

МЕТОДИКА НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА

ЗАКОНИ МИШЉЕЊА

Мисаони поступци

- Апстракција и конкретизација
- Специјализација и генерализација
- Аналогија
- Анализа и синтеза
- Индукција и дедукција
- Интуиција

Апстракција

- abstrahere = извлачити, одвајати
(trahere = вући)
- апстрактно = мисаоно, супротно од конкретно
- апстраховати = одвојити у мислима, одбацити
оно што је случајно и небитно
- апстракција = процес разматрања извесних
особина објекта изостављањем других које
нису релевантне

Апстракција

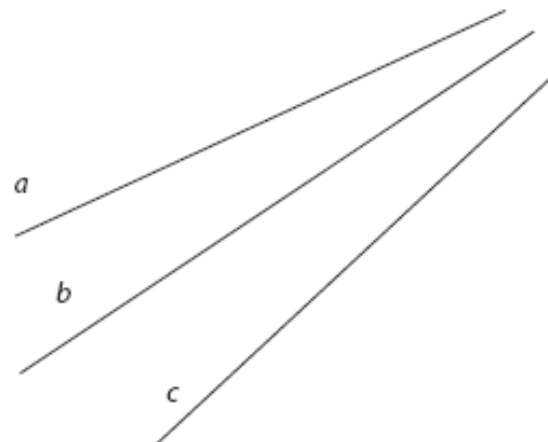
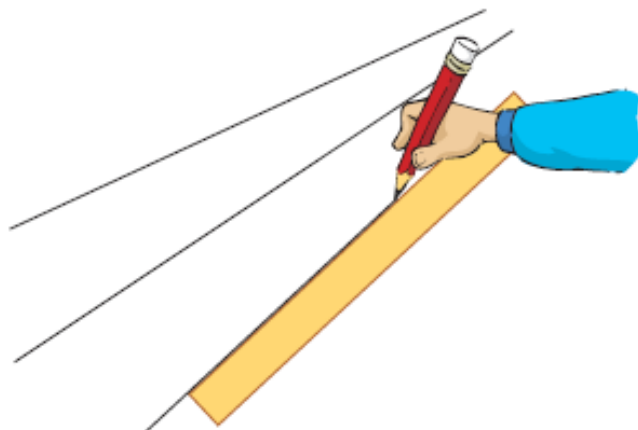
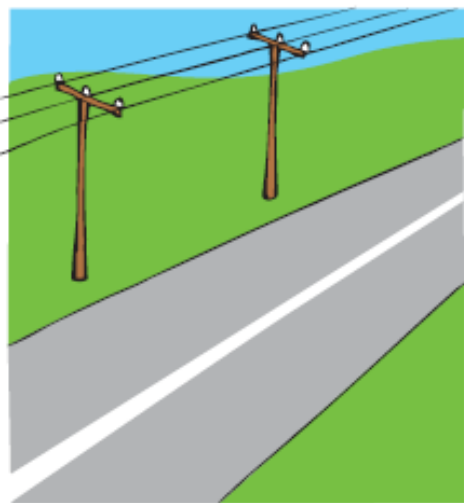
- Апстракција је један од темељних мисаоних процеса.
- Апстракција је мисаоно
 - издвајање општег битног својства посматраног објекта од осталих својстава, небитних за одређено проучавање и
 - занемаривање тих небитних својстава.

Апстракција

- Скуп
- Број
- Тачка
- Права
- Раван
- ...

Геометријски објекти

- “тачка нема делова”
- “дебљина линије је нула”
- “дуж има само дужину, а нема ширину”

