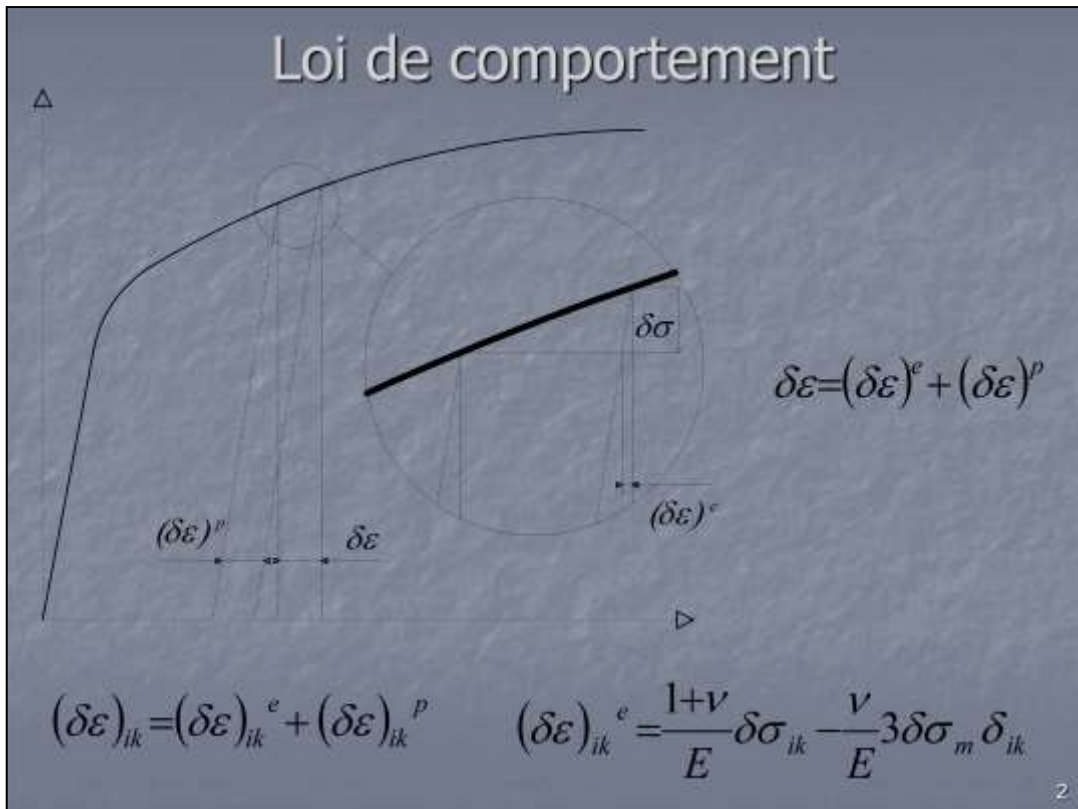


# Mécanique non linéaire Eléments de Plasticité

[maya@mmaya.fr](mailto:maya@mmaya.fr)

L'objet de ce cours est de présenter succinctement quelques éléments de calculs dans le domaine plastique des matériaux. Pour les structures à poutres, la notion de rotules plastiques sera développée. Il sera aussi présenté des méthodes d'approximations utilisées en déformations plastiques.

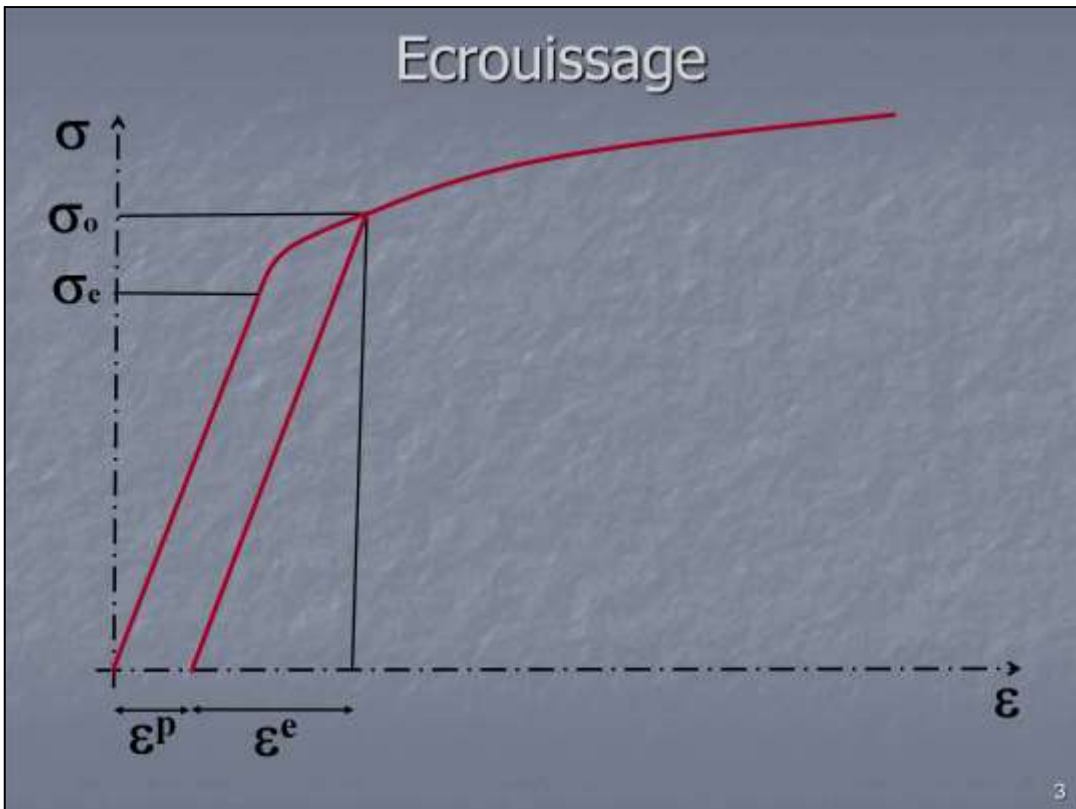


Le comportement mécanique des matériaux est souvent complexe et il est difficile de le traduire par une simple équation. Souvent les matériaux métalliques sont caractérisés par un comportement élastique linéaire sous faible chargement. Lorsque les efforts sont supprimés, la structure reprend sa forme et ses dimensions initiales. Les déformations sont réversibles et redeviennent nulles à efforts nuls.

Par contre, dès lors que le chargement devient plus important et que l'état de contrainte dépasse un seuil, les déformations deviennent en partie irréversibles. Au-delà du seuil d'élasticité, chaque accroissement de contrainte engendre des déformations à caractère réversible, c'est-à-dire devenant nulles lorsque le chargement est supprimé, et des déformations irréversibles. Ces dernières sont appelées déformations plastiques.

Chaque composante du tenseur des déformations devient alors la résultante de la partie élastique et de la partie plastique.

Avec la loi de Hooke, le calcul de la composante élastique ne pose pas de problèmes majeurs. Il fait intervenir les constantes élastiques du matériau comme le module d'Young et le coefficient de Poisson. Il faut donc maintenant être capable d'évaluer les composantes de déformation plastique.



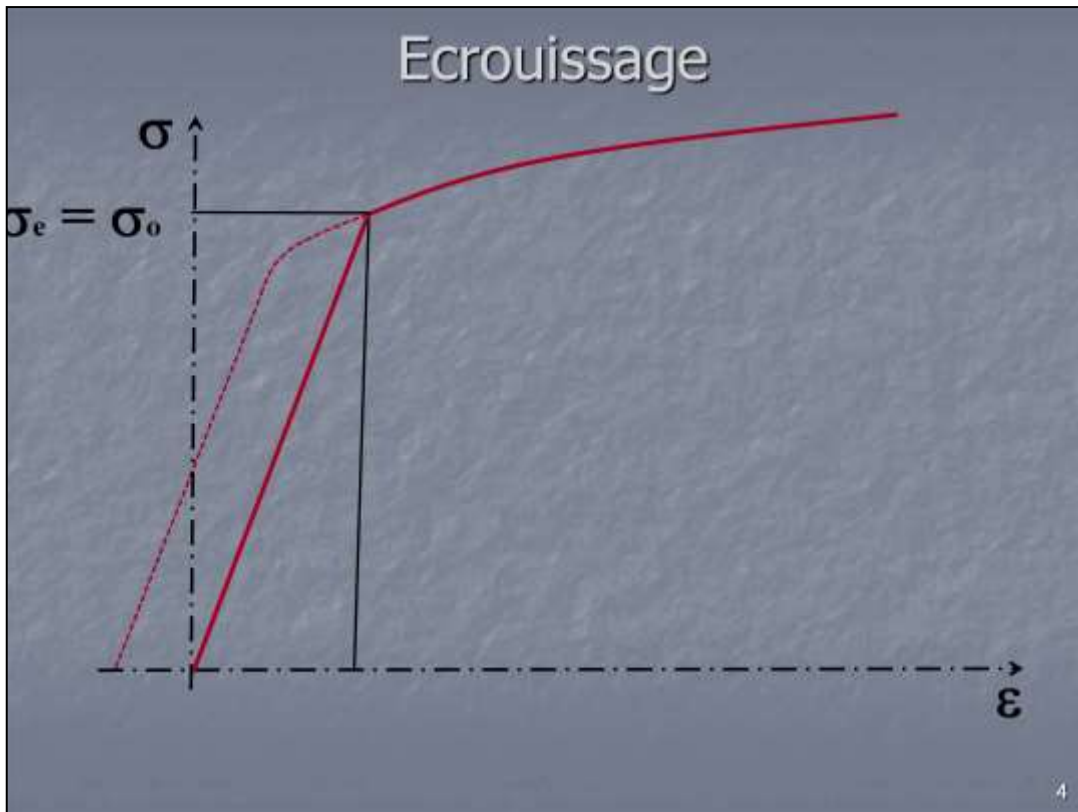
Pour fixer les idées sur l'évolution au-delà du seuil de plasticité, nous allons considérer une simple sollicitation de traction caractérisée par une loi d'évolution de la contrainte normale en fonction de la dilatation linéaire dans la direction de traction.

Tant que la contrainte appliquée reste en dessous de la limite élastique, les déformations engendrées sont purement élastiques.

Une fois atteint ce seuil de plasticité, en continuant à augmenter le chargement, on entre dans le domaine des déformations plastiques, c'est-à-dire dans l'irréversibilité du processus.

En supprimant la charge, on constate que la déformation ne s'annule plus. Il reste les déformations plastiques.

A partir de là, on peut envisager de charger à nouveau la structure. Dans un premier temps, et tant que la charge reste inférieure à la valeur maximale du premier chargement, on constate que le matériau se comporte de manière élastique. Concrètement, cela revient à considérer que la valeur maximale de contrainte du premier chargement est la nouvelle valeur de limite élastique du matériau. C'est le phénomène d'écrouissage.



