ESTRUCTURA Y TECNOLOGÍA DE COMPUTADORES I

CAPÍTULO III

ARITMÉTICA Y CODIFICACIÓN

TEMA 3. Aritmética y codificación

- 3.1 Aritmética binaria
- 3.2 Formatos de los números y su representación
- 3.3 Definiciones y codificación de la información
- 3.4 Códigos binarios
- 3.5 Tipos

3.1 Aritmética binaria

Aritmética binaria $\begin{cases} \text{Suma} \\ \text{Resta} \end{cases}$

- SUMA BINARIA

Tabla 3.1. Tabla de suma binaria.

$a\ b$	$S = a + b$	C (acarreo)
0 0	0	0
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1

Realice la suma de dos números binarios, de valor en decimal 7 y 12.

Solución:

El valor binario del decimal 7 es **1 1 1** y el de 12 es **1 1 0 0**. Así, la suma binaria sería:

$$\begin{array}{rrrrrrl} & 1 & 1 & & & & \text{(acarreo)} \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ + & & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array}$$

Al revisar el resultado, se comprueba que el número binario **1 0 0 1 1** es el equivalente en decimal al 19, resultado de la suma anterior.

RESTA BINARIA

Tabla de la resta binaria:

a	b	R=a-b	p
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

RESTA BINARIA

Por ejemplo 1101 (13) - 110 (6):

1º) 1 - 0 = **1**

2º) 0 - 1 = **1** y préstamo = 1

3º) Con lo que la siguiente operación que sería 1 - 1 se convierte en (1 - 1) - 1 que es igual a (0) - 1 que de nuevo nos da un **1** como resultado y otro 1 de préstamo.

4º) El minuendo 1 no tiene sustraendo pero como en la operación 3 obtuvimos un préstamo debemos hacer 1(préstamo) - 1 (minuendo) = **0**

Con lo que el resultado queda **0111** que es 7

Gráficamente se tiene:

	1	1	0	1	a
-		1	1	0	b
	1	1			p
	0	1	1	1	R

$(13)_{10} – (6)_{10} = (7)_{10}$

3.2 Formatos de los números y su Representación

Los **números reales** se clasifican en:

- **Naturales**: 0, 1, 2, 3, …
- **Enteros** (positivos y negativos): … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …
- **Racionales**. Se expresan como cociente entre dos enteros. Estos números se representan con un número finito de decimales o mediante forma periódica:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\hat{3}$$

- **Irracionales**. No tienen una correspondencia con las clases anteriores. Se representan con un número infinito de decimales no periódicos:

$$\sqrt{2} \text{ y } \sqrt{3}$$

Dentro de los números irracionales destacan los **transcendentes**, como el número π y el número e.

Representación de los números

- Coma fija + signo
- Complemento a 1
- Complemento a 2
- Exceso a n

Representación números

- Los conjuntos anteriores son infinitos, mientras que el espacio material de representación de los sistemas digitales es finito
- Los sistemas digitales se asigna un número fijo de "**n**" de bits para representar un número
- Con "**n**" bits se pueden representar 2^n combinaciones distintas.
- Se denomina **rango de representación**
  - Al intervalo comprendido entre el menor y el mayor número representable.
- Se denomina **resolución de la representación**
  - A la mayor diferencia que existe entre un número representable y su inmediato siguiente o sucesor.
  - Este parámetro determina el máximo error que se puede cometer al representar un número.

3.2.1Representación de los números en **coma fija sin signo**

- Representación de los números naturales en binario puro (sin signo)
  - Rango:
    - Con n bits se pueden representar desde cero hasta 2^n-1 => $[0, 2^n-1]$
  - Resolución:
    - La unidad
  - Ejemplo con 8 bit: $2^{8=}256$
    - 00000000 – 11111111 [o, 255]

3.2.2 Representación de números en coma fija **con signo**

- Formato de números binarios con signo-magnitud
  - Utiliza uno de los dígitos, el situado más a la izquierda del número, para indicar su signo.
    - Recibe el nombre de signo-magnitud
    - 0 -> positivo; 1 -> negativo
  - Rango: $[-(2^{n-1}-1), +(2^{n-1}-1)]$
  - Ejemplo con 8 bits:
    - 0 0000000 -> 0 1111111 [+ 0, + 127]
    - 1 0000000 -> 1 1111111 [- 0, - 127]
    - $-(2^{8-1}-1), +(2^{8-1}-1) = -(128-1),+(128-1)$
    - Rango = [-127,+127]

BS

Signo

$1 \quad \underbrace{0101101} = -\ 45$

Magnitud

BS

Signo

$1 \quad \underbrace{0001101} = -\ 13$

Magnitud

BS

Signo

$0 \quad \underbrace{0011101} = +\ 29$

Magnitud

BS

Signo

$0 \quad \underbrace{0000000} = +\ 0$

Magnitud

BS

Signo

$1 \quad \underbrace{0000000} = -\ 0$

Magnitud

3.2.3 Complementos

- Complemento a la base
  - Dado un número positivo N, de "**n**" dígitos enteros y representado en base "**b**", se define su **complemento a la base**, como el número $C_b(N)$ que cumple:
    - $N+C_b(N)=b^n$
    - $C_b(N)=b^n-N$
    - b^n= a la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el número

a) El complemento a diez de $72_{(10}$ es igual a:

$C_{10}(72) = 10^2 - 72 = 100 - 72 = 28_{(10}$

b) $C_{10}(28) = 10^2 - 28 = 100 - 28 = 72$. Observando los apartados a) y b) se aprecia que se cumple que el complemento del complemento es el número original.

c) $C_2(110{,}01) = 2^3 - 110{,}01 = 1000 - 110{,}01 = 001{,}11$

El número binario ($b = 2$), $N = 110{,}01$ tiene tres dígitos enteros ($n = 3$) y dos fraccionarios (m = 2), luego $C_2(N) = b^n - N = 2^3 - 110{,}01 = 1000 - 110{,}01 = 001{,}11$. Obsérvese que b^n es la potencia de la base inmediatamente superior a N.

Complemento a la base menos uno

Dado un número positivo N en base b, compuesto por n dígitos en la parte entera y m dígitos en la parte fraccionaria, se define su complemento a la base menos uno, como el número $C_{b\text{-}1}(N)$ que cumple:

$$N + C_{b-1}(N) = b^n - b^m \qquad [3.5]$$

Cuando la parte fraccionaria es cero, $b^m = b^0 = 1$, siendo en este caso el complemento a la base menos uno igual a:

$$C_{b-1}(N) = b^n - 1 - N \qquad [3.6]$$

Se debe observar que b^n - 1 es el valor máximo que se puede representar en la base b con n dígitos enteros.

a) El complemento a nueve de 72 $_{(10}$ es igual a:

$C_9(72) = 10^2 - 1 - 72 = 99 - 72 = 27$.

b) $C_9(27) = 10^2 - 1 - 27 = 99-27 = 72$.

