

Seminar

Stochastische Unternehmensmodelle

Varianzreduzierende Techniken

Marcel Meuthen

Mathematisches Institut

25. Juni 2015



Übersicht

1. Ziel des Vortrags

2. Einleitung

3. Varianzreduzierende Techniken

Bedingtes Monte Carlo

Importance Sampling

4. Diskrepanz

geringe Diskrepanz

Koksma-Hlawka Ungleichung

5. Low-Discrepancy Folgen

Vorteil anhand eines Beispiels

Beispiel Halton Folge mit Basis 3

Beispiel Vergleich Sobol zu Faure

6. Zusammenfassung



Ziel des Vortrags

Was sind Monte-Carlo-Simulationen?

Was wollen die Lebensversicherer mit den Monte-Carlo-Methoden erreichen?

- Bewertung von (komplizierten) Cashflows
- Da jedoch keine Formel zu dessen Bestimmung existiert
→ MC Methode
- Ziel: Wahren Wert bzw. Verteilung zu schätzen
- Da nur endliche Rechenkapazität: Begrenzte Anzahl an MC-Simulationen

Ziel der Varianzreduzierenden Techniken:
möglichst gute Approximation



Übersicht

1. Ziel des Vortrags

2. Einleitung

3. Varianzreduzierende Techniken

Bedingtes Monte Carlo

Importance Sampling

4. Diskrepanz

geringe Diskrepanz

Koksma-Hlawka Ungleichung

5. Low-Discrepancy Folgen

Vorteil anhand eines Beispiels

Beispiel Halton Folge mit Basis 3

Beispiel Vergleich Sobol zu Faure

6. Zusammenfassung



Einführung 1/6

Die Monte Carlo Methode ist eine Methode zur numerischen Integration mit Hilfe einer Folge von Zufallszahlen mit

$$I(f) = \underbrace{\int_0^1 f(x) dx}_{(1)} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) = I_N(f)$$

- wobei f bekannt
- Integral von f zu approximieren
- n Anzahl zufälliger Punkte und $\xi_1, \dots, \xi_n \in [0, 1]$

Beispiel

Wähle für $\xi_i = \frac{i}{n} \quad \forall i \in 1, \dots, n$ so ergibt sich die Trapezregel.



Einführung 2/6

Wir wollen den Fehler $I_N(f) - I(f)$ minimieren:

$$I_N(f) - I(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) - \mathbb{E}[f]$$

$\xrightarrow{\text{G.d.g.Z.}}$ durch normalvert. ZV mit $\mu = 0$ und $\frac{\sigma^2}{n}$ beschrieben werden

wobei : $\sigma^2 = \int_{[0,1]^s} (f(\xi) - I)^2 d\xi$

So ergibt sich das 95%-Konfidenzintervall

$$I_n(f) \pm \frac{1,96 \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$



Einführung 3/6

wobei

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i))^2 - I_n^2(f).$$

So ergibt sich die Fehlerschranke : $\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})$

Merke

Um eine zusätzliche genaue Kommastelle eines Schätzwerts zu bekommen muss die Zahl n um den Faktor 100 wachsen.



Einführung 4/6

Wenn man nun keine Vorschrift (vgl. Trapezregel) um die Stützstellen ξ_j zu generieren, sondern randmoisierte \Rightarrow Monte Carlo Methode

Ziel: Folgen zu finden, sodass

- möglichst **geringe Rechenzeit**
- möglichst **große Genauigkeit**

\Rightarrow möglichst kleine Diskrepanz (Low-Discrepancy Folgen)

Definition

Wenn die Koordinaten mit Hilfe Low-Discrepancy Folgen generiert werden wird die Methode als quasi-Monte Carlo Methode bezeichnet.



Einführung 5/6

Merke

Diese Folgen helfen dabei den Raum anstelle mit Millionen (exakten) Werten, (möglichst) intelligent, mit deutlich weniger Punkten abzudecken.

- Simulation und Auswertung zur Approximation

Beispiel

Mit Hilfe dieser Verfahren kann man u.A.