Avec ce phénomène, on peut considérer qu'en reprenant comme état initial l'éprouvette avec ses déformations plastiques dues au premier chargement, on obtient une nouvelle courbe de comportement avec une nouvelle valeur de limite d'élasticité. Dans la pratique, il existe plusieurs types d'écrouissage, mais ceci n'étant pas fondamental pour la suite de l'exposé, nous n'entrerons pas dans cette problématique.

## Surfaces et fonctions de charge

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} (\overline{E}_i) \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{pmatrix} (\overline{E}_i) = \overline{OP}$$

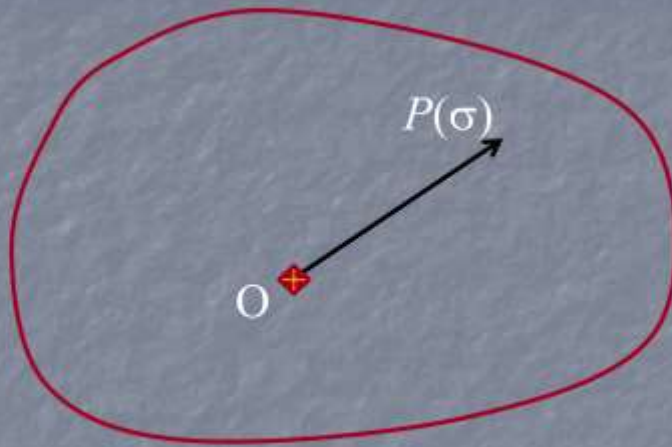
$P$  : point représentant l'état de contrainte  $\sigma$  dans l'espace des contraintes

5

L'état de contrainte dans une poutre en traction est uniaxial. Il est très simple. Dans le cas général, l'état de contrainte est caractérisé par un tenseur du deuxième ordre, ce qui peut être représenté par une matrice carrée de dimension trois. Compte tenu du principe fondamental de la mécanique, le tenseur est symétrique et il est donc défini par six composantes indépendantes.

On peut associer un espace de dimension 6 à l'ensemble des champs de contrainte. Dans cet espace, un vecteur associé à un état de contrainte précis nous permettra de positionner un point. Le point origine est choisi comme celui étant associé à un état de contraintes nulles, toutes les composantes du tenseur étant nulles.

## Surfaces et fonctions de charge



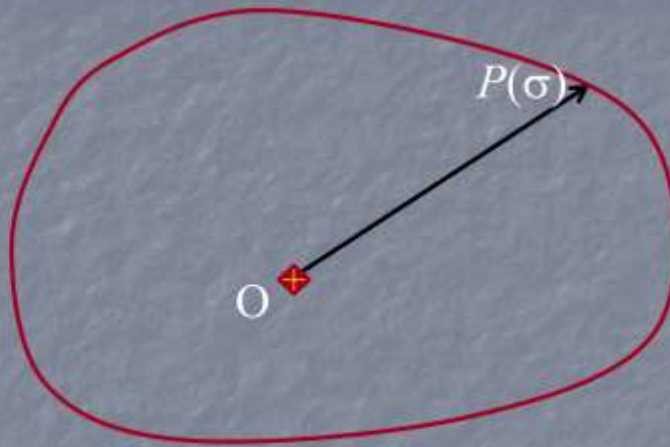
$P$  : point représentant l'état de contrainte  $\sigma$  dans l'espace des contraintes

6

La représentation visuelle d'un espace de dimension 6 n'est pas habituelle et aisée. Nous devons nous contenter d'imaginer que le plan ou la feuille de papier sur lesquels nous allons représenter les choses symbolisent cet espace.

Les points proches de l'origine, représente les états de contrainte les plus faibles. On est alors avec un comportement élastique. En augmentant le chargement sur la structure, le point représentatif de l'état de contrainte va s'éloigner de l'origine.

## Surfaces et fonctions de charge



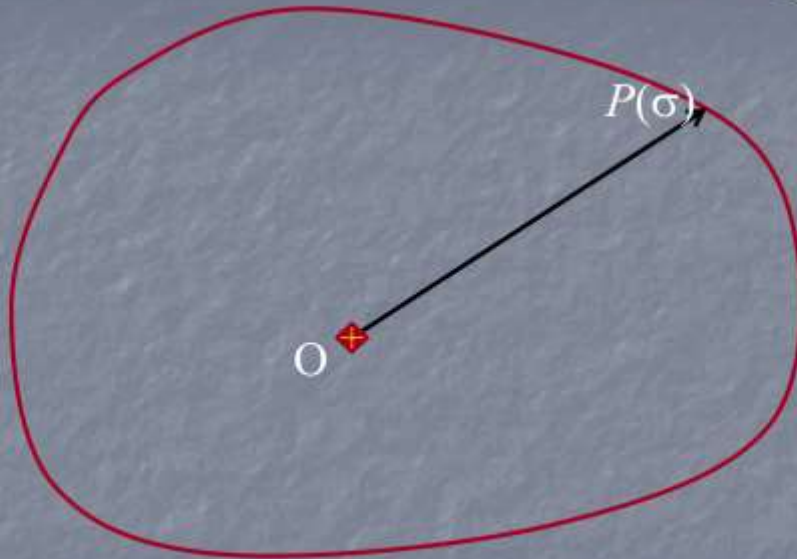
$P$  : point représentant l'état de contrainte  $\sigma$  dans l'espace des contraintes

7

Puis on va atteindre une valeur limite correspondant au seuil de plasticité. L'ensemble des points situés sur le seuil de plasticité forme une surface dans l'espace des contraintes. Elle est appelée la surface de charge. Sur notre feuille de papier, cette surface sera symbolisée par une courbe fermée englobant le point origine. La surface de charge est directement dépendante de la limite élastique et de l'écrouissage.

En généralisant les résultats de l'essai de traction, on conçoit que pour un état de contrainte donné, soit l'on est en dessous de la limite élastique et dans ce cas le point représentatif dans l'espace des contraintes est à l'intérieur du domaine délimité par la surface de charge,

## Surfaces et fonctions de charge



$P$  : point représentant l'état de contrainte  $\sigma$  dans l'espace des contraintes

8

Soit l'on a tendance à entrer dans le domaine plastique, mais alors avec le phénomène d'écroutissage, le niveau de contrainte nous amène juste à la nouvelle valeur de limite élastique.

En d'autres termes, la surface de charge évolue et s'adapte au nouvel état de contrainte. Ce qui revient aussi à dire que, dans l'espace des contraintes, nous ne pouvons pas avoir de point en dehors du volume délimité par la surface de charge.



## Surfaces et fonctions de charge

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} (\vec{E}_i) \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{equi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i) \\
 \bar{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} (\vec{E}_i) \quad \Rightarrow \quad \delta W^p = \sigma_{ik} \cdot (\delta \varepsilon)_{ik}^p = \sigma_{equi} \cdot (\delta \varepsilon)_{equi}^p
 \end{aligned}$$

Cette notion de surface de charge permet de définir des états de contraintes et de déformations équivalents.

La contrainte équivalente à un état de contraintes plastiques quelconques est la contrainte de traction qui se trouve sur la surface de charge.

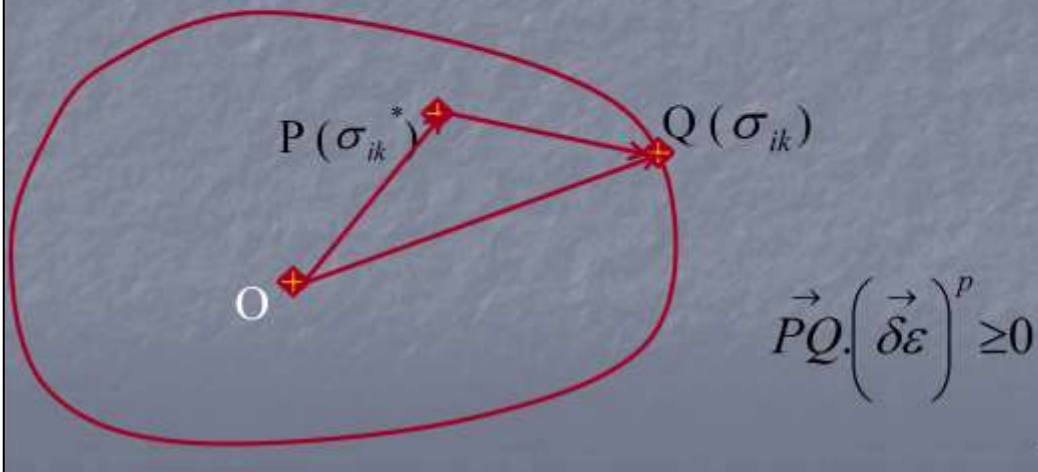
Par l'intermédiaire de la loi de comportement, on peut associer un état de déformation à l'état de contrainte.

La déformation actuelle plastique équivalente est la déformation qui, associée à la contrainte équivalente, donne un travail plastique égal au travail plastique réel :

# Principe de HILL

L'état de contrainte réel est celui qui rend maximum le travail plastique

$$\sigma_{ik} \cdot (\delta \varepsilon)_{ik}^p \geq \sigma_{ik}^* \cdot (\delta \varepsilon)_{ik}^p \quad \vec{OQ} \cdot \left( \vec{\delta \varepsilon} \right)^p \geq \vec{OP} \cdot \left( \vec{\delta \varepsilon} \right)^p$$



10

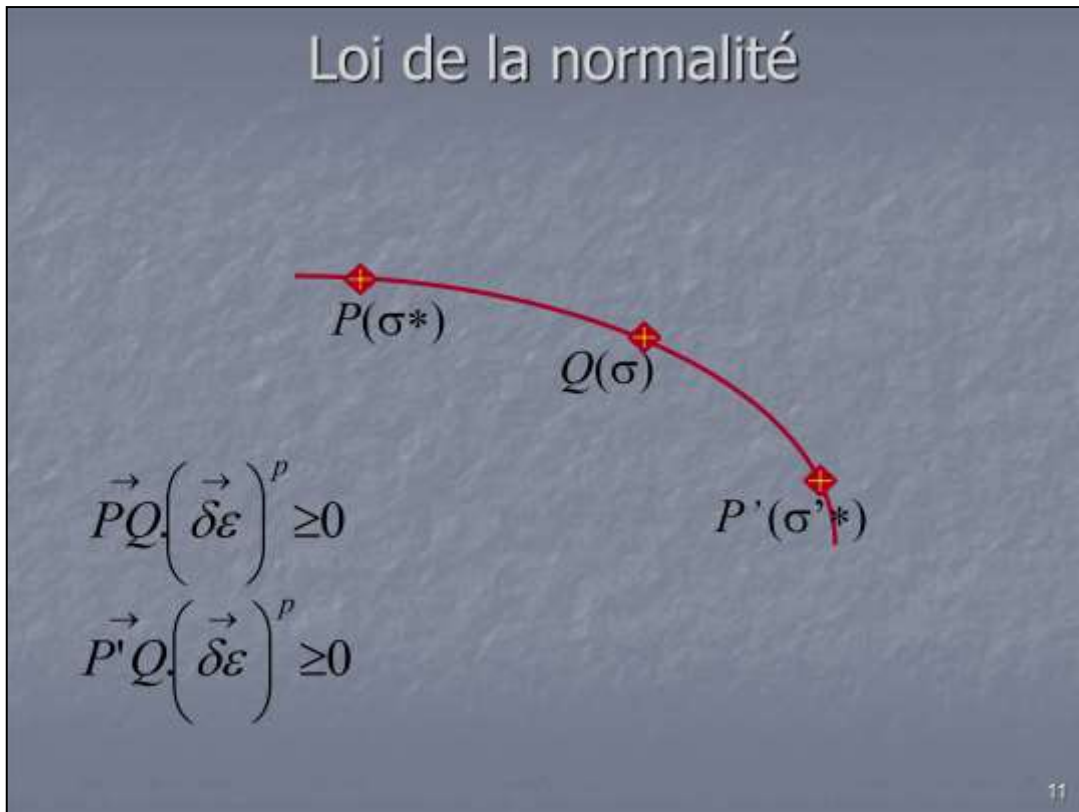
Le principe de Hill (1950), appelé encore principe du travail plastique maximal, dit que l'état de contrainte réel est, parmi l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissible, celui pour lequel le travail plastique est maximal.