Observando los ejemplos a) y b) se aprecia que se cumple que el complemento del complemento es el número original.

c) El número binario ($b = 2$), $N = 110{,}01$ tiene tres dígitos enteros ($n = 3$) y dos fraccionarios ($m = 2$), luego $C_1(N) = (b^n - b^{-m}) - N = (2^3 - 2^{-2}) - 110{,}01 = (111{,}11) - 110{,}01 = 001{,}10$.

Obsérvese que $(b^n - b^{-m})$ es igual al máximo valor numérico que se puede representar con n dígitos enteros y m fraccionarios en la base b.

d) Por definición, el complemento a la base menos uno de un número igual a cero con un dígito entero ($n = 1$) vale: $C_{b-1}(0) = b^n - 1 - 0 = b - 1$ y con n dígitos enteros sería: $C_{b-1}(00..00) = b^n - 1 - 0 = b^n - 1$.

Complemento a dos

- Números positivos.
  - Se representan por el bit de signo BS igual a 0, seguido de los bits de magnitud codificados en binario natural.
- Números negativos.
  - Se obtienen hallando el complemento a dos del valor absoluto del número.
  - Método 1:
    - Representar el valor absoluto del número, cambiando todos los bits uno por cero y los bits cero por uno (operación de complementación) y sumarle uno.
  - Método 2:
    - Representar el valor absoluto del número, dejando todos los ceros y el primer uno menos significativo sin cambio y cambiando unos por ceros y ceros por unos en el resto de los bits más significativos.
- Rango: $[-2^{n-1}, +2^{n-1}-1]$ **asimétrico** [-128, +127]
  - Una única representación para el cero

Tabla 3.3. Representación de números binarios de 4 bits mediante el convenio de complemento a dos.

Decimal	Convenio del complemento a dos
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000
-1	1111
-2	1110
-3	1101
-4	1100
-5	1011
-6	1010
-7	1001
-8	1000

$$42_{(10} = \underset{\downarrow}{\overset{\text{BS}}{}}\,0\ \overbrace{0101010}^{\text{Magnitud}}$$

Método 1:

$0\ 0101010 = 42_{(10}$		Valor positivo
$1\ 1010101$		Complementa bits
$+\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1$		Sumar uno
$1\ 1010110 = -42_{(10}$		

Método 2:

Primer uno menos significativo

Complementar bits

Sin cambiar bits

$$\overbrace{0\ 01010}^{\text{Complementar bits}}\overbrace{10}^{\text{Sin cambiar bits}} = 42_{(10}$$

$$1\ 1010110 = -42_{(10}$$

Figura 3.2. Representación mediante el convenio de complemento a dos de los números decimales 42 y –42.

Complemento a uno

- Números positivos.
  - En la representación en signo-magnitud,
- Números negativos.
  - Se obtienen hallando el complemento a uno del valor absoluto (valor positivo) del número
- Otro método,
  - A partir del valor absoluto (valor positivo) del número cambiar todos los bits uno por cero y los bits cero por uno (operación de complementación).
- Rango: $[-(2^{n-1}-1), +(2^{n-1}-1)]$ simétrico $[-127, +127]$
- Dos representaciones para el cero +0 y -0

$$42_{(10} = \overset{\text{BS}}{\overset{\downarrow}{0}}\ \overbrace{0101010}^{\text{Magnitud}}$$

$$0\ \ 0101010 = 42_{(10}$$

$$1\ \ 1010101 = -\,42_{(10}\ \ \text{(Complementa bits)}$$

Figura 3.3. Representación mediante el convenio de complemento a uno de los números decimales 42 y –42.

Tabla 3.5. Números binarios con signo de cuatro bits representados en las tres diferentes formas estudiadas.

Decimal	Signo-magnitud	Convenio del complemento a uno	Convenio del complemento a dos
7	0111	0111	0111
6	0110	0110	0110
5	0101	0101	0101
4	0100	0100	0100
3	0011	0011	0011
2	0010	0010	0010
1	0001	0001	0001
0	0000	0000	0000
-0	1000	1111	···
-1	1001	1110	1111
-2	1010	1101	1110
-3	1011	1100	1101
-4	1100	1011	1100
-5	1101	1010	1011
-6	1110	1001	1010
-7	1111	1000	1001
-8	···	···	1000

DECIMAL	COMA FIJA+SIGNO	COMPLEMEN A1	COMPLEMEN A2	EXCESO 128
+127	01111111	01111111	01111111	11111111
+126	01111110	01111110	01111110	11111110
+125	01111101	01111101	01111101	11111101
......	......	......	......	......
......	......	......	......	......
......	......	......	......	......
+2	00000010	00000010	00000010	10000010
+1	00000001	00000001	00000001	10000001
+0	00000000	00000000	00000000	10000000
-0	10000000	11111111	00000000	10000000
-1	10000001	11111110	11111111	01111111
-2	10000010	11111101	11111110	01111110
-3	10000011	11111100	11111101	01111101
......	......	......	......	01111100
......	......	......	......	......
......	......	......	......	......
-126	11111110	10000001	10000010	00000010
-127	11111111	10000000	10000001	00000001
-128			10000000	00000000

3.2.4 Representación de números reales en binario

- Coma Fija
  - Se representa mediante dos partes separadas mediante una coma.
    - A la izquierda de la coma se encuentra la parte entera,
    - A su derecha está la parte fraccionaria.
  - Cada una de estas partes tienen un número de bits fijo
  - Para representar números muy grandes o muy pequeño necesitan muchos bits

Coma flotante

Mantisa	Base	Exponente
$M = 4{,}52$	$b = 10$	$E = -12$

$$4{,}52 \; 10^{-12}$$

Generalizando, un número N en coma flotante tiene la siguiente composición:

$$N = S \; M(b)^{E} \qquad [3.12]$$

- La precisión de los cálculos
  - Depende directamente del número de dígitos que tenga la mantisa,
- Rango de representación, o valores extremos que el sistema digital es capaz de manejar
  - Lo determina el número de dígitos que tienen el exponente.