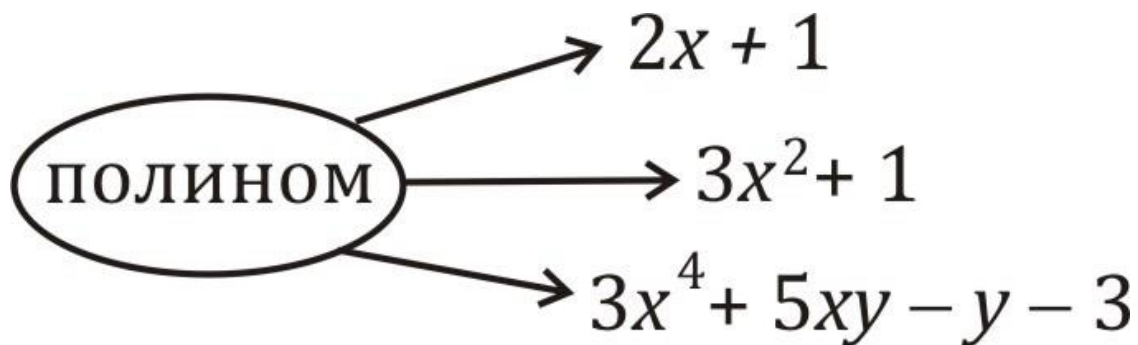


Апстракција

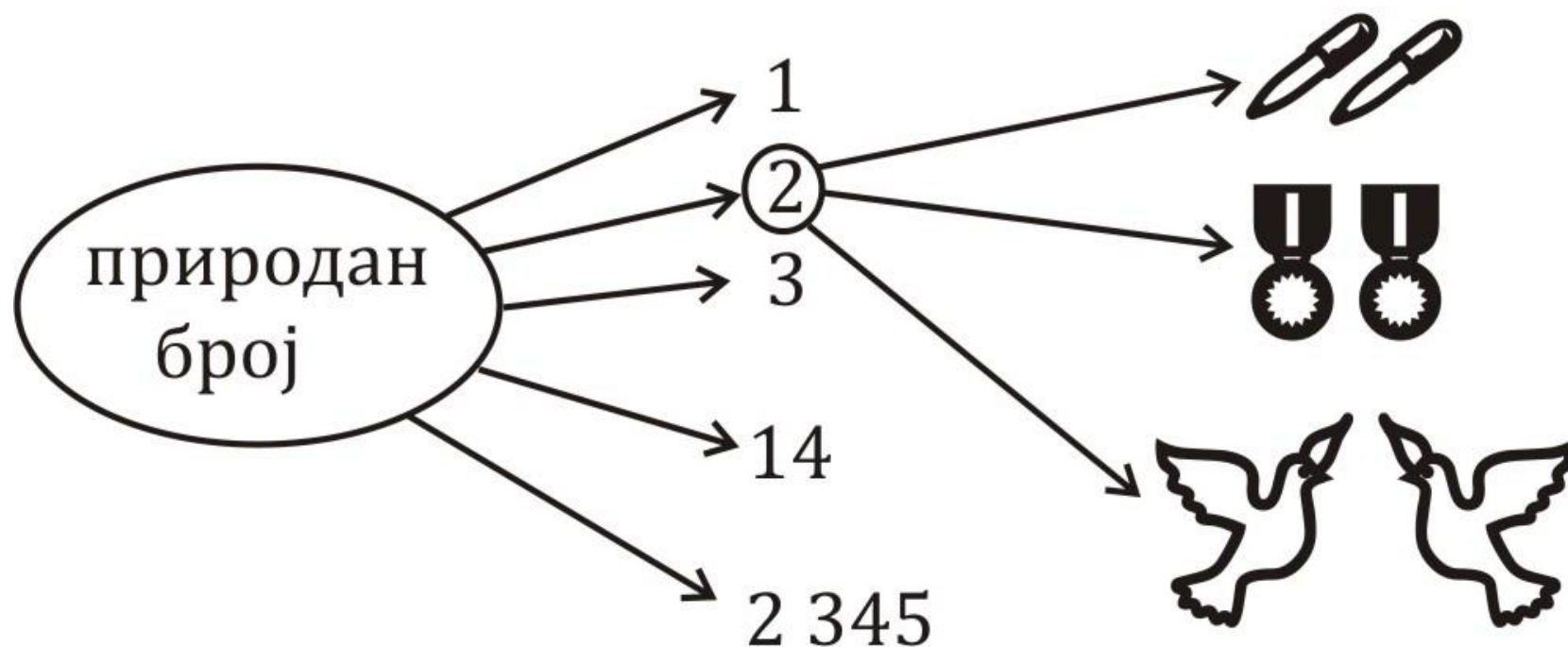
- Бесконачно велико
- Бесконачно мало
- Бесконачно блиско
- Тренутак
- Тренутна брзина
- ...

Конкретизација

- Пример, “оживљавање”, “материјализација” апстрактног појма.

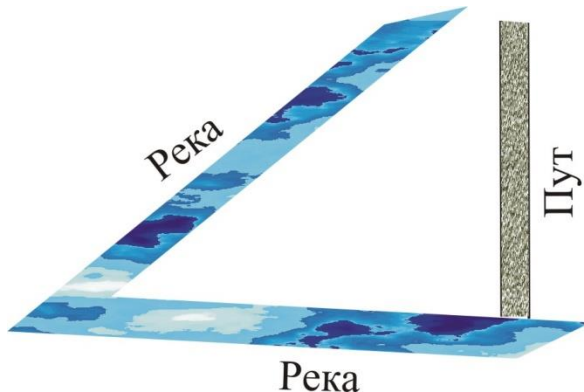


Конкретизација

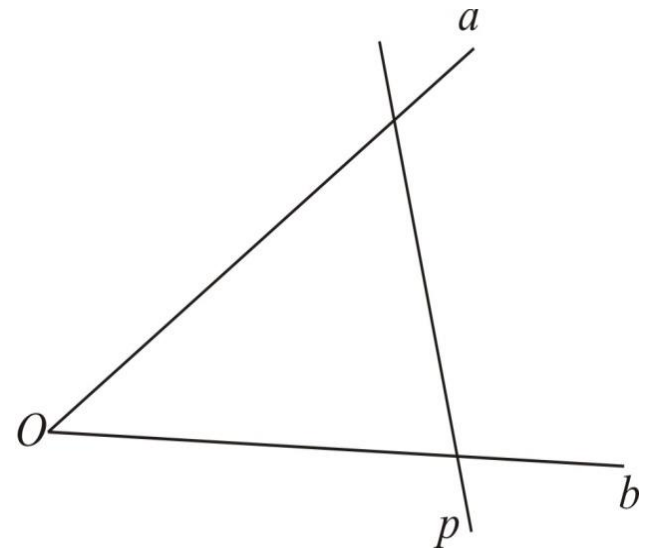


Конкретизација и апстракција

Близу ушћа једне реке у другу налази се пут. Које место за кућу на подручју ограниченом рекама и путем треба да изабере неко ко жели да кућа буде поред пута и подједнако удаљена од обе реке?



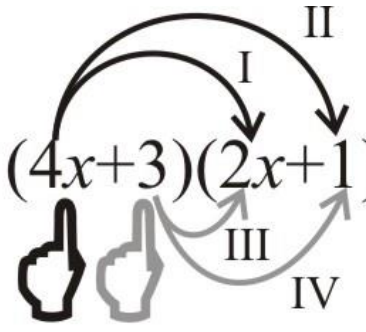
Одреди тачку праве p која је подједнако удаљена од кракова угла aOb .

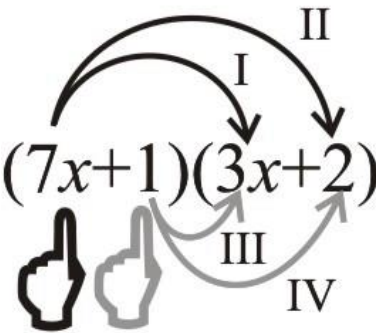


Општи поступци на конкретним примерима

- Рачунске операције са бројевима
- Сабирање, множење полинома
- Сређивање полинома
- ...

