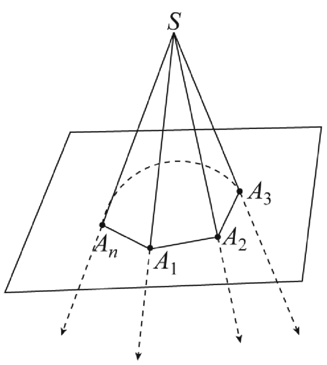
МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2013
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2013
Proceedings of the Forty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2013

ЗА ПРАВИЛНИТЕ МНОГОСТЕНИ

Пенка Рангелова

Настоящата разработка е посветена на правилните многостени. Тръгва се от въпроси за тяхното разпознаване и пресмятане на някои величини. Накрая се преминава към нестандартни приложения на правилни многостени и други тела.



черт. 1

Преди да изясним понятието *правилен многостен* и разгледаме задачи, свързани с тях, ще дадем определение и свойства на многостенни ъгли, които са съставна част от многостен.

Нека $A_1A_2\dots A_n$ е равнинен многоъгълник, а S е точка извън равнината на многоъгълника (черт. 1). Множеството от точки, принадлежащи на лъчите $SM^{\rightarrow}$, когато M описва многоъгълника $A_1A_2\dots A_n$, се нарича **многостенен ъгъл**.

Елементите на един многостенен ъгъл са: **връх** – точката S, **ръбове** – лъчите $SA_1^{\rightarrow}$, $SA_2^{\rightarrow}$, …, $SA_n^{\rightarrow}$, **стени** – равнините A_1SA_2, A_2SA_3,…, A_nSA_1, **равнинни (ръбни) ъгли** – A_1SA_2, A_2SA_3, …, A_nSA_1, **двустенни ъгли** – двустенните ъгли при ръбовете $SA_1^{\rightarrow}$, $SA_2^{\rightarrow}$, …, $SA_n^{\rightarrow}$.

Един многостенен ъгъл е **изпъкнал**, ако той е разположен в едно полупространство относно всяка равнина, минаваща през негова стена. В зависимост от вида на многоъгълника $A_1A_2\dots A_n$ многостенните ъгли са тристенни, четиристенни и т.н. С тристенни ъгли и техните свойства учениците се запознават в 11. клас [2, с. 277].

При работа с ръбести тела учениците могат да видят многостенни ъгли във върховете им. Например за n-ъгълна пирамида във върха ѝ има n-стенен ъгъл, а във всеки връх на основата ѝ тристенен ъгъл.

Въпрос. Какви са многостенните ъгли във върховете на n-ъгълна призма?

Два многостенни ъгъла са **еднакви**, ако имат съответно равни равнинни (ръбни) и двустенни ъгли.

За изпъкналите многостенни ъгли са верни следните твърдения:

Теорема 1. *Големината на всеки равнинен ъгъл на изпъкнал многостенен ъгъл е по-малка от сумата на големините на останалите равнинни ъгли* [1, с. 198; 3, с. 84]л

Теорема 2. *Сумата от градусните мерки на равнинните ъгли на всеки изпъкнал многостенен ъгъл е по-малка от* 360° [1, с. 198; 3, с. 84]л

Тези две теореми са доказани за тристенен ъгъл. [2, с. 277]

Пространствена фигура, ограничена от многоъгълници, се нарича **многостен**. Един многостен е правилен, ако всичките му стени са еднакви правилни многоъгълници и всичките му многостенни ъгли са еднакви.

Още от древногръцкия математик и философ Платон е известно, че има само пет вида правилни многостени.

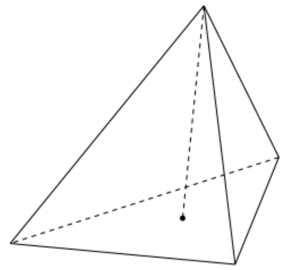
Може да отбележим, че във всеки връх на един многостен се пресичат поне три стени. Ако стените на правилен многостен са равностранни триъгълници, то във всеки връх на многостена се събират или три, или четири, или пет триъгълника (вж. Теорема 2). Шест равностранни триъгълника **не** образуват многостенен ъгъл, защото $6.60^\circ = 360^\circ$, което е противоречие с Теорема 2. Правилните многостени, чиито стени са равностранни триъгълници, са:

Правилен четиристен (тетраедър), изобразен на черт. 2.