Normalización de las mantisas

- Para evitar representaciones múltiples

Normalización de mantisas:

Números		Números con mantisa normalizada
$110{,}01 \cdot 2^{000}$	$\longrightarrow$	$0{,}11001000 \cdot 2^{011}$
$0{,}00110011 \cdot 2^{011}$	$\longrightarrow$	$\underbrace{0{,}11001100}_{\text{Mantisa de 8 bits}} \cdot 2^{001}$

IEEE 754 (32 bits)

- **Un bit de signo** S, que es el signo de la mantisa,
- **El campo del exponente** E de 8 bits (incluido implícitamente el signo del exponente), y,
- El campo de **la mantisa** m de 23 bits;

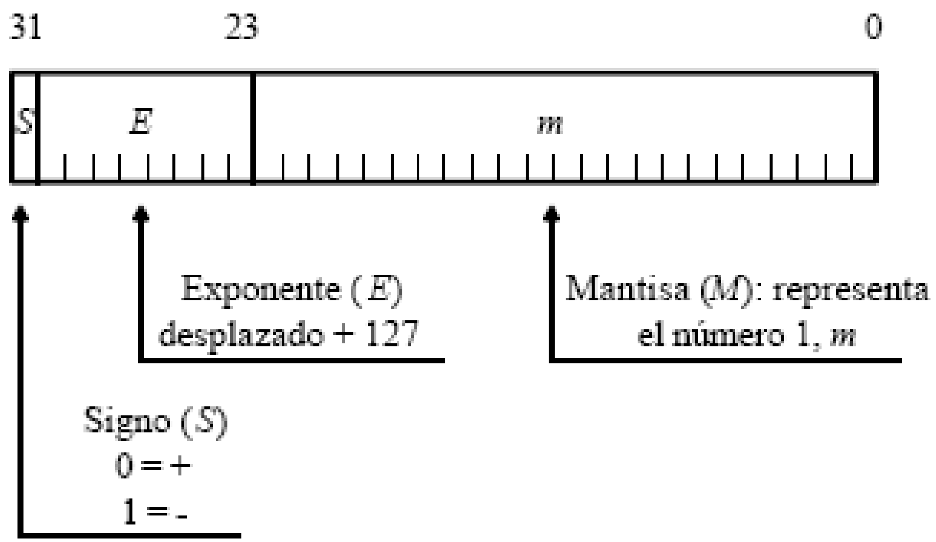


Figura 3.4. Formato de almacenamiento de números binarios en coma flotante, según el estándar IEEE 754.

Representación en binario en coma flotante

Componentes de la representación en coma flotante

- Signo: 0 para números mayores que 0 /1 para menores que 0
- Mantisa: se representa en coma fija y formato normalizado
- Exponente: se representa en exceso $2^{n-1}-1$
- Base

FORMATO IEEE754 (Doble Precisión)		
Signo	Bit 31 (1 bit)	Nº > 0 ⇒ 0
		Nº < 0 ⇒ 1
Exponente	Bits 30÷23 (8 bits)	Exceso $2^{8-1}-1=127$
Mantisa	Bits 22 ÷ 0 (23 bits)	Representación normalizada ⇒ el bit más significativo es siempre “1” y no se representa

Bit nº	31	30 29 28 27 26 25 24 23	22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
	S	Exponente	Mantisa
	Nº > 0 ⇒ 0 Nº < 0 ⇒ 1	Exceso $2^{8-1}-1=127$	Representación normalizada ⇒ el bit más significativo es siempre “1” y bit implicito ⇒ no se representa

Tabla 3.6. Casos especiales de representación del número N, en coma flotante, según el estándar IEEE 754.

Exponente	**Mantisa**	**Observación**
$E = 255$	$M \neq 0$	$N = \frac{0}{0}$
$E = 255$	$M = 0$	Si $S = 0$ entonces $N = \infty$ Si $S = 1$ entonces $N = -\infty$
$E = 0$	$M = 0$	Para $N = 0$
$E = 0$	$M \neq 0$	Para N próximo a cero

Procedimiento para pasar de decimal a coma flotante:

Ejemplo: Pasar el nº $-6{,}125_{(10}$ a binario IEEE754

1º.- El bit 31 tomará el valor del signo de la mantisa. ($-6{,}125 \Rightarrow - \Rightarrow$ 1)

2º.- Pasar a binario la mantisa decimal.

6=110

0,125=0,001

$6{,}125=110{,}001_{(2}$

3º.- Normalizar. Correr la coma a derecha o izquierda hasta convertir el número binario en un numero de la forma 1,……..

El número de desplazamientos va a dar valor al exponente de forma que:

Desplazamiento a la derecha $\Rightarrow$ Exponente negativo

Desplazamiento a la izquierda $\Rightarrow$ Exponente positivo

$6{,}125=110{,}001_{(2} \Rightarrow 1{,}10001 \Rightarrow$ Exponente = 2

2 expresado en exceso 127 $\Rightarrow$ 129 $\Rightarrow 10000001_{(2}$

4º.- Mantisa representada con bit implícito $\Rightarrow$ 1,10001 $\Rightarrow$ 10001 (el bit 1 de la parte entera no se representa)

5º.- El número final es 1 10000001 10001000000000000000000 (Se agregan a la derecha los "0" necesarios para completar los 23 bits de la mantisa)

6º.- Pasado a hexadecimal 1 100 0000 1 100 0100 0000 0000 0000 0000 = $C0C40000_{(16}$

Procedimiento para pasar de coma flotante a decimal:

1º.- Convertir a binario el número hexadecimal

$C0C40000_{(16} = 1100\ 0000\ 1100\ 0100\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_{(2}$

2º.- Identificar los campos del número binario

1 10000001 10001000000000000000000

Sino de la mantisa Exponente representado en exceso 127

Mantisa normalizada con bit implicito

3º.- Convertir cada uno de los campos a decimal

1 $\Rightarrow$ Mantisa negativa

$10000001_{(2} \Rightarrow 129 \Rightarrow +2$

$10001000000000000000000_{(2} \Rightarrow 1,10001000000000000000000_{(2} \Rightarrow$ Con exponente +2 $\Rightarrow$ Hay que desplazar la coma a la derecha (+2) 2 posiciones $\Rightarrow$ $110,001000000000000000000_{(2} \Rightarrow 6,125_{(10}$

4º.- El número final es la combinación de todos los valores de los campos -6,125

3.9. Expresar en formato binario de coma flotante de 32 bits según el estándar IEEE754

a) $-1023 \cdot 10^{-24}$

Según la expresión del estándar: $N = (-1)^S \cdot 2^{E-127} \cdot (1,m)$

- Paso 1: **Signo negativo** $\Rightarrow$ el primer dígito en el formato IEEE754 será un **1**.

