1 Неодрђеност и информација

1. Баца се фер новичић до прве појаве писма. Нека је X случајна величина која представља број потребних бацања. Наћи неодређеност случајне величине X.

2. Показати да за дискретну случајну величину X важи неједнакост $H(g(X)) \leq H(X)$.

3. Дата је заједничка расподела

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

Наћи $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $H(X,Y)$ и $I(X;Y)$ и представити их Веновим дијаграмом.

4. Нека су X_1 и X_2 дискретне случајне величине и X случајна величина дефинисана као

$$X = \begin{cases} X_1, \text{ са вероватноћом } \alpha \\ X_2, \text{ са вероватноћом } 1-\alpha \end{cases}$$

Наћи ентропију $H(X)$ у функцији од $H(X_1)$, $H(X_2)$ и α.

5. Показати да је неодређеност расподеле вероватноће $(p_1, ..., p_i, ..., p_j, ..., p_m)$ мања од неодређености расподеле $(p_1, ..., \frac{p_i+p_j}{2}, ..., \frac{p_i+p_j}{2}, ..., p_m)$.

6. Показати да за случајне величине X, Y и Z важе следеће неједнакости и наћи услове при којима важе једнакости.
а) $H(X,Y|Z) \geq H(X|Z)$
б) $I(X,Y;Z) \geq I(X;Z)$
в) $H(X,Y,Z) - H(X,Y) \leq H(X,Z) - H(X)$
г) $I(X;Z|Y) \geq I(Z;Y|X) - I(Z;Y) + I(X;Z)$

7. Наћи пример случајних величина X, Y и Z тако да важи
а) $I(X;Y|Z) < I(X;Y)$,
б) $I(X;Y|Z) > I(X;Y)$.

8. Нека су X и Y случајне величине које узимају вреднсоти $x_1, ..., x_r$ и $y_1, ..., y_s$, респективно и нека је $Z = X + Y$.
   а) Показати да важи $H(Z|X) = H(Y|X)$.
   б) Ако су X и Y независне, тада важи
   $H(Y) \leq H(Z)$ и $H(X) \leq H(Z)$.
   в) Наћи пример (зависних) случајних промењливих за које важе неједнакости $H(X) > H(Z)$ и $H(Y) > H(Z)$.
   г) Под којим условом је $H(Z) = H(X) + H(Y)$?

9. Играчи A и B играју карте. Побеђује онај играч који први победи у 4 партије. Нека је X случајна величина која представља исходе ове игре и Y случајна величина која представља број одиграних партија. Ако предпоставимо да ирачи A и B имају једнаке шансе да добију сваку партију и да су партије међусобно независне, израчунати $H(X)$, $H(Y)$ $H(Y|X)$ и $H(X|Y)$.

10. У кутији се налази r црвених, w белих и b црних куглица. Да ли већу неодређеност има извлачење k куглица са понављањем или без понављања?

11. Ако је $X_1 \to X_2 \to ... \to X_n$ ланац Маркова, односно ако важи једнакост
    $$p(x_1, ..., x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)...p(x_n|x_{n-1}),$$
    упростити израз $I(X_1; X_2, ..., X_n)$.

12. Доказати да је условна неодређеност $H(X_0|X_n)$ неопадајућа по n за сваки ланац Маркова.

13. Нека случајна величина X узима три могуће вредности $\{a, b, c\}$. Посматрајмо две расподеле вероватноће ове случајне величине

	$p(x)$	$q(x)$
a	1/2	1/3
b	1/4	1/3
c	1/4	1/3

    Израчунати $H(p)$, $H(q)$, $KL(p||q)$ и $KL(q||p)$.

14. Претходни задатак говори да је у општем случају $KL(p||q) \neq KL(q||p)$. Наћи пример две расподеле вероватноће p и q тако да једнакост $KL(p||q) = KL(q||p)$ важи.

15. Нека су X, Y и Z случајне величине са заједничком расподелом $p(x, y, z)$. Кулбак-Лајблерово растојање између заједничке расподеле и производа одговарајућих маргиналних је

$$KL(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z)) = E\left[\log \frac{p(x, y, z)}{p(x)p(y)p(z)}\right]$$

Изразити Кулбак-Лајблерово растојање преко неодређености. Када је ово растојање једнако нули?

16. Посматрајмо низ од n бинарних случајних величина $X_1, X_2, ..., X_n$. Сваки низ са парним бројем јединица има вероватноћу $2^{-(n-1)}$ и сваки низ са непарним бројем јединица има вероватноћу 0. Наћи информације:

$$I(X_1; X_2), I(X_2; X_3|X_1), ..., I(X_{n-1}; X_n|X_1, ..., X_{n-2}).$$

17. Нека је $X_1 \to X_2 \to X_3$ ланац Маркова такав да $X_1 \in \{1, 2, ..., n\}$, $X_2 \in \{1, 2, ..., k\}$ и $X_3 \in \{1, 2, ..., m\}$, где је $k < n$, $k < m$. Показати да је $I(X_1; X_3) \leq \log k$.

