名词解释

什么是量子混沌？

Ze'ev Rudnick

最近，我的基金项目的一位评审人抱怨我的申请书中并没有解释 "什么是量子混沌"，而想知道这一问题的答案正是该评审人同意评审该项目的唯一原因．我感到不解，因为那个项目和量子混沌毫无关系．但是这件事使我想试着阐述一下什么是量子混沌．

量子混沌的研究始于人们试图在量子力学系统中发现对初始条件极为敏感的混沌现象，但是，最终人们认识到这种 (存在于经典系统中的) 敏感性在量子体系中并不存在．然而，人们却发现混沌 (或者无混沌) 在量子系统中以另外的方式表现出来．我将从能谱的统计性质来描述这种现象及其在数学上面临的困难．

我们考虑一个简单的模型：Yakov Sinai 2004 年 4 月在《 Notices 》上讨论的台球粒子系统．此系统的 *经典力学* 语言描述是一个点粒子在台球桌上无摩擦地运动，这是一个封闭的带有边界限制的二维平面系统，粒子在边界上会被反射，入射角等于反射角．运动过程中总能量守恒，粒子的能量取值可以是一个 *连续统*, 运动越快，能量越大．

在 *量子力学* 中，此系统用粒子的瞬时波函数 $\psi(x,t)$ *描述*, $\psi(x,t)$ 在台球桌边界上为零．t 时刻在 x 处发现粒子的概率是 $|\psi(x,t)|^2$, 其在整个台球系统上的积分归一化为一．波函数随时间的演化由薛定谔方程 $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi$ 描述, $\hbar$ 为普朗克常数, μ 是粒子的质量, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ 为拉普拉斯算子．此方程的定态解形式为 $\psi_n(x,t)=e^{-itE_n/\hbar}\varphi_n(x)$, φ_n 满足本征方程 $-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\varphi_n=E_n\varphi_n$. E_n 是系统的量子化能级，与经典力学中能量是连续变量不同，这里的能级是 *离散的*. 为了方便起见，我们重标能级 $\lambda_n:=2\mu E_n/\hbar^2$. 一个简单的例子就是边长分别为 a 和 b 的长方台球系统，它的 $\lambda_{m,n}=\pi^2\{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2\}$, 此处 m,n 遍取所有正整数 (这种可以精确写出能级的情况实际上很少见).

我们如何给出这个台球系统的两种不同描述间的联系呢？相较于此体系的特征作用，当普朗克常数 $\hbar$ 足够小 (或者等价地 $\lambda\to\infty$) 的时候，经典力学的描述又是怎样反映在量子力学的描述中的？能谱中是否存在一般通用的规律？高激发本征态的统计性质是什么？这些都是量子混沌试图回答的问题．本文重点分析能谱的统计性质，关于其他方面的重要进展，参阅近期 Marklof 和 Zelditch 文章 [3].

传统上，利用计数函数 $N(\lambda)=\#\{\lambda_n\le\lambda\}$ 的渐近性，当 $\lambda\to\infty$ 时, $N(\lambda)\sim\frac{\text{面积}}{4\pi}\lambda$ (Weyl (外尔) 定律), 可以从能谱反推出台球 *全面积* 的信息．量子混沌可以提供完全不同的信息：它可以导出经典系统 *动力学* 的所有粗糙性质, 比如, 它们是否是非常正规的 ("可积") 或者是 "混沌" 的．这里术语 *可积* 可以表示多种意思，至少在二自由度系统中，除了能量外, 还存在别的守恒量, 运动方程可以理想地通过积分明确求解. 例如对长方台球系

译自：Notices of the AMS, Vol.55 (2008), No.1, p.32–34, What Is Quantum Chaos? Ze'ev Rudnick, figure number 4.

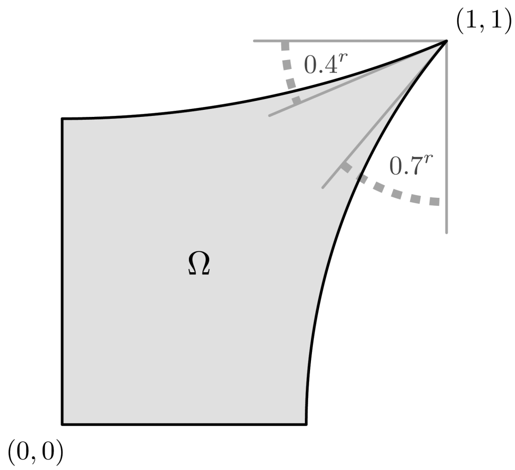

图 1 Sinai 证明，由线段和圆弧构成的区域 Ω 是经典混沌的

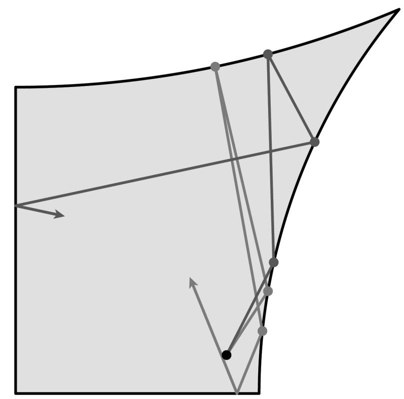

图 2 本图说明 Ω 区域内经典遍历性的产生

统，其沿矩形轴方向的动量是守恒的，而对椭圆台球系统，相对于两焦点的角动量的乘积是守恒量，且每个台球的径迹重复地同与椭圆共焦的圆锥曲线相接触. 词 “混沌” 表示对初始条件变化具有指数级的敏感度及运动的 *遍历性*. 一个例子就是 Sinai 的台球系统：一个中心移去了一块圆盘的方台球桌. 他还研究了其它一些具有经典混沌现象的系统，包括图 1 的是奇异区域，图 2 是表明其遍历性出现的示意图. 存在混沌与可积并存的多种混合系统，如上为半圆下为长方的 *蘑菇台球* (见 2006 年 3 月的《 Notices 》封面，及其中 Mason Porter 和 Steven Lansel 的文章).