Une conséquence est que pour tout état de contrainte élastique admissible (point  $P$ ), le travail plastique associé est inférieur au travail plastique associé à l'état de contrainte (point  $Q$ ) situé sur la surface de charge .

Ce qui peut se traduire par une inégalité de produit scalaire

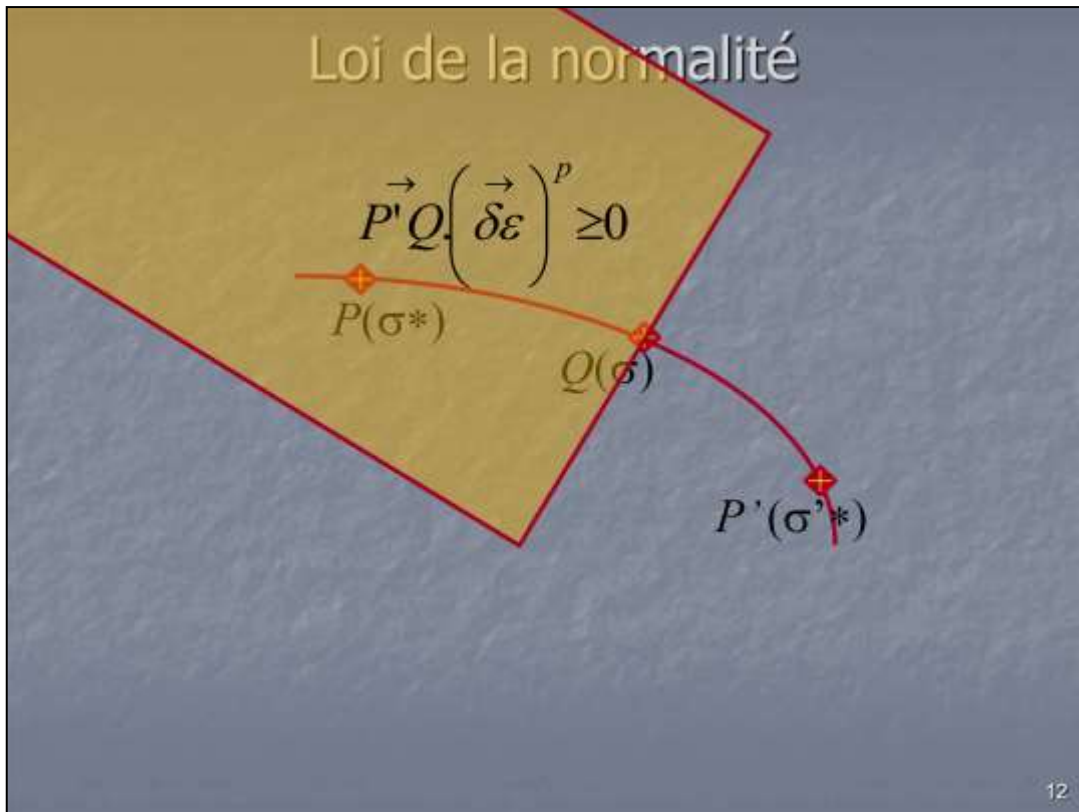
Et qui nous donne un produit scalaire positif impliquant d'une part la loi de la normalité et d'autre part la concavité de la surface de charge.

## Loi de la normalité



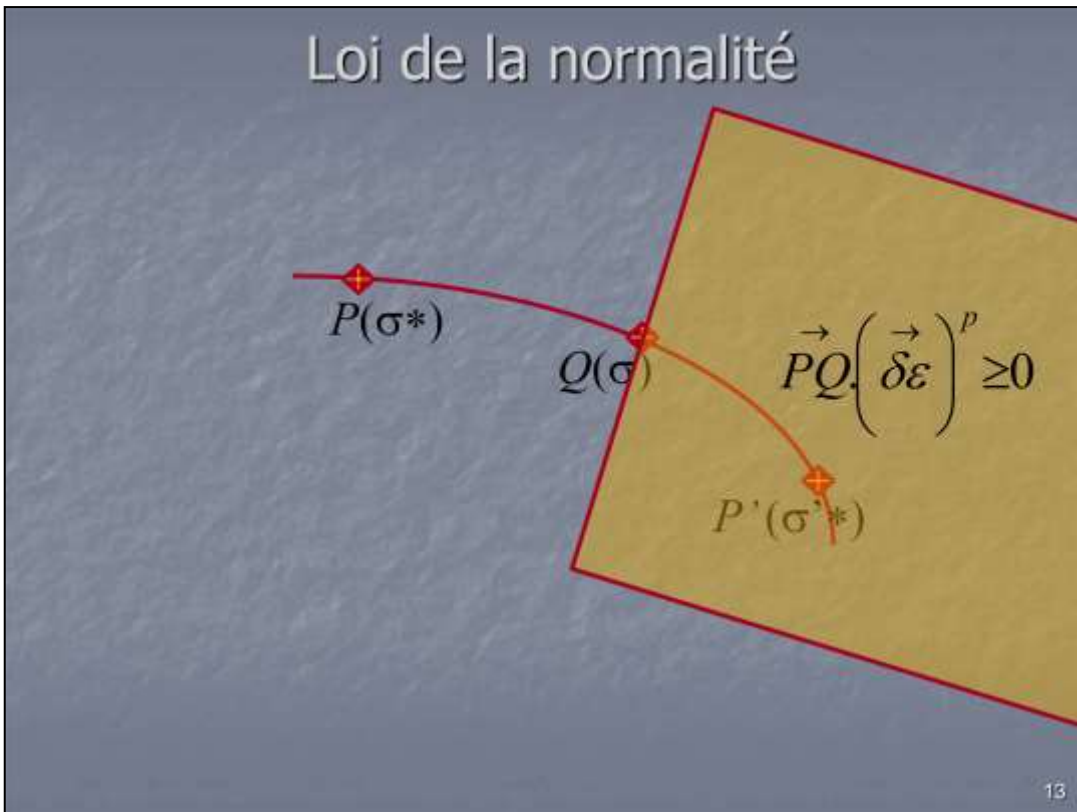
Pour démontrer la loi de la normalité, considérons deux états de contraintes statiquement admissibles à proximité de l'état de contrainte défini par le point Q situé sur la surface de charge et plaçons nous dans le cas où ces deux états, représentés par les points P et P', sont situés sur la surface de charge et de part et d'autre par rapport au point Q.

On obtient alors deux inégalités.

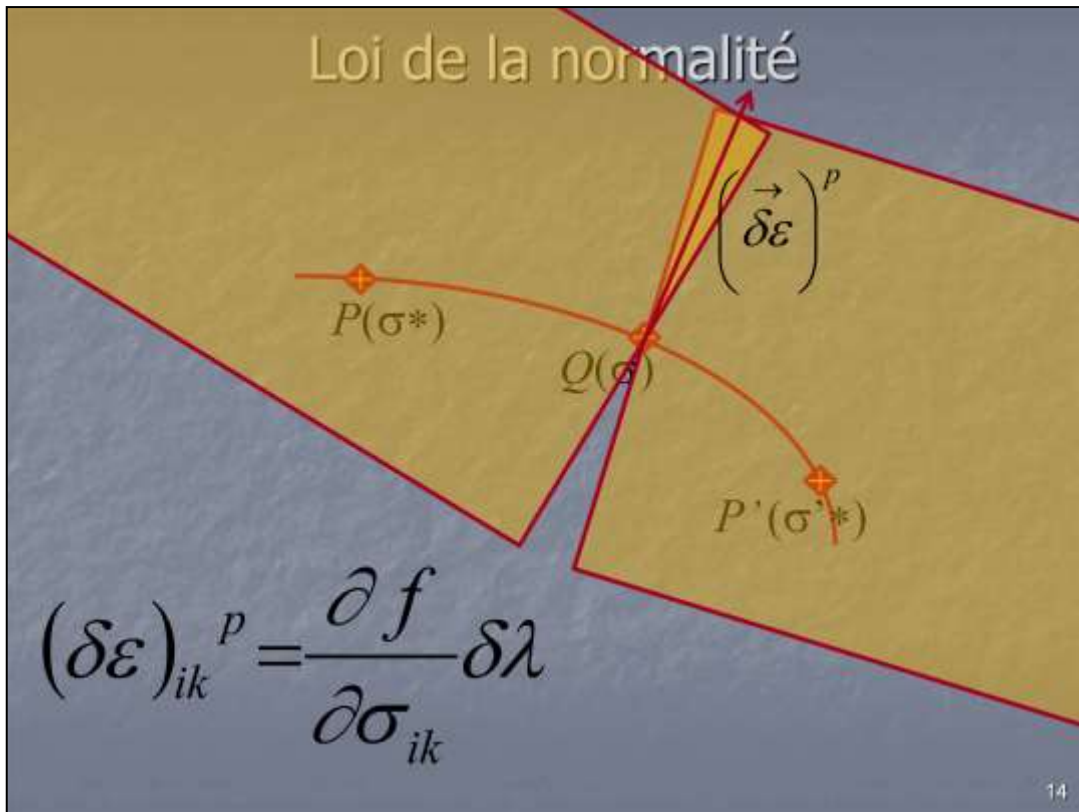


La première donne une limitation du domaine autorisé pour le vecteur représentant l'accroissement de déformation plastique.