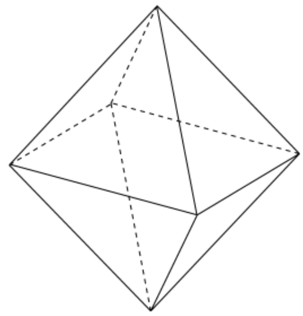
Правилен осемстен (октаедър), изобразен на черт. 3.

Правилен двадесетостен (икосаедър), изобразен на черт. 4.

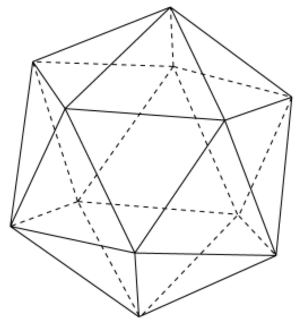
Многостенът, ограден от четири квадрата, е един. Във всеки негов връх се събират по три квадрата ($3.90^\circ < 360^\circ$). Това е кубът (хексаедър) и е изобразен на черт. 5. От правилни петоъгълници се образува един многостен, във всеки връх на който се срещат по три стени ($3.108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$). Нарича се дванадесетостен (додекаедър) черт. 6. Доказано е, че не съществуват други правилни многостени [3, с. 175]. За да се запомнят имената им и броят на стените, върховете и ръбовете на всеки от тях, спомагат въпроси като: Колко ръба има икосаедърът? Колко са стените на додекаедъра? Колко четиристенни ъг-



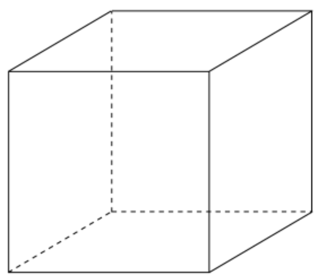
черт. 2



черт. 3

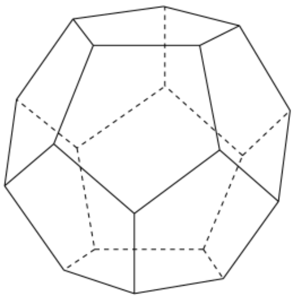


черт. 4



черт. 5

ли има октаедърът? На колко градуса е равна сумата от градусните мерки на равнинните ъгли при всеки връх на икосаедър? и др. След поредица от такива въпроси може да се премине към задачи за пресмятане на величини, свързани с тези тела, чието решение следва от определението за тях, например:



черт. 6

Задача 1. Ръбът на октаедър е a. Намерете разстоянието между два негови противоположни върха.

Задача 2. Намерете големината на ъгъла между ръбовете на октаедър, излизащи от един връх и нележащи в една стена.

Задача 3. Ръбът на икосаедър е a. Намерете лицето на повърхнината му.

Задача 4. Даден е куб с ръб a. Центровете на стените му са върхове на октаедър. Намерете обема на октаедъра.

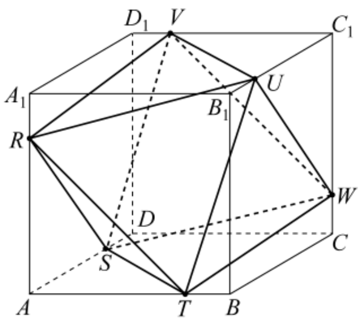
Задача 5. Намерете обема на октаедър с дължина на ръба a.

Задача 6. Покажете, че могат да се изберат четири от върховете на куб, така че те да са върхове на правилен тетраедър.

Упътване. Ако кубът е $ABCDA_1B_1C_1D_1$, то докажете, че AB_1CD_1 и A_1BC_1D са правилни тетраедри [3, зад. 9.7].

За следващите задачи са нужни добра подготовка и отлично познаване на свойствата на правилните многостени.

Задача 7. Докажете, че по ръбовете на куб могат да се изберат 6 точки, които са върхове на октаедър [3, зад. 9.8].



