POLYGON
IV. kötet 1. szám 1994.

Hallható-e a dob alakja?

KURUSA ÁRPÁD

A címben felvetett kérdés nem vicc, de még csak nem is azt jelenti, hogy itt valamiféle, a dobok gyártásáról szóló téma következik.

Ebben a cikkben a matematika egy, a „napokban" elért csúcsteljesítményéről lesz szó. Igyekszünk megvilágítani a kérdést, amit most mintegy 80 év után sikerült megoldani, és további adalékokkal is szolgálunk. A figyelmes olvasó ráérezhet, milyen tekervényesen fejlődik a matematika, miközben az is kiderül, hogy bizonyos problémák megoldódása nemhogy csökkentené a művelhető, kutatni való területet, hanem éppen ellenkezőleg, új területeket nyit meg.

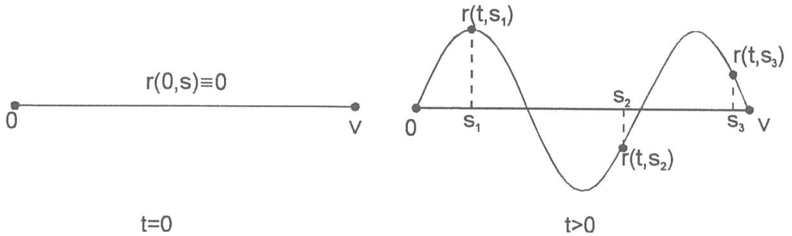
Nézzük tehát a problémát!

1. A húr esete. Tekintsünk egy két fix pont közé kifeszített damil húrt. A kérdésünk az, hogy milyen hangot ad, ha megpendítjük. A középiskolai fizikából tudjuk, hogy a rezgés a húr szabad rezgéseiből fog összetevődni. A szabad rezgések frekvenciáit nevezik rezonanciafrekvenciának, így nekünk mindenekelőtt ezeket a frekvenciákat kell kiszámítanunk.

Legyen a húr egyik végpontja a nulla, a másik pedig v. Ekkor a húr rezgését egy $r(t,s)$ függvénnyel modellezhetjük, amely azt mondja meg, hogy egy t időpillanatban a húr s pontja, persze $0 \leq s \leq v$, milyen „magasságban" van a húr eredeti állapotához képest.

Világos, hogy $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}(t,s)$ az s feletti pont függőleges gyorsulását adja. Ennek arányosnak kell lennie a pontra ható erővel, amit viszont a damil rugalmassága folytán a szomszédos pontok fejtenek ki. Ez az erő arányos a damilnak az adott pontban való megnyúlásával, ami arányos a $\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}(t,s)$ függvénnyel. Tehát, valamilyen $c \neq 0$ konstansra, amit a damil anyaga és feszítettsége határoz meg,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}(t,s) = c\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}(t,s). \tag{1}$$



1. ábra
$t = 0$ pillanat balra, $t > 0$ pillanat jobbra.

Tételezzük fel, hogy a húr ω frekvenciájú hangot ad. Ez azt jelenti, hogy az $r(t,s)$ függvény $\sin(t\omega)g(s)$ alakú, amit visszaírva előbbi egyenletünkbe, a

$$(2) \qquad c^2\ddot{g}(s) + \omega^2 g(s) = 0$$

egyenlethez jutunk. Szorozzuk meg ezt az egyenletet a $\dot{g}(s)$ függvénnyel. Akkor a baloldalon felismerjük egy-egy szorzat deriváltját, és egy könnyű integrálással kapjuk, hogy

$$(3) \qquad c^2\dot{g}^2(s) + \omega^2 g^2(s) = \alpha^2$$

valamely megfelelő α konstansra. Ha két szám négyzetösszege egy, akkor az egyik egy megfelelő szög koszinusza, a másik pedig ugyanannak a szögnek a szinusza, ezért létezik olyan γ függvény, melyre $\omega g(s) = \alpha \sin\gamma(s)$, és $c\dot{g}(s) = \alpha\cos\gamma(s)$. Deriválva az elsőt, $\omega\dot{g}(s) = \alpha\cos\gamma(s)\dot{\gamma}(s)$ adódik, amit összevetve a $\dot{g}(s)$ függvényre kapott másik kifejezésünkkel, láthatjuk, hogy $\dot{\gamma}(s) \equiv \frac{\omega}{c}$. Ebből $\gamma(s) = s\frac{\omega}{c} + \delta$, valamely δ konstansra. Tehát $g(s) = \frac{\alpha}{\omega}\sin(s\frac{\omega}{c} + \delta)$. Ugyanakkor $g(0) = 0$, és $g(v) = 0$, hiszen a húr két vége rögzítve van, amiért $\frac{v\omega}{c} = 2k\pi$, ahol a k egész számot jelöl. Ezzel megkaptuk az összes lehetséges harmonikus (így nevezik a tisztán szinuszos alakú rezgéseket) rezgés frekvenciáját:

$$(4) \qquad \omega_k = \frac{2kc\pi}{v} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

