 + x_0x_1 - 4x_0x_2 + x_0^2 = 0$

c) $2x_1^2 - 2x_2^2 + x_0^2 + 6x_1x_2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0$

23. Clasificar proyectivamente y dar una referencia proyectiva que simplifique las siguientes cuádricas y cónicas:

a) $C_1 \equiv 2x_0^2 + 3x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_0x_3 = 0$

b) $3x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 5x_0x_3 - x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - x_2^2 - 3x_2x_3 - 2x_3^2 = 0$

c) C_1 restringida al hiperplano $H \equiv -3x_1 + 5x_3 - x_0 - 2x_2 = 0$

24. Una cuádrica C de $P_3(\mathbb{R})$ verifica:

a) el plano $x_2 = 0$ corta a C en un único punto a = $(0:0:0:1)$

b) los planos polares de $(-3:0:0:1)$ y $(1:1:0:0)$ son respectivamente $x_0 = 0$ y $2x_0 + x_1 - x_2 = 0$

c) la recta polar de $r \equiv x_0 = x_1 = 0$ es $s \equiv x_0 + 3x_3 = x_2 = 0$

d) la homografía inducida sobre la recta r transforma el punto $(0:0:1:1)$ en el punto $(0:0:1:-1)$

Se pide:

a) la ecuación de C

b) clasificar la cuádrica afín que se obtiene al cortar C con el complementario de $x_0 = 0$

25. En el plano proyectivo sea $3x_0^2 + 2x_0x_1 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 0$ una cónica proyectiva

a) dibujar la cónica afín a la que da lugar, sabiendo que $\{x_0 = 0\}$ es el hiperplano de puntos del infinito

b) sea p un punto proyectivo que no pertenece a la cónica proyectiva . Dado q = $(-1/3 : 1 : 1 + \sqrt{3})$ que es un punto de la polar de p, se sabe que la recta p+q corta a la cónica proyectiva en los puntos a = $(0 : 1 : 1 + \sqrt{3})$, b = $(2 : -3 : -3 - 3\sqrt{3})$. Calcular dicho punto p

26. Una cuádrica con centro en $\mathbb{R}^3$ está definida por una ecuación de la forma $x_1^2 - x_2^2 + 2ax_2x_3 - 2bx_1 + 2x_2 + 4 = 0$ $a, b \in \mathbb{R}$ Además se sabe que su centro está contenido en la recta $\{x_1 + x_2 - 3 = x_3 + 2 = 0\}$

a) encontrar los posibles valores de a,b

b) demostrar que la recta $r \equiv x_2 - x_3 - 2 = x_1 - 3 = 0$ es una asíntota

27. Calcular la ecuación de la cónica del plano afín que pasa por los puntos a = (-4,2) b = (4,2) c = (4,-2) d =(-4,-2) e = (0,10) Clasificar la cónica obtenida

28. En el plano afín real, sea la cónica $(a + b)x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2y = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$

a) hacer una representación gráfica de los valores de a, b que correspondan a cónicas degeneradas y los que correpondan a parábolas

b) hallar a, b para los que la cónica es un par de rectas paralelas

c) hallar la ecuación de la parábola de la familia que es tangente a $y = 0$

29. En el plano afín $\mathbb{R}^2$ se considera la cónica de ecuación $x^2 + 2xy - 4y - 3 = 0$. Comprobar que la recta $S \equiv y + 1 = 0$ es tangente a la cónica, y determinar otra recta tangente paralela a S

30. Dada la cuádrica de $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $3x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 4yz + 4y + 3 = 0$, hallar la ecuación del cilindro formado por las rectas tangentes a la cuádrica que son paralelas a la recta $x - y = 2x + z = 0$. Determinar el centro de la cónica de tangencia de la cuádrica y el cilindro

31. Dada la cuádrica de $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $4x^2 - 4y^2 + 8xz - 4x + 9 = 0$, determinar los planos tangentes a la cuádrica que son paralelos al plano $x + 2y = 0$

