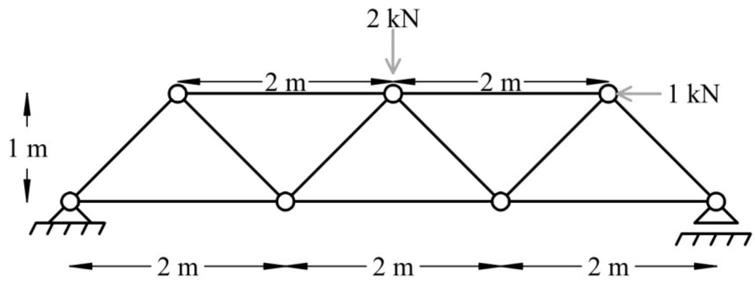
Harald Löwe

Statik von Fachwerken

Statische Berechnungen auch kleinerer so genannter „Fachwerke“ führen bereits auf größere lineare Gleichungssysteme, die den Nutzen des Gaußalgorithmus belegen können und doch bereits in der Schule zugänglich sind. Darüber hinaus können die auftretenden Systeme einerseits mit etwas Überlegung erheblich reduziert und so dem „händischen Rechnen“ zugänglich gemacht werden; andererseits sind die Ergebnisse durch frei zugängliche Software oder relativ preisgünstige Experimente überprüfbar. Aus der Mechanik benötigt man wenig: der Kraftbegriff, das Hebelgesetz und NEWTONs actio = reactio reichen aus. Insgesamt erhält man mit wenig Aufwand ein Beispiel für die mathematische Modellbildung.

1. Modellierung von Fachwerken

Ein *Fachwerk* besteht aus geraden *Stäben*, die an den Enden durch reibungsfreie Gelenke, den *Knoten*, verbunden sind, sowie aus *Gelenklagern*. Das folgende Bild zeigt ein Beispiel eines ebenen Fachwerks:



Jeder der Kreise steht dabei für ein (Dreh-)Gelenk. Die beiden Lager (linker und rechter unterer Knoten) verstehen sich wie folgt:

Festes Gelenklager: Sowohl in x- als auch in y-Richtung nicht beweglich.

Bewegliches Gelenklager: In x-Richtung frei beweglich, in y-Richtung fest.

Für räumliche Fachwerke gibt es entsprechend mehr Arten von Gelenklagern, je nachdem, ob diese in keiner, einer oder zwei Richtungen frei beweglich sind.

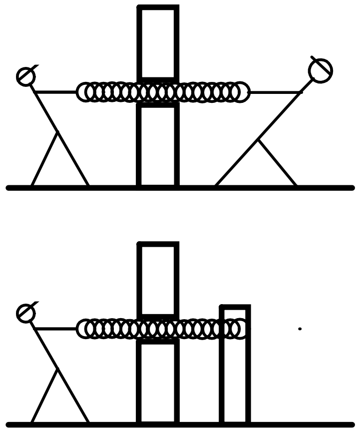
Weiterhin sind in obigem Bild sämtliche angreifende Kräfte samt ihrer Richtung eingezeichnet: Eine nach unten wirkende Kraft von 2 kN (Kilo-Newton) am mittleren oberen Knoten, eine weitere am oberen rechten Knoten, die mit 1 kN nach links schiebt. Weitere äußere Kräfte als die notierten gibt es nicht.

Die Aufgabe des Ingenieurs besteht in der Berechnung der in den Stäben wirkenden Kräfte. Zur Modellbildung nehmen wir dabei folgende Vereinfachungen an:

1. Die Stäbe sind masselos bzw. die durch die Masse der Stäbe hervorgerufenen Kräfte können gegen die äußeren Kräfte vernachlässigt werden.
2. Die Knoten sind reibungsfreie Gelenke, d. h. die durch die Reibungskräfte hervorgerufenen örtlichen Störungen haben keinen Einfluss auf das globale Trageverhalten des Fachwerks.
3. Die äußeren Kräfte („Lasten“) greifen nur an den Knoten an, d. h. wir vernachlässigen andere Kräfte oder ersetzen diese durch statisch gleichwertige Kräfte an benachbarten Knoten.
4. Die Lasten verursachen nur Längskräfte in den Stäben; von Querkräften und Biegemomenten sehen wir ab.

Wie aber geht der Ingenieur zur Bestimmung der „Stabkräfte“ vor? Dies ist erstaunlich einfach: Wenn man das Fachwerk wie angegeben belastet, so wird dieses sich **leicht** verformen, wenn Stäbe, Gelenke und Lager ausreichend stabil ausgeführt sind. Wir ignorieren diese Verformung und nehmen an, dass das Bild ein sich im Gleichgewicht befindliches Fachwerk zeigt. Insbesondere soll sich kein Teil des Fachwerks mehr bewegen! Durch Ausnutzen etlicher Gleichgewichtsbedingungen werden dann (hoffentlich) die durch die Lasten hervorgerufenen Stab- und Lagerkräfte zugänglich.

2. Das Freikörperbild



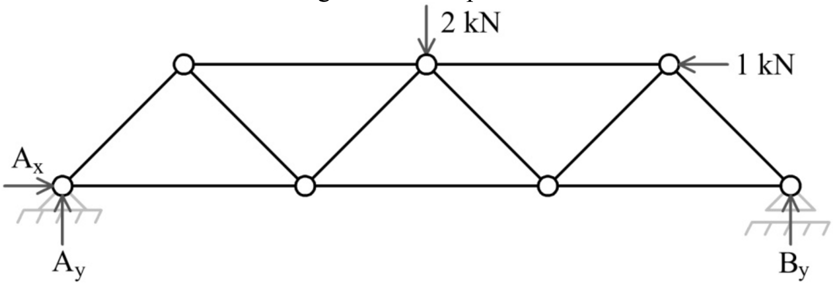
Wir stellen uns einen Menschen vor, der mit einer Kraft von 250 N an einer Kette zieht, die durch eine Wand geführt wird. Durch diese Wand kann unser Mensch nicht sehen; er stellt lediglich fest, dass die Kette sich um keinen Millimeter bewegt. Wie aber sieht es nun hinter der Wand aus? Zieht ein heimtückischer Gegenüber ebenfalls mit einer Kraft von 250 N an der Kette? Oder ist die Kette dort an einem Pflock festgelegt und bewegt sich deshalb nicht?

Die beiden Möglichkeiten sind nicht zu unterscheiden – und eben dies konstatiert das NEWTONsche Axiom „actio = reactio“: Wenn die Kette mit einer Kraft von 250 N an einem Pflock zieht, so zieht der (hier als unbeweglich gedachte) Pflock mit 250 N zurück.

Bei einem Fachwerk ist die Angelegenheit ähnlich: Wenn das Fachwerk mit einer bestimmten Kraft auf ein Lager drückt, dann drückt das Lager mit einer gleich großen Kraft in entgegengesetzter Richtung zurück. Es spielt wie oben keine Rolle, ob diese „Lagerreaktionskraft“ wirklich durch ein Lager hervorgerufen wird, oder als äußere Kraft auf das Fachwerk wirkt. Genau diesen Sachverhalt nutzt man aus:

Das *Freikörperbild* eines Fachwerks entsteht durch das Ersetzen der Lager durch die (leider noch unbekannten) Lagerreaktionskräfte, die dann als äußere Kräfte anzusehen sind. Das Ersetzen der Lager wird auch als *Freischneiden* bezeichnet.