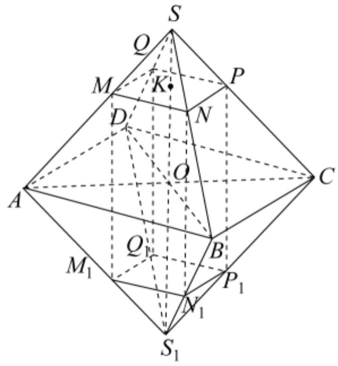
черт. 7

Решение. Нека за куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точките R, T, S, V, U и W са съответно от ръбовете AA_1, AB, AD, D_1C_1, B_1C_1 и CC_1 (черт. 7), като $AR = AS = AT = C_1V = C_1U = C_1W = \dfrac{3}{4}a$, където a е ръбът на куба. Триъгълниците RTS, RTU, RUV, RVS, WST, WTU, WUV и WSV са със страни по $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$, а образуваните от тях двустенни ъгли са по 90°.

Задача 8. Намерете отношението на обемите на правилен тетраедър и октаедър, на които лицата на повърхнините са равни.

Упътване. Ако ръбът на правилен тетраедър е a, то лицето на повърхнината му е $a^2\sqrt{3}$, а обемът му – $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. За октаедър с ръб b лицето на повърхнината е $2b^2\sqrt{3}$, а обемът – $\dfrac{b^3\sqrt{2}}{3}$. От равенството на повърхнините следва, че $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$. Тогава отношението на обемите е $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

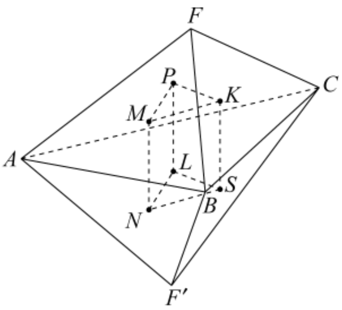
Задача 9. В правилен октаедър е вписан куб, така че върховете на куба лежат на ръбовете на октаедъра. Колко пъти лицето на повърхнината на октаедъра е по-голямо от лицето на повърхнината на вписания куб?



черт. 8

Упътване. Нека прободът на SS_1 с равнината $MNPQ$ е K, страната на октаедъра е a, а на куба – $2b$ (черт. 8). Тогава $MP = 2b\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $SO = AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - b$. От $\triangle SMP \sim \triangle SAC$ следва, че $\dfrac{MP}{AC} = \dfrac{SK}{SO} \Rightarrow 2b = a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$. Лицето на повърхнината на октаедъра $S_1 = 2a^2\sqrt{3}$, а на куба – $S_2 = 12a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)$. Следователно $S_1 : S_2 = \sqrt{3}\left(3+2\sqrt{3}\right) : 6$.

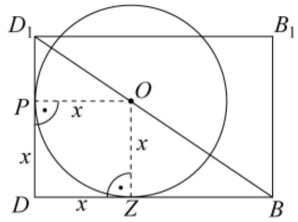
Задача 10. Две от стените на два правилни тетраедъра с ръб са слепени една с друга. Центровете на шестте стени на полученото тяло са върхове на триъгълна призма. Намерете обема на тази призма.



черт. 9

Упътване. При въведените означения на черт. 9 следва, че $MK = \dfrac{a}{3}$, $FF' = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$ и $MN = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. Търсеният обем е $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{54}$.

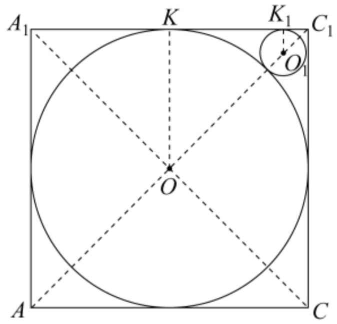
Задача 11. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб a. Намерете радиуса на сферата, която се допира до трите стени на куба, съдържащи точката B, и до ръбовете D_1A_1, D_1D, и D_1C_1 [4, бр. 2, 2000].



черт. 10

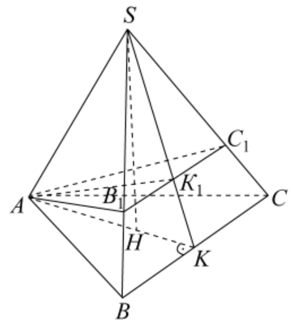
Решение. За решаването на задачата не е необходимо да изобразяваме куба и сферата. Диагоналното сечение DBB_1D_1 (черт. 10) пресича сферата по голяма окръжност, която се допира до ръба DD_1 в точката P и до долната основа на куба в точка Z от диагонала BD. Тогава $OZ = OP = DZ = x$ и от $\triangle DBD_1 \sim \triangle ZBO$ следва $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}-x}{a\sqrt{2}} \Rightarrow x = \left(2-\sqrt{2}\right)a$.