Множење полинома


$$\begin{aligned}(4x+3)(2x+1) &= \overset{\text{I}}{4x \cdot 2x} + \overset{\text{II}}{4x \cdot 1} + \overset{\text{III}}{3 \cdot 2x} + \overset{\text{IV}}{3 \cdot 1} \\ &= 8x^2 + \underline{4x} + \underline{6x} + 3 \\ &= 8x^2 + 10x + 3\end{aligned}$$


$$\begin{aligned}(7x+1)(3x+2) &= \overset{\text{I}}{\quad} + \overset{\text{II}}{\quad} + \overset{\text{III}}{\quad} + \overset{\text{IV}}{\quad} \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \underline{\hspace{2cm}}\end{aligned}$$

Дељење

Дељење – обрада

$$\begin{array}{r} 2445 : 15 = 163 \\ -15 \\ \hline 94 \\ -90 \\ \hline 45 \\ -45 \\ \hline // \end{array}$$

Задаци

- ☐ $4152 : 24 = ?$
- ☐ $1431 : 27 = ?$
- ☐ ...

Дељење

Дељење – обрада

$$\begin{array}{r} 2445 : 15 = 163 \\ -15 \\ \hline 94 \\ -90 \\ \hline 45 \\ -45 \\ \hline // \end{array}$$

Задаци

$$\begin{array}{r} * * * * : * 7 = * * \\ - * * 5 \\ \hline * * \\ - * 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Дељење

Дељење – обрада

$$\begin{array}{r} 2445 : 15 = 163 \\ -15 \\ \hline 94 \\ -90 \\ \hline 45 \\ -45 \\ \hline // \end{array}$$

Задаци

$$\begin{array}{r} 1431 : 27 = 53 \\ -135 \\ \hline 81 \\ -81 \\ \hline 0 \end{array}$$

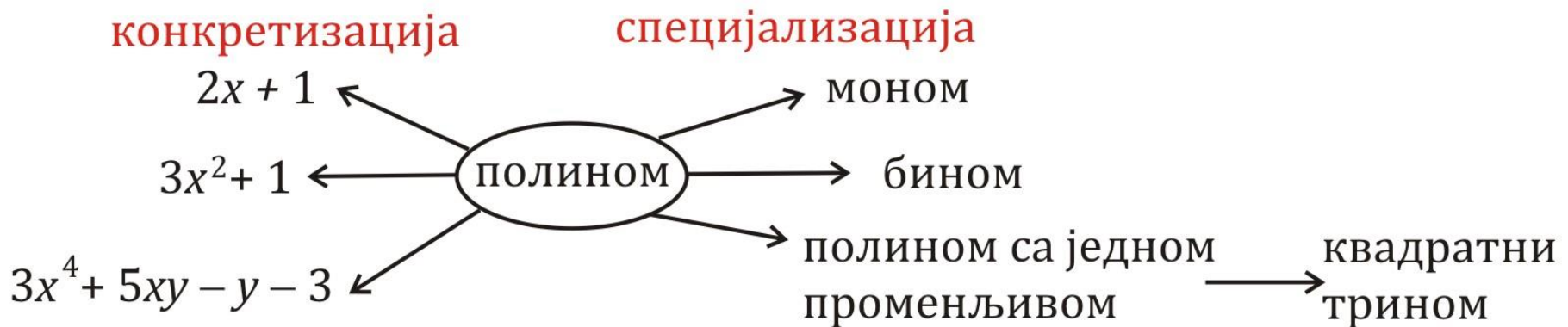
Специјализација

- Преношење својстава елемената неког скупа на елементе његовог правог подскупа.



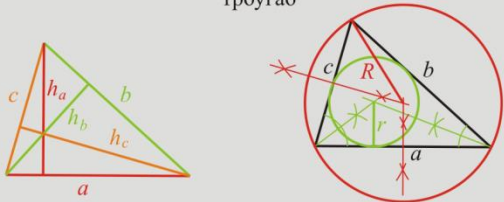
Специјализација

- Преношење својстава елемената неког скупа на елементе његовог правог подскупа.



Формуле, формуле, ...

троугао



$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

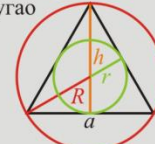
$$P = \frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2} r$$


једнакокраки
троугао



$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$


једнакостраничан
троугао



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{2}{3} h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$r = \frac{1}{3} h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$


једнакокрако-правоугли
троугао



$$a = b\sqrt{2}$$

$$h = \frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$


правоугли троугао



$$P = \frac{ab}{2} \quad R = \frac{c}{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

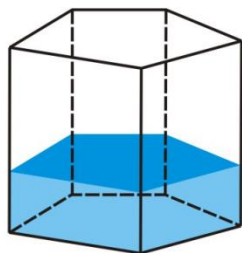
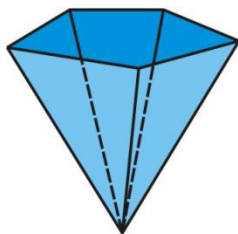
$$h^2 = pq \quad a^2 = qc \quad b^2 = pc$$


правоугли троугао са
угловима 30°, 60°, 90°

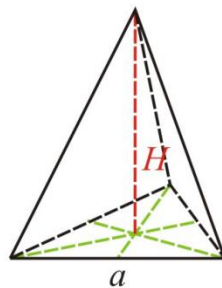


$$b = \frac{c}{2} \quad a = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

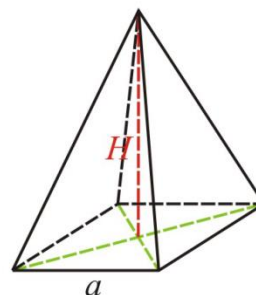
Формуле, формуле, ...