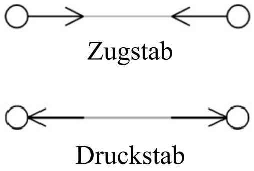
Für unser Beispiel-Fachwerk erhält man das folgende Freikörperbild:



Das linke, feste Lager wird durch die horizontale und die vertikale Komponente A_x und A_y der Lagerreaktionskraft ersetzt. Beide Komponenten sind unbekannt und werden aus traditionellen Gründen mit der angegebenen Richtung eingezeichnet. Sollte eine Richtung falsch sein, so wird die Rechnung einen negativen Wert für die Kraft ergeben. Da das rechte Lager in x-Richtung frei beweglich ist, besitzt die zugehörige Lagerreaktionskraft B nur eine vertikale Komponente.

3. Das Gleichungssystem eines Fachwerks

Im Allgemeinen sind die Stäbe eines unbelasteten Fachwerks ebenfalls unbelastet. Durch die äußeren Kräfte verformt sich das Fachwerk (allerdings nach unserer Modellierung nur so wenig, dass die hervorgerufenen Verschiebungen vernachlässigt werden können). Hierdurch werden die Stäbe auf Zug oder auf Druck belastet.



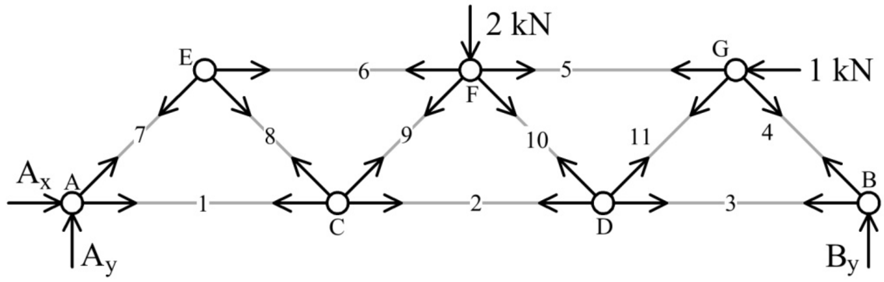
Nochmals nach dem Prinzip „actio = reactio“ wird ein auf Zug belasteter Stab auf seine beiden Knoten eine Reaktionskraft gleicher Größe in Richtung Stabmitte ausüben. Drückt man den Stab dagegen leicht zusammen, so wird er sich auszudehnen versuchen und hierdurch auf seine Knoten „drücken“. Diese Reaktionskräfte, die als Stabkräfte bezeichnet werden, greifen nun an beiden Knoten des Stabes an und sind in Richtung des Stabes, aber entgegengesetzt gerichtet.

Wir merken an, dass ein Druckstab stabiler als ein Zugstab ausgeführt sein muss: Einen dünnen Plastikstab kann man zwar kaum auseinander reißen, desto leichter aber kann man ihn knicken. Somit können wir durch die statische Berechnung eines Fachwerks nicht nur die unterschiedliche Belastung der einzelnen Stäbe bestimmen, sondern durch die wesentlich dünnere Ausführung von Zugstäben auch noch Material sparen.

Insgesamt wirken folgende Kräfte auf einen Knoten:

- Die eventuell an diesem Knoten angreifenden äußeren Kräfte F, F_i usw.
- Die Lagerreaktionskräfte A_x, A_y, B_x usw., wenn der Knoten zu dem betreffenden Lager gehört.
- Die Stabkräfte S_i der Stäbe i, die in dem betrachteten Knoten enden.

Damit können wir jeden Knoten freischneiden, indem wir die Stäbe durch die Stabkräfte ersetzen. Hierbei werden traditionell die ja noch unbekannten Stabkräfte so gerichtet, als wäre der Stab ein Zugstab. Für einen Druckstab erhält man dann negative Stabkräfte. In unserem Beispiel sieht das so aus:



Da sich die Knoten im Fachwerk nicht bewegen, müssen sich die jeweils angreifenden Kräfte genau ausgleichen. Dies kann man einfach mit jeweils einer Vektorgleichung beschreiben. Unter Beachtung der Maße (die waagerechten Stäbe sind 2 m lang und die Höhe des Fachwerks beträgt 1 m) erhalten wir in Knoten A:

$$S_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_7 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung für Knoten F lautet:

$$S_5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_9 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + S_{10} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\,\mathrm{kN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichungen lassen sich zu einem einzigen linearen Gleichungssystem zusammenfassen. Dazu teilen wir die an einem Knoten angreifenden Kräfte nochmals in eine horizontale und eine vertikale Komponente auf und erhalten so zwei Gleichungen je Knoten. In Matrixschreibweise liest sich das so:

$$\begin{pmatrix}
1 & . & . & . & . & . & w & . & . & . & . & 1 & 0 & . \\
0 & . & . & . & . & . & w & . & . & . & . & 0 & 1 & . \\
. & . & -1 & -w & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
. & . & 0 & w & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
-1 & 1 & . & . & . & . & . & -w & w & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & . & . & . & . & . & w & w & . & . & . & . & . \\
. & -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & -w & w & . & . & . \\
. & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & w & w & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & -w & w & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 0 & -w & -w & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & -1 & . & . & -w & w & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 0 & 0 & . & . & -w & -w & . & . & . & . \\
. & . & . & w & -1 & . & . & . & . & . & -w & . & . & . \\
. & . & . & -w & 0 & . & . & . & . & . & -w & . & . & .
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ A_x \\ A_y \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zur einfacheren Lesbarkeit wurden hierbei etliche Nullen durch „ . “ ersetzt. Die ersten beiden Zeilen der Matrix beschreiben die Gleichgewichtsbedingung im Knoten A, die nächsten beiden die in Knoten B usf. Nach Aufstellen des Gleichungssystems erhält man die Lösung durch Einsatz des GAUßalgorithmus:

$$S_1 = \frac{1}{6} \quad S_2 = \frac{5}{2} \quad S_3 = \frac{5}{6} \quad S_4 = -\frac{5\sqrt{2}}{6} \quad S_5 = -\frac{8}{3} \quad S_6 = -\frac{7}{3} \quad S_7 = -\frac{7\sqrt{2}}{6}$$

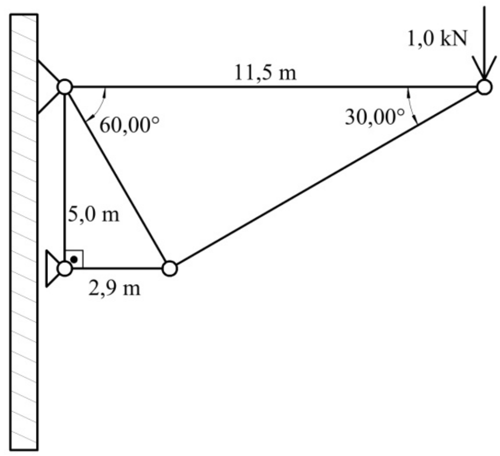
$$S_8 = \frac{7\sqrt{2}}{6} \quad S_9 = -\frac{7\sqrt{2}}{6} \quad S_{10} = -\frac{5\sqrt{2}}{6} \quad S_{11} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \quad A_x = 1 \quad A_y = \frac{7}{6} \quad B_y = \frac{5}{6}$$

Damit sind die Stäbe 4, 5, 6, 7, 9 und 10 als Druckstäbe enttarnt und müssen bei der vorgegebenen Belastung stabiler als die anderen Stäbe ausgelegt werden. Am stärksten ist dabei der 5. Stab mit 2,7 kN belastet.

Selbst ein recht einfaches Fachwerk führt daher auf ein nicht ganz angenehmes Gleichungssystem, und selbst mit Rechnerunterstützung fragt man sich, ob man dieses auch richtig eingetippt hat. Glücklicherweise gibt es im Internet etliche Tools zur graphischen Eingabe von Fachwerken, die das zugehörige Gleichungssystem selbst aufstellen und in Windeseile lösen. Zu Anfang kann ich ein Online-Tool empfehlen, das Sie finden unter

www.dankertdankert.de oder www.tm-aktuell.de

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Lagerreaktions- und Stab kräfte im skizzierten Kranausleger.