Задача 12. В куб с ръб е вписана сфера. Намерете радиуса на втора сфера, която се допира до три от стените на куба с общ връх и до първата сфера.



черт. 11

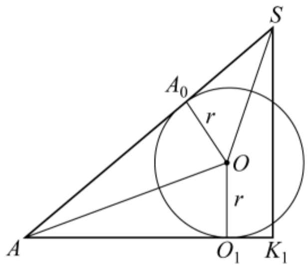
Решение. Ако е даден куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, то центърът на сферата, вписана в него, е пресечна точка на диагоналите му. Нека втората сфера се допира до стените на куба с общ връх C_1. Равнината на правоъгълника ACC_1A_1 пресича двете сфери в големи окръжности с центрове O и O_1 и $O_1K_1 = x$, $OK = \dfrac{a}{2}$, $OC_1 = OA = \dfrac{1}{2}AC_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (черт. 11). От $OO_1 = x+\dfrac{a}{2}$, $O_1C_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}-\left(x+\dfrac{a}{2}\right)$ и $\triangle KOC_1 \sim \triangle K_1O_1C_1$ следва, че $\dfrac{KO}{K_1O_1} = \dfrac{OC_1}{O_1C}$ $\Rightarrow x = \dfrac{a}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$ [4, бр. 2, 2000].



черт. 12а

Задача 13. В правилен тетраедър $SABC$ с ръб a, през върха A е построена равнина, успоредна на ръба BC и перпендикулярна на стената SBC. Намерете радиуса на сферата, която се допира до ръбовете SA, SB, SC и до построената равнина.

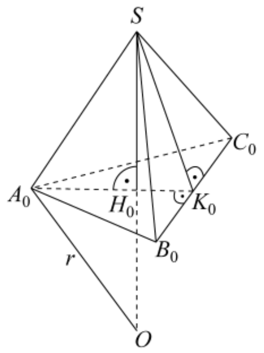
Решение. Ако K е средата на ръба BC (черт. 12а) то в $\triangle AKS$ построяваме височината AK_1. Докажете, че $AK_1 \perp (BCS)$. Тогава всяка равнина през AK_1 ще е перпендикулярна на тази равнина. През K_1 построяваме $B_1C_1 \parallel BC$ и получената равнина AB_1C_1 е успоредна на BC и е перпендикулярна на равнината SBC.



черт. 12б

Означаваме $\sphericalangle AKS = \varphi$ и намираме $\cos\varphi = \dfrac{HK}{SK}$, $SK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$, $\sphericalangle SAK = \sphericalangle ASK = 90^\circ - \dfrac{\varphi}{2}$, $\sphericalangle K_1AK = 90^\circ - \varphi$ и $\sphericalangle SAK_1 = 90^\circ - \dfrac{\varphi}{2} - 90^\circ + \varphi = \dfrac{\varphi}{2}$.

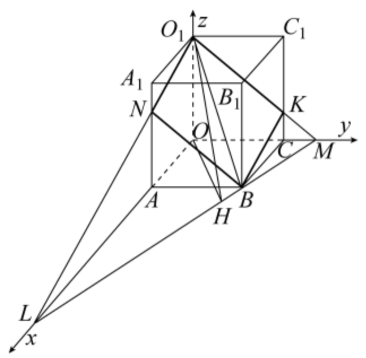
Ако O е центърът на разглежданата сфера, то AO е ъглополовяща на $\sphericalangle SAK_1$ (черт. 12б) и $\sphericalangle SAO = \dfrac{\varphi}{4}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{2tg\frac{\varphi}{4}}{1-tg^2\frac{\varphi}{4}} \Rightarrow \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{4} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.