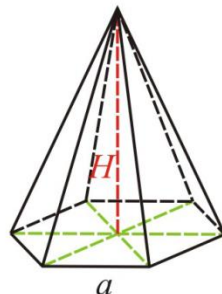
$$V = \frac{1}{3}BH$$



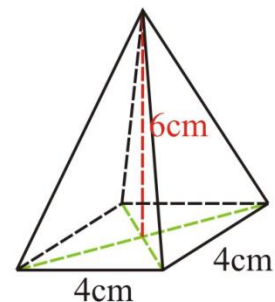
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$$



$$V = \frac{1}{3} a^2 H$$



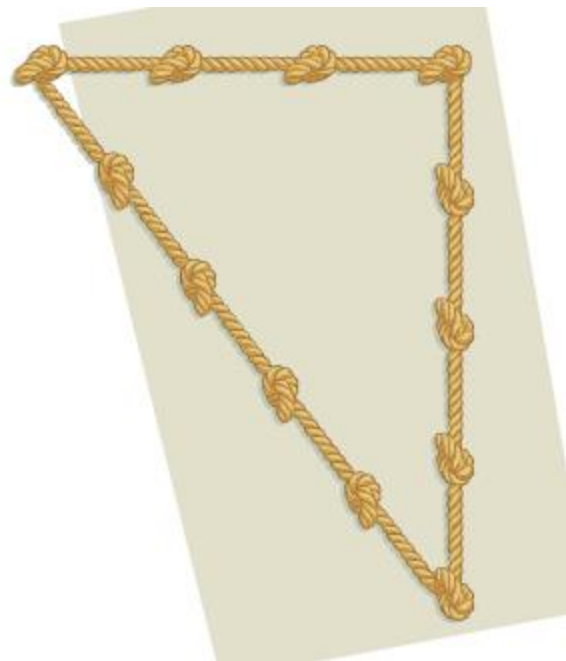
$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$$



Генерализација

- Генерализација је супротна специјализацији: преношење својстава елемената неког скупа на елементе његовог правог надскупа.
- лат. generalisatio – уопштавање;
generalis – општи, свеопшти, свеобухватни, главни

Генерализација



$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$5^2 = 25$$

$$a = 1,5 \quad b = 2$$

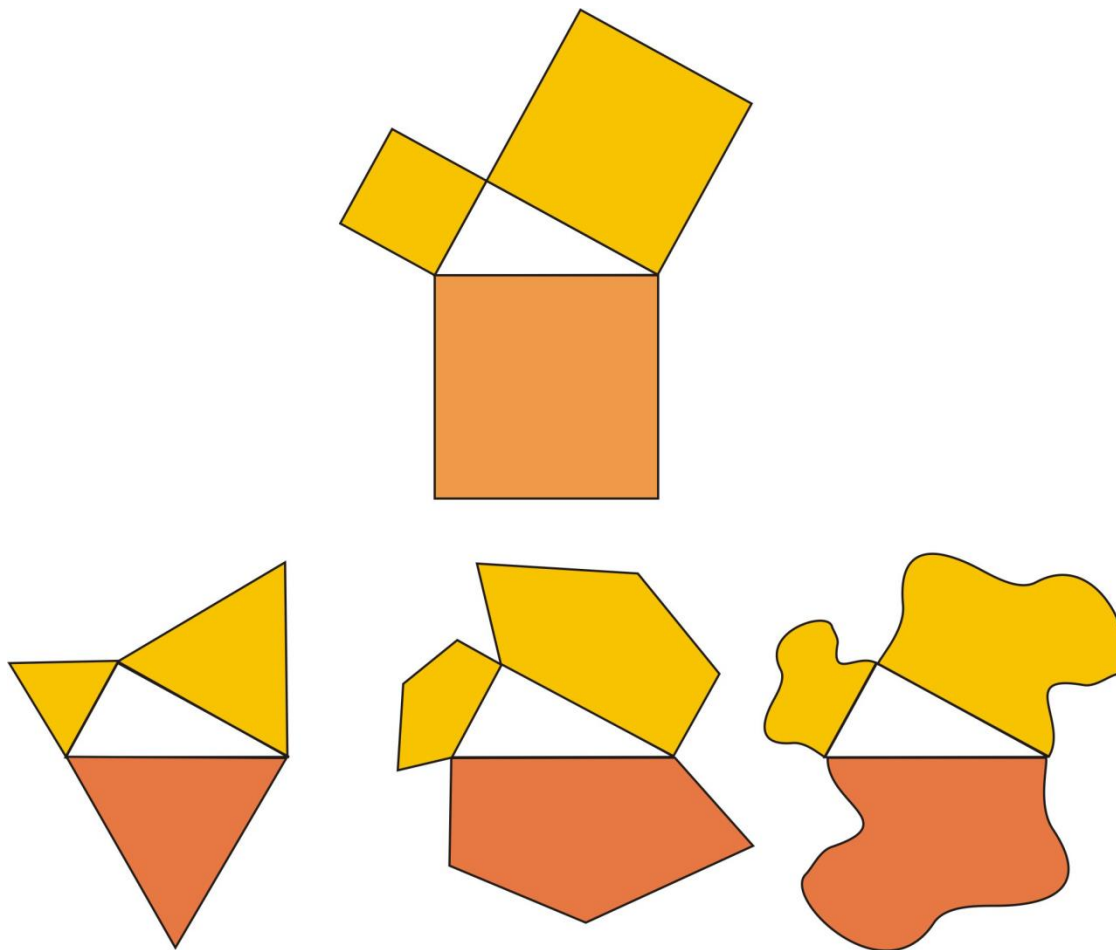
$$a^2 + b^2 = 1,5^2 + 2^2$$

$$= 2,25 + 4 = 6,25$$

$$c = 2,5$$

$$c^2 = 2,5^2 = 6,25$$

Генерализација



Генерализација

- **Задатак.** Дати су права и правилан октаедар.
Одреди раван која садржи дату праву и полови запремину датог октаедра.

Генерализација

- **Задатак.** Дати су права и правилан октаедар. Одреди раван која садржи дату праву и полови запремину датог октаедра.
- **Општији задатак.** Дати су права и централно симетрично тело. Одреди раван која садржи дату праву и полови запремину датог тела.

Аналогија

- грч. *аналогиа* – склад, правилност, однос, сродност
- Мисаони поступак заснован на компарацији.
(Закључивање по аналогiji је мисаони поступак при којем се из опажања да се два објекта, одн. две ситуације поклапају у одређеном броју својстава и/или односа изводи закључак да се објекти, одн. ситуације поклапају и у неком новом својству и/или односу.)

Аналогија

- Математичар је човек који уме да уочи аналогije међу тврђењима, бољи математичар је онај који проналази аналогije међу доказима, најбољи математичар је онај који уочава аналогije међу теоријама, а може се замислити и онај који међу аналогijaма види аналогije.