## Loi de la normalité

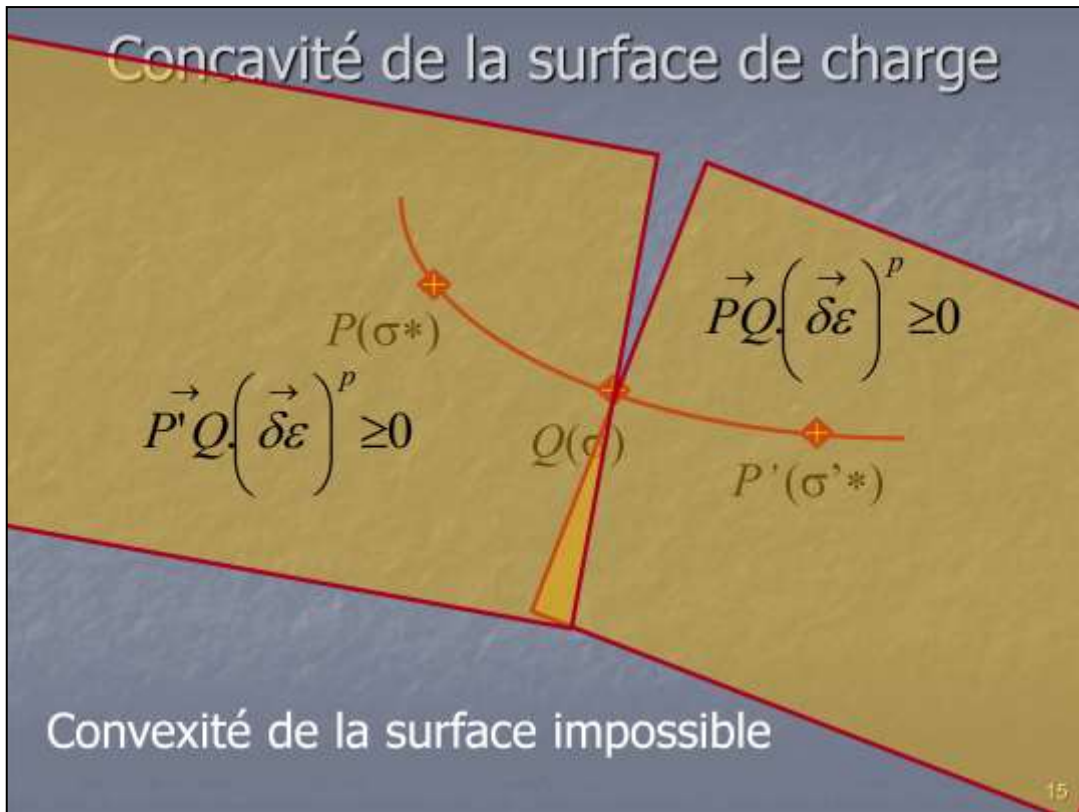


De la même façon, la deuxième implique aussi une autre limitation pour ce vecteur qui doit donc se trouver sur le domaine commun aux deux limitations.



En approchant les deux points P et P' vers le point Q le long de la surface de charge, on réalise que le domaine commun va se réduire à la direction normale à la surface de charge au point Q.

Donc le vecteur représentant l'accroissement de déformation plastique doit être colinéaire à la normale à la surface de charge. De plus, l'accroissement plastique ne pouvant se faire qu'en agrandissant la surface de charge, le vecteur doit être orienté vers l'extérieur de la surface.



Cette dernière condition de normale dirigée vers l'extérieur du domaine défini par la surface de charge implique que cette surface ne peut que concave.

# Critère Von Misès



Intéressons nous au critère de plasticité Von Misès afin de voir quelles conclusions on peut tirer dans le comportement plastique.

Basé sur une limitation de la densité d'énergie volumique de déformation déviatorique, ce critère se traduit par une valeur limite imposée à la contrainte octaédrique, c'est-à-dire le deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes.

En tenant compte du phénomène d'écrouissage, nous obtenons l'équation de la surface de charge :

Pour l'application de la loi de la normalité, il nous faut évaluer les variations de la surface de charge dans l'espace des contraintes qui après quelques calculs apparaît comme un résultat simple :





Et l'on constate alors que la loi de comportement dans le domaine plastique est traduite par une proportionnalité entre la variation du tenseur de déformation plastique et le tenseur déviateur des contraintes.

Avec cette relation, on peut facilement calculer la dilatation volumique plastique.

On remarque alors qu'elle est proportionnelle au premier invariant du tenseur déviateur des contraintes, donc elle est nulle. La transformation plastique se fait à volume constant et elle est purement déviatorique.

# Critère Von Misès

## Contrainte équivalente



L'état de contrainte équivalente est associé à une sollicitation de traction  
La contrainte octaédrique prend alors une expression simple  
Ce qui nous donne sans problème l'expression de la contrainte équivalente.

# Critère Von Misès

## Coefficient de proportionnalité



Le coefficient de proportionnalité traduit la linéarité entre la variation du tenseur de déformation plastique et la normale à la surface de charge.

Son calcul sera fait à partir de l'expression de la variation du travail plastique dans la configuration équivalente.

Après quelques calculs et en utilisant les propriétés du tenseur déviateur, on peut obtenir son expression.

# Critère Von Misès

## Déformation actuelle plastique équivalente

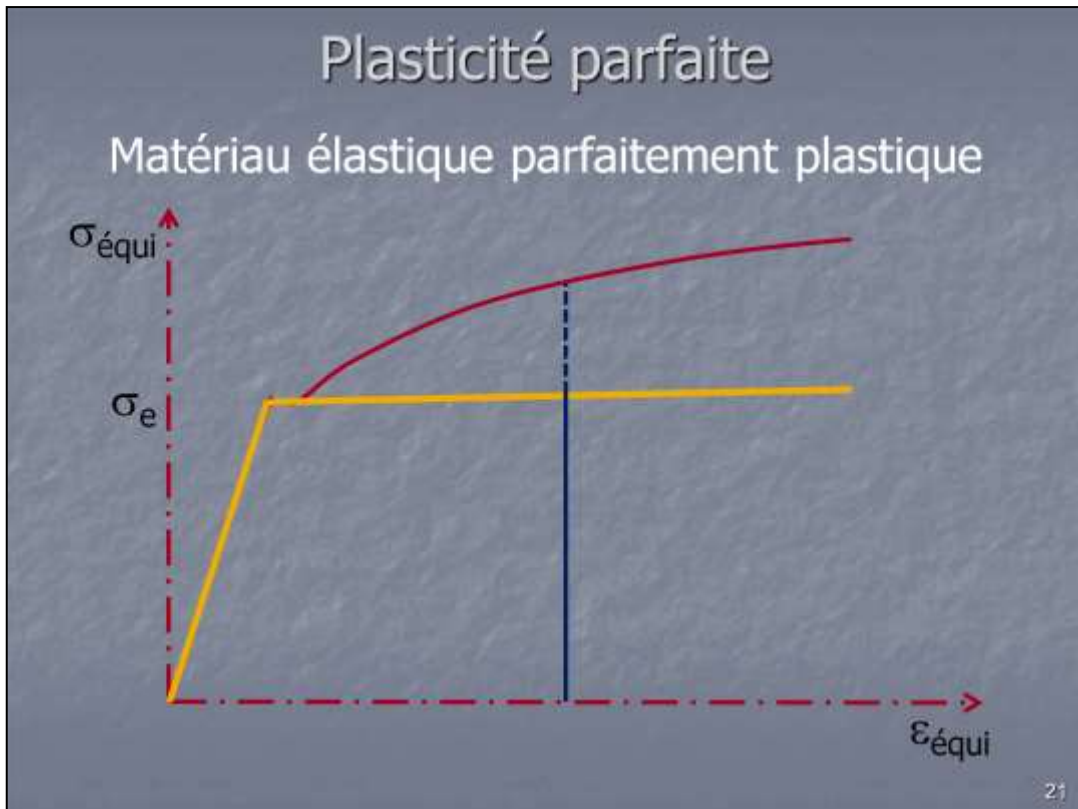


20

Les formules établies permettent alors de revenir sur l'expression de la variation du tenseur déformation plastique.

On peut ensuite obtenir la valeur de la variation de la déformation plastique équivalente.

Puis par intégration on obtient la déformation actuelle plastique équivalente.

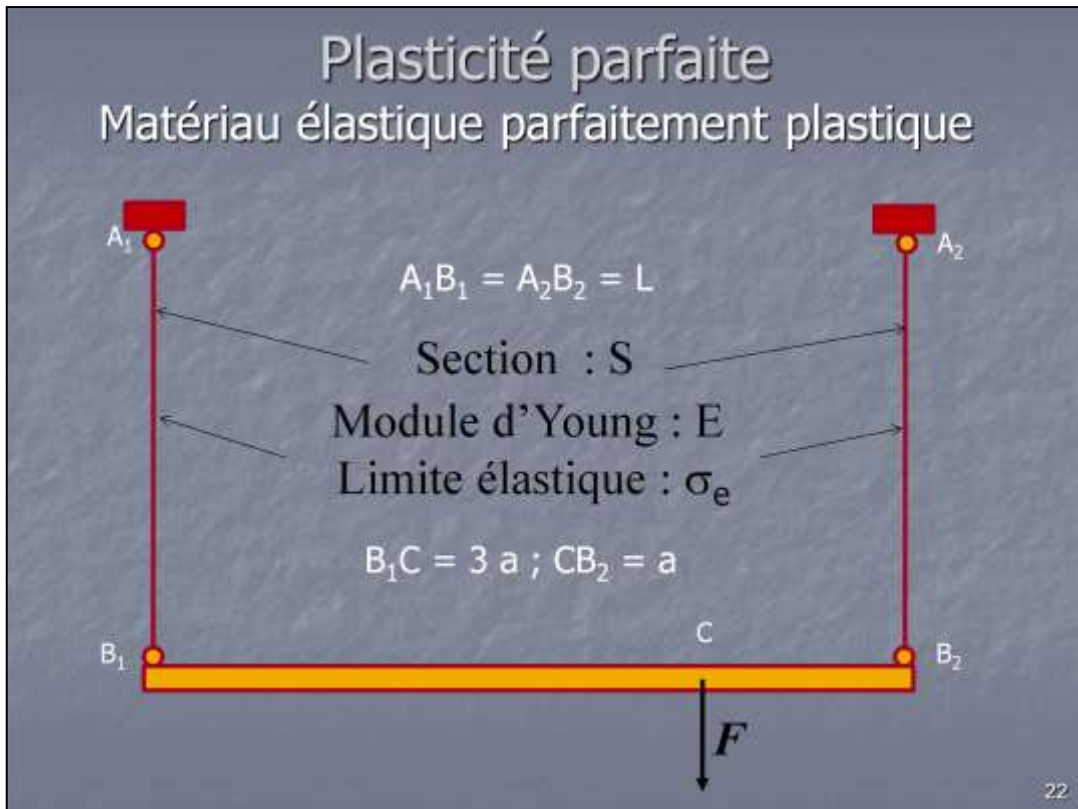


L'utilisation d'une loi de comportement avec écrouissage n'est véritablement envisageable qu'avec des logiciels performants et des moyens de calculs assez conséquents.