A fizikából tudjuk, hogy minden rezgés ilyen harmonikus rezgések szuperpozíciójából adódik, valamint azt is tudjuk, hogy tiszta harmonikus rezgést csak ideális esetben hallhatunk. Tehát ha megpendítjük a húrt, akkor a keletkező hangban minden harmonikus rezgés szerepelni fog, persze különböző erősséggel. Mármost az emberi fülnek megvan az a felbecsülhetetlenül jó tulajdonsága, hogy az összetett hangokból is ki tudja válogatni a harmonikus hangokat — emiatt tudjuk a nagyzenekarokban egyszerre élvezni a violin csengését (magas harmonikusok) és az üstdob dübörgését (mély harmonikusok) —, vagyis aki a húr hangját hallja, az tulajdonképpen az összes rezonanciafrekvenciát megismeri. Összefoglalva, azt mondhatjuk, hogy

„*képesek vagyunk hallani a húr hosszát*",

abban az értelemben, hogy az előbbiek szerint a rezgésből megtudjuk az ω_k értékeket, amiből a $v = \frac{\omega_k}{2kc\pi}$ formulával meghatározhatjuk a húr hosszát. Kevésbé képletesen szólva, ez azt jelenti, hogy bármely két különböző húr különböző hangot ad.

2. A dob esete. Természetesen vetődik fel most már a kérdés, hogy ha a húr alakját, ami a hossza, meg tudjuk hallani, akkor vajon a dobok alakját meg tudjuk-e ítélni a hangjuk alapján? Ez az a kérdés, amit a cikk címében is olvashatunk, és először M. Kac cikkében jelent meg [2]. Egy dob alakján annak a keretnek a formáját értjük, amire a membrán ki van feszítve, és nem tekintjük a dob testét, ami pedig jelentősen befolyásolhatja a hangot. A mi „absztrakt dobunk" egy tartomány a síkban, melynek belseje a membrán, határa pedig a keret.

Ha válaszolni akarunk a címben felvetett kérdésre, akkor, ahogy a húr esetében, itt is ki kellene számolnunk az összes rezonanciafrekvenciát, és azokból valahogyan meg kellene határoznunk az alakot. A (2) egyenlethez analóg módon, most a

$$c^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)\right)+\omega^2 g(x,y)=0 \tag{5}$$

egyenlet adódik, ahol a g függvény a $T \subset \mathbb{R}^2$ tartományon, ez most a dob, van értelmezve, és e tartomány ∂T határán, ez a keret, nulla, mivel a keret rögzítve van. Innentől kezdve azonban komoly gondok adódnak, annak ellenére, hogy az egyenlet rettentően hasonlít a húr esetére.

Az első probléma az, hogy ezt az egyenletet roppant nehéz explicit módon megoldani. Igazából a megoldás csak nagyon speciális T tartományokra ismert, ezért aztán a következő lehetőség ami felvetődik, az az, hogy az egyenlet megoldása nélkül próbáljuk meghatározni a lehetséges ω értékeket.

Csakhogy, már az is igen érdekes probléma, hogy vajon van-e olyan ω, amire nincsen megoldása az egyenletnek! A múlt század egyik legnagyobb kérdése volt ez, amit e század elejére sikerült megoldani azzal, hogy bebizonyították, ha a T tartomány korlátos és zárt, akkor azon ω értékek halmaza, amelyre (5) megoldható, egy ω_k sorozat, amely a végtelenbe tart, ha $k \to \infty$. Érdemes itt rágondolni egy pillanatra, hogy ez az eredmény, vagyis hogy a testek rezonanciafrekvenciái egy diszkrét sorozatot alkotnak, valójában mindennapos tapasztalatunk.

Bár ez az eredmény nagyon kevésnek tűnik a mi kérdésünkre vonatkozóan, azért talán azt sejteti, hogy akkor ezek az értékek nem határozhatják meg a T tartományt, mert „ránézésre" jóval több tartomány létezik, mint ahányféle sorozat egyáltalán lehetséges. Csakhogy ez valójában nem így van, mert a két halmaz számossága megegyezik!

Tovább erősíti a pozitív eredménybe vetett bizalmat, hogy az ω_k sorozat valóban meghatározza a dob egy-két fő jellemzőjét.

