Vorlesung Mathematik für Physiker | Hans-Peter Gittel
Lineare Algebra 1 | Universität Leipzig
Wintersemester 2019/2020 | Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (4. Serie)

Abgabetermin: 18.11.2019

13. Es seien $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,3,1), v_3 = (1,2,a^2)$. Untersuche, für welche reellen Zahlen a:

a) die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden,

b) der Vektor $(1,2,a)$ eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3 ist.

14. Bestimme zu denjenigen Teilmengen aus Übungsaufgaben 9 und 12, welche Unterräume bilden, die Dimension und eine Basis.

15. a) Beweise allgemein die eindeutige Zerlegung eines Vektors bez. komplementärer Unterräume, d.h. die Behauptung:
Sind U_1, U_2 komplementäre Unterräume eines Vektorraums V $(U_1 \oplus U_2 = V)$, so gilt für jedes $v \in V$ die Darstellung

$$v = u_1 + u_2 \quad \textit{mit } \text{eindeutig } \textit{bestimmten} \quad u_i \in U_i \ .$$

b) Bestimme im $\mathbb{R}^3$ zwei komplementäre Unterräume zu

$$U_1 := \mathrm{lin}((0,1,1),(0,-2,4)).$$

c) Bestimme für $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ die Zerlegung bez. der Unterräume aus b).

d) Veranschauliche die Ergebnisse aus b) und c) grafisch.

16. Seien V, W Vektorräume und $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige:

a) $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V.

b) f injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.

c) Ist f bijektiv, so ist auch f^{-1} eine lineare Abbildung.