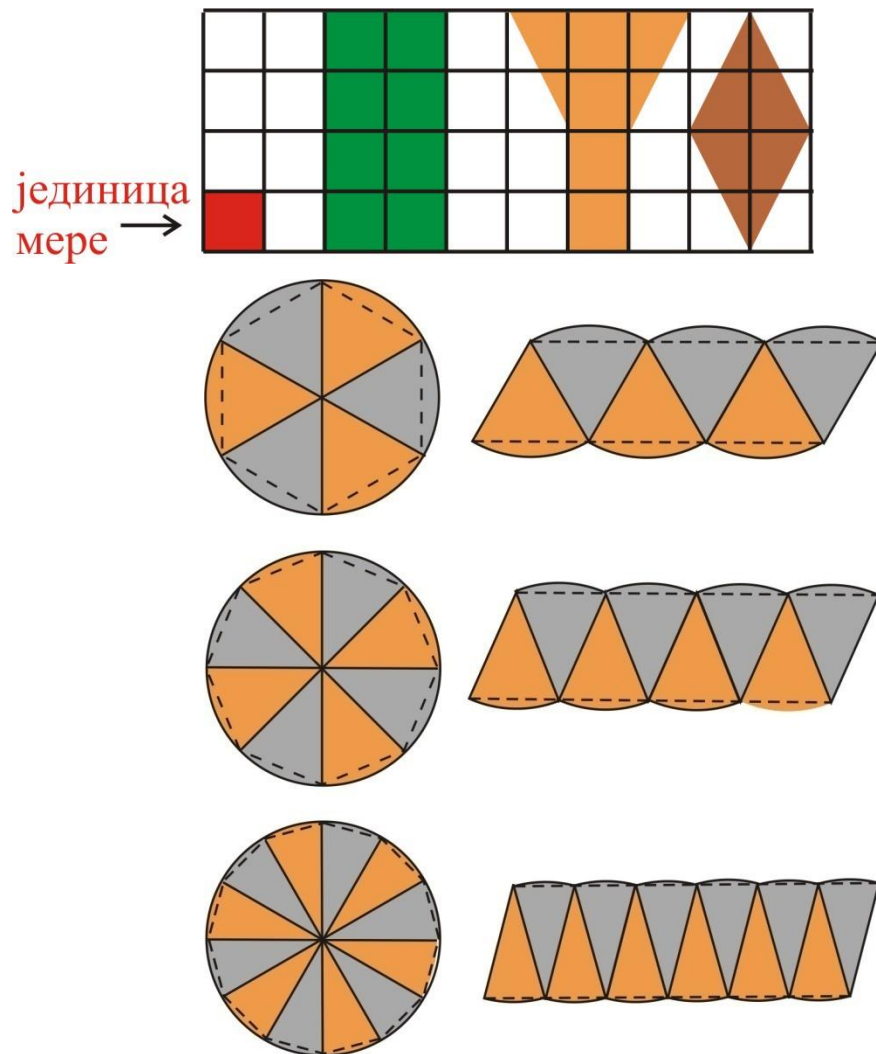
Банах

Аналогија

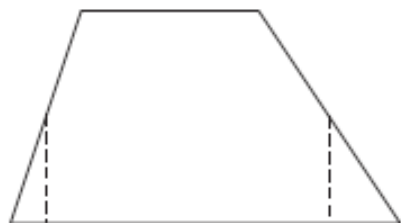
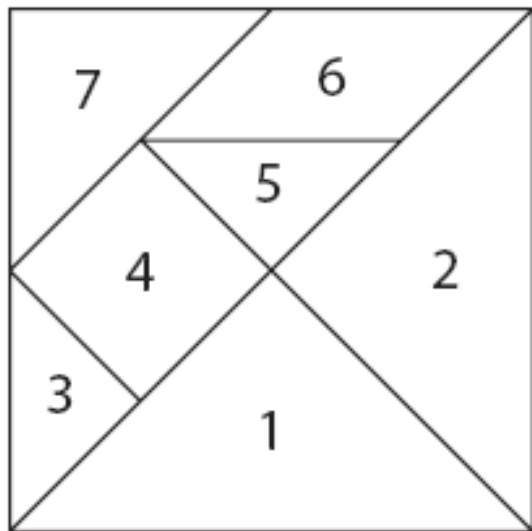
- Позитивна аналогија = сличности
- Негативна аналогија = разлике
- Закључивање по аналогији није строго, али заузима веома важно место у процесу мишљења и значајно доприноси проширивању спознаје.

Мерење површине

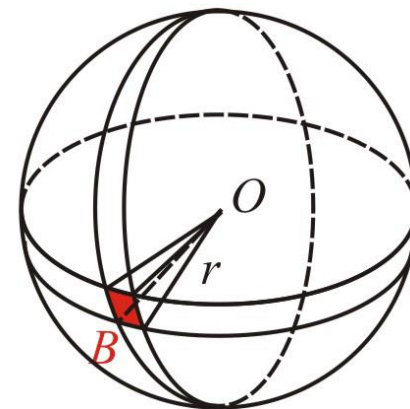
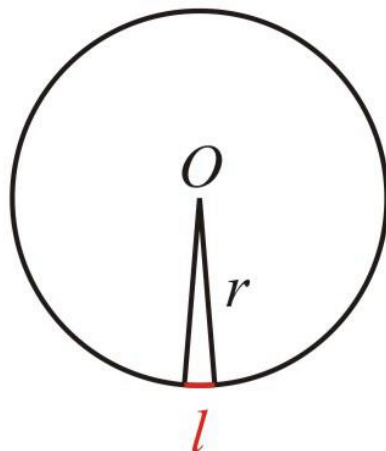
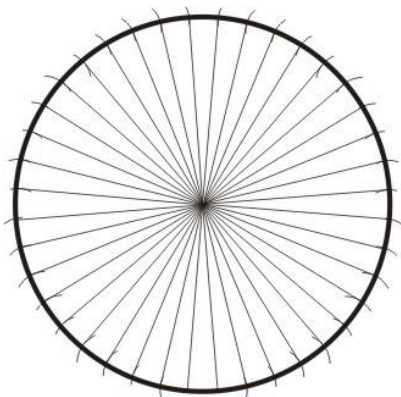
- Површина правоугаоника (МЕТОДА 1 “прекри”)
- Површине полигона (МЕТОДА 2 “препакуј”)
- Површина круга (МЕТОДА 3 “исцрпи”)