4. Statisch bestimmte und unbestimmte Fachwerke

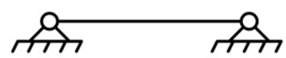
Bisher konnten wir immer das Gleichungssystem eines Fachwerks eindeutig nach den Stab- und Lagerreaktionskräften auflösen, d. h. die „inneren Kräfte" ergaben sich allein aus den Gleichgewichtsbedingungen (der Statik). Solche Fachwerke wollen wir *statisch bestimmt* nennen. Natürlich stellt sich die Frage, ob es nicht allzu künstlich konstruierte Fachwerke gibt, die statisch *unbestimmt* sind. Aus der Theorie der Gleichungssysteme wissen wir, dass es dann entweder überhaupt keine oder unendlich viele Lösungen des zugehörigen Gleichungssystems geben muss.

Eine notwendige Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems ist die Gleichheit der Anzahlen von Gleichungen und Veränderlichen. Zählen wir daher diese für ebene Fachwerke durch: Je Knoten gibt es zwei Gleichungen, nämlich eine horizontale und eine vertikale Gleichgewichtsbedingung. Die Unbekannten sind die Stabkräfte (von denen es so viele wie Stäbe gibt) und die Lagerreaktionskräfte. Damit erhalten wir als notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit eines ebenen Fachwerks

$$2 \times (\text{Anzahl der Knoten}) = (\text{Anzahl der Stäbe}) + (\text{Anzahl der Lagerreaktionskräfte})$$

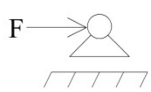
Aufgabe 2: Wie lautet die entsprechende Bedingung für ein räumliches Fachwerk?

Beispiele für statisch unbestimmte Fachwerke, deren Gleichungssysteme unendlich viele Lösungen besitzen, sind relativ rasch gefunden. So handelt es sich bei dem rechts gezeigten Fachwerk um einen eingespannten Stab – und solange wir nicht wissen, ob der Stab auf Zug oder auf Druck eingespannt ist, können



wir die Stabkraft auch nicht ermitteln! Da das Fachwerk 2 Knoten (also vier Gleichungen) und einen Stab sowie vier Lagerreaktionskräfte besitzt, ist tatsächlich unsere notwendige Bedingung verletzt.

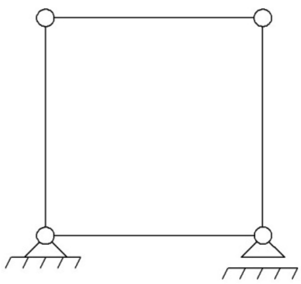
Das Gleichungssystem des rechts zu sehenden Fachwerks lautet



$$\begin{pmatrix} 0 \\ A_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

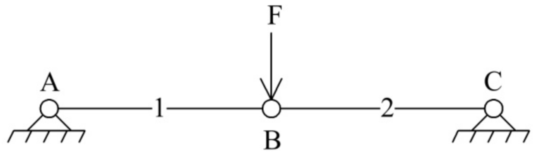
und ist damit für $F \neq 0$ unlösbar. Auch hier ist die notwendige Bedingung verletzt, da der Knoten zwei Gleichungen liefert, denen jedoch nur eine Unbekannte (die Lagerreaktionskraft) gegenübersteht. Der Grund für die

Unlösbarkeit: Da das Lager zur Last F keine Gegenkraft aufbringen kann, befindet sich das Fachwerk unabhängig von der Größe der inneren Kräfte nicht im Gleichgewicht. Derart instabile Fachwerke werden auch als *kinematisch unbestimmt* bezeichnet. Als weiteres Beispiel mag der gezeigte instabile Rahmen dienen.



Aber es geht auch tückischer! Betrachtet man einen eingespannten Stab mit einem zusätzlichen Gelenk und der gezeigten Belastung, so ist mit 6 Gleichungen (3 Knoten) und 6 Unbekannten (4 Lagerreaktionskräfte und 2 Stabkräfte) die notwendige Bedingung erfüllt. Trotzdem ist das Fachwerk kinematisch unbestimmt, da es in Knoten B keine zur Kraft F entgegengesetzte Stab- oder Lagerreaktionskraft gibt; allerdings ist die durch F hervorgerufene Verschiebung des Knotens B nur eine „infinitesimale“. Die Unlösbarkeit wird bereits durch die Gleichung des Knotens B belegt:

$$-S_1 + S_2 = 0$$
$$0 = F$$



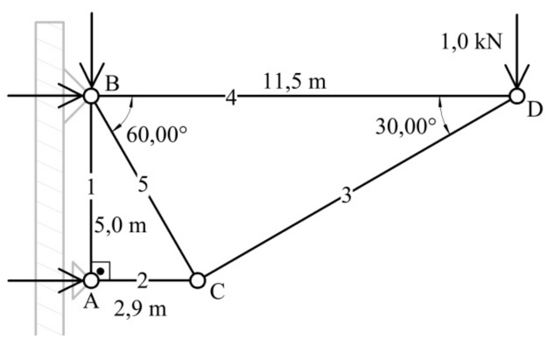
Im Folgenden werden wir nur statisch bestimmte Fachwerke betrachten.

5. Vereinfachungen

In Abschnitt 3 haben wir gesehen, dass schon kleine Fachwerke auf recht wüste Gleichungssysteme führen. Glücklicherweise kennt der Statiker etliche Kniffe, die den Rechenaufwand erheblich reduzieren.

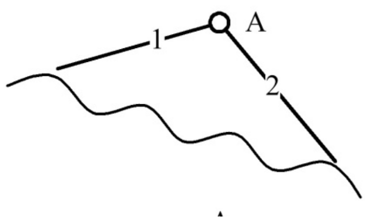
Ein erster Schritt – nach dem Erstellen des Freikörperbildes – ist das Erkennen von *Nullstäben*, das heißt von Stäben, deren Stabkraft Null ist. In der Konstruktion dienen Nullstäbe der Versteifung von Fachwerken. Beachten sollte man, dass die Eigenschaft „Nullstab sein“ . von den äußeren Kräften abhängt! Um dies einzusehen vergleiche man das unbelastete Fachwerk (in dem jeder Stab ein Nullstab ist) mit dem belasteten.

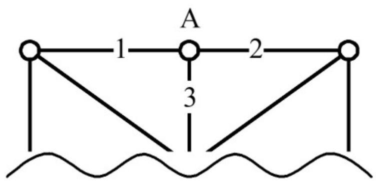
Im Fachwerk der 1. Aufgabe ist Stab 1 ein Nullstab: Knoten A befindet sich im Gleichgewicht, und so muss die Summe aller angreifenden vertikalen Kräfte Null ergeben. Da S_1 die einzige derartige Kraft ist, erhalten wir die Behauptung.



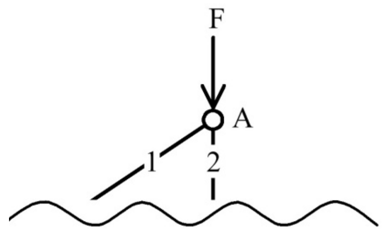
Fasst man Kräfte als Vektoren auf, so lässt sich das eben genannte Argument zu drei Regeln systematisieren (und man hat noch den Begriff der linearen Unabhängigkeit wiederholt):

Regel 1: Vorgelegt sei ein Knoten mit genau zwei angeschlossenen Stäben, die in unterschiedlichen Richtungen liegen. Ist der Knoten *unbelastet* (d. h. wirkt weder eine äußere noch eine Lagerreaktionskraft auf ihn), so sind beide Stäbe Nullstäbe. Solche Knoten bezeichnet der Statiker als „unbelastete Zweischläge“. Die Begründung ist recht einfach: Die beiden Richtungsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ der Stäbe 1 und 2 sind linear unabhängig; die Linearkombination $S_1 \cdot \vec{r}_1 + S_2 \cdot \vec{r}_2$ soll verschwinden (Kräftegleichgewicht), was nur für $S_1 = S_2 = 0$ angeht.