- Paso 2: **Mantisa:**
  1. Todo número se puede aproximar a una potencia de 2. (Se trabaja con el número sin signo a partir de aquí)
     Entonces:
     $$1023 \cdot 10^{-24} = 2^x$$
  2. Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad:
     $$\log(1023 \cdot 10^{-24}) = \log(2^x)$$
  3. El logaritmo del producto es la suma de los logaritmos:
     $$\log(1023) + \log(10^{-24}) = \log(2^x)$$

4. El logaritmo de un número elevado a un exponente es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

$$\log(1023) + (-24)\cdot\log(10) = x\cdot\log(2)$$

5. $\log(10) = 1$ y despejamos la x:

$$x = \frac{\log(1023) - 24}{\log(2)} = \frac{3{,}0098 - 24}{0{,}30} = -69{,}72$$

6. El valor obtenido para x se aproxima al número entero inmediatamente menor. En este caso, -69,72 se aproxima a -70, de donde tenemos que, para la igualdad del paso 1, se tiene que:

$$1023\cdot 10^{-24} = 2^{-69{,}72}$$

Y aproximando: $1023\cdot 10^{-24}$ z 2^{-70}

7. Para que la aproximación vuelva a ser una igualdad, aplicamos un factor de corrección que va a ser nuestra mantisa

$$1023\cdot 10^{-24} = M\cdot 2^{-70}$$

De donde c = 1,20774522799391763402752

- 8. Este valor es la mantisa que estamos buscando (el 1 obtenido en la parte entera ya está normalizado y no se tiene en cuenta.), pero hay que convertirla a binario. Utilizamos el método para convertir partes fraccionarias visto en el tema 2

0,207745 X 2 = 0,41549
0,41549 x 2 = 0,83098
0,80398 x 2 = 1,66196
0,66196 x 2 = 1,32392
0,32392 x 2 = 0,64784
0,64784 x 2 = 1,29568
0,29568 x 2 = 0,59136
0,59136 x 2 = 1,18272

0, 18272 x 2 = 0,36544
0, 36544 x 2 = 0,73088
0, 73088 x 2 = 1,46176
0, 46176 x 2 = 0,92352

(Seguimos hasta donde queramos en función de la precisión que busquemos)

9. Por lo tanto, la mantisa buscada es:

m = 0011010

- Paso 3: **Exponente**:

1. Según el paso 7: $1023 \cdot 10\text{-}^{24} = M \cdot 2\text{-}^{70}$, con M = (1,m), según acabamos de calcular.

   Según la expresión del estándar: $N = (-1)^{S} \cdot 2^{E-127} \cdot (1,m)$.

   De estas dos expresiones, se deduce que:

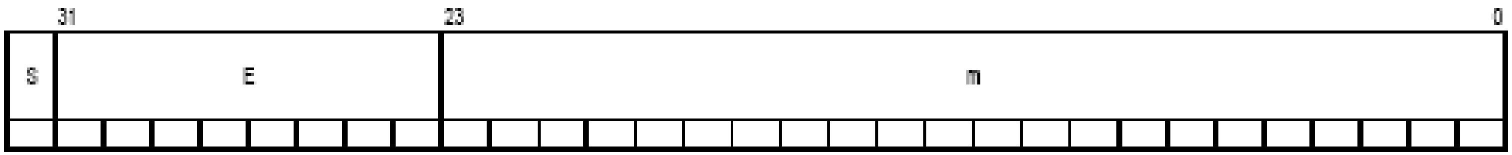
   $$2^{e-127} = 2^{-70}$$

   De donde e = 127 – 70 = 57

2. Este exponente en binario:

   $$57)_{10} = 111001)_{2}$$

- Paso Final: **Escribirlo según el formato IEEE254 de 32 bits**



1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

En **hexadecimal:**

1001	**1100**	**1001**	**1010**	**1001**	**0100**	**0000**	**0000**
9	C	9	A	9	6	0	0

3.3 Definiciones y codificación de la información

- Codificación
  - La aplicación que hace corresponder a cada símbolo del alfabeto fuente F_i con una palabra código
- UNIFORMIDAD:
  - Un código es uniforme si a cada símbolo fuente le corresponde una palabra código. (código bloque)
- NO SINGULARIDAD:
  - Un código uniforme es no singular si a cada símbolo fuente le corresponde palabras de código distintas.
- DECODIFICACIÓN UNÍVOCA:
  - Un código es unívocamente decodificable si, y sólo si, su extensión de orden n es no singular para cualquier valor finito n.

DECODIFICACIÓN INSTANTANEA:

- Se denomina instantáneo, a un código unívocamente decodificable, cuando éste permite decodificar sin ambigüedad las palabras contenidas en una secuencia de símbolos del alfabeto código, sin necesitar el conocimiento de los símbolos que les suceden.