H. A. Lorentz egy 1910-ben Göttingenben tartott előadásában hívta fel a figyelmet egy bizonyos fizikai problémából adódó sejtésére, mely szerint ha $N(\omega)$ jelöli azon ω_k értékek számát, melyre $\omega_k \leq \omega$, akkor

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{N(\omega)}{\omega} = \frac{|T|}{2\pi}, \tag{6}$$

ahol $|T|$ jelöli a T tartomány területét. A probléma olyan nehéznek látszott, hogy Hilbert azt jósolta, (6) nem lesz bebizonyítva az ő életében. Elég nagyot tévedett, mert egyik tanítványa, H. Weyl két évvel később bebizonyította az egyenlőséget, és ráadásul éppen az integrálegyenleteknek Hilbert által alig néhány éve kifejlesztett elméletével.

A következő eredmény jóval később született. 1954-ben A. Pleijel bizonyította be, hogy

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\omega_k}}{\frac{|T|}{2\pi t} - \frac{|\partial T|}{4\sqrt{2\pi t}}} = 1, \tag{7}$$

ahol $|\partial T|$ jelöli a T tartomány kerületét. A bizonyítás maga igen bonyolult, és bizonyos speciális függvények vizsgálatára épül.

Mindent összevetve, ez azt jelenti, hogy az ω_k sorozat meghatározza a dob területét és a kerületét. De az izoperimetrikus egyenlőtlenség szerint $|\partial T|^2 \geq 4\pi|T|$, és egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a T tartomány egy körlap. Ez tehát azt bizonyítja, hogy

„a kör alakú dob hangját nem lehet összetéveszteni”

egyetlen más dob hangjával sem.

Természetesen, a kör felismerhetősége igen messze van attól, hogy bármely két dobot meg tudjunk különböztetni, mégis hihetőbbé teszi a dolgot. Azonban ez a remény nagyon csalókának bizonyult.

3. Általánosított dobok. A nehéz problémák ellen gyakran alkalmazott „fegyver” a matematikusok kezében a feladat általánosítása. Most is ez vezetett célba!

Az általánosítás kiinduló pontja az, hogy a $\frac{d^2}{ds^2}$ operátor a (2) egyenletben és a $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ operátor az (5) egyenletben éppen a Laplace-operátor egy, illetve kettő dimenzióban. A mostantól L-lel jelölt Laplace-operátor minden dimenzióban, minden görbén, felületen stb. jól ismert a matematikusok előtt, mivel ez a legegyszerűbb mozgásinvariáns differenciáloperátor. Ez a tulajdonság lényegében definiálja is az L Laplaceoperátort minden Riemann-sokaságon, ami alatt az olvasó nyugodtan gondolhat egyszerűen valamilyen felületdarabra, habár létezik pontos matematikai definíció is (lásd differenciálgeometria). Éppen úgy, ahogy a kétdimenziós tartományok esetén, melyek szintén Riemann-sokaságok, általában is be lehet bizonyítani, hogy korlátos, zárt Riemann-sokaságok esetén azon ω értékek, melyre a

$$c^2 Lg + \omega^2 g = 0 \tag{8}$$

egyenlet, ahol g egy, a sokaságon értelmezett függvény, megoldható, egy ω_k sorozatot képeznek, és $\lim_{k\to\infty} \omega_k = \infty$. Ezen sorozatot a Laplace-operátor vagy egyszerűen a *Riemann-sokaság spektrumának* szokás nevezni, mivel a Laplace-operátort a sokaság meghatározza. Eddig ugyan nem említettük, de most már muszáj felhívni a figyelmet arra, hogy minden olyan ω érték, amire (8) megoldható, annyiszor van felsorolva a spektrumban, ahány lineárisan független megoldása van a vele alkotott (8) egyenletnek.

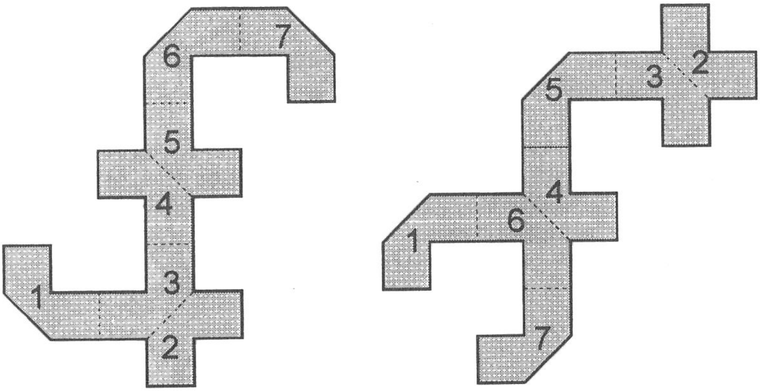
Ebben az összefüggésben a mi kérdésünk így hangzik: *Adott két korlátos, zárt Riemann-sokaság, melyek spektruma megegyezik. Igaz-e, hogy a* *két sokaság is megegyezik?* Ha két sokaság spektruma megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy azok *izospektrál sokaságok*. Annak pontos matematikai értelme, hogy mikor egyezik meg két Riemann-sokaság, meglehetősen bonyolult (lásd differenciálgeometria), de az olvasó nyugodtan gondolhat itt az egybevágóságokra.