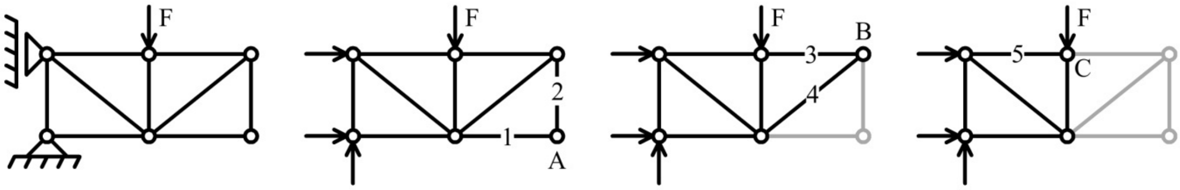
Regel 2: Vorgelegt sei ein Knoten A mit genau drei angeschlossenen Stäben, von denen zwei die gleiche, der dritte dagegen eine andere Richtung haben. Ist der Knoten *unbelastet*, so ist der dritte Stab ein Nullstab. Im Beispiel ist daher Stab 3 ein Nullstab. Zur Begründung beachten wir, dass für die Richtungsvektoren der beiden ersten Stäbe $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$ gilt. Für Knoten A ergeben sich aus $(S_1 - S_2)\cdot\vec{r}_1 + S_3\cdot\vec{r}_3 = \vec{0}$ die Beziehungen $S_1 = S_2$ und $S_3 = 0$, da $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_3$ linear unabhängig sind.



Regel 3: Vorgelegt sei ein Knoten mit genau zwei angeschlossenen Stäben, die in unterschiedlichen Richtungen liegen. Ist der Knoten *belastet* und greift die (resultierende) Kraft in Richtung des einen Stabs an, so ist der andere Stab ein Nullstab. Im gezeichneten Beispiel ist also Stab 1 ein Nullstab, da F in Richtung von 2 angreift. Im oben beschriebenen Beispiel eines Kranauslegers haben wir diese Regel zum Nachweis verwendet, dass Stab 1 ein Nullstab ist.

Aufgabe 3: Weisen Sie Regel 3 nach.

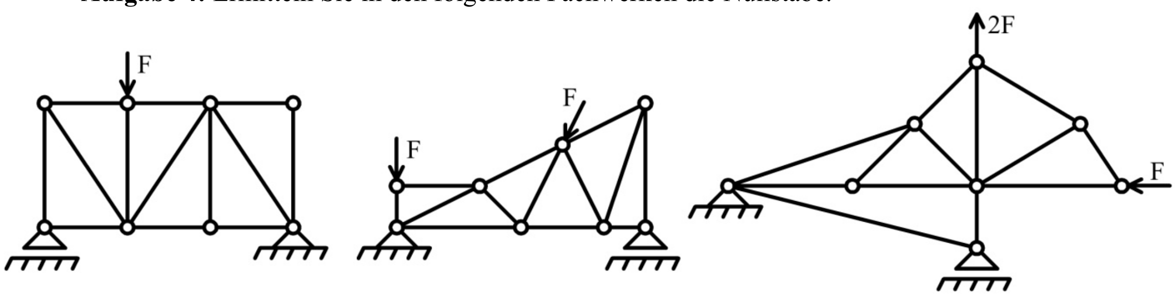
Nullstäbe kann man aus dem belasteten Fachwerk zur weiteren Rechnung entfernen (besser: mit 0 markieren, denn aus der Konstruktion sollte man diese *nicht* entfernen) und anschließend versuchen, durch erneutes Anwenden der Regeln 1 bis 3 weitere Nullstäbe ausfindig zu machen.



a: Fachwerk b: Freikörperbild c: Zwei Nullstäbe entfernt d: Abschluss

Zu dem gezeigten Fachwerk (Bildteil a) zeichnen wir zunächst das Freikörperbild (Bildteil b). Betrachten von Knoten A zeigt, dass die mit 1 und 2 bezeichneten Stäbe Nullstäbe sind (Regel 1) und daher entfernt werden können (Bildteil c). Erneut können wir Regel 1, diesmal auf Knoten B, anwenden: Auch die Stäbe 3 und 4 sind unbelastet. Nach deren Entfernung (Bildteil d) sehen wir durch Anwenden der dritten Regel, dass Stab 5 ebenfalls ein Nullstab ist.

Aufgabe 4: Ermitteln Sie in den folgenden Fachwerken die Nullstäbe.

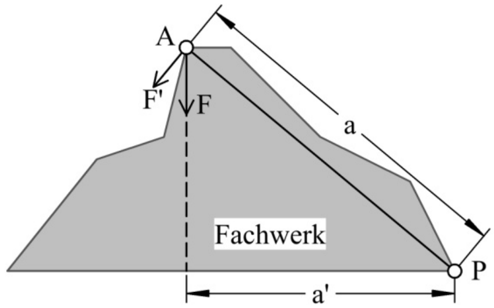


Als zweite Vereinfachung bietet sich an, die Lagerreaktionskräfte vorab zu bestimmen. Hierzu sehen wir – nachdem wir das Freikörperbild erstellt haben – das gesamte Fachwerk als starren Körper an. Da sich dieser Körper im Gleichgewicht befindet, müssen die Summen der x- bzw. der y-Komponenten aller angreifenden Kräfte verschwinden. Denn wäre etwa die Summe der x-Komponenten von 0 verschieden, so würde sich das Fachwerk horizontal bewegen. Diese beiden Gleichungen reichen natürlich nicht aus, die drei oder mehr Lagerreaktionskräfte zu berechnen, so dass wir noch eine weitere Überlegung ins Spiel bringen müssen: Da sich das Fachwerk nicht um einen seiner Knoten dreht, müssen sich die durch die angreifenden Kräfte hervorgerufenen *Momente* an jedem seiner Knoten die Waage halten. Diese Momente werden (wie von den Hebelgesetzen eigentlich bekannt) aus dem Produkt von Hebelarm mit der hierzu senkrechten Komponente der Kraft errechnet. Für den ebenen Fall spendiert man noch ein negatives Vorzeichen für eine rechtsdrehende und ein positives für ein linksdrehendes Moment.

Im Bild greift die Kraft F am Punkt A an. Wir wollen das von F im Punkt P hervorgerufene Moment bestimmen. Der Hebelarm ist dabei die Strecke AP, die die Länge a besitzt. Die senkrecht zu AP stehende Komponente von F bezeichnen wir mit F' und erhalten als Moment

$$M = a \cdot F' = a' \cdot F,$$

da es sich um eine Linksdrehung handelt. Beachten Sie, dass F längs seiner „Wirkungslinie“ (also in Richtung des Kraftpfeils) verschoben werden darf, ohne dass sich das Moment ändert.



Aufgabe 5: Warum darf man für die Berechnung eines Moments die Kraft längs ihrer Wirklinie verschieben?