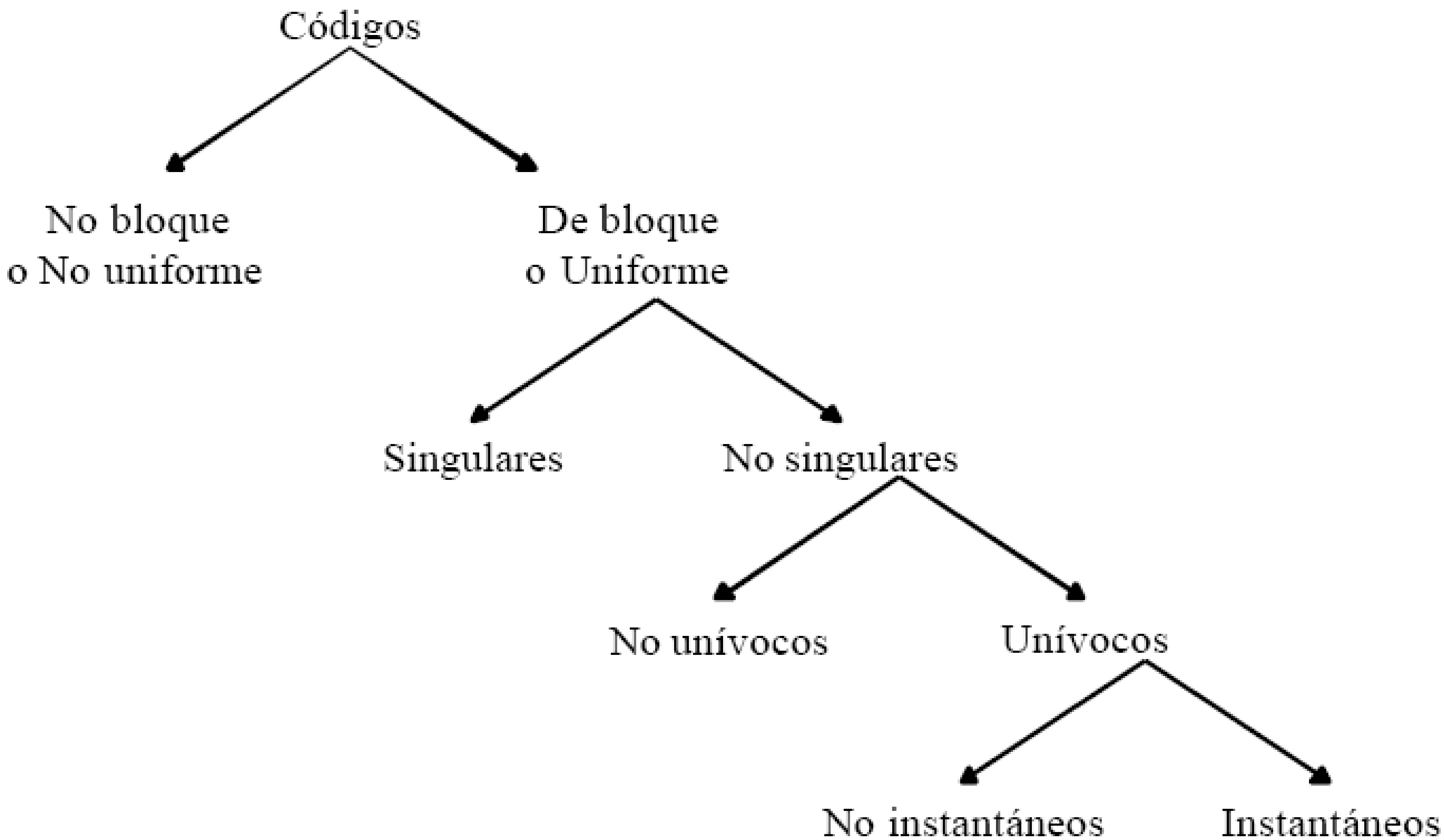


Figura 3.5. Resumen de las propiedades de los códigos.

Códigos binarios

- Conceptos:
  - Ponderados:
    - Cada dígito tiene un peso de acuerdo al lugar que ocupe en la serie que compone la cifra.
  - Distancia:
    - Entre dos palabras de un código es el número de dígitos que se invierten.
  - Distancia de binario:
    - La menor de las distancias.
  - Palabras adyacentes:
    - Aquellas cuya distancia es 1
  - Códigos continuos:
    - Palabras consecutivas son adyacentes.
  - Códigos cíclicos:
    - Primera y última palabra adyacentes.
  - Códigos densos:
    - Con "**n**" bits una capacidad de representación de 2^n palabras de código.
  - Códigos autocomplementarios:
    - Cuando cada palabra + su complemento a 1 = N

Tipos de códigos

Tipos de códigos binarios

- Numéricos
- Alfanuméricos
- Detectores de error
- Correctores de error

- Códigos numéricos
  - Código binario natural
  - BCD natural
  - BCD AIKEN 2421
  - BCD AIKEN 5421
  - BCD AIKEN 642-3
  - BCD DE EXCESO 3

Tabla 3.15. Código binario natural de 4 bits.

Decimal	Binario natural B_3 B_2 B_1 B_0	Decimal	Binario natural B_3 B_2 B_1 B_0
0	0 0 0 0	8	1 0 0 0
1	0 0 0 1	9	1 0 0 1
2	0 0 1 0	10	1 0 1 0
3	0 0 1 1	11	1 0 1 1
4	0 1 0 0	12	1 1 0 0
5	0 1 0 1	13	1 1 0 1
6	0 1 1 0	14	1 1 1 0
7	0 1 1 1	15	1 1 1 1

Tabla 3.16. Propiedades del código binario natural.

Propiedad	Binario natural
Ponderado	Sí
Distancia de código	1
Continuo	No
Cíclico	No
Denso	Sí
Autocoplementario	2^n-1

Tabla 3.17. Código BCD Natural o BCD 8421.

Decimal	**BCD Natural o BCD 8421**			
Pesos →	**8**	**4**	**2**	**1**
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	1	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

Tabla 3.18. Propiedades del código BCD Natural o BCD 8421.

Propiedad	BCD Natural o BCD 8421
Ponderado	Sí
Distancia de código	1
Continuo	No
Cíclico	No
Denso	No
Autocoplementario	No

Tabla 3.19. Códigos BCD Aiken.

Decimal	BCD Aiken 2421				BCD Aiken 5421			
	2	4	2	1	5	4	2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	1	0	0	0
6	1	1	0	0	1	0	0	1
7	1	1	0	1	1	0	1	0
8	1	1	1	0	1	0	1	1
9	1	1	1	1	1	1	0	0

Tabla 3.20. Propiedades de los códigos BCD Aiken.

Propiedad	**BCD Aiken 2421**	**BCD Aiken 5421**
Ponderado	Sí	Sí
Distancia de código	1	1
Continuo	No	No
Cíclico	No	No
Denso	No	No
Autocoplementario	a 9	No

Tabla 3.21. Código BCD 642-3.

Decimal	**BCD 642-3**			
Pesos →	**6**	**4**	**2**	**-3**
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	0	1	0	0
5	1	0	1	1
6	0	1	1	0
7	1	1	0	1
8	1	0	1	0
9	1	1	1	1

Tabla 3.22. Propiedades del código BCD 642-3.

Propiedad	**BCD 642-3**
Ponderado	Sí
Distancia de código	1
Continuo	No
Cíclico	No
Denso	No
Autocoplementario	a 9

Tabla 3.23. Código BCD de exceso 3.

Decimal	BCD de exceso 3
0	0 0 1 1
1	0 1 0 0
2	0 1 0 1
3	0 1 1 0
4	0 1 1 1
5	1 0 0 0
6	1 0 0 1
7	1 0 1 0
8	1 0 1 1
9	1 1 0 0

Tabla 3.24. Propiedades de los códigos BCD de exceso 3.

Propiedad	BCD de exceso 3
Ponderado	No
Distancia de código	1
Continuo	No
Cíclico	No
Denso	No
Autocoplementario	a 9

Conversiones BCD decimal

- La conversión de un número decimal a código BCD se realiza expresando cada dígito decimal mediante la combinación binaria correspondiente del código BCD elegido.
- La conversión del código BCD a un número decimal se realiza dividiendo el número, a partir de la coma, en grupos de cuatro bits, expresando en cada grupo su valor decimal correspondiente del código BCD elegido.

La representación del número decimal 37,6 en el código BCD natural es:

$$\overbrace{0011}^{3}\overbrace{0111}^{7},\overbrace{0110}^{6} \quad \begin{matrix} \textit{Decimal} \\ \textit{BCD natural} \end{matrix}$$

El valor decimal del código BCD natural: 1001010011,011 es:

$$\underbrace{10}_{2}\underbrace{0101}_{5}\underbrace{0011}_{3},\underbrace{0110}_{6} \quad \begin{matrix} \textit{BCD natural} \\ \textit{Decimal} \end{matrix}$$

Códigos continuos y cíclicos

- Código Gray (reflejado)
  - La formación del código Gray de n bits se realiza por reflexión del código de n-1 bits, repitiendo simétricamente las combinaciones de éste y añadiendo a la izquierda un bit, que será cero en las 2^{n-1} primeras palabras código (primera mitad de las filas) y un uno en las 2^{n-1} filas restantes (última mitad de las filas)

Tabla 3.25. Construcción del código Gray o código reflejado.

