3. Lineare Algebra und Analytische Geometrie

3.6 Geraden- und Ebenengleichungen

H. Wuschke

03. März 2022

Ziele der Sitzung

- Geradengleichungen in Parameterform angeben
- Punktprobe auf Geraden durchführen
- spezielle Geradengleichungen beschreiben
- Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform angeben
- Punktprobe für Ebenen in Parameter- und Koordinatenform durchführen
- Punkte einer Ebene bestimmen, speziell *Spurpunkte*
- spezielle Ebenengleichungen beschreiben

Erinnerung kollinear

Weisen Sie nach, dass die Punkte

$A(1|0|4)$, $B(3|8|-2)$, $C(2|4|1)$, $D(-1|-8|10)$ und $E(0|-4|7)$

auf einer Geraden liegen.

Zeigen Sie dazu, dass alle die Verbindungsvektoren kollinear sind.

Geradengleichungen in Parameterform

Ist ein Punkt A gegeben und eine Richtung $\vec{v}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$), so bestimmen sie eine Geradengleichung.

Durch die Gleichung

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{v} \ ; \qquad t \in \mathbb{R}$$

wird die Menge aller beliebigen Punkte X beschrieben, die auf einer Geraden mit **Stützvektor** $\overrightarrow{OA}$ und **Richtungsvektor** $\vec{v}$ liegen. Um einen Punkt zu erhalten, wird ein fester Wert für t eingesetzt.

Beispiel

Die Gerade, welche durch die Punkte $A(1|2|3)$ und $B(2|4|0)$ verläuft hat zum Beispiel die Gleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \ ; \qquad t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe A1

Geben Sie vier Punkte auf der Geraden h an.

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe A2 – Streckengleichung

Geben Sie vier Punkte innerhalb und vier Punkte außerhalb der Strecke $\overline{AB}$ mit $A(3|0|1)$ und $B(5|4|3)$ an.

Aufgabe A3 – Punktprobe

Überprüfen Sie, ob die Punkte $P_1(2|3|4)$ und $P_2(8|-7|6)$ auf der Geraden h liegen.

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad t \in \mathbb{R}$$

Spezielle Geradengleichungen

Die Koordinatenachsen sind spezielle Geraden mit den folgenden Gleichungen:

$$\underline{x_1\text{-Achse}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\underline{x_2\text{-Achse}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\underline{x_3\text{-Achse}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Ebenengleichung in Parameterform

Ist ein Punkt A gegeben und zwei nicht kollineare Richtungen $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ ($\vec{v_1}, \vec{v_2} \neq \vec{0}$), so bestimmen sie eine Ebenengleichung.

Durch die Gleichung

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{v_1} + s \cdot \vec{v_2} \;; \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

wird die Menge aller beliebigen Punkte X beschrieben, die auf einer Ebenen mit **Stützvektor** $\overrightarrow{OA}$ und **Richtungsvektoren** $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ liegen. Um einen Punkt zu erhalten, wird ein fester Wert für r und s eingesetzt.

Beispiel

Die Ebene, welche durch die Punkte $A(1|2|3)$, $B(2|4|0)$ und $C(-3|-4|2)$ verläuft hat zum Beispiel die Gleichung:

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \;; \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Aufgabe A4

Geben Sie vier Punkte auf der Ebene ε an.

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Aufgabe A5 – Parallelogrammgleichung

Geben Sie drei Punkte innerhalb des Parallelogramms $ABCD$ mit $A(3|0|1)$, $B(5|4|3)$, $C(-2|-1|3)$ und $D(-4|-5|1)$ an.

Aufgabe A6 – Punktprobe

Überprüfen Sie, ob die Punkte $P_1(2|3|4)$ und $P_2(9|-5|9)$ in der Ebene ε liegen.

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Erinnerung senkrechte Vektoren

Gegeben ist die Ebene ε mit folgender Gleichung:

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht.

Normalenvektor einer Ebene

Bei einer Ebene wird der Vektor, welcher durch das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren gebildet wird als **Normalenvektor** der Ebene ($\vec{n}$) bezeichnet.

Symbolisch:

$$\varepsilon : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \; ; \quad r, s \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Koordinatenform einer Ebene

Sind der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und ein Ortsvektor $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ eines beliebigen Punktes $X(x_1|x_2|x_3)$ der Ebene ε gegeben, so lässt sich ε auch durch folgende Gleichung darstellen:

$$\varepsilon : \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} = d \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d \; ; \quad d \in \mathbb{R}$$

Dies wird als **Koordinatenform** der Ebene bezeichnet.

Andere Notation

Manchmal wird auch folgende Notation verwendet:

$$\varepsilon : ax + by + cz = d \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Beispiel 1: $\vec{n}$ und Punkt gegeben

Gegeben sind der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $A(5|0|4)$ der Ebene ε.