Exemplarisch demonstrieren wir die Leistungsfähigkeit dieser Vereinfachungen anhand des in Aufgabe 1 bereits behandelten Kranauslegers: Wir hatten oben bereits Stab 1 als Nullstab enttarnt. Die Bedingung für das horizontale und vertikale Gleichgewicht des Auslegers insgesamt führt nun auf die Gleichungen:

$$A_x + B_x = 0$$

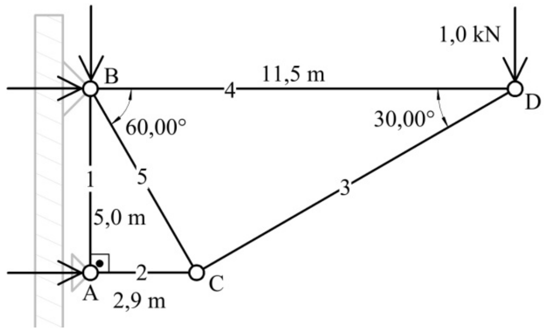
$$-B_y - 1{,}0\,\mathrm{kN} = 0$$

Weiterhin bestimmen wir das Gesamtmoment aller Kräfte im Knoten B und erhalten

$$A_x \times 2{,}9\,\mathrm{m} - 1 \times 11{,}5\,\mathrm{kNm} = 0\,\mathrm{kNm}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$A_x = 2{,}3\,\mathrm{kN}, \quad B_x = -2{,}3\,\mathrm{kN}, \quad B_y = -1{,}0\,\mathrm{kN}.$$



Aus der Gleichgewichtsbedingung in Knoten A folgt $S_2 = -2{,}3\,\mathrm{kN}$. Wir führen ein neues Koordinatensystem mit Ursprung C so ein, dass Stab 3 die x- und Stab 5 die y-Achse ist. Dann erhalten wir als vektorielle Gleichgewichtsbedingung in diesem Knoten

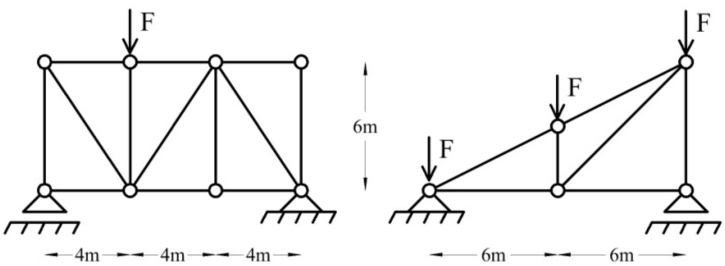
$$S_2 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(30°) \\ \sin(30°) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_3 \\ S_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}0 \\ -1{,}2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_3 \\ S_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

erkennen $S_3 = -2{,}0\,\mathrm{kN}$, $S_5 = 1{,}2\,\mathrm{kN}$ und lernen gleich noch zu schätzen, dass wir Koordinatensysteme recht frei wählen dürfen. Zur Bestimmung der letzten Größe S_4 dient die horizontale Kräftebilanz in Knoten D:

$$0 = -S_4 - S_3 \cdot \cos(30°) = -S_4 + 1{,}7\,\mathrm{kN},$$

also $S_4 = 1{,}7\,\mathrm{kN}$. Man vergleiche die Mühen dieses Rechenwegs mit dem Aufwand, den wir bei Aufgabe 1 noch haben betreiben müssen – offenbar lohnt sich Denken auch dann, wenn der Rechner viel Arbeit abnimmt.

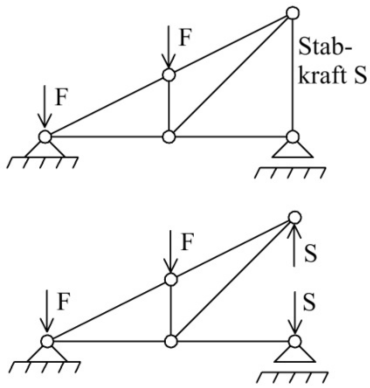
Aufgabe 6: Ermitteln Sie die Lagerreaktionskräfte in den beiden folgenden Fachwerken.



6. Der RITTERschnitt

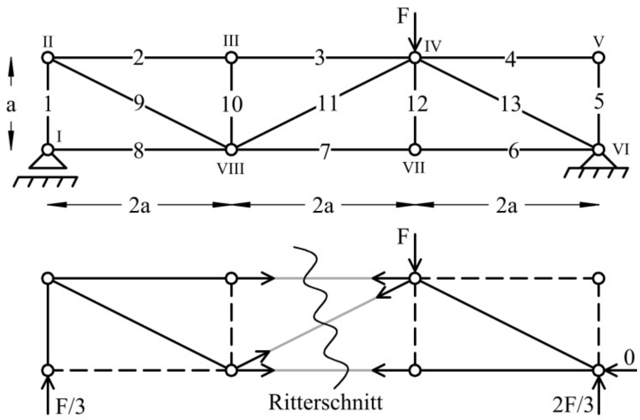
Die letzte Zutat für ein erfolgreiches Berechnen von Fachwerken ist das *RITTERsche Schnittverfahren*, das nach dem Mechaniker und Astrophysiker GEORG DIETRICH AUGUST RITTER (1826–1908) benannt wurde. Sicherlich interessiert es den Leser noch zu erfahren, dass Ritter auch Gründungsmitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung war – kein Wunder, wurde doch zu damaligen Zeiten die Mechanik häufig als Teil der Mathematik gesehen.

Die Grundlage für das Schnittverfahren ist unmittelbar einleuchtend: Wenn man einen Stab durch die beiden entsprechenden Stabkräfte ersetzt (Bild rechts), so befindet sich das Fachwerk nach wie vor in Ruhe. Der Vorteil? Nun, man hat den Stab durch zwei (gleich große, entgegengesetzt gerichtete) *äußere* Kräfte ersetzt. Und wie wir in Abschnitt 5. gesehen haben, sind äußere Kräfte manchmal etwas einfacher zu berechnen. Außerdem will man manchmal nicht alle Stabkräfte berechnen, so dass ein solches Verfahren durchaus Arbeit sparen kann.



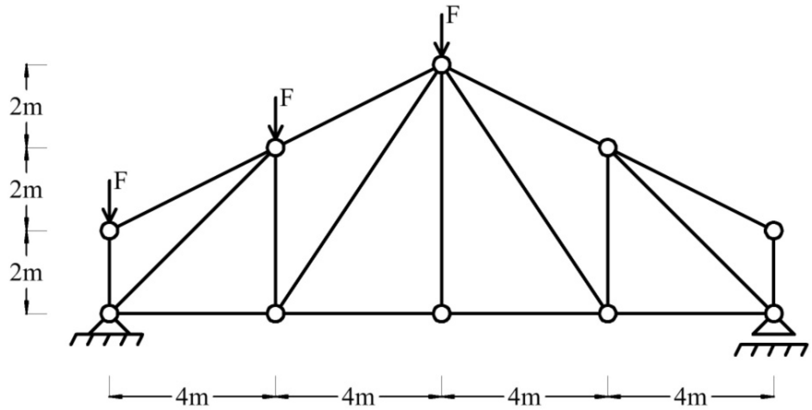
RITTERs Idee war nun, mit einem Schnitt durch *drei* Stäbe das Fachwerk in zwei Teile zu zerlegen. Nach dem Ersetzen der Stäbe durch die jeweiligen Stabkräfte sind dann beide Teile des Fachwerks in Ruhe und wir können wieder per Gleichgewichts- und Momentenbedingungen die Angelegenheit in den Griff bekommen. Damit die beiden Teile des Fachwerks nicht entartet sind, müssen wir noch eine kleine Vorsichtsmaßnahme ergreifen: Die drei ausgewählten Stäbe dürfen **nicht** durch den gleichen Knoten gehen.