черт. 12в

Нека A_0, B_0, C_0 са допирните точки на сферата съответно с ръбовете SA, SB и SC. Понеже $SA_0 = SB_0 = SC_0$ и $\sphericalangle A_0SB_0 = \sphericalangle B_0SC_0 = \sphericalangle C_0SA_0 = 60^\circ$, то тетраедърът $SA_0B_0C_0$ е правилен. Последното показва, че равнините ABC и $A_0B_0C_0$ са успоредни, откъдето $\sphericalangle A_0K_0S = \varphi$ и SO пресича K_0 в точка H_0 – център на $\triangle A_0B_0C_0$ (черт. 12в). Намираме последователно: $\sphericalangle SA_0K_0 = A_0SK_0 = 90^\circ - \dfrac{\varphi}{2}$, $\sphericalangle A_0SD = A_0SH_0 = \alpha = 90^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{\varphi}{2}$, $r = A_0O = A_0S\operatorname{tg}\alpha$, $r = AA_0\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = (a - A_0S)\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{4}$. Тогава $A_0S\operatorname{tg}\alpha = (a-A_0S)\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{4} \Rightarrow A_0S = \dfrac{a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{4}}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $r = \dfrac{a}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Задача 14. Даден куб е пресечен с равнина, минаваща през негов диагонал. Известно е, че най-малката възможна стойност на лицето на сечението е $0{,}5\sqrt{14\,406}$. Намерете дължината на ръба на куба [4, бр. 2, 2003].



черт. 13

Решение. Означаваме страната на куба с a и въвеждаме координатна система, спрямо която кубът $ABCA_1B_1C_{11}$ е разположен, както е показано на черт. 13. Тогава $A(a;0;0)$, $B(a;a;0)$, $C(0;a;0)$, $O_1(0;0;a)$. Уравнението на правата LM от равнината Oxy през точка B и ъглов коефициент k има вида $LM\colon y-a=k\,(x-a)$. Построяваме $OH\perp LM$ и от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $O_1H\perp LM$ и $\sphericalangle OHO_1=\varphi$ е ъгълът между сечението и основата $OABC$ на куба. Тогава е в сила равенството

$$S_{NBKO_1}=\frac{1}{\cos\varphi}S_{ABCO}. \tag{1}$$

Понеже $OH\perp LM$, то $OH\colon y = -\dfrac{1}{k}x$ и точка H е определена от системата $\left|\begin{array}{l} y=a+k\,(x-a) \\ y=-\dfrac{1}{k}x \end{array}\right.$, по следния начин $H\left(\dfrac{(k-1)\,k}{k^2+1};\ \dfrac{k-1}{k^2+1}\right)$. Намираме $OH = a\sqrt{\dfrac{(k-1)^2}{k^2+1}}$, $O_1H=a\sqrt{\dfrac{2k^2-2k+2}{k^2+1}}$ и $\cos\varphi=\dfrac{OH}{O_1H}=\sqrt{\dfrac{(k-1)^2}{2k^2-2k+2}}$.

Лицето на сечението (формула 1) ще е най-малко, ако $\cos\varphi$ приема най-голяма стойност. От $f\,(k)=\dfrac{(k-1)^2}{2k^2-2k+2}\Rightarrow f'\,(k)=\dfrac{(k-1)\,(k+1)}{2\,(k^2-k+1)^2}=0\Rightarrow k_1=1$, $k_2=-1$.

При $k=-1$ се получава най-голяма стойност на $\cos\varphi$ и тя е $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Тогава $\sqrt{\dfrac{14\,406}{2}}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Rightarrow a=7$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Златанов. Училищен курс по геометрия. Пловдив, Университетско издание на ПУ „Паисий Хилендарски“, 1989.

[2] Г. Паскалев, Здр. Паскалева. Математика за 11. клас (второ равнище). София, Архимед, 2002.

[3] В. Прасолов, И. Шаригин. Задачи по стереометрии. Москва, Наука, 1989.

[4] Сп. *Математика в школе.*

Пенка Петрова Рангелова
Факултет по математика и информатика
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
бул. „България“ № 236
4003 Пловдив, България
e-mail: rangelova_penka@abv.bg

ON REGULAR POLYHEDRA

Penka Rangelova

The present work deals with regular polyhedra. We begin with problems about their identification and calculation of some quantities. Then, we move on to problems about non-standard positions of regular polyhedra with respect to other solids.