Аналогија



Аналогија



$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\ell_1 r + \frac{1}{2}\ell_2 r + \dots + \frac{1}{2}\ell_n r \\ &= \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n)r \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot r \\ &= r^2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}B_1 r + \frac{1}{3}B_2 r + \dots + \frac{1}{3}B_n r \\ &= \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \dots + B_n)r \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4r^2\pi \cdot r \\ &= \frac{4}{3}r^3\pi \end{aligned}$$

Анализа и синтеза

- По многима најзначајније методе у научним истраживањима.
- Најчешће се примељују комбиновано, дајући јединствену **аналитичко-синтетичку методу**.
- Анализа – рашчлањавање целине на делове
- Синтеза – обједињавање делова у целину

Анализа и синтеза

- **Папус** (грчки математичар, живео око 300. год.)
Седма књига његовог чувеног дела *Collectiones* садржи “Ризницу анализе” (у слободном преводу “вештине решавања задатака”, или “хеуристике”).

Анализа и синтеза

- **Папусова** “Ризница анализе” почиње дефиницијама анализе и синтезе:
 - ▣ *Анализа* узима оно што се тражи као да је већ нађено и полази од тога преко узастопних полседица до нечега што се узима као почетак синтезе; јер у анализи узимамо да је оно што се тражи већ учињено и питамо се чија је то последица, и опет шта је узрок последњег, и тако даље све док идући оваквим корацима не стигнемо до нећег што је већ познати или што припада класи првих начела. Овакву методу називамо анализом као решавање уназад.

Анализа и синтеза

- **Папусова “Ризница анализе”** почиње дефиницијама анализе и синтезе:
 - ▣ *Синетза* је обнут процес, у њој узимамо као учињено то што је у анализи било последње достигнуто и сређујући у њиховом природном поретку као последице оно што су пре биле претпоставке и спајајући их редом једну за другом коначно долазимо до конструкције онога што је било тражено; и то зовео синтезом.

Доказати неједнакост (AG)

Пођимо од очигледне
неједнакости ...

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Анализа и синтеза

Неједнакост јесте очигледна, али има и других које су очигледне па не полазимо од њих ...

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

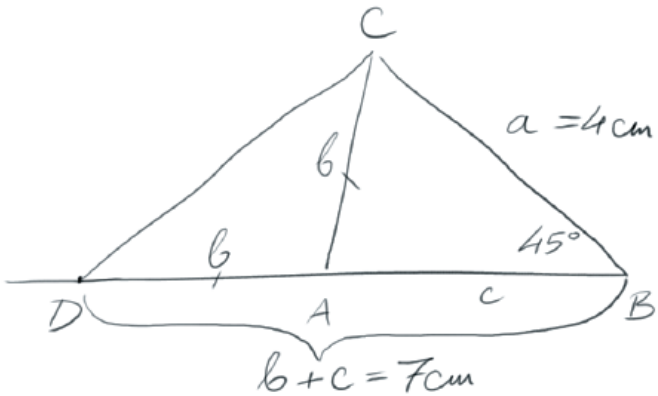
$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

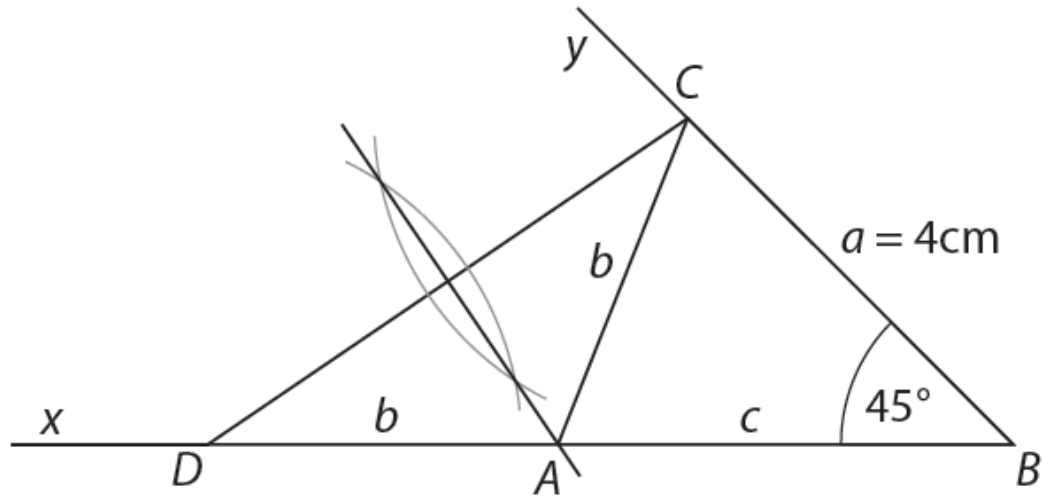
Анализа и синтеза

Конструишимо $\triangle ABC$ тако да је $a = 4\text{cm}$, $b + c = 7\text{cm}$, $\beta = 45^\circ$.

АНАЛИЗА

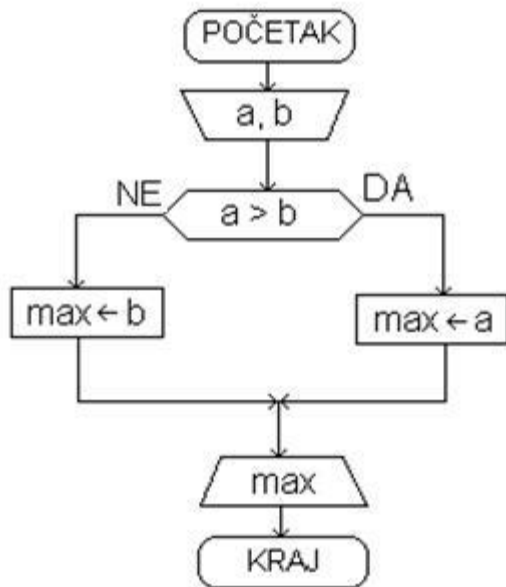


КОНСТРУКЦИЈА



Анализа и синтеза

Програм “максимум два броја”



```
program maksimum2broja;  
var a,b,maks: real;  
begin  
  writeln('Unesite a i b');  
  read(a,b);  
  if a > b then maks := a  
  else maks := b;  
  writeln('Maksimum brojeva je ', maks:8:2);  
end.
```

Интуиција

- Предосећај, инстинктивно мишљење
- Мистериозна способност
 - ▣ Да изненада сине,
 - ▣ Да нешто мора да важи, али треба да се докаже,
 - ▣ ...