Dieses elegante Verfahren erproben wir gleich bei dem nebenstehenden Fachwerk. Im oberen Teil sind die notwendigen Daten angegeben, wobei wir diesmal die Punkte mit römischen Zahlen nummeriert haben. Im unteren Bild haben wir bereits erkannt, dass Stäbe 4, 5 (Regel 1 bei V), 8, 12 (Regel 3 bei I bzw. VII) und 10 (Regel 2 bei III) Nullstäbe sind und diese gestrichelt gezeichnet. Natürlich ist die horizontale Komponente der Lagerreaktionskraft I gleich 0; die beiden y-Komponenten erhält man durch die vertikale Gleichgewichtsbedingung und die Momentengleichung in Knoten VII. Der RITTERschnitt durch die Stäbe 3, 7 und 11 ist bereits ausgeführt: Das Fachwerk ist durch das Zerschneiden der grauen Stäbe in zwei Teile zerfallen.



Wir stellen zunächst die Momentengleichungen für den linken Teil in Knoten VIII und für den rechten Teil in Knoten IV auf und erhalten $-a \cdot S_3 - 2a \cdot F/3 = 0$ bzw. $S_3 = -2F/3$ sowie $2a \cdot 2F/3 - a \cdot S_7 = 0$, also $S_7 = 4F/3$. Da das linke Fachwerkteil sich horizontal im Gleichgewicht befindet, erhalten wir noch $S_{11} = -\sqrt{5} \cdot F/3$. Hieraus schließen wir $S_1 = -F/3$ (Gleichung Knoten I), $S_2 = S_3 = -2F/3$ (Knoten III) und daher $S_9 = +\sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \sqrt{5} \cdot F/3$ (Knoten II). Im rechten Teil erkennen wir $S_6 = S_7 = 4F/3$ (Knoten VII) und $S_{13} = -\sqrt{(2F/3)^2 + S_6^2} = -2\sqrt{5} \cdot F/3$ (Knoten VI). Damit haben wir alle Stabkräfte ohne große Mühe berechnet.

Aufgabe 7: Ermitteln Sie die Kräfte in dem folgenden Fachwerk.



7. Schlussbemerkung

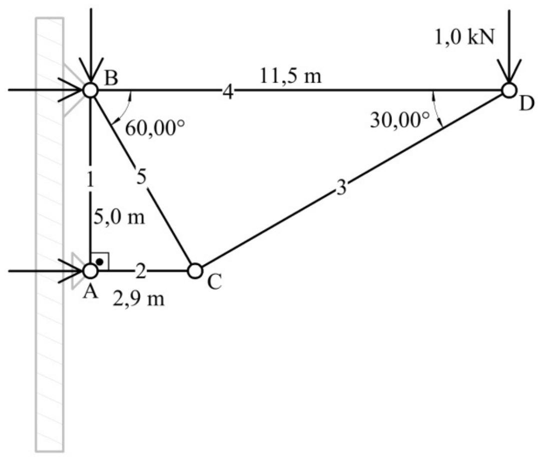
Bei unserer kleinen Exkursion in die Welt der Statik hat sich die lineare Algebra wieder einmal als ein Fundament der Anwendung von Mathematik auf praxisrelevante Probleme erwiesen. Insbesondere Theorie und Lösungsverfahren auch großer linearer Gleichungssysteme, die einfache Vektorrechnung und der Begriff der linearen Unabhängigkeit sind für einen Ingenieur oder Naturwissenschaftler nicht wegzudenkendes Grundlagenwissen. Umso bedauerlicher ist das Verschwinden des GAUßalgorithmus vom Lehrplan der meisten Bundesländer sowie zu fortschreitende Entfernung der Geometrie aus dem Schulunterricht. Diese Entscheidungen sollten gerade mit Blick auf die Studierfähigkeit in den MINT-Fächern überdacht werden.

Anhang: Lösungen der Aufgaben

Lösung Aufgabe 1: Zunächst fertigen wir ein Freikörperbild an. Die Lagerreaktionskräfte bezeichnen wir mit A_x, B_x und B_y. Anschließend legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt A und erhalten:

$$A=\begin{pmatrix}0,0\\0,0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0,0\\5,0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2,9\\0,0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}11,5\\5,0\end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich folgende Gleichungen in den Knoten:



$$A_x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+S_1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+S_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$B_x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+B_y\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+S_1\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+S_4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+S_5\cdot\begin{pmatrix}0,50\\-0,87\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$S_2\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+S_3\cdot\begin{pmatrix}0,87\\0,50\end{pmatrix}+S_5\cdot\begin{pmatrix}-0,50\\0,87\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$S_3\cdot\begin{pmatrix}-0,87\\-0,50\end{pmatrix}+S_4\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Die Einheitsvektoren der Richtungen der Stabkräfte erhält man sowohl aus den Koordinaten der Punkte A bis D als auch durch Betrachtung von Winkeln: $\cos(30°)=\sin(60°)=\sqrt{3}/2\approx 0,87$ und $\sin(30°)=\cos(60°)=0,5$. In Matrixschreibweise liest sich das Gleichungssystem so:

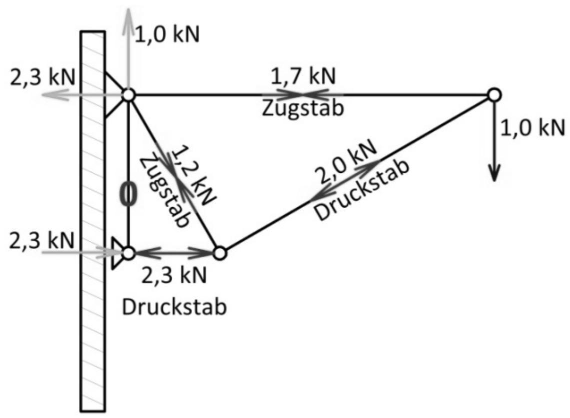
$$\begin{pmatrix} 0{,}00 & 1{,}00 & . & . & . & 1{,}00 & . & . \\ 1{,}00 & 0{,}00 & . & . & . & 0{,}00 & . & . \\ 0{,}00 & . & . & 1{,}00 & 0{,}50 & . & 1{,}00 & 0{,}00 \\ -1{,}00 & . & . & 0{,}00 & -0{,}87 & . & 0{,}00 & -1{,}00 \\ . & -1{,}00 & 0{,}87 & . & -0{,}50 & . & . & . \\ . & 0{,}00 & 0{,}50 & . & 0{,}87 & . & . & . \\ . & . & -0{,}87 & -1{,}00 & . & . & . & . \\ . & . & -0{,}50 & 0{,}00 & . & . & . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ A_x \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 1{,}0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems (in kN):

$S_1 = 0{,}0 \quad S_2 = -2{,}3 \quad S_3 = -2{,}0 \quad S_4 = 1{,}7 \quad S_5 = 1{,}2$

$A_x = 2{,}3 \quad B_x = -2{,}3 \quad B_y = -1{,}0$

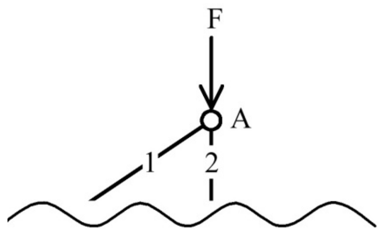
Damit erhalten wir das nebenstehende Bild.



Lösung Aufgabe 2: Bei einem räumlichen Fachwerk liefert jeder Knoten drei Gleichgewichtsbedingungen. Die gesuchte notwendige Bedingung lautet daher:

$$3 \times (\text{Anzahl der Knoten}) = (\text{Anzahl der Stäbe}) + (\text{Anzahl der Lagerreaktionskräfte})$$

Lösung Aufgabe 3: Legen wir ein Koordinatensystem mit Richtung 2 als y-Achse fest, so lautet die äußere Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$ als äußere Kraft und die Stabkraft $\vec{S}_2 = S_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei wir auf die Orientierung der Kräfte keinerlei Rücksicht nehmen.

