# Домаћи задаци из Диференцијалне геометрије

летњи семестар школске 2011/2012. године

## Криве

**1.** Нека је $\alpha$ крива дата својом поларном параметризацијом $\rho(\varphi) = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $a > 0$, $\varphi > 0$.

а) Доказати да је крива $\alpha$ затворена крива са једном тачком самопресецања и скицирати је на највећем интервалу $I$ на коме је дефинисана.

б) Испитати регуларност криве $\alpha$ на $I$ и израчунати њену дужину.

**2.** *Трактриса* је раванска крива коју описује један крај дужи дужине $a$ који креће из тачке $(a, 0)$, док се други крај дужи креће равномерно дуж $y-$осе.

а) Одредити диференцијалну једначину коју задовољавају координате $(x, y(x))$ тачака *трактрисе* и решити је.

б) Доказати да је $(x(t), y(t)) = a\big(\sin t, \cos t + \ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2})\big)$, $t \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$, решење добијене диференцијалне једначине, односно једна параметризација *трактрисе*.

в) Скицирати *трактрису* за $t \in (0, \pi)$. Шта геометријски представља параметар $t$?

**3.** Нека је $\alpha$ крива дата својом параметризацијом $\alpha(t) = (e^{-5t}\cos 5t, -e^{-5t}\sin 5t, e^{-5t})$, $t \in I$.

а) Доказати да је крива $\alpha$ репараметризација конусног хеликса задатог стандардном параметризацијом. Скицирати криву за $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

б) Одредити Френеов репер, кривину и торзију криве $\alpha$.

в) Одредити углове које заклапају тангента, нормала и бинормала у произвољној тачки криве са $z-$осом.

**4.** а) Доказати да слика сферне криве константне кривине припада кругу.

б) Слика природно параметризоване криве кривине $\kappa$ лежи на сфери полупречника $r$. Доказати неједнакост $\kappa \geqslant \dfrac{1}{r}$.

**5.** Изразити $[T'', N'', B'']$ у терминима кривине, торзије, брзине криве $\alpha$ и њихових извода ако је регуларна крива ненула кривине параметризована:

а) природним параметром;

б) произвољним параметром.

**6.** Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ параметризована регуларна крива (не обавезно дужином лука) за коју важи $\kappa(t) \neq 0$, $\tau(t) \neq 0$, $t \in I$. Крива $\alpha$ се назива *Бертранова крива* ако постоји крива $\overline{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ таква да су нормалне линије за криве $\alpha$ и $\overline{\alpha}$ једнаке за свако $t \in I$ (крива $\overline{\alpha}$ назива се *Бертранов пратилац* криве $\alpha$).

а) Доказати да кружни хеликс има бесконачно много *Бертранових пратилаца*, који су такође кружни хеликси.

б) Доказати да је крива $\alpha$ *Бертранова* ако и само ако постоје ненула константе $A$ и $B$ за које важи $A\kappa(t) + B\tau(t) = 1$, $t \in I$.

**7.** Дата је крива $\alpha$ својом параметризацијом

$$\alpha(t) = (a\cos t, ac\cos t - bd\sin t, ad\cos t + bc\sin t), \quad c^2 + d^2 = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказати да је крива $\alpha$ елипса и наћи једначине равни и елипсоида у чијем пресеку лежи траг криве $\alpha$.

**8.** Одредити криву (до на изометрију простора $\mathbb{E}^2$) чије су природне једначине ($a > 0$, $s > 0$ природни параметар)

$$\begin{cases} \kappa(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2as}}, \\ \tau(s) = 0. \end{cases}$$

## Површи

**1.** Нека је $\mathcal{M}$ скуп тачака у првом октанту $Oxyz$ координатног система чије координате задовољавају $xyz = a^3$, $a > 0$. Доказати да је $M$ регуларна површ и да запремина тетраедра који се добија у пресеку координатних оса и тангентне равни у произвољној тачки површи $\mathcal{M}$ константна.

**2.** Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ регуларна природно параметризована крива ненула кривине, $s$ природни параметар и $B$ вектор бинормале криве $\alpha$. Дата је површ $f(s, v) = \alpha(s) + vB(s)$, $(s, v) \in I \times (-\varepsilon; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Доказати да је $f$ регуларна параметризована површ на којој је крива $\alpha$ геодезијска, одредити вектор нормале и прву и другу фундаменталну форму.

**3.** Нека је $f : U \to \mathbb{R}^3$ регуларно параметризована површ, где је $U = (a, b) \times (c, d)$, а метрика је $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$.

а) Доказати да је параметризација конформна, тј. да се чувају углови на површи из карте.

б) Ако је површ минимална, доказати да је тада $f$ хармонијско пресликавање ($f_{uu} + f_{vv} = 0$) и да су све тачке површи хиперболичке.

в) Доказати да под условима дела б) у околини сваке тачке постоје два нормална асимптотска правца које полове главни правци.

**4.** Дато је пресликавање $f$ сфере без полова $\overline{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z^2 \neq 1$ на ваљак $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$ тако да је за свако $X \in \overline{S}$ права $Xf(X)$ сече $Oz$ осу и нормална је на њу (тачке $X$ и $f(X)$ су са исте стране осе $Oz$).

а) Доказати да је $f$ дифеоморфизам који чува површине, али не и углове.

б) Конструисати метрику са "бесконачно хладним половима" на сфери (та метрика има сингуларитете у половима) пројектовањем цилиндра описаног око сфере из центра на сферу. Која је Гаусова кривина сфере у овој метрици?