Интуиција

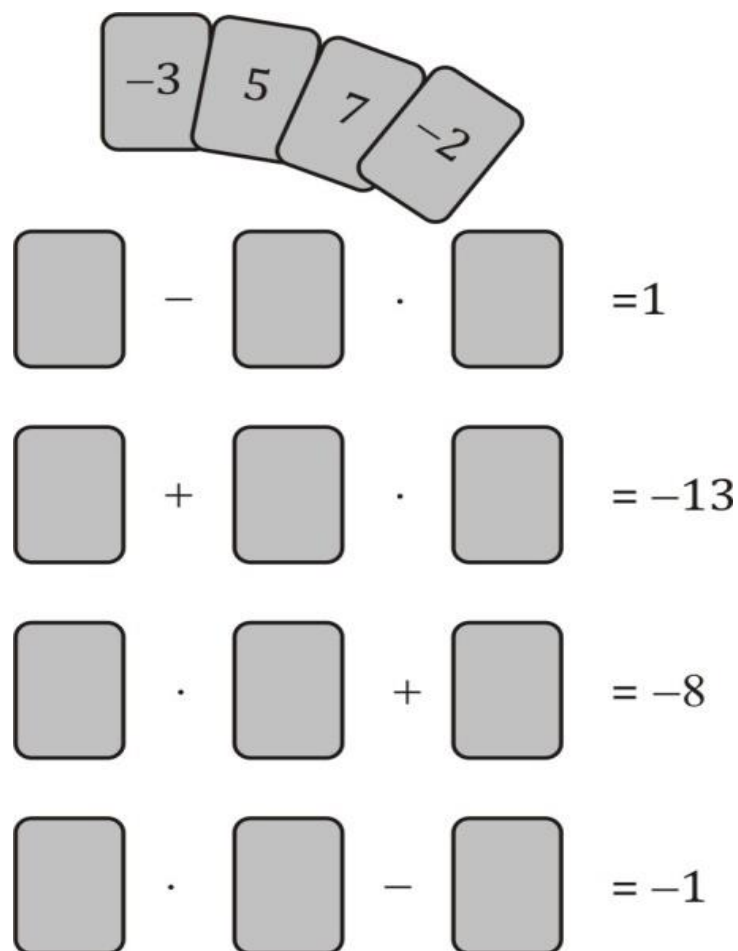


Diagram illustrating a sequence of four arithmetic puzzles using empty boxes and operators. Above the puzzles are four cards with numbers: -3, 5, 7, and -2.

Puzzle 1: $\square - \square \cdot \square = 1$

Puzzle 2: $\square + \square \cdot \square = -13$

Puzzle 3: $\square \cdot \square + \square = -8$

Puzzle 4: $\square \cdot \square - \square = -1$

Шта је веће

31^{11} или 17^{14} ?

$$31^{11} < 32^{11} = 2^{55}$$

$$17^{14} > 16^{14} = 2^{56}$$

Локичко закључивање

- Логика
- Таутологије, ваљане формуле, ...
- Дедукција
- Индукција

Закони мишљења

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

$$\frac{p \quad p \Rightarrow q}{q}$$

Ако будем имао добре оцене, родитељи ће ми уплатити летовање.
Имам добре оцене.

Родитељи ће ми уплатити летовање.

Закони мишљења

- Контрапозиција
- Закон искључења трећег
- Свођење на противречности
- ...

Шта јесте, а шта није доказ?

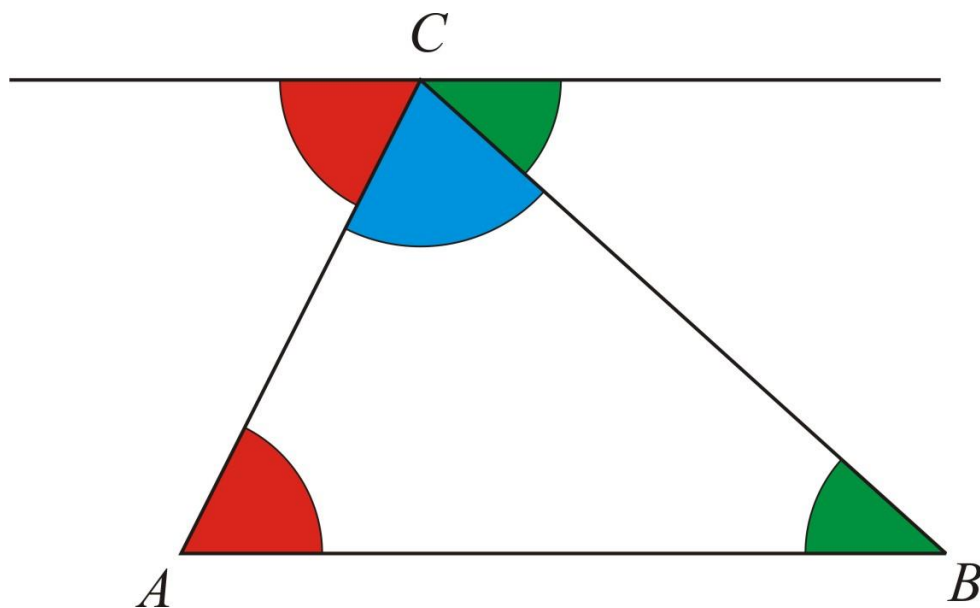
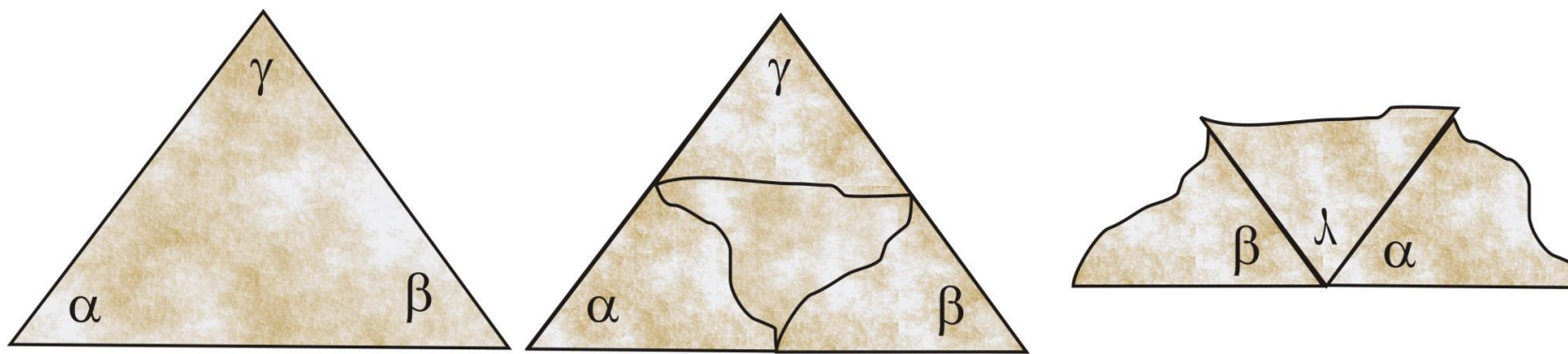
- Шта хоћемо да докажемо?
- Како да дођемо до доказа?