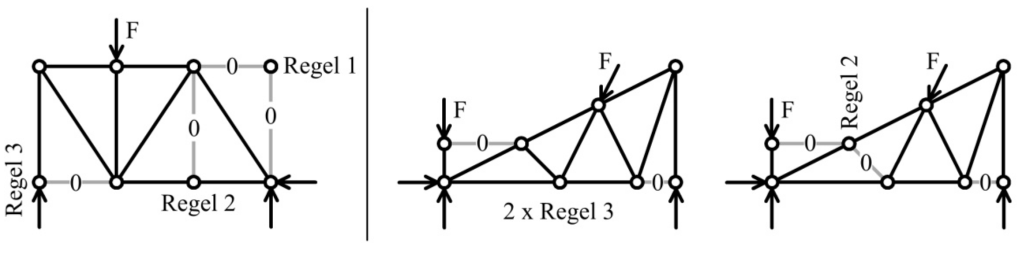


Nach Voraussetzung gilt für die zweite Stabkraft $\vec{S}_1 = S_1 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit $u \neq 0$. Die Gleichgewichtsbedingung

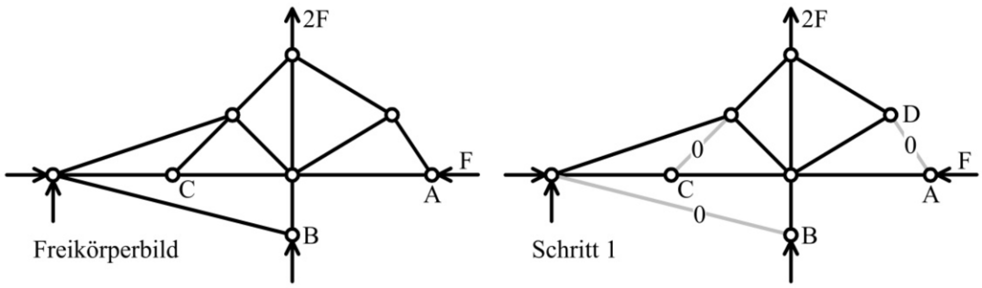
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + S_1 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + S_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \cdot u \\ \ldots \end{pmatrix}$$

zeigt das Verschwinden von S_1.

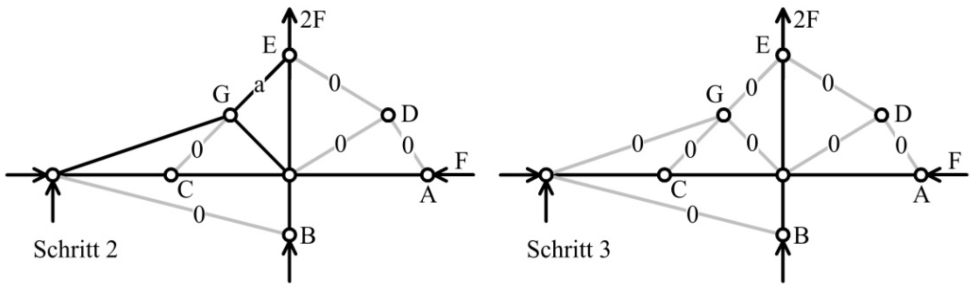
Lösung Aufgabe 4: Die Nullstäbe sind jeweils grau gefärbt und mit „0“ bezeichnet, die verwendete Regel wurde an dem entsprechenden Knoten notiert. Beim letzten Fachwerk sind zwei Schritte nötig.



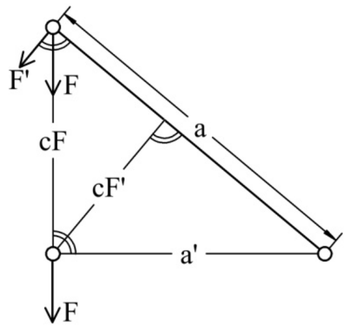
Für das letzte Fachwerk muss man etwas mehr arbeiten: Nach Erstellen des Freikörperbildes wenden wir die dritte Regel jeweils auf Knoten A und B sowie Regel 2 auf Knoten C an. Dies liefert drei Nullstäbe im ersten Schritt.



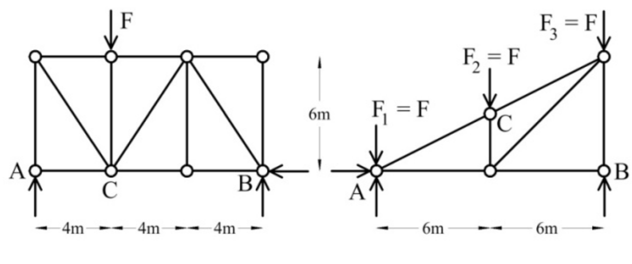
Anschließend erkennen wir D als unbelasteten Zweischlag (der Nullstab zählt ja nicht mit). Damit haben wir die mit „Schritt 2“ bezeichnete Situation erreicht. Anwenden der dritten Regel bei Knoten E zeigt, dass auch Stab a ein Nullstab ist. Lässt man auch diesen weg, so bleibt in Knoten G nur ein unbelasteter Zweischlag übrig, und Regel 1 liefert nun das Endbild.



Lösung Aufgabe 5: Verlängern wir F zu cF mit geeignetem c, so entsteht das in der Skizze gezeigte rechtwinklige Dreieck. Wir überlegen uns, dass dann cF' die Höhe dieses Dreiecks ist. Den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks kann man nun auf zwei Arten ausdrücken: $a \cdot (cF') = a' \cdot (cF)$. Hieraus erhält man $a \cdot F' = a' \cdot F$; die Kraft F darf daher tatsächlich längs ihrer Wirklinie verschoben werden.



Lösung Aufgabe 6: Wir erstellen zunächst Freikörperbilder (vgl. Bild rechts). Im linken Fachwerk ergeben die Gleichgewichtsbedingungen und die Momentengleichung (Knoten C)



$$B_x = 0$$

$$A_y + B_y = F$$

$$-A_y \times 4\,\text{m} + B_y \times 8\,\text{m} = 0$$

und damit ist $A_y = 2F/3,\ B_x = 0,\ B_y = F/3$.

Im rechten Fachwerk gilt $A_x = 0$ sowie $A_y + B_y = 3F$. Um die Momentengleichung im Knoten A aufzustellen, beachten wir, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ auf der Geraden AC senkrecht steht und dass der Abstand zwischen A und C gerade $3\sqrt{5}$ m beträgt. Damit lautet die gesuchte Gleichung

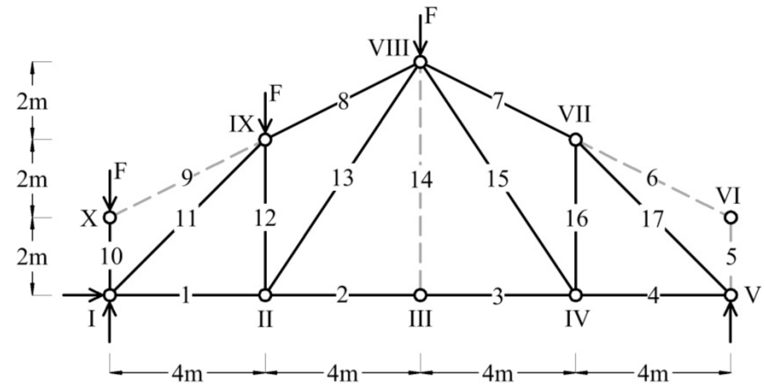
$$0 = -\left(\frac{2}{\sqrt{5}}F\right) \cdot (3\sqrt{5}\,\text{m}) - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}F\right) \cdot (6\sqrt{5}\,\text{m}) + B_y \cdot 12\,\text{m} = B_y \cdot 12\,\text{m} - F \cdot 18\,\text{m}.$$

(Alternativ und wesentlich einfacher erhalten wir diese Gleichung, wenn wir zunächst die Kräfte F_2 und F_3 längs ihrer Wirklinie verschieben.) Hieraus folgt $A_y = B_y = 1{,}5 \cdot F$. Einfacher wird es allerdings, wenn wir die Momentengleichung für Knoten C aufstellen, da sich hier die Momente von F_1 und F_2 sowie die von A_y und B_y aufheben: Die jeweiligen zum Kraftarm senkrechten Komponenten sind betragsmäßig gleich und entgegengesetzt und die Länge der Kraftarme ist in beiden Fällen die gleiche. Somit ergibt sich auch hier $A_y = B_y$.