- das Solvency Capital Requirement (eine Sollgröße für das EK) bestimmen
- π bestimmen



Einführung 6/6

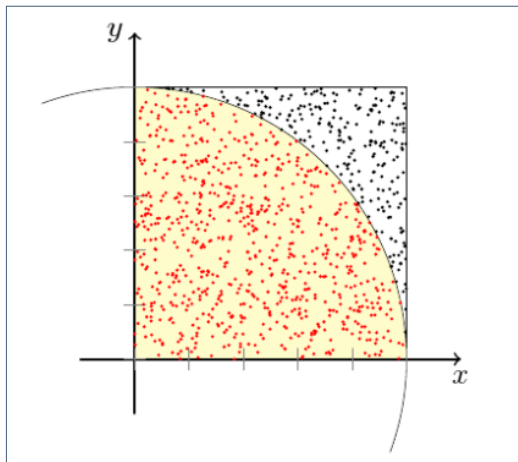


Abbildung: Approximation von π mit Hilfe eines Viertelkreises

Bildquelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Monte-Carlo-Simulation>

Übersicht

1. Ziel des Vortrags

2. Einleitung

3. Varianzreduzierende Techniken

Bedingtes Monte Carlo

Importance Sampling

4. Diskrepanz

geringe Diskrepanz

Koksma-Hlawka Ungleichung

5. Low-Discrepancy Folgen

Vorteil anhand eines Beispiels

Beispiel Halton Folge mit Basis 3

Beispiel Vergleich Sobol zu Faure

6. Zusammenfassung



Varianzreduzierende Techniken 1

Man versucht eine andere ZV Z' als Z zu finden, sodass

$$\alpha = \mathbb{E}[g(Z')] = \int_{\mathbb{R}^s} g(Z') dF'_Z(z') \text{ äquivalent zu (1)}$$

mit $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel: europäische Option

- $g(Z')$ Payoff der Option
- F'_Z Verteilungsfunktion des Underlyings

sodass:

$$\mathbb{E}[g(Z)] = \mathbb{E}[g(Z')] \quad (1)$$

$$\text{jedoch : } \text{Var}[g(Z')] < \text{Var}[g(Z)] \quad (2)$$



Bedingtes Monte Carlo

Sei Y eine weitere, aber gleichzeitig erzeugte ZV wie Z .
Dann gilt:

$$g_1(Y) = \mathbb{E}[g(Z)|Y] \text{ und } \mathbb{E}[g_1(Y)] = \mathbb{E}[g(Z)] = \alpha$$

Dann kann man für $g_1(Y)$ den MC Schätzer von α verwenden:

$$\text{Var}[g(Z)] = \underbrace{\text{Var}[\mathbb{E}[g(Z)|Y]]}_{\text{Vor.}} + \underbrace{\mathbb{E}[\text{Var}[[g(Z)|Y]]]}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \text{Var}[g_1(Y)] \leq \text{Var}[g(Z)]$$

\Rightarrow **Varianzreduktion.**



Importance Sampling

- Idee: anderes Wahrscheinlichkeitsmaß verwenden
- wichtige Pfad mehr Gewicht \Rightarrow Effizienz erhöhen
- F_Z hat Dichte $f : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\alpha = \mathbb{E}[g(Z)] = \int_{\mathbb{R}^s} g(z)f(z)dz.$$

Sei nun $f_I : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}_+$ andere Dichtefkt., sodass $f_I(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^s \setminus \{z : f(z) \cdot g(z) = 0\}$

$$\alpha = \int_{\mathbb{R}^s} g(z) \frac{f(z)}{f_I(z)} f_I(z) dz = \mathbb{E}_I \left[g(z) \frac{f(z)}{f_I(z)} \right]$$

$\Rightarrow Z$ mit f_I verteilt.



Generiere Stichproben z_1, \dots, z_n und verwende erwartungstreuen Schätzer:

$$\hat{\alpha}_I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(z_i) \frac{f(z_i)}{f_I(z_i)}$$

Varianzreduktion falls f_I so gewählt, dass

$$\mathbb{E}_I \left[\left(g(Z) \frac{f(Z)}{f_I(Z)} \right)^2 \right] = \mathbb{E}_I \left[g^2(Z) \frac{f(Z)}{f_I(Z)} \right] < \mathbb{E} \left[g^2(Z) \right]$$

Erfolgreich wenn f_I so proportional wie möglich an $g(z) \cdot f(z)$.