18. Нека су X, Y, Z три случајне величине са Бернулијевом расподелом са параметром $\frac{1}{2}$ које су независне у паровима.
а) Одредити минималну вредности неодређености $H(X, Y, Z)$.
б) Навести пример случајних величина за које се постиже минимум.

19. Под којим условима важи једнакост $H(X|g(Y)) = H(X|Y)$?

20. а) Имамо на располагању "фер" новчић. Одредити заједничку информацију између писма и главе.
б) Имамо на располагању "фер" коцкицу. Одредити заједничку информацију између горње стране и бочних страна коцкице.

21. Упоредити изразе:
а) $H(X)$ и $H(5X)$
б) $I(g(X); Y)$ и $I(X; Y)$
в) $\frac{H(X,Y)}{H(X)+H(Y)}$ и 1

22. Користећи Венове дијаграме можемо приметити да се заједничка информација три случајне величине X, Y и Z може дефинисати као
$$I(X;Y;Z) = I(X;Y) - I(X;Y|Z).$$
Израз $I(X;Y;Z)$ не мора бити ненегативан. Наћи X Y и Z за које је $I(X;Y;Z) < 0$ и показати да важе следеће једнакости:
$$I(X;Y;Z) = H(X,Y,Z) - H(X) - H(Y) - H(Z) + I(X;Y) + I(Y;Z) + I(Z;X)$$
$$I(X;Y;Z) = H(X,Y,Z) - H(X,Y) - H(Y,Z) - H(Z,Y) + H(X) + H(Y) + H(Z)$$

23. Претпоставимо да имамо n новичића међу којима може постојати један фаличан. Ако постоји фаличан новчић, он може бити тежи или лакши од осталих. На располагању имамо теразије које могу имати три исхода.
а) Ако је k број мерења, одредити највећи број новчића n који можемо тачно декларисати, односно одредити да ли постоји фаличан новчић и да ли је он тежи или лакши од осталих.
б) На који начин се 12 новчића може декларисати помоћу 3 мерења?

24. Нека су $X_1, X_2, ...$ независне једнако расподељене случајне величине са функцијом расподеле $p(x)$. Наћи
$$\lim_{n\to\infty} [p(X_1, X_2, ..., X_n)]^{\frac{1}{n}}.$$

25. Нека су $X_1, X_2, ...$ независне једнако расподељене случајне величине расподелом
$$X = \begin{cases} 1, \text{ са вероватноћом } \frac{1}{2} \\ 2, \text{ са вероватноћом } \frac{1}{4} \\ 3, \text{ са вероватноћом } \frac{1}{4} \end{cases}$$
Наћи граничну вредност израза
$$(X_1 X_2 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}.$$

2 Теорија кодирања

1. Нека је дата случајна промењлива

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix},$$

где су S_i кодиране азбуком која има D симбола. Ако су дужине кодираних речи $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) = (1, 1, 2, 3, 2, 3)$, наћи одговарајућу доњу границу за D.

2. Размотримо случајну величину

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0.49 & 0.26 & 0.12 & 0.04 & 0.04 & 0.03 & 0.02 \end{pmatrix}.$$

а) Наћи бинарни Хафманов код за X.
б) Наћи средњу дужину речи за то кодирање.
в) Наћи тројни (терцијарни) Хафманов код за X.

3. Наћи бинарни Хафманов код за расподелу $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15})$. Показати да је овај код такође оптималан за расподелу $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

4. Који од понуђени кодова није Хафманов код ни за једну расподелу вероватноћа?
а) $\{0, 10, 11\}$
б) $\{00, 01, 10, 110\}$
в) $\{10, 01\}$

5. Наћи бинарни и тројни (терцијарни) Хафманов код за случајну величину X чија је расподела вероватноће

$$p = (\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{3}{21}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{6}{21}).$$

Колика је средња дужина речи у оба случаја?

6. Слова А, Е, И, О, У јављају се са фреквенцијама 0.3, 0.2, 0.1, 0.25 и 0.15. Одредити оптимално бинарно кодирање и средњу дужину кодираних речи.

7. Наћи бинарни Хафманов код за расподелу:
а) $\mathbf{p} = (\frac{10}{41}, \frac{9}{41}, \frac{8}{41}, \frac{7}{41}, \frac{7}{41})$
б) $\mathbf{p} = (\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2, \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^3, \ldots)$

8. Наћи услов да Хафманов бинарни код са 4 симбола и расподелом $p_1 = p_2 \geq p_3 = p_4$ има све речи дужине 2.

9. Нека Хафманов код има 5 кодних речи над азбиком $\{0, 1\}$ и нека је $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5 = q$. Наћи максималну могућу вредност за p_5 тако да реч која се појављује са вероватноћом p_5 има дужину 4.

10. Наћи најмању вредност q тако да бинарни Хафманов код са четири кодне речи са вероватноћама $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 = q$ има све речи једнаке дужине 2.

11. Извор има три симбола са вероватноћама $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Показати да бинарни Хафманов код има средњу дужину речи $2 - p_1$. Шта је одговарајући резултат ако извор има четири симбола са вероватноћама $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4$?