Geben Sie eine Koordinatengleichung von ε an.

Eine mögliche Koordinatenform ist $\varepsilon : 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 6$

Bemerkung

Es gibt unendlich viele mögliche Koordinatengleichungen (ähnlich wie Parameterformen).

Im Beispiel 1 wären

$\varepsilon : 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 12$ oder

$\varepsilon : -6 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = -18$

mögliche Koordinatengleichungen.

Beispiel 2: Drei Punkte gegeben

Die Punkte $A(-4|2|1)$, $B(-1|1|1)$ und $C(0|2|-3)$ spannen die Ebene ε auf.

Geben Sie eine Koordinatengleichung von ε an.

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon : 4 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 12$$

Punktprobe mit der Koordinatenform

Um zu überprüfen, ob ein Punkt P in einer Ebene ε liegt, muss dieser in die Koordinatengleichung eingesetzt werden.

1. Ist die Aussage wahr, so ist $P \in \varepsilon$.
2. Ist die Aussage falsch, so ist $P \notin \varepsilon$

Für eine Punktprobe ist die Koordinatenform sehr geeignet.

Beispiel 3: Punktprobe

Gegeben ist die Ebene $\varepsilon : 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_3 = 4$

1. Es ist $P_1(1|2|16) \in \varepsilon$, weil $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 4$ gilt.
2. Es ist $P_2(1|1|4) \notin \varepsilon$, weil $2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 1 \neq 4$ gilt.

Spurpunkte

Die Schnittpunkte einer Ebene ε mit den Koordinatenachsen heißen **Spurpunkte der Ebene**.

$S_1(a_1|0|0)$ ist der Spurpunkt von ε und der x_1-Achse.

$S_2(0|a_2|0)$ ist der Spurpunkt von ε und der x_2-Achse.

$S_3(0|0|a_3)$ ist der Spurpunkt von ε und der x_3-Achse.

Aufgabe A1

Zeigen Sie, dass die Spurpunkte für

$$\varepsilon : -10 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 25 \cdot x_3 = 5$$

folgende Koordinaten haben: $S_1(-\frac{1}{2}|0|0)$, $S_2(0|\frac{5}{7}|0)$ und $S_3(0|0|\frac{1}{5})$.

Koordinatenform für Spurpunkte

Eine Ebene mit den Spurpunkten $S_1(a_1|0|0)$, $S_2(0|a_2|0)$ und $S_3(0|0|a_3)$[a] hat die Koordinatenform

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$$

[a] $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ und $a_3 \neq 0$

Beispiel 7: Drei Achsenschnittpunkte gegeben

Die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|-2|0)$ und $C(0|0|-7)$ spannen die Ebene ε auf.

Geben Sie eine Koordinatengleichung von ε an.

$$\varepsilon : \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{7} = 1$$

Spezielle Ebenengleichungen

Die Koordinatenachsen spannen spezielle Ebenen auf mit den folgenden Gleichungen:

$$\underline{x_1\text{-}x_2\text{-Ebene}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\underline{x_1\text{-}x_3\text{-Ebene}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\underline{x_2\text{-}x_3\text{-Ebene}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

Koordinatenebenen in Koordinatenform

Die x_1-x_2-Ebene hat die Koordinatenform $\varepsilon : x_3 = 0$

Die x_1-x_3-Ebene hat die Koordinatenform $\varepsilon : x_2 = 0$

Die x_2-x_3-Ebene hat die Koordinatenform $\varepsilon : x_1 = 0$

$g \perp \varepsilon$

Ist der Richtungsvektor der Geraden g parallel zum Normalenvektor der Ebene ε, so steht g senkrecht auf der Ebene ε.

Darstellung der speziellen Ebenen

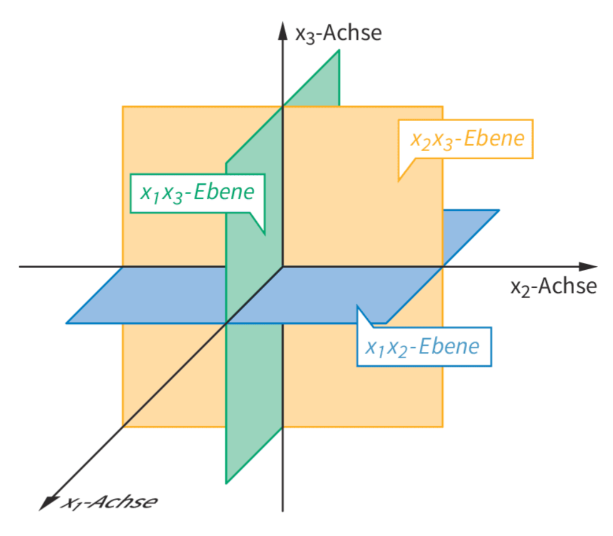

Abbildung: Abbildung aus EdM Sachsen 11, S. 163