Weitere Möglichkeit der Varianzreduktion: **Kontrollvariablen.**



Übersicht

1. Ziel des Vortrags

2. Einleitung

3. Varianzreduzierende Techniken

Bedingtes Monte Carlo

Importance Sampling

4. Diskrepanz

geringe Diskrepanz

Koksma-Hlawka Ungleichung

5. Low-Discrepancy Folgen

Vorteil anhand eines Beispiels

Beispiel Halton Folge mit Basis 3

Beispiel Vergleich Sobol zu Faure

6. Zusammenfassung



Diskrepanz

$$D_{\infty}^*(\xi, N) = \sup_{R \in J^*} \left| \frac{A(R; \xi)}{N} - \lambda_s(R) \right|$$

- mit $\xi = \xi_1, \dots, \xi_N$
- $A(R; \xi)$ Anzahl Punkte von ξ in R
- λ_s s -dim. Lebesguemaß
- J^* Menge der Intervalle der Form: $\prod_{i=1}^s u_i$ und $u_i \in [0, 1)$



geringe Diskrepanz 1/4

Definition geringe Diskrepanz

Eine Folge $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]^n$ hat **geringe Diskrepanz**, falls

$$D_k^*(\xi_1, \dots, \xi_k) \leq C_n \frac{(\log k)^n}{k}$$

für alle k mit einer von der Dimension abhängigen Konstante C_n , wobei



geringe Diskrepanz 2/4

Diskrepanz ist ein Maß dafür, wie weit die durch Folge ξ_1, \dots, ξ_n gegebene Verteilung vom Idealzustand auf $[0, 1]$ entfernt ist.

Merke

Desto kleiner der Fehler der Quasi-Monte-Carlo-Schätzung \approx
Desto geringer ist die Diskrepanz der Folge



geringe Diskrepanz 3/4

Definition Koksma-Hlawka Ungleichung

Sei f eine Funktion mit endlicher Variation V auf $[0, 1]^s$ und sei $\xi = (\xi_i)$ eine Folge in $[0, 1]^s$, dann gilt für irgendein n :

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \right| \leq V(f) \cdot D_{\infty}^*(\xi, n)$$



geringe Diskrepanz 4/4

Diese Ungleichung stellt die Basis für die Überlegenheit der QMC gegen über der MC Methode, weil der Fehler der Berechnung des Integrals gegen Null geht in $\mathcal{O}\left(\frac{(\log N)^s}{N}\right)$.

Problem:

- Praxis fast unmöglich Fehlerabschätzung mit der Koksma-Hlawka Ungleichung (Variation von f schwer berechenbar)



Übersicht

1. Ziel des Vortrags

2. Einleitung

3. Varianzreduzierende Techniken

Bedingtes Monte Carlo

Importance Sampling

4. Diskrepanz

geringe Diskrepanz

Koksma-Hlawka Ungleichung

5. Low-Discrepancy Folgen

Vorteil anhand eines Beispiels

Beispiel Halton Folge mit Basis 3

Beispiel Vergleich Sobol zu Faure

6. Zusammenfassung



Low-Discrepancy Folgen

Es gibt mehrere Low-Discrepancy Folgen:

- Sobolfolge
- Haltonfolge
- Faurefolge
- Niederreiterfolge
- Niederreiter-Xingfolge



Beispiel Vorteil gegenüber zufälligen Folgen

Beispiel

Integriere

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \prod_{i=1}^6 (i \cos(ix_i)) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6$$

Der **exakte** Wert des Integrals ist:

$$I = \prod_{i=1}^6 \sin(i) = \sin(1) \sin(2) \sin(3) \sin(4) \sin(5) \sin(6)$$

Approximativ: $I \approx -0.0219$



Betrachte folgende Approximationen

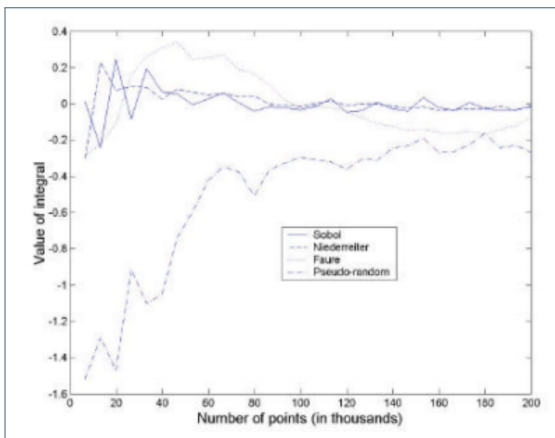


Abbildung: Wert der approximierten Integralen in Abhängigkeit der Anzahl von Punkten

Bildquelle: http://www.nag.co.uk/industryarticles/introduction_to_quasi_random_numbers.pdf

Beispiel Halton Folge mit Basis 3

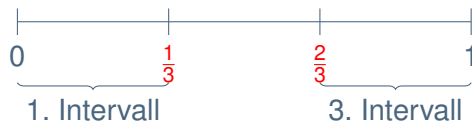
- einfach zu berechnen
- mit Hilfe von Basen, welche die ersten $d(\text{Dimension})$ Primzahlen sind
- Jede Dimension hat andere Basen