Afin de remédier à cet inconvénient, il est possible d'utiliser des lois simplifiées avec écrouissage nul. Cela revient à considérer que la contrainte d'écoulement plastique  $s_0$  est constante et égale à la limite élastique initiale  $s_e$ . On peut noter que l'utilisation de cette loi simplifiée est sécurisante vis-à-vis de la réalité.

Pour une valeur de déformation dans le domaine plastique, on impose l'état de contrainte à la limite élastique du matériau

alors que du fait de l'écrouissage ce dernier est capable d'absorber des contraintes plus élevées.



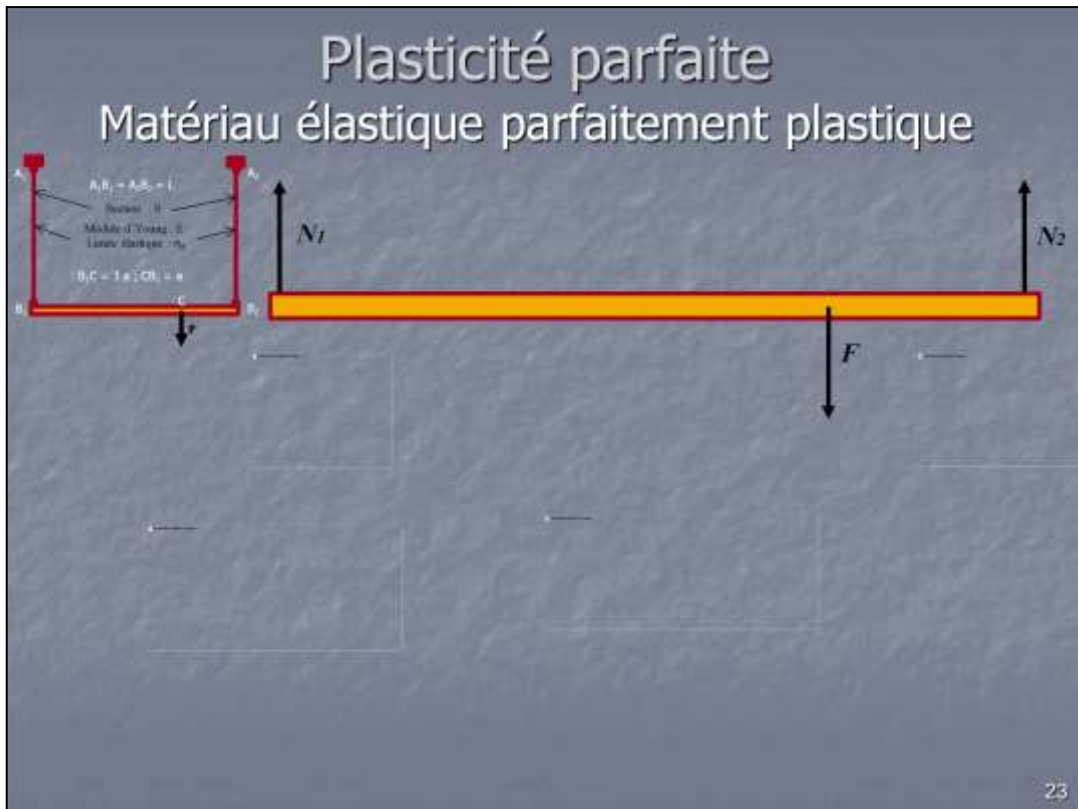
Concrètement, si la structure étudiée est isostatique, l'utilisation d'une loi de comportement parfaitement plastique n'apporte rien de plus par rapport à un simple dimensionnement élastique. Dès qu'en un point donné on atteint la limite élastique, la structure devient un mécanisme.

Dans l'exemple représenté, on applique une charge verticale au quart de longueur d'une barre infiniment rigide suspendue à ses deux extrémités par deux poutres bi-rotulées et déformables.

Ces deux poutres ont une longueur  $L$  et une section  $S$ .

La longueur de la barre rigide est notée  $4a$ .

Le matériau constituant les deux poutres a une loi de comportement élastique parfaitement plastique caractérisée par un module d'Young  $E$  et une limite élastique  $\sigma_e$ .



Pour traiter ce problème, on commence par isoler la barre  $B_1B_2$ . Elle est en équilibre sous l'action de trois forces. C'est un problème isostatique.

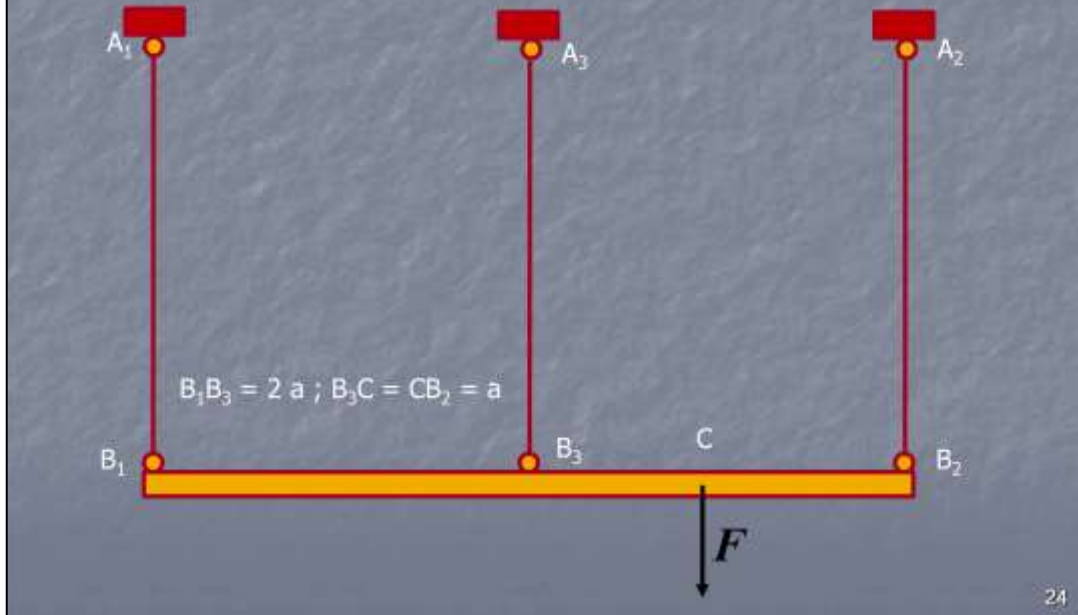
On peut donc facilement calculer les inconnues de liaison en utilisant par exemple les équations de moment aux points  $B_1$  et  $B_2$ .

Manifestement, la barre  $A_2B_2$  est la plus sollicitée. C'est donc elle qui atteindra la limite élastique en premier.

Il suffit d'écrire que la contrainte de traction est égale à la contrainte d'écoulement pour connaître la charge limite sur cette barre. Le système étant isostatique, dès que l'on atteint cette charge limite, on obtient un mécanisme, la barre  $A_2B_2$  ne pouvant pas supporter plus.

# Plasticité parfaite

## Matériau élastique parfaitement plastique



Dans l'exemple que nous venons de traiter, la charge limite est la charge correspondant à l'apparition de la contrainte élastique. Le dimensionnement de la structure est donc équivalent à un dimensionnement élastique.

Reprenons l'exemple précédent en ajoutant au milieu de notre barre rigide une poutre bi-rotulée supplémentaire.  $B_1B_3 = 2a$  ;  $B_3C = CB_2 = a$ . Le problème devient alors hyperstatique d'ordre 1.



# Plasticité parfaite

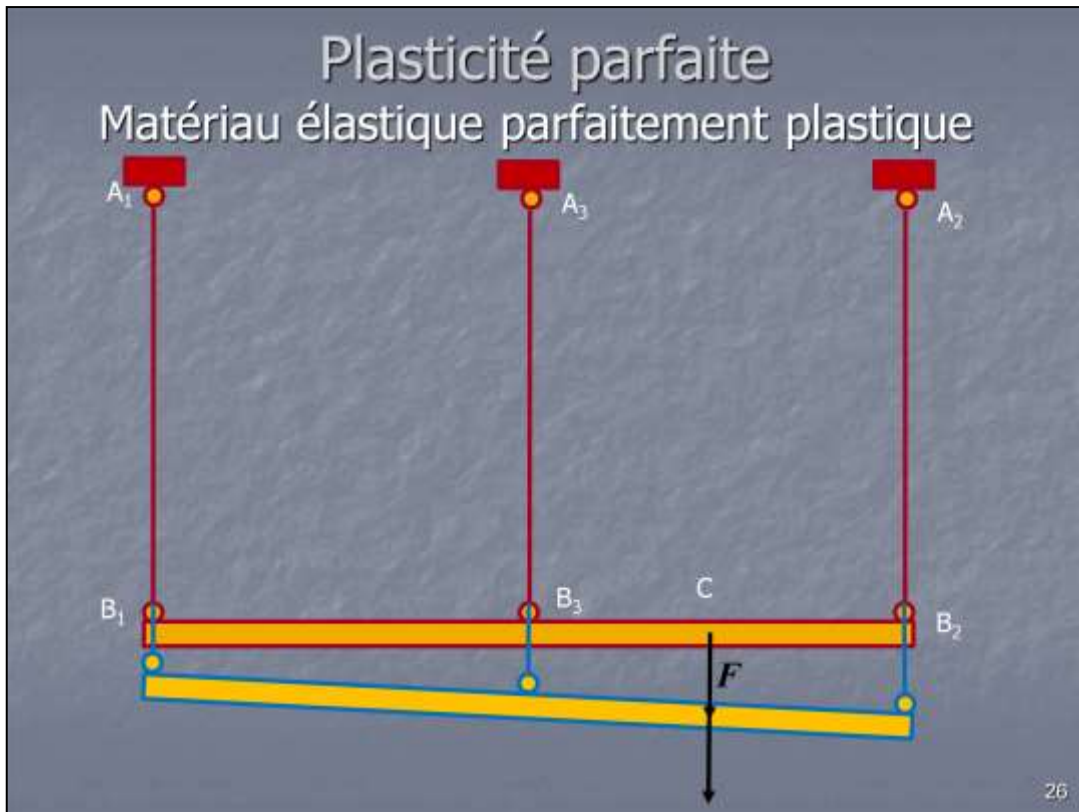
## Matériau élastique parfaitement plastique