32. En el plano afín real se dan los seis puntos a = (0,-1) b = (0,0) c = (-1,0) d = (1,2) p = (2,-1) q = (1,1)

a) hallar la cónica proyectiva que pasa por a, b, c, d y tal que los puntos p, q son conjugados respecto de ella

b) clasificar la cónica obtenida, tanto en el caso proyectivo como en el afín

33.Calcular la ecuación de una cónica proyectiva sabiendo que en el complementario de $K \equiv x_1 - 2x_2 = 0$ se tiene una hipérbola de centro $C = (1 : 1 : 0)$ que pasa por $P = (4 : 3 : 1)$ y una asíntota es $A_1 \equiv x_0 - x_1 + x_2 = 0$ y la dirección de la otra viene dada por $A = (2 : 2 : 1)$. Dar las ecuaciones del cono tangente, desde el punto C

34.En el plano proyectivo se sabe que una cónica cumple

a) la recta polar de $p = (1 : 1 : 1)$ es $x_2 = 0$

b) el punto $a = (1 : 0 : 0)$ es conjugado de $a' = (1 : 2 : 0)$ y el punto $b = (1 : 1 : 0)$ lo es de $b' = (5 : 1 : 0)$

c) la recta $2x_0 + x_1 - x_2 = 0$ es tangente a la cónica

Hallar la ecuación de dicha cónica y clasificarla

35.De una homografía en P^2 $\widetilde{f}$, se sabe que extiende a una homografía afín f, en cierto plano afín X = $P^2 - H$; transforma las rectas $r_1 \equiv x_1 - x_2 = 0$ y $r_2 \equiv x_1 + x_2 = 0$ en $r_1' \equiv x_0 = 0$ y $r_2' \equiv x_0 + x_1 = 0$ respectivamente; y la imagen del punto A = $(\sqrt{2} : 0 : \sqrt{2})$ es su conjugado armónico respecto de las intersecciones $r_1 \cap r_2$ y $r_1' \cap r_2'$. Se pide:

a) dar las ecuaciones de $\widetilde{f}$

b) dar las ecuaciones de f, en la referencia cartesiana de X R = {A; $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$} siendo C el centro de la homotecia y E = $(-8 : 12 : -8)$

c) dar las ecuaciones de la restricción de la homografía $\widetilde{f}$ a la recta AC, $\alpha \equiv \widetilde{f} \mid_{AC}$ respecto de la referencia $\{C, (1 : 0 : 2), U\}$ siendo U el punto unidad correspondiente para que la referencia esté ajustada

d) dar la ecuación de una cónica proyectiva sabiendo que en X_R es una hipérbola de centro C, cuyas asíntotas tienen como direcciones $\overrightarrow{v}_1 = (-1, 1)$ $\overrightarrow{v}_2 = (-2, 1)$; y la polar del punto $r_1 \cap r_2$ es r_1'

e) considerando la homografía sobre la recta AC inducida inducida por la cónica:

$$\begin{array}{ccc} AC & \xrightarrow{\beta} & AC \\ x & & H_x \cap AC \end{array}$$

siendo H_x la polar de x, decir razonadamente por qué $\alpha \neq \beta$

36.En una cónica afín no degenerada se fijan 4 puntos. Demostrar que desde cualquier otro punto, la razón doble de las rectas que pasan por dicho punto y los 4 puntos fijados, no varía (teorema de Chasles)

37.En el plano afín se fijan 4 puntos, no 3 de ellos alineados. Demostrar que para todo número real existe una única cónica afín tal que un punto cualquiera de la cónica forma con los puntos fijos, cuatro rectas cuya razón doble es dicho número. Hallar la ecuación de dicha cónica

38.A partir del plano de Madrid, ¿desde qué punto se han tomado las siguientes fotografías ?

39.Hallar la ecuación de una cónica proyectiva tal que

a) es tangente a la recta $x_1 + x_2 = 0$

b) la recta $x_0 - x_1 = 0$ corta la cónica en los puntos a = $(1:1:0)$ y b = $(3:3:2)$

c) los puntos p = $(1:1:-1)$ y p' = $(1:2:0)$ son conjugados respecto de la misma

d) pasa por el punto $(1:0:1)$

40.Clasificar afinmente en función del parámetro real a, la cónica afín $x^2 + ay^2 + 2xy - 2x + 4y + 3 = 0$

41.Clasificar las cónicas afines obtenidas de las del problema 22 en el plano afín X / $X_\infty \equiv x_0 = 0$ y en el plano afín Y / $Y_\infty \equiv 2x_0 - x_1 + 3x_2 = 0$