Ziel: Generieren von Punkten $(0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$
Auf den folgenden Folien exemplarisch zur Basis 3



Beispiel Halton Folge $(0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ $\frac{1}{3}$

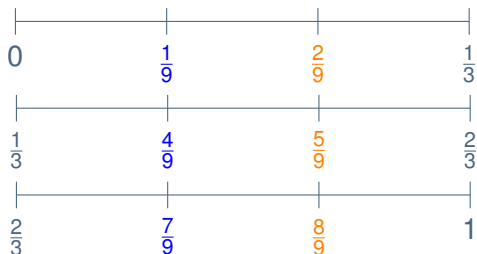
Schritt 1 Teile das Intervall in 3 (=Basis) Teile auf und extrahiere die inneren Punkte als erste Koordinaten



Schritt 2 Betrachte jedes Teilintervall separat und unterteile es wieder in 3 Teilintervalle und starte bei jedem Intervall wieder bei *Schritt 1*



Beispiel Halton Folge $(0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ 2/3



$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9} \right)$$



Beispiel Halton Folge $(0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ 3/3

- analog ergeben sich die Punkte zur Basis 2 und es ergeben sich die ersten 10 Koordinaten wie folgt

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{9}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{4}{9}\right), \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{9}\right), \left(\frac{3}{8}, \frac{2}{9}\right), \\ \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{9}\right), \left(\frac{1}{16}, \frac{8}{9}\right), \left(\frac{9}{16}, \frac{1}{27}\right), \left(\frac{5}{16}, \frac{10}{27}\right),$$



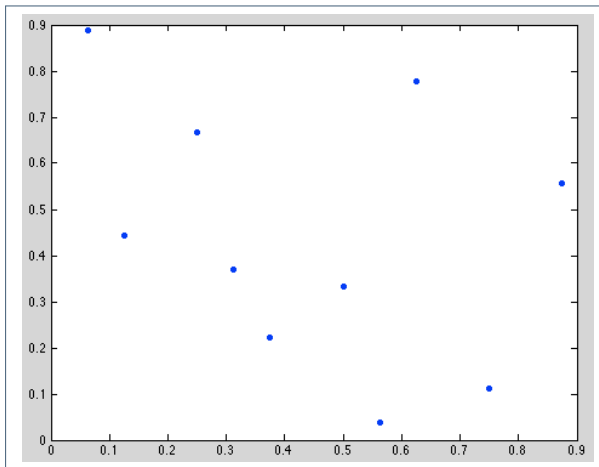


Abbildung: ersten 10 Paare der 2D-Halton Folge in $(0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$

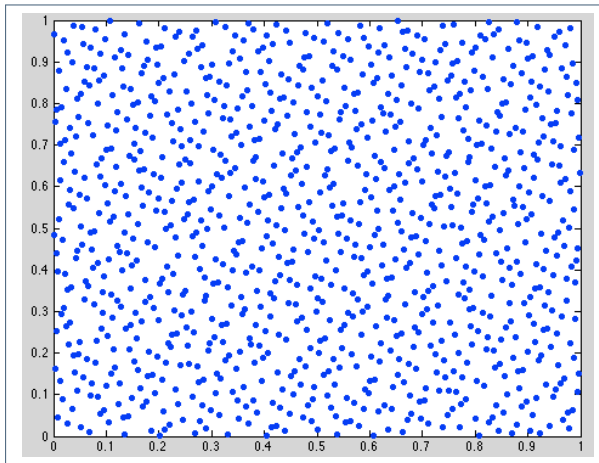


Abbildung: ersten 1000 Paare der 2D-Halton Folge in $(0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$

Vorteile

- leichter die Anzahl der Punkte und/oder Dimensionen zu variieren
- Durch das Muster, welches sich ergibt, kann man problemlos nur Teilmengen betrachten
- höhere Einheitlichkeit als bei Gleichverteilung
- Schnelligkeit: die ersten zehn Millionen Sobol-Paare benötigen auf meinem PC weniger als zwei Sekunden



Vergleich an Hand eines Beispiels: Sobol zu Faure

1/2

Die zu integrierende Funktion lautet:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^s |4x_i - 2| dx_1 \dots dx_s = 1$$

Beide Folgen lösen die Aufgabe in **fast identischer** Zeit mit folgenden Ergebnissen