Equation de résultante

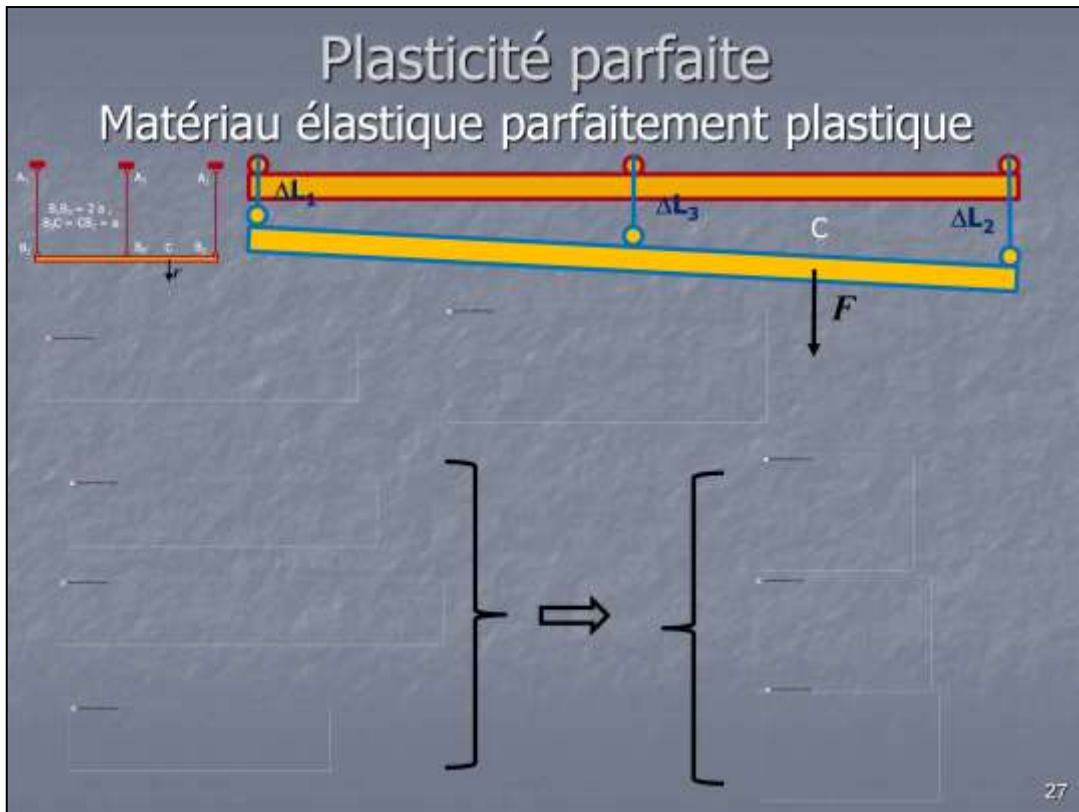
Equation de moment en B1

25

Avec la statique, nous n'avons que deux équations utiles pour définir nos trois inconnues. Il faut donc trouver une troisième équation.



Cette équation va nous être donnée en considérant la déformation du système.  
Compte tenu du fait que la barre  $B_1B_2$  est indéformable, les allongements des trois poutres sont liés entre eux.



Concrètement l'allongement de la barre du milieu est la demi somme des allongements des deux barres extrémités.

Pour une barre en traction, son allongement est directement dépendant de l'effort de traction.

Ce qui nous permet d'obtenir une nouvelle équation reliant nos trois efforts inconnus.

On obtient ainsi un système de trois équations pour trois inconnues.

Ce qui nous permet d'avoir les efforts de traction dans chacune des barres. On constate alors très clairement que c'est la barre  $A_2B_2$  qui est la plus sollicitée.

# Plasticité parfaite

## Matériau élastique parfaitement plastique

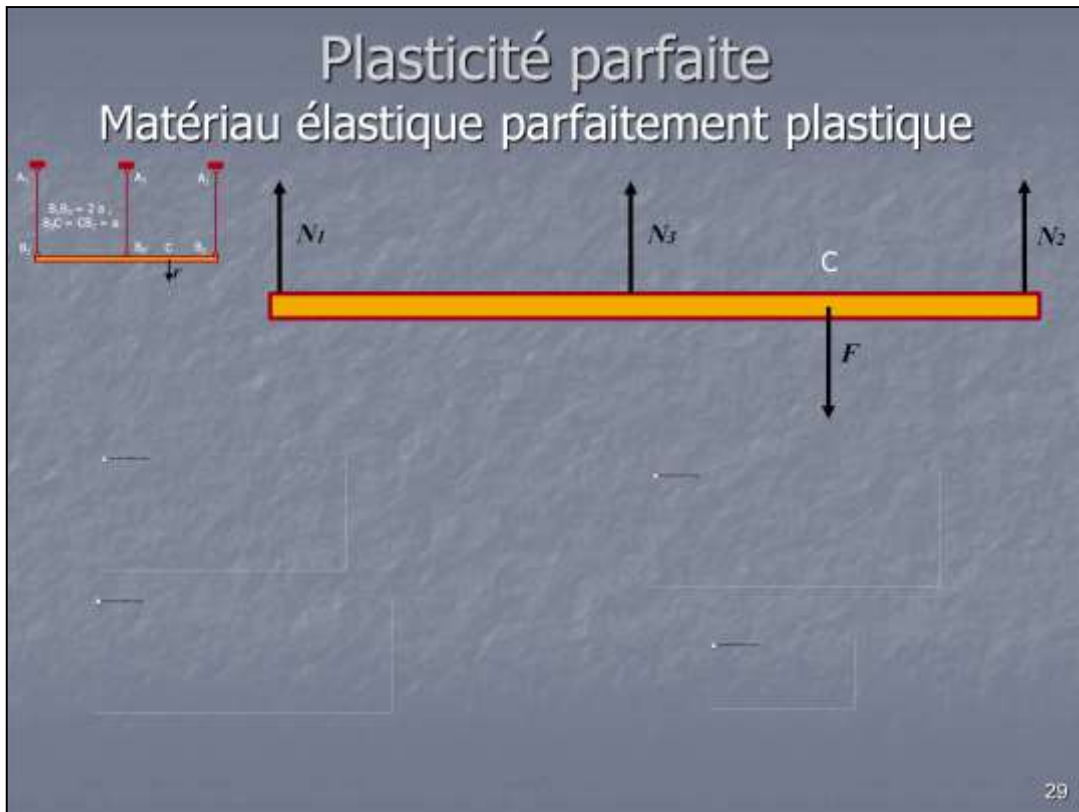
Equation de résultante

Equation de moment en C

28

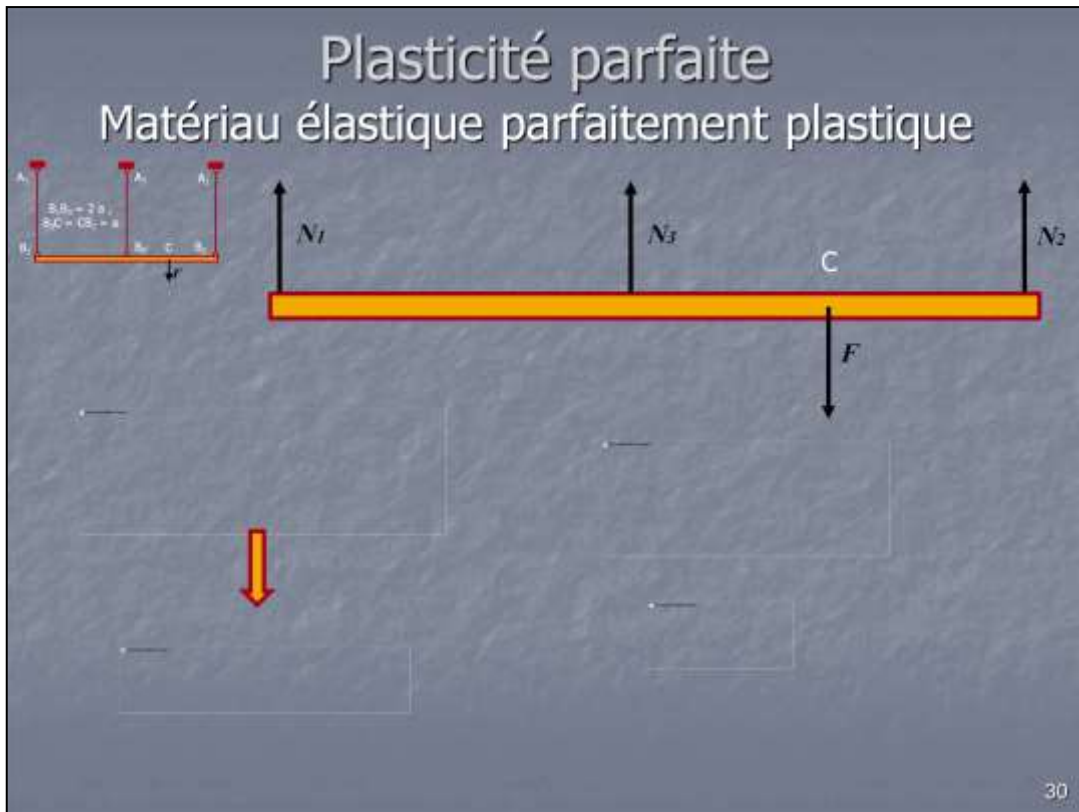
Lorsque la contrainte dans cette barre est égale à la limite élastique, on obtient une première charge limite pour un dimensionnement élastique. Si l'on continue à augmenter le chargement, alors la barre  $A_2B_2$  est complètement plastifiée. Elle a atteint sa charge limite et il se produit un écoulement plastique dans cette barre.

Le système étant initialement hyperstatique d'ordre 1, il devient isostatique. On obtient un système de deux équations à deux inconnues.