Az első bizonyítékot arra, hogy esetleg létezik két különböző dob, amelyek ugyanazon a hangon szólnak, J. Milnor találta 1964-ben. Milnor két olyan különböző 16 dimenziós „általánosított dobot" mutatott, melyeknek ugyanaz a spektrumuk. Mivel azonban ezek az izospektrál sokaságok szerkezetileg a tóruszra hasonlítottak (valójában magasabb dimenziójú tóruszok), nem látszott igazán meggyőzőnek, az eredeti, kétdimenziós dobok esetére.

Ugyanakkor Milnor példája elindított egy folyamatot, ami a végső megoldáshoz vezetett. Japán, francia és amerikai matematikusok szinte felváltva mutattak egyre kisebb dimenziójú izospektrál sokaságokat, igaz, hogy ezek szerkezete továbbra is a tóruszéhoz volt hasonló. Végül azonban P. Brooks és P. Buser előállt két izospektrál görbült felületdarabbal, amelyek már kettő dimenziósak. Visszatérve képletes fogalmazásunkhoz, két olyan különböző „harangot" mutattak, amelyek ugyanazon a hangon szóltak.

Közben más irányú kutatások is folytak. 1980-ban T. Sunada azt vizsgálta, hogyan lehet összehasonlítani különböző „dobok" hangját. Konkrét, jól kezelhető algebrai feltételeket is talált, amiből P. Bèrard egy módszert csinált arra, hogyan lehet a (8) egyenlet vagy esetünkben a (4) egyenlet valamely sokaságon létező megoldását egy másik sokaságon megkonstruálni. A módszer meglehetős bonyolult, de a lényege mégis valami olyasmi, hogy a „dobot" feldaraboljuk, majd a darabokat újra összeragasztjuk, de most másképpen, és ha a vágások mentén a g megoldás sima marad, akkor az az új „dobon" is megoldást ad, ugyanazzal a frekvenciával.

Végül 1992-ben a probléma megoldódott [3], [4]. Szabó Zoltán magyar, illetve Carolyn Gordon, David Webb és Scott Wolpert amerikai matematikusok is találtak két nem egybevágó, de teljesen ugyanazon a hangon szóló dobot. Szabó Zoltán általánosabbnak tetsző megoldásával szemben az utóbbiaknak ez a következőképpen sikerült. Gordon egy geometriai konferencián a Brooks—Buser „harangokról" beszélt, és történetesen Wolpert is ott volt, aki észrevette, hogy ezek a „harangok" olyan szimmetriával rendelkeznek,



2. ábra
Izospektrál dobok.

amelyek esetleg lehetővé teszik a síkba „lapításukat". A Gordon-Webb házaspár ennek hatására hosszú napokig igyekezett a papírból kivágott harangokat a síkba hajtogatni, míg végül rátaláltak a két izospektrál dobra, amelyet a 2. ábrán láthatunk.

Azóta további azonosan szóló dobokat is találtak. Érdemes azonban megjegyezni, hogy ezen dobok spektruma nem ismeretes, csak azt tudjuk, hogy azok megegyeznek.

Úgy tűnik tehát, hogy a geometria egy nagy problémája megoldódott, azonban látni kell, hogy ettől csak szaporodott a megválaszolandó kérdések száma. A ma ismert összes példa-pár például pontosan hét darabból van összerakva, amint az ábrán is láthatjuk, és csak példa-párok vannak. Vajon más számú darabokból is lehet izospektrál dobokat konstruálni? Van három izospektrál dob? A dob milyen tulajdonságait határozza meg a spektrum? És persze további kérdések tömegét kell még a jövőben megválaszolni.

IRODALOM

[1] B. Cipra, You can't hear the shape of a drum, Science, 255(1992), 1642–1643.

[2] M. Kac, Can you hear the shape of a drum?, Amer. Math. Monthly, 73/II(1960), 1–23.

[3] C. Gordon, Isospectral closed Riemannian manifolds which are not locally isometric, *Journal of Differential Geometry* **37** (1993) 639–649.

[4] C. Gordon, One cannot hear the shape of a durm, *Bulletin (new Series) of the AMS*, **27** (1992), 134–138.

Kurusa Árpád, JATE Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1.