Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Probeklausur

Aufgabe 1. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien a, b teilerfremd mit $a|n$ und $b|n$. Beweisen Sie $(a \cdot b)|n$.

(b) Zeigen Sie, dass $10|(n^5 - n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$.

Aufgabe 2. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen.

(1) Zeigen Sie, dass $\sim_f = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

(2) Analog definiert man $\sim_{g\circ f}$. Beweisen Sie, dass $\sim_f \subseteq \sim_{g\circ f}$.

(3) Zeigen Sie, dass wenn f surjektiv ist und $\sim_f = \sim_{g\circ f}$, dann ist g injektiv.

Aufgabe 3. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Gleichheit

$$\prod_{k=2}^{n} \Big(1 - \frac{1}{k^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$

Aufgabe 4. Verwenden Sie den Euklidischen Algorithmus um den ggT h der Polynome $f = x^3 - 2x^2 - x + 2$ und $g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ zu finden. Finden Sie Polynome $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ mit $h = p \cdot f + q \cdot g$.

Aufgabe 5.

(a) Berechnen Sie $\frac{2i-1}{3i+3}$.

(b) Lösen Sie die Gleichung $z^3 = 56i$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 6.

(a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass wenn das reguläre n-Eck und das reguläre m-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, so auch das reguläre nm-Eck.

(b) Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl $x + iy \in \mathbb{C}$ genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn der Realteil x und der Imaginärteil y konstruierbar sind.

Aufgabe 7. (a) Formulieren Sie den Höhensatz.

(b) Zeigen Sie, dass der Satz von Pythagoras den Höhensatz impliziert.

Aufgabe 8. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ verschiedene Punkte und $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Zeigen Sie, dass falls ζ eine Nullstelle des Polynoms $ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ ist, so sind a, b, c die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks.

Aufgabe 9.

(a) Berechnen Sie das Inverse von $\bar{9}$ in $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Zahl

$$n = 1 + 2 + \cdots + 1000$$

durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 10. Sei G eine endliche abelsche Gruppe.

(a) Zeigen Sie die Gleichheit

$$\prod_{g \in G} g^2 = e_G.$$

(b) Falls $|G|$ ungerade ist, so gilt

$$\prod_{g \in G} g = e_G.$$

Abgabe: Dienstag, 21.06.2016 um 16:15 in den entsprechenden Fächern