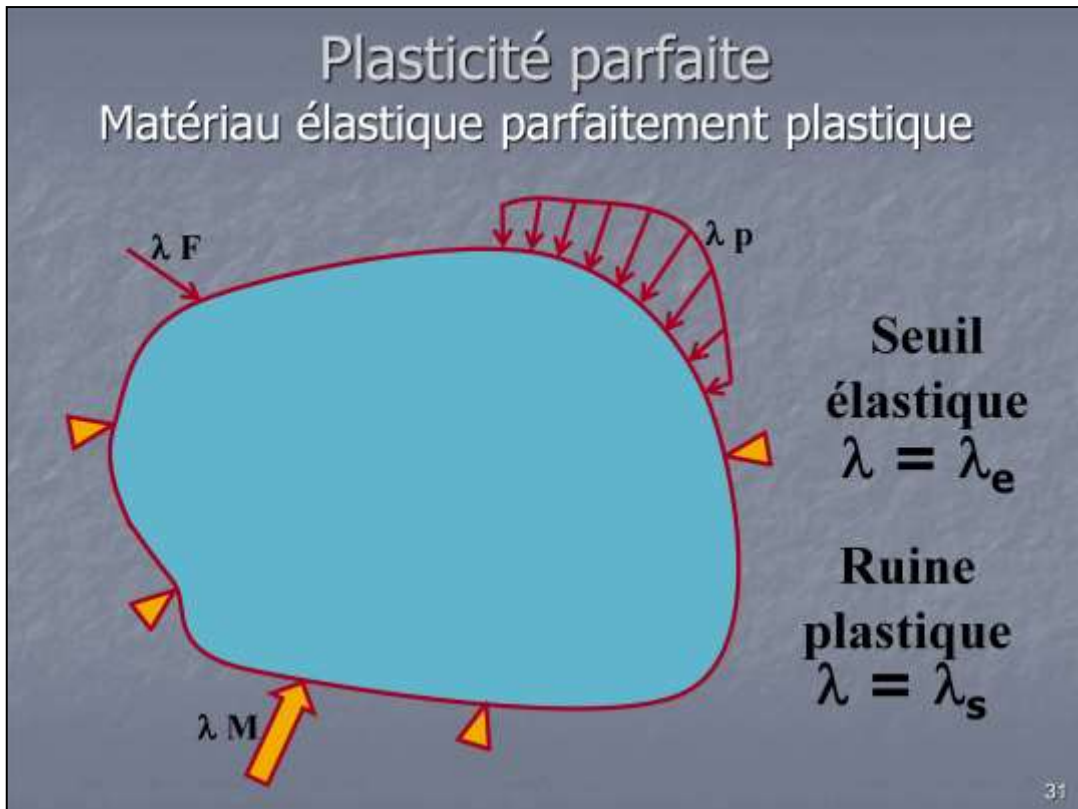


On peut alors déterminer les efforts de traction manquants.

Comme le chargement est supérieur au chargement élastique, c'est la charge de la barre  $A_3B_3$  qui est la plus élevée.



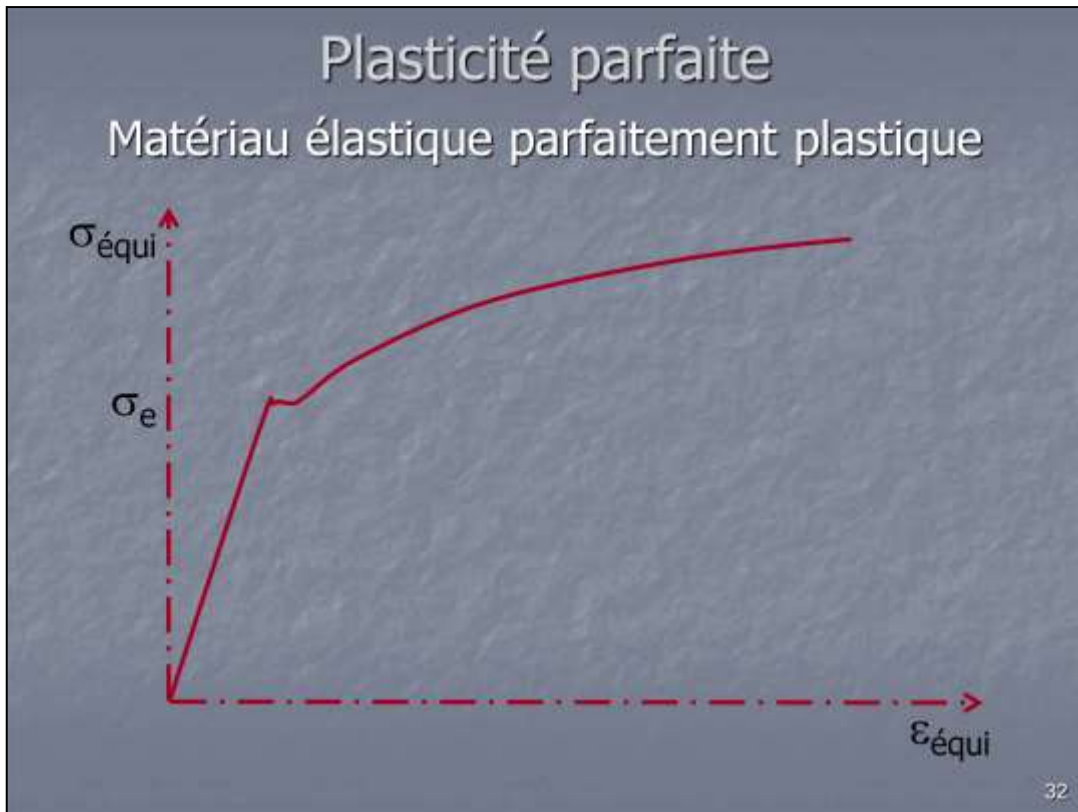
Lorsque la contrainte dans la barre  $A_3B_3$  est égale à la contrainte d'écoulement, cette barre entre dans le domaine plastique. La structure devient alors un mécanisme. La force créant la ruine est plus élevée que celle associée à un simple dimensionnement élastique.



L'exemple que l'on vient de traiter va nous permettre de tirer une conclusion. Imaginons que nous ayons soumis à un chargement dépendant directement d'un coefficient de proportionnalité  $\lambda$ .

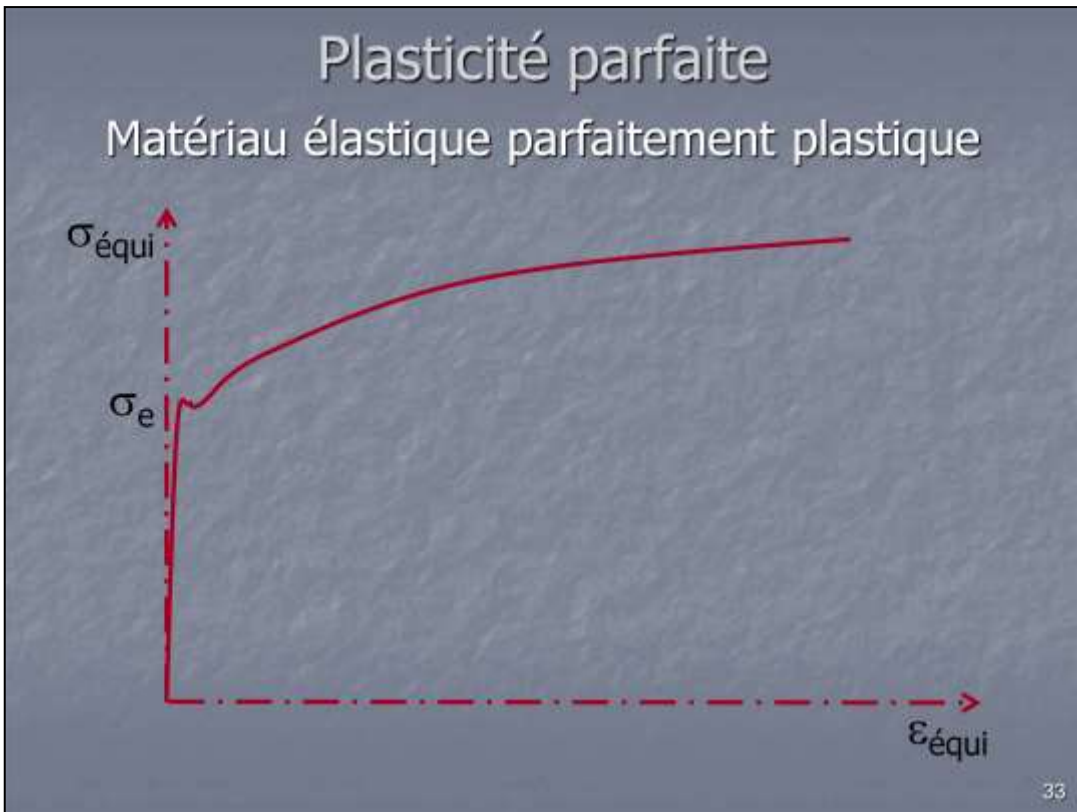
En augmentant progressivement notre chargement, on constate que l'on obtient pour notre coefficient une première valeur limite lorsqu'en un point du système le niveau de contrainte équivalente atteint la limite élastique du matériau.  $\lambda = \lambda_e$ . Si la structure est simplement isostatique, ce chargement correspond alors à la valeur extrême admissible.

Par contre, dans le cas d'une structure hyperstatique, il est possible d'augmenter le chargement, ce jusqu'à que nous obtenions, par le jeu des mobilités internes qui vont apparaître, un mécanisme. Le nouveau coefficient seuil peut être bien plus élevé que celui associé au seuil élastique.  $\lambda = \lambda_s$



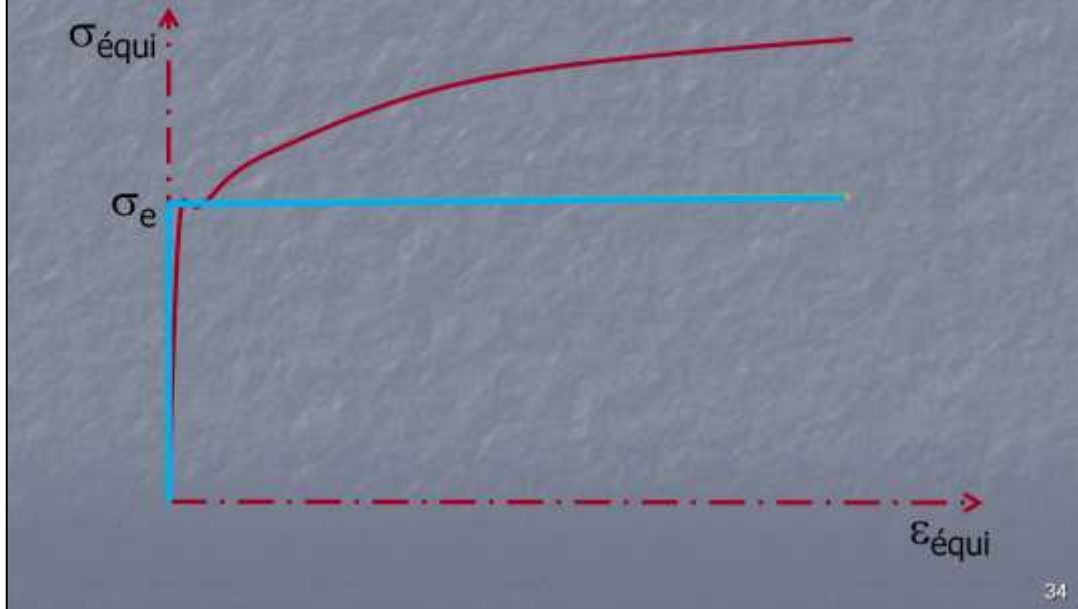
Une simplification supplémentaire peut être faite au niveau de loi de comportement. Elle est associée au fait que la déformation correspondante à la limite élastique du matériau est généralement très faible en comparaison avec les déformations tolérables dans la zone plastique.