观察经典动力学效应的一个方法就是研究能谱的局部统计性质，例如 *能级间距分布* $P(s)$, 它描述的是能谱中相邻能级间距 $\lambda_{n+1}-\lambda_n$ 的分布函数. 换句话说，在小于给定的上界 x 时，这些间距的渐进比为 $\int_{-\infty}^{x} P(s)\,ds$. 量子混沌的深层次理解来自对 $P(s)$ 的一个普适性的猜想：

- 如果经典力学系统是 *可积的*, 那么 $P(s)$ 与 *非关联* 能级的序列 (Poisson (泊松) 系综) 的对应量一致，取平均间隔 $P(s)=ce^{-cs}$, $c=$ 面积$/4\pi$ (Berry 和 Tabor, 1977).

- 如果经典系统是 *混沌的*, 那么 $P(s)$ 与适当的 *随机矩阵* 体系的本征值的对应量一致 (Bohigas, Giannoni 和 Schmit, 1984). 值得注意的是，从黎曼 ζ 函数的零点可以观察到相关分布.

上述猜想尚无例子证实，事实上还有一些反例存在，但除非有更好的理由去作别的解释，人们还是期望这些猜想 “普遍” 成立. 可积情况下的一个反例就是 *方* 台球桌情形，由于其谱的多重性，$P(s)$ 在原点处坍缩成一个点质量. 在算术例子中的混沌情形也出现了偏差. 不过，经验研究为这些猜想的 “普遍” 准确性提供了十分吸引人的佐证，参阅图 3, 图 4.

Sarnak、Eskin、Margulis、Mozes 和 Marklof 等人已经在长方台球系统的 Berry-Tabor 猜想方面取得了一些进展，但是距离我们的目标依然遥远. 例如这个猜想暗示能谱中存

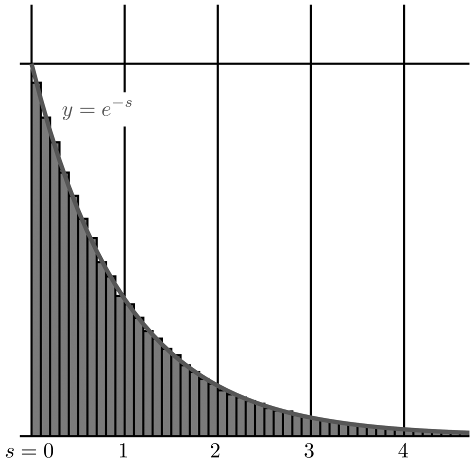

图 3 假设矩形的边 a, b 相差足够大，人们猜想其本征值 $\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)$ 的分布是泊松过程的分布．依从外尔的渐近公式，通过简单的几何推理可知，其平均值为 $4\pi/ab$. 对于边 / 底比为 $\sqrt[4]{5}$, 面积为 4π 的长方系统，相较期望概率密度 e^{-s}, 这里绘出了其能隙为 $\lambda_{i+1} - \lambda_i$ 的头 250000 个本征值的统计图形，其中方格间距为 0.1

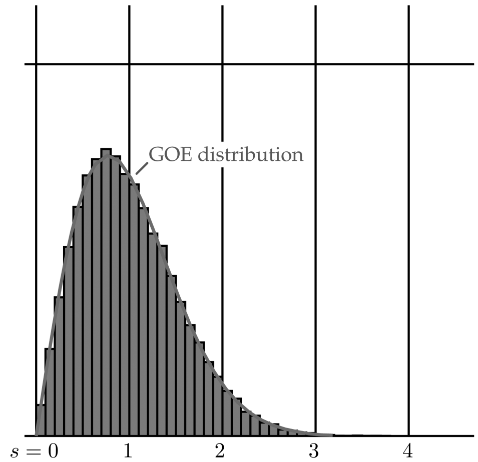

图 4 考虑一个取自 “高斯正交系综” 的大实对称随机矩阵 —— 矩阵元是独立的 (满足对称要求), 且概率分布在正交变换下不变，相对于其相继本征值间的归一化能隙分布，这里画出了 Ω 区域，约 50000 个本征值序列间的归一化能隙，由 Alex Barnett 计算得到

在 *任意大* 的间隙，对于长宽比为 $\sqrt[4]{5}$ 的长方系统，你能证明这一点吗？

$P(s)$ 的行为受制于数 $N(\lambda, L)$ 的统计性质，这里 λ 是随机选择的位置, $N(\lambda, L)$ 为该位置区间内的能级数，其中区间长度 L 具有能级间平均间距的量级．*较大* 能级区间的统计可以提供经典动力学的信息，且更加易于研究．一个重要的例子是 $N(\lambda, L)$ 的 *方差* 性质，人们相信根据其增长率可以区分可积与混沌 [1] (“一般” 情况下，存在算术反例). 另一个例子是正规化平均值为零，方差为 1 的 $N(\lambda, L)$ 的 *值分布*, 人们相信对于混沌情形它服从高斯分布，而在可积系统中则有根本不同的行为：当 L 大时，它是与系统有关的非高斯分布 [2]; 当 L 小的时候，情况尚不明朗．不过前不久, Hughes 、Rudnik 和 Wigman 等人证明，在长方台球系统中，小 L 情形服从高斯分布．

参考文献 (略)

(费少明 译　　郑驻军 校)