Vergleich an Hand eines Beispiels: Sobol zu Faure

2/2

Table II. Estimates of the Integral

Generator	N	$s = 4$	$s = 7$	$s = 13$	$s = 20$	$s = 25$	$s = 40$
FAURE	500	1.000	0.982	0.658	1.047	1.048	0.193
SOBOL	500	0.976	0.961	0.741	0.442	0.788	0.235
FAURE	1000	1.011	0.996	0.993	1.054	0.863	0.208
SOBOL	1000	0.983	0.996	0.817	0.698	0.586	0.709
FAURE	7000	1.000	1.006	1.025	0.878	1.001	0.330
SOBOL	7000	0.997	0.986	0.973	0.932	0.928	0.351
FAURE	20,000	1.000	1.005	0.999	0.964	1.034	0.637
SOBOL	20,000	1.000	0.994	0.975	0.883	0.808	0.490
FAURE	40,000	1.000	1.005	0.998	0.925	0.889	0.882
SOBOL	40,000	1.000	1.001	1.010	1.013	0.908	0.459
FAURE	100,000	1.000	0.996	0.990	1.008	0.838	0.675
SOBOL	100,000	1.000	0.999	1.003	0.974	0.979	0.625
FAURE	15,625	1.000					
FAURE	78,125	1.000					
FAURE	390,625	1.000					
			F -favorable				
FAURE	16,807		1.008				
FAURE	117,649		0.998				
FAURE	823,543		1.000				
			F -favorable				
FAURE	2,197			1.000			
FAURE	28,561			1.000			
FAURE	372,293			0.992			
			F -favorable				
SOBOL	16,384	0.999					
SOBOL	65,536	1.000					
SOBOL	262,144	1.000					
			S -favorable				
SOBOL	131,072		1.000				
SOBOL	262,144		1.000				
			S -favorable				
FAURE	1,000,000	1.00000	0.99964	0.99950			
SOBOL	1,000,000	0.99999	1.00029	0.99557			

Abbildung: Direkter Vergleich, wobei N Anzahl Punkte, s dim. Einheitswürfel

Bildquelle: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=214372>



Table II. Estimates of the Integral

Generator	N	$s = 4$	$s = 7$	$s = 13$	$s = 20$	$s = 25$	$s = 40$
FAURE	500	1.000	0.982	0.658	1.047	1.048	0.193
SOBOL	500	0.976	0.961	0.741	0.442	0.788	0.235
FAURE	1000	1.011	0.996	0.993	1.054	0.863	0.208
SOBOL	1000	0.983	0.996	0.817	0.698	0.586	0.709
FAURE	7000	1.000	1.006	1.025	0.878	1.001	0.330
SOBOL	7000	0.997	0.986	0.973	0.932	0.928	0.351
FAURE	20,000	1.000	1.005	0.999	0.964	1.034	0.637
SOBOL	20,000	1.000	0.994	0.975	0.883	0.808	0.490
FAURE	40,000	1.000	1.005	0.998	0.925	0.889	0.682
SOBOL	40,000	1.000	1.001	1.010	1.013	0.908	0.459
FAURE	100,000	1.000	0.996	0.990	1.008	0.838	0.675
SOBOL	100,000	1.000	0.999	1.003	0.974	0.979	0.625
FAURE	15,625	1.000	} <i>F</i> -favorable	}	}	}	}
FAURE	78,125	1.000					
FAURE	390,625	1.000					
FAURE	16,807		1.008	} <i>F</i> -favorable	}	}	}
FAURE	117,649		0.998				
FAURE	823,543		1.000				
FAURE	2,197			1.000	} <i>F</i> -favorable	}	}
FAURE	28,561			1.000			
FAURE	372,293			0.992			
SOBOL	16,384	0.999	} <i>S</i> -favorable	}	}	}	}
SOBOL	65,536	1.000					
SOBOL	262,144	1.000					
SOBOL	131,072		1.000	} <i>S</i> -favorable	}	}	}
SOBOL	262,144		1.000				
FAURE	1,000,000	1.00000	0.99954	0.99950			
SOBOL	1,000,000	0.99999	1.00029	0.99557			



Übersicht

1. Ziel des Vortrags

2. Einleitung

3. Varianzreduzierende Techniken

Bedingtes Monte Carlo

Importance Sampling

4. Diskrepanz

geringe Diskrepanz

Koksma-Hlawka Ungleichung

5. Low-Discrepancy Folgen

Vorteil anhand eines Beispiels

Beispiel Halton Folge mit Basis 3

Beispiel Vergleich Sobol zu Faure

6. Zusammenfassung



Zusammenfassung

Ziel:

- möglichst **geringe Rechenzeit**
- möglichst **große Genauigkeit**

Varianzreduktion kann u.A. erreicht werden durch:

- Bedingte Monte Carlo
- Importance Sampling
- kluge Auswahl von Stützpunkten