Le diagramme réel est plutôt de ce genre.

## Plasticité parfaite Matériau rigide parfaitement plastique



Une simplification supplémentaire peut être faite au niveau de loi de comportement. Elle est associée au fait que la déformation correspondante à la limite élastique du matériau est généralement très faible en comparaison avec les déformations tolérables dans la zone plastique.

Le diagramme réel est plutôt de ce genre.

De fait, dans la modélisation la partie élastique du comportement est pratiquement une droite verticale.

En négligeant cette partie élastique, on obtient le comportement rigide parfaitement plastique.

## Rotule plastique

### Matériau élastique parfaitement plastique



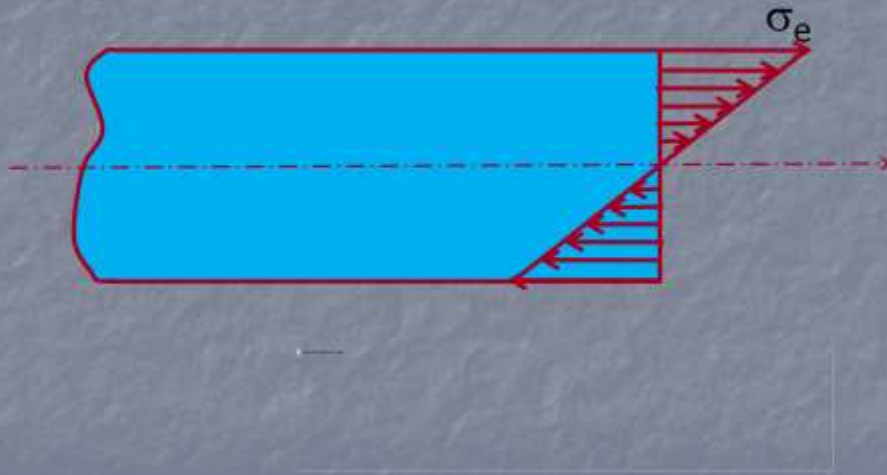
35

Dans le cas de poutres sollicitées en flexion ou en torsion, ce n'est pas dès l'apparition de contrainte de limite élastique que nous obtenons un seuil de chargement.

En flexion, la répartition classique des contraintes normales, qui sont généralement prépondérantes, est de forme triangulaire. La contrainte normale maximale dans une section droite est obtenue sur la fibre la plus éloignée de l'axe de flexion et est fonction des grandeurs caractéristiques de la section droite et du moment de flexion à l'abscisse considérée.

# Rotule plastique

## Matériau élastique parfaitement plastique



36

Si l'on augmente le chargement, le moment de flexion va aussi augmenter et la contrainte maximale dans la section droite va atteindre la limite élastique.

# Rotule plastique

## Matériau élastique parfaitement plastique

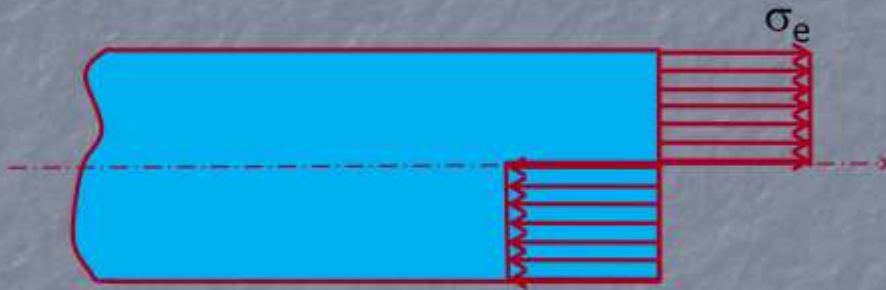


37

Toujours en augmentant le chargement, comme la contrainte maximale ne peut être supérieure à la limite élastique, on obtient un aplatissement local de la distribution de contrainte. Les fibres concernées sont dans le domaine plastique.

## Rotule plastique

### Matériau élastique parfaitement plastique

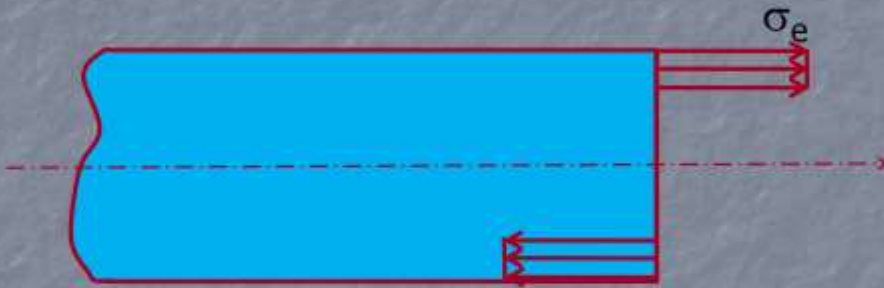


38

Enfin, à force d'augmenter le chargement, on obtient une distribution de contrainte doublement rectangulaire. Toutes les fibres de notre poutre sont dans le domaine plastique. La section est donc complètement plastifiée et elle ne peut plus absorber d'effort supplémentaire. On obtient alors une mobilité interne qui porte le nom de rotule plastique. Du point de vue mécanique, on obtient dans la section droite une mobilité en rotation, c'est-à-dire une rotule, mais avec un couple de rappel que nous intitulerons moment plastique.

## Rotule plastique

### Matériau rigide parfaitement plastique

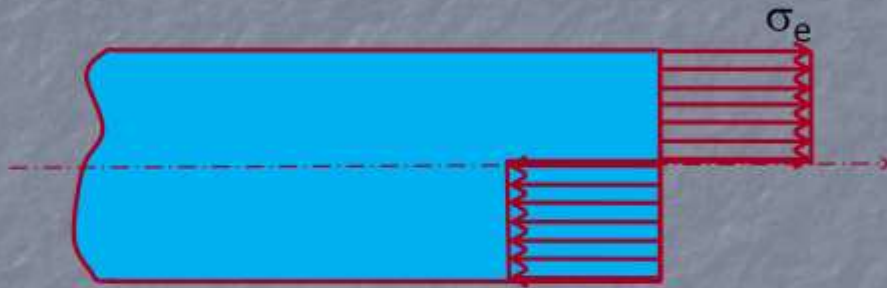


39

Dans le cas d'une loi de comportement rigide parfaitement plastique, dès le début du chargement, les contraintes obtenues dans les fibres sont à la limite élastique du matériau.

## Rotule plastique

### Matériau rigide parfaitement plastique

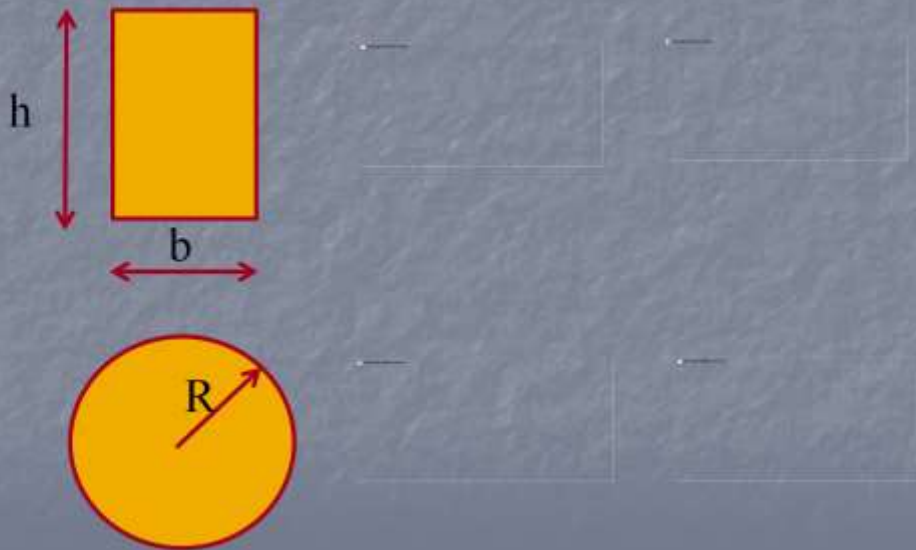


40

Puis, lorsque toutes les fibres sont entrées dans le domaine plastique, on se retrouve avec la création de la rotule plastique. Il est important d'indiquer que pour la représentation de la distribution des contraintes normales dans la section droite, nous avons envisagé que cette dernière était symétrique.



## Rotule plastique Moment plastique



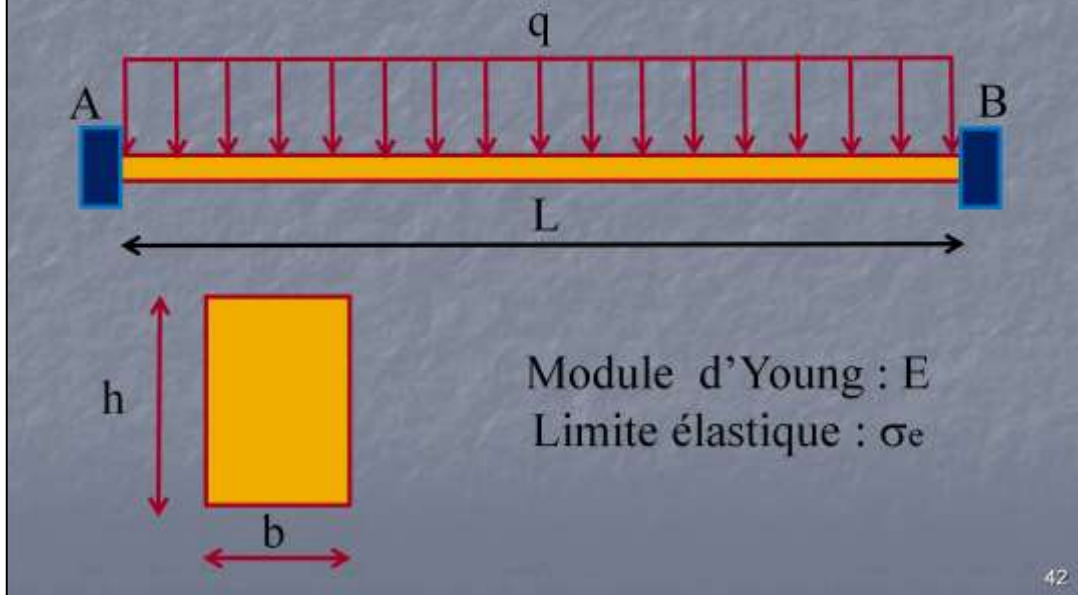
41

Tout comme pour le moment de flexion élastique, le moment de flexion plastique qui correspond à la création de la rotule plastique n'est fonction que de la limite élastique du matériau et des grandeurs caractéristiques de la section droite.