1 bit	2 bits	3 bits
0	0 0	0 0 0
1	0 1	0 0 1
	1 1	0 1 1
	1 0	0 1 0
		1 1 0
		1 1 1
		1 0 1
		1 0 0

Tabla 3.26. Código Gray de cuatro bits.

Decimal	Código Gray	Decimal	Código Gray
0	0 0 0 0	8	1 1 0 0
1	0 0 0 1	9	1 1 0 1
2	0 0 1 1	10	1 1 1 1
3	0 0 1 0	11	1 1 1 0
4	0 1 1 0	12	1 0 1 0
5	0 1 1 1	13	1 0 1 1
6	0 1 0 1	14	1 0 0 1
7	0 1 0 0	15	1 0 0 0

Tabla 3.27. Propiedades del código Gray.

Propiedad	Código Gray
Ponderado	No
Distancia de código	1
Continuo	Sí
Cíclico	Sí
Denso	Sí
Autocoplementario	No

Conversión del número 101011, en código binario natural, a código Gray.

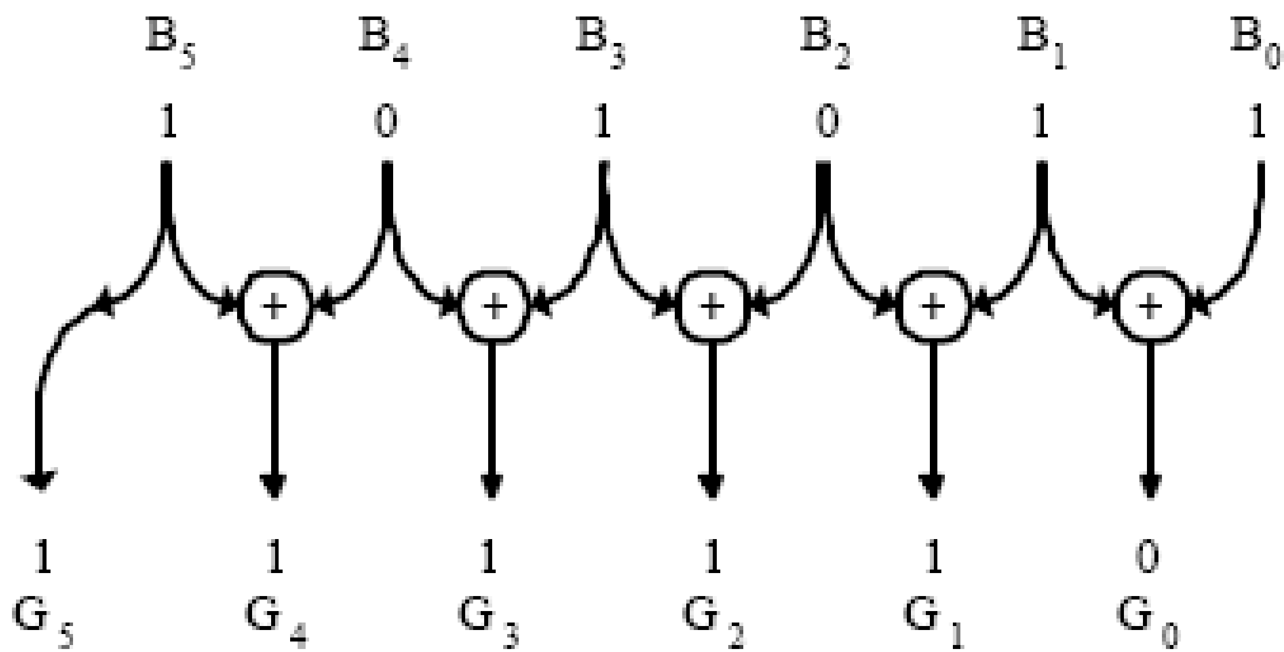


Figura 3.6. Ejemplo de conversión de código binario natural a Gray.

Conversión del número 111110, en código Gray, a código binario natural.

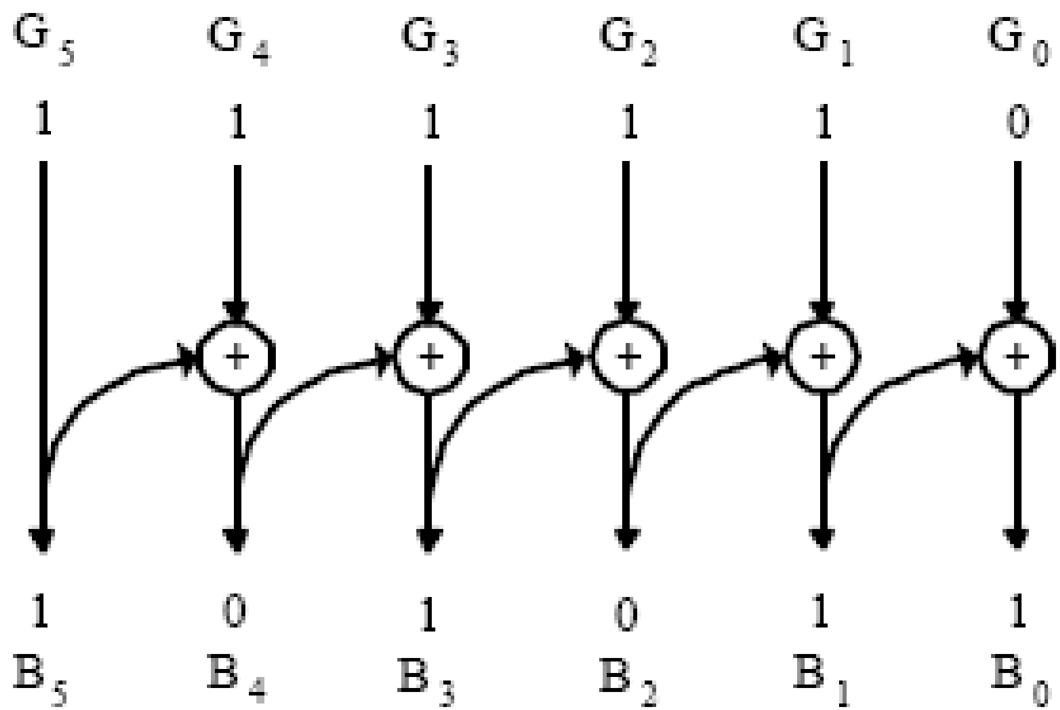


Figura 3.7. Ejemplo de conversión de código Gray a binario natural.