42.Para la cónica afín $y^2 - x^2 + 4x + 2y + 3 = 0$ dar la ecuación de una homografía en el plano proyectivo, tal que al transformar la cónica, aparezca otra cónica que sea afinmente distinta de la dada. Dar tantas homografías como cónicas afinmente distintas haya

43.En el plano afín se consideran las cónicas

$$(\alpha + \beta)(x_1^2 + x_2^2) + 2(\alpha - \beta)(x_1x_2 + 1) = 0 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Clasificar dichas cónicas en función de los parámetros α, β

44.En $P_2(\mathbb{R})$ estudiar si existe alguna cónica tal que las rectas $x_0 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_0 + x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0$, $x_0 + \sqrt{3}x_1 + 2x_2 = 0$ y $\sqrt{3}x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$ sean tangentes a ella. En caso afirmativo, hallar su ecuación y si $\widetilde{X} = P_2(\mathbb{R})$ con $X_\infty \equiv x_0 = 0$ hallar el centro de la cónica.

45.En el plano afín se considera la cónica $x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$ Hallar un paralelogramo circunscrito a la misma, cuyos lados tengan vectores directores $\overrightarrow{v} = (1,0)$ $\overrightarrow{w} = (1,1)$

46.En el plano afín, hallar la ecuación general de las hipérbolas cuyas asíntotas tienen las direcciones de los vectores $\overrightarrow{v} = (1,1)$ y $\overrightarrow{w} = (1,-1)$ y que pasan por los puntos $p = (0,0)$ y $q = (2,0)$. Hallar también el lugar geométrico de sus centros

47.En el espacio afín tridimensional se da la cuádrica $3x_1^2 + x_3^2 - 4x_2x_3 + 8x_2 + 3 = 0$ Hallar el cilindro circunscrito a dicha cuádrica cuyas generatrices tienen la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (1,2,1)$

48.Clasificar para los distintos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ las cuádricas afines $x_1^2 - 2x_2^2 + \alpha x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 1 = 0$

49.Dadas las cuádricas del espacio afín

$$x_1^2 + (\alpha + 1)x_2^2 - 2\alpha x_3^2 + 4(\alpha - 1)x_2 + 3 = 0$$

a) hallar el lugar geométrico de sus centros, para $\alpha \in \mathbb{R}$

b) determinar el lugar geométrico, para $\alpha \in \mathbb{R}$, del polo del plano $x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0$

50.Determinar una cónica del plano afín sabiendo que es tangente a los ejes OX_1 y OX_2 en los puntos a = (1,0) y b = (0,1) respectivamente, y que pasa por el punto c = (1,2)

51.Hallar las ecuaciones de las cónicas que cumplen

a) pasan por p = (0,1) y en este punto son tangentes al eje OX_2

b) pasan por q = (1,0) y r = (2,0)

c) son tangentes a la recta $x_1 - 3 = 0$

Calcular también los puntos de contacto con esta última tangente

52.De una hipérbola se sabe:

a) pasa por el eje de coordenadas y la tangente en él es la recta $x_1 - x_2 = 0$

b) pasa por el punto p = (4,0)

c) tiene por asíntota la recta $x_1 - 6 = 0$

Hallar la ecuación de dicha hipérbola y la de la otra asíntota

53.Hallar los puntos singulares de la cuádrica

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

54.Dada la familia de cónicas $\{x^2 + 2\lambda xy - 2y^2 + 2\lambda x - 1 = 0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ hallar el conjunto de los polos de la recta $x + y = 0$ respecto de las polaridades definidas por todas las cónicas de la familia

55.a) Dadas las cónicas afines $C_1 \equiv 3x_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2 + 1 = 0$, $C_2 \equiv \alpha x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 1 = 0$ calcular los valores reales de α para que haya un isomorfismo afín que transforme C_1 en C_2

b) decir razonadamente por qué el isomorfismo anterior no es único

c) demostrar que todos los isomorfismos anteriores transforman el centro de C_1 en el centro de C_2

d) calcular explícitamente el isomorfismo afín que manda C_1 en C_2 sabiendo que manda la asíntota de $C_1 \equiv -2x_1 + 6x_2 = 1$ en la recta $x_1 + x_2 + 1 = 0$ que es asíntota de C_2, y el punto (5/4,1/4) en (2,-1)