АНАЛИЗА (Како да докажем?)

и

СИНТЕЗА (Ево доказа!)

Шта јесте, а шта није доказ?



Наши први докази

Збир три узастопна броја је
дељив са 3

- $1+2+3=6$
- $2+3+4=9$
- $3+4+5=12$
- $4+5+6=15$
- $5+6+7=18$
- ...

Наши први докази

Збир три узастопна броја је
дељив са 3

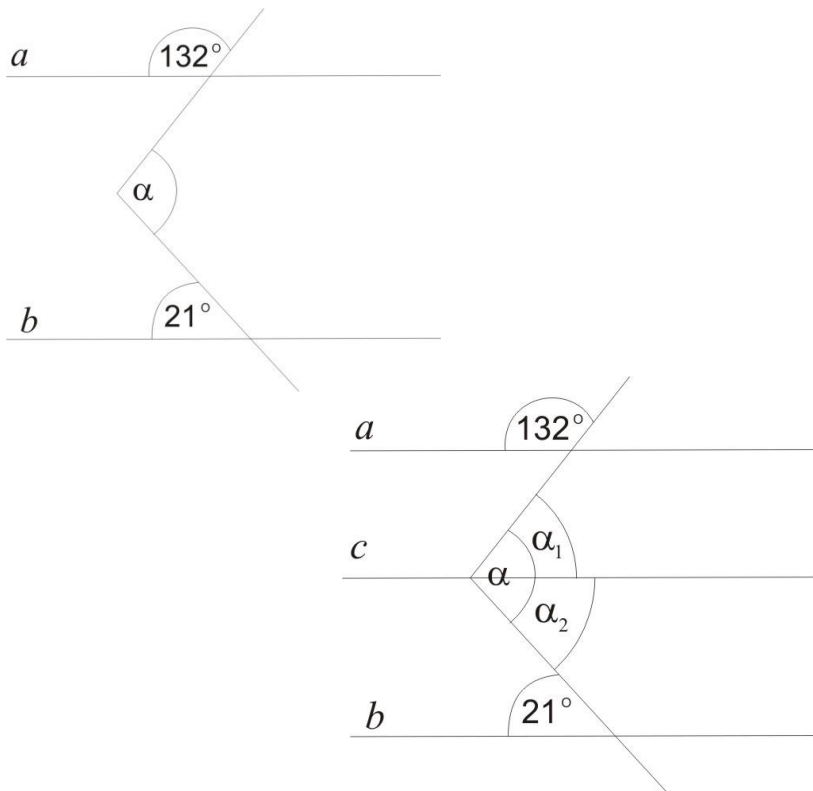
- $1+2+3=6$
- $2+3+4=9$
- $3+4+5=12$
- $4+5+6=15$
- $5+6+7=18$
- ...

Збир три узастопна броја је
дељив са 3

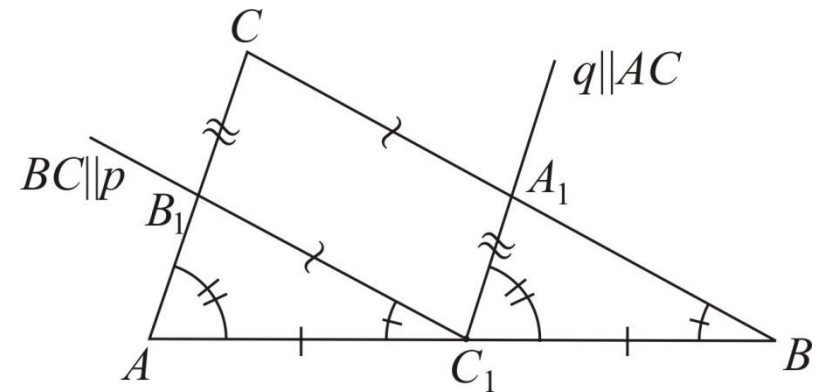
□ $n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$

Како ја да се сетим тога?

ОБИЧАН ЗАДАТАК



ТЕОРЕМА О СРЕДЊОЈ ЛИНИЈИ



Како ја да се сетим тога?

- ❑ Покушај да се сетиш нечега сличног!
- ❑ Пробај да нађеш једноставнији проблем који ћеш умети да решиш!
- ❑ Употреби интуицију!
- ❑ Употреби машту!
- ❑ Пробај и погреши!
- ❑ Не одустај!