Código Johnson

- El código Johnson es continuo y cíclico.
- Este código recibe también el nombre de código progresivo, debido a que el número de unos aumenta y disminuyen progresivamente de una combinación a la siguiente

Tabla 3.28. Código Johnson.

Decimal	Código Johnson				
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	0
7	1	1	1	0	0
8	1	1	0	0	0
9	1	0	0	0	0

Tabla 3.30. Resumen de las propiedades de los códigos.

Propiedad	**Códigos**					
		BCD				
	Binario natural	**Natural 8421**	**Aiken 2421**	**Exceso 3**	**Gray**	**Johnson**
Ponderado	Sí	Sí	Sí	No	No	No
Distancia código	1	1	1	1	1	1
Continuo	No	No	No	No	Sí	Sí
Cíclico	No	No	No	No	Sí	Sí
Denso	Sí	No	No	No	Sí	No
Autocoplementario	2^n-1	No	a 9	a 9	No	No

Códigos numéricos:

REFLEJADO PROGRESIVO

DECIMAL	BIN. NAT.	BCD NAT. 8421	BCD AIKEN 2421	BCD AIKEN 5421	BCD 642-3	BCD EXCESO 3	DECIMAL	GRAY	JOHNSON
0	0000	0000	0000	0000	0000	0011	0	0000	00000
1	0001	0001	0001	0001	0101	0100	1	0001	00001
2	0010	0010	0010	0010	0010	0101	2	0011	00011
3	0011	0011	0011	0011	1001	0110	3	0010	00111
4	0100	0100	0100	0100	0100	0111	4	0110	01111
5	0101	0101	1011	1000	1011	1000	5	0111	11111
6	0110	0110	1100	1001	0110	1001	6	0101	11110
7	0111	0111	1101	1010	1101	1010	7	0100	11100
8	1000	1000	1110	1011	1010	1011	8	1100	11000
9	1001	1001	1111	1100	1111	1100	9	1101	10000
10	1010	1 0000					10	1111	
11	1011	1 0001					11	1110	
12	1100	1 0010					12	1010	
13	1101	1 0011					13	1011	
14	1110	1 0100					14	1001	
15	1111	1 0101					15	1000	
		....							

Conversión de binario natural a Gray:

Se realiza una "O EXCLUSIVA" bit a bit (o en lugar de una o exclusiva una "SUMA SIN TENER EN CUENTA LAS LLEVADAS") del número consigo mismo desplazado un lugar hacia la derecha.

Pasar el número 101011 a su correspondiente en código Gray:

1	0	1	0	1	1	
	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	

Conversión de Gray a binario natural:

Se suma de izquierda a derecha cada bit del binario obtenido del bit i+1 al Gray Gi sin acarreos o utilizando una "O EXCLUSIVE".

Pasar el número 111110 a su correspondiente en código Gray:

1	1	1	1	1	1	0
	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0

Códigos alfanuméricos

- EBCDIC
- ASCII

Tabla 3.31. Código alfanumérico ASCII.

LSD	MSD	0 000	1 001	2 010	3 011	4 100	5 101	6 110	7 111
0	0000	NUL	DLE	(Esp)	0	@	P	‘	p
1	0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
2	0010	STX	DC2	“	2	B	R	b	r
3	0011	EXT	DC3	#	3	C	S	c	s
4	0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
5	0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
6	0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
7	0111	BEL	ETB	‘	7	G	W	g	w
8	1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
9	1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
A	1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
B	1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
C	1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
D	1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
E	1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
F	1111	SI	US	/	?	O	_	o	(Borr)

Códigos detectores y correctores de error

- Condición necesaria: que el código sea no denso.
- Condición necesaria y suficiente para que un código permita detectar errores en un bit es que la distancia sea superior a la unidad.
- En general para poder detectar E errores simultáneos la distancia mínima del código ha de ser E+1

Códigos

- Paridad
  - Consiste en añadir un bit auxiliar que toma el valor 0 o 1 según el número de "1" existente y la paridad elegida.
    - Par $\Rightarrow$ Número par de "1"
    - Impar $\Rightarrow$ Número impar de "1"
- Peso fijo
  - La distancia mínima es de 2, y se mantien un número fijo de "1" en todas las combinaciones.
    - 2 entre 5
    - Biquinario

Tabla 3.32. Ejemplo de código de paridad correspondiente al código base BCD natural.

Dígito decimal	Código BCD natural	Bit de paridad impar	Bit de paridad par
0	0000	1	0
1	0001	0	1
2	0010	0	1
3	0011	1	0
4	0100	0	1
5	0101	1	0
6	0110	1	0
7	0111	0	1
8	1000	0	1
9	1001	1	0

Corrección por paridad horizontal y vertical

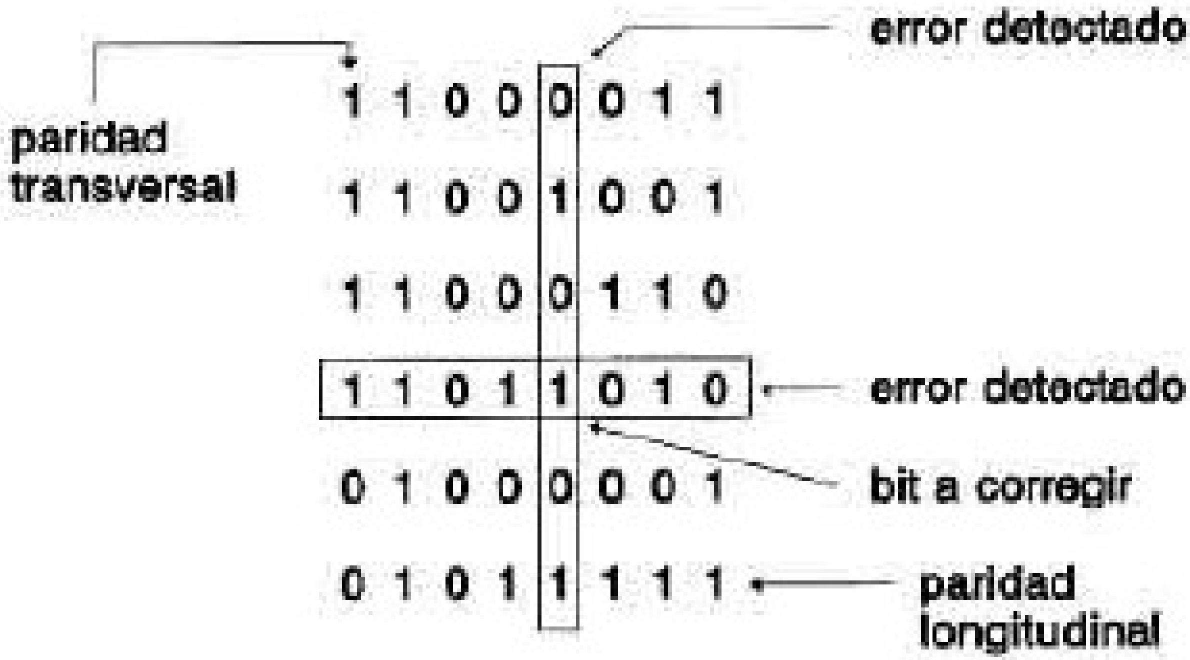


Figura 5.3 Corrección de un bit erróneo por doble detección de paridad en sentido horizontal y vertical.