в) Доказати да су ротације око $z-$осе изометрије сфере у односу на ту метрику, као и у односу на стандардну метрику наслеђену из $\mathbb{R}^3$.

**5.** Нека је горња половина конуса дата једначином $z^2 = a(x^2 + y^2)$, $a > 0$, $z > 0$.

а) Наћи једначине локсодрома на конусу које заклапају угао $\alpha$ са меридијанима.

б) Описати геодезијске на конусу и скицирати неке од њих.

в) Доказати да за $a = 3$ ниједна геодезијска нема самопресецања, док за $a > 3$ постоје геодезијске са самопресецањем.

**6.** Површ $r = r(u, v)$ назива се *Лиувилова површ* ако је $E = G = f + g$, $F = 0$, при чему је $f$ функција само по $u$ и $g$ функција само по $v$.

а) Ако је $\gamma(s) = r(u(s), v(s))$ природно параметризована геодезијска линија на овој површи, доказати да је $f \sin^2 \theta - g \cos^2 \theta = \text{const}$, при чему је $\theta$ угао између геодезијске линије и $u-$параметарске криве $v = \text{const}$.

б) Доказати да су геодезијске на *Лиувиловој површи* задате једначинама $\dfrac{du}{\sqrt{f(u) + c}} = \pm \dfrac{dv}{\sqrt{g(v) - c}}$, $c = \text{const}$.

**7.** *Псеудосфера* је површ добијена ротацијом трактрисе око $z-$осе.

а) Параметризовати *псеудосферу* и доказати да је регуларна површ.

б) Одредити прву и другу фундаменталну форму *псеудосфере*.

в) Одредити Гаусову и средњу кривину *псеудосфере*.

г) Одредити геодезијску и нормалну кривину координатних линија *псеудосфере*. Које су међу њима главне и асимптотске?

д) Доказати да је *псеудосфера*, након одговарајуће репараметризације, локално изометрична полуравни Лобачевског.

*Напомена.* На овај начин је у еуклидски простор смештен само део орицикла оивичен двема правама прамена који тај орицикл генерищу. Нацртајте ту област у полуравански и Поенкареовом моделу. Цео простор Лобачевског не може се сместити у еуклидски простор $\mathbb{R}^3$. Обрнуто је могуће јер се на орисфери одиграва еуклидска геометрија.

**8.** Дат је параболоид једначином $z = x^2 + y^2$.

а) Параметризовати параболоид као ротациону површ и доказати да је регуларна површ.

б) Одредити прву и другу фундаменталну форму параболоида у овој параметризацији.

в) Одредити Гаусову и средњу кривину параболоида.

г) Да ли је параболоид локално изометричан сфери?

д) Одредити геодезијске и главне линије на параболоиду.

**9.** а) Ако је у тачки $p$ површи $K(p) \neq 0$, доказати да важи $|K(p)| = \lim\limits_{A \to 0} \dfrac{A'}{A}$, где је $A$ површина околине $V \subset r(U)$ тачке $p$, а $A'$ површина слике $g(r^{-1}(V))$ параметризације те околине Гаусовим пресликавањем $g$. Објаснити овакву интерпретацију кривине на примеру јединичне сфере.

б) Нека је $\alpha(s)$ природно параметризована крива која припада трагу површи $r = r(u, v)$. Доказати да важи $n' = -II(T, T)T - II(T, S)S$, где су $n = n(s)$, $T$ и $S$ редом нормално векторско поље површи, тангентно векторско поље и поље унутрашњих нормала дуж криве $\alpha$.

**10.** Дат је полуравански модел геометрије Лобачевског $\mathcal{L}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$ са метриком $ds^2 = \frac{du^2+dv^2}{v^2}$.

а) Доказати да је пресликавање $\tau_\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ изометрија у полуравански моделу $\mathcal{L}^2$.

б) Које је пресликавање хиперболичке равни у питању?

в) Наћи растојање између правих $a : u^2 + v^2 = 1$ и $\tau_\lambda(a)$. Какав је међусобни положај ових правих?

**11.** а) Доказати да је скуп Мебијусових трансформација $Sl_2(\mathbb{R}) = \{z = \frac{a\omega+b}{c\omega+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$, $\omega = u + iv$, група глобалних изометрија равни $\mathcal{L}^2$.

б) Наћи подгрупу оних изометрија које остављају инваријантним круг $u^2 + (v - \cosh 3)^2 = \sinh^2 3$.

**12.** Нека су $z_1, z_2 \in \mathcal{L}^2$ различите тачке и $\omega_1, \omega_2$ пресечне тачке хиперболичке праве одређене тачкама $z_1, z_2$ и реалне осе. Доказати да је хиперболичко растојање $\rho(z_1, z_2)$ дато формулом $\rho(z_1, z_2) = \log r$, где је $r$ дворазмера тачака $z_1, z_2, \omega_1, \omega_2$, узимајући их у одговарајућем редоследу.

**13.** Дат је Поенкареов модел геометрије Лобачевског $\mathcal{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ са метриком $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$.

а) Одредити хиперболичко растојање $\rho$ између тачака $(0, 0)$ и $(a, 0)$, $0 < a < 1$.

б) Одредити једначину круга са центром у тачки $(a, 0)$, $0 < a < 1$, полупречника $r$.

в) За дату тачку $P$ у овом моделу и праву $L$ која је не садржи, објаснити како се рачуна минимално растојање тачке $P$ ода праве $L$.