Lösung Aufgabe 7: Zunächst zeichnen wir das Freikörperbild und bezeichnen Knoten und Stäbe:

Die folgenden Stäbe sind Nullstäbe und bereits gestrichelt gezeichnet.
5 und 6: Regel 1 bei Knoten VI
14: Regel 2 bei Knoten III
9: Regel 3 bei Knoten X

Einige Informationen erhalten wir als Geschenk, indem wir die Gleichgewichtsbedingungen an zwei Knoten aufstellen.
$S_{10} = -F$: Knoten X
$S_2 = S_3$: Knoten III
$I_x = 0$: horizontales Gleichgewicht



Die Lagerreaktionskräfte werden wie immer aus den Gleichgewichtsbedingungen des Fachwerks berechnet:

Vertikales Gleichgewicht $\quad I_y + V_y = 3 \cdot F$

Momentengleichgewicht in Knoten III $\quad 8 \cdot I_y = 8 \cdot F + 4 \cdot F + 8 \cdot V_y = 12 \cdot F + 8 \cdot V_y$

Hieraus folgt unmittelbar $V_y = 3F/4$ und $I_y = 9F/4$. Damit lautet die Gleichgewichtsbedingung in Knoten I

$$\begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} + S_{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + S_{11} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + S_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + S_{11} \cdot \sqrt{2}/2 + S_1 \\ 9F/4 - F + S_{11} \cdot \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was $S_{11} = -\frac{5\sqrt{2}}{4} \cdot F$ und $S_1 = \frac{5}{4} \cdot F$ zeigt. Für den Knoten V lautet die Gleichung

$$S_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_{17} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3F/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. $S_{17} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot F$ und $S_4 = \frac{3}{4} \cdot F$.

Jetzt schlägt die Stunde des RITTERschnitts, den wir durch die Stäbe 3, 15 und 7 durchführen. Die äußeren Kräfte am rechten Teil des Fachwerks sind

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3F/4 \end{pmatrix}, \; \vec{S}_3 = a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (am Knoten IV) sowie } \vec{S}_7 = b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{S}_{15} = c \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (am Knoten VII).}$$

Wir erhalten die Gleichgewichtsbedingungen (Momentengleichung in Knoten IV)

$$a + 2b + 2c = 0, \quad b + 3c = -3F/4, \quad 4 \cdot (2b) = 4 \cdot (-3F/4)$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem auf und erhalten $a = F, \quad b = -3F/8, \quad c = -1/8$ bzw.

$$\vec{S}_3 = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_7 = \begin{pmatrix} 3F/4 \\ -3F/8 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_{15} = \begin{pmatrix} F/4 \\ -3F/8 \end{pmatrix}.$$

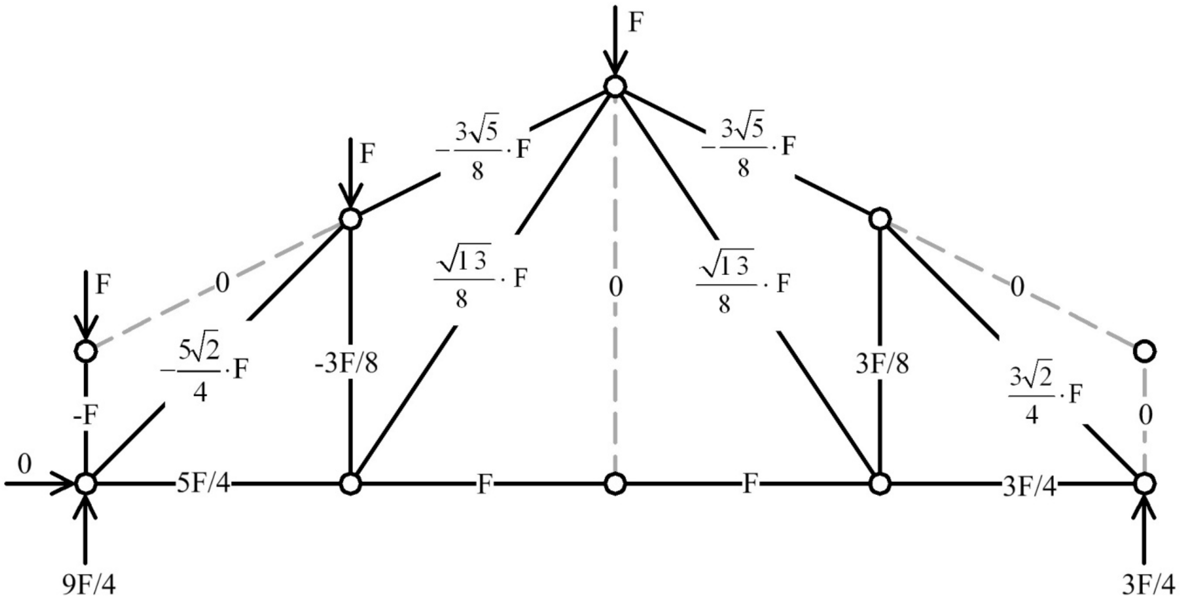
Berechnen der Längen dieser Vektoren liefert die gewünschten Stabkräfte

$$S_2 = S_3 = F, \quad S_7 = -\frac{3\sqrt{5}}{8} \cdot F, \quad S_{15} = \frac{\sqrt{13}}{8} \cdot F.$$

Völlig analog erhalten wir mit Hilfe eines RITTERschnitts durch die Stäbe 2, 13 und 8 die Kräfte

$$S_8 = -\frac{3\sqrt{5}}{8} \cdot F, \quad S_{13} = \frac{\sqrt{13}}{8} \cdot F.$$

Die beiden fehlenden Kräfte $S_{12} = -3F/8$, $S_{16} = 3F/8$ erhalten wir durch Betrachten der Knoten II und IV. Damit können wir die Lösung zeichnerisch darstellen:



Literatur

Dankert, J., Dankert, H. [1] Technische Mechanik, Teubner-Verlag 2006

Romberg, O., Hinrichs, N. [2] Keine Panik vor Mechanik! Springer-Verlag 2004

Gross, D., Hauger, W., Schnell, W. [3] Technische Mechanik 1, Springer-Verlag 1990

Meskouris, K., Hake, E. [4] Statik der Stabtragwerke, Springer-Verlag 1999

Hinweis: Im Internet gibt es eine große Anzahl von Skripten, Aufgaben und Klausuren zur Vorlesung „Technische Mechanik 1“. Nahezu immer sind in diesen Unterlagen auch durchgerechnete Beispiele von Fachwerken zu finden.

Adresse des Autors:
Professor Dr. Harald Löwe
Technische Universität Braunschweig
Institut Computational Mathematics
Pockelsstraße 14, 38106 Braunschweig
Mail: h.loewe@tu-bs.de