Tabla 3.33. Códigos detectores de error de palabra fija: 2 entre 5 y biquinario.

Dígito decimal	**Código 2 entre 5**	**Código biquinario**
	(Pesos) →	**50 43210**
0	01100	01 00001
1	11000	01 00010
2	10100	01 00100
3	10010	01 01000
4	01010	01 10000
5	00110	10 00001
6	10001	10 00010
7	01001	10 00100
8	00101	10 01000
9	00011	10 10000

CÓDIGO DE HAMMING

- La condición necesaria y suficiente es que la distancia mínima del código sea 2
- Para detectar F bit erróneos la distancia mínima ha de ser 2*F+1
- HAY QUE DETERMINAR TRES PARÁMETROS
  - Cuántos bit de paridad hay que añadir
    - $2^k >= n+k+1$
  - Donde se sitúan
    - En las posiciones potencias de dos
  - Cómo se calculan

Ejercicio

- Dado la cadena 1011, construir el código de Hamming para su transmisión
- 1º Determinar el número de bit de paridad que hay que añadir
  - $2^3 = 4 + 3 + 1$, por tanto hay que añadir tres bits.
- 2º Posición:
  - Potencias de dos

Nº de orden	Bit	Cadenas de bits asociados	Ejemplo: Transmisión	Ejemplo: Recepción	Ejemplo: Detección
0 0 1	P_1		1	1	- - 1
0 1 0	P_2		0	0	- 0 -
0 1 1	D_1		1	1	- 1 1
1 0 0	P_3		0	0	0 - -
1 0 1	D_2		1	1	1 - 1
1 1 0	D_3		0	1	1 1 -
1 1 1	D_4		1	1	1 1 1
			posición del error		1 1 0 → 6

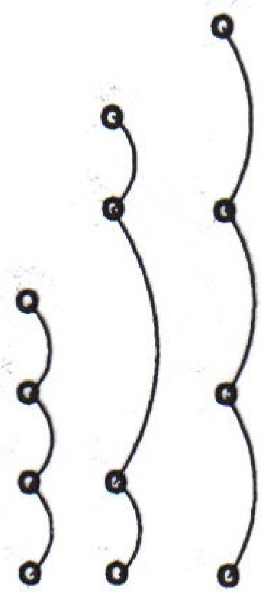


Figura 6.4 Código de Hamming para corrección de un error simple en un dato de 4 bits.

Detección

- Se ha recibido la siguiente cadena de caracteres:
  - 1110101
- Determinar si es correcta, y en caso contrario, cual es el error que existe

Nº de orden	Bit	Cadenas de bits asociados	Ejemplo: Trans - misión	Ejemplo: Recep - ción	Ejemplo: Detec - ción
0 0 1	P_1		1	1	- - 1
0 1 0	P_2		0	0	- 0 -
0 1 1	D_1		1	1	- 1 1
1 0 0	P_3		0	0	0 - -
1 0 1	D_2		1	1	1 - 1
1 1 0	D_3		0	1	1 1 -
1 1 1	D_4		1	1	1 1 1
			posición del error		1 1 0 → 6

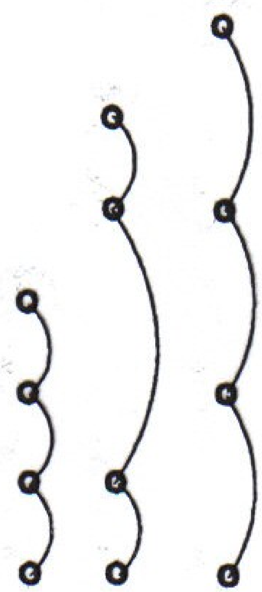


Figura 6.4 Código de Hamming para corrección de un error simple en un dato de 4 bits.

18.- Para la construcción de un código de paridad de Hamming óptimo se han utilizado 4 digitos añadidos a la palabra que se quiere transmitir. Determinar cual es la longitud de la palabra de código inicial.

a) 8 b) 4 c) 11 d) 5

Ejercicios de examen

2.- Señale cual de los siguientes códigos no es autocomplementario.

a) BCD Natural 8421 b) BCD Aiken 2421
c) BCD Exceso a 3 d) Binario Natural

4.- El complemento a la base menos uno de un número igual a cero con n dígitos enteros sería:

a) b^n-1 b) b^{n-1} c) 0 d) b^0

3.- Es cierto que $[0, 2^n-1]$:

a) Es el rango de representación en complemento a uno de números binarios
b) Es el rango de representación en complemento a dos de números binarios
c) Es el rango de representación de números naturales en binario puro.
d) Es el rango de representación en signo-magnitud de números binarios con n bits.

9.- Señalar cual de las siguientes afirmaciones sobre las propiedades del código Johnson es cierta:

a) Se trata de un código cíclico pero no denso
b) Se trata de un código continuo pero no cíclico
c) Se trata de un código continuo y denso
d) Se trata de un código cíclico y denso

11.- Obtenga el complemento a 9 del número decimal 10000.

a) 09909 b) 86421 c) 10000 d) 89999

12.- Convertir a código Gray el siguiente número binario:

1101011101

a) 1011110011 b) 1001101001
c) 1111111111 d) 0010100010

13.- Obtener el equivalente decimal del número \$4BC80000 suponiendo que se utiliza el formato normalizado IEEE 754 para coma flotante de 32 bits:

a) $48{,}248.10^3$ b) $13{,}172.10^3$
c) $52{,}4288.10^6$ d) $26{,}2144.10^6$

16.- Determinar el valor decimal del resultado de la suma de los siguientes números enteros, teniendo en cuenta que el primero de ellos está expresado en el formato del convenio de complemento a uno y el segundo en el formato del convenio de complemento a dos:

10110100
11100111

a) -100
b) -50
c) 50
d) Otro resultado

20.- La distancia entre la combinación binaria 11011001 y la 10101001 es:

a) 2
b) 11101100
c) 3
d) 8

16.- Convertir el número octal $5072_{(8}$ a hexadecimal, y restarle el número binario11001:

a) $5059_{(16}$
b) $8CF5_{(16}$
c) $A53_{(16}$
d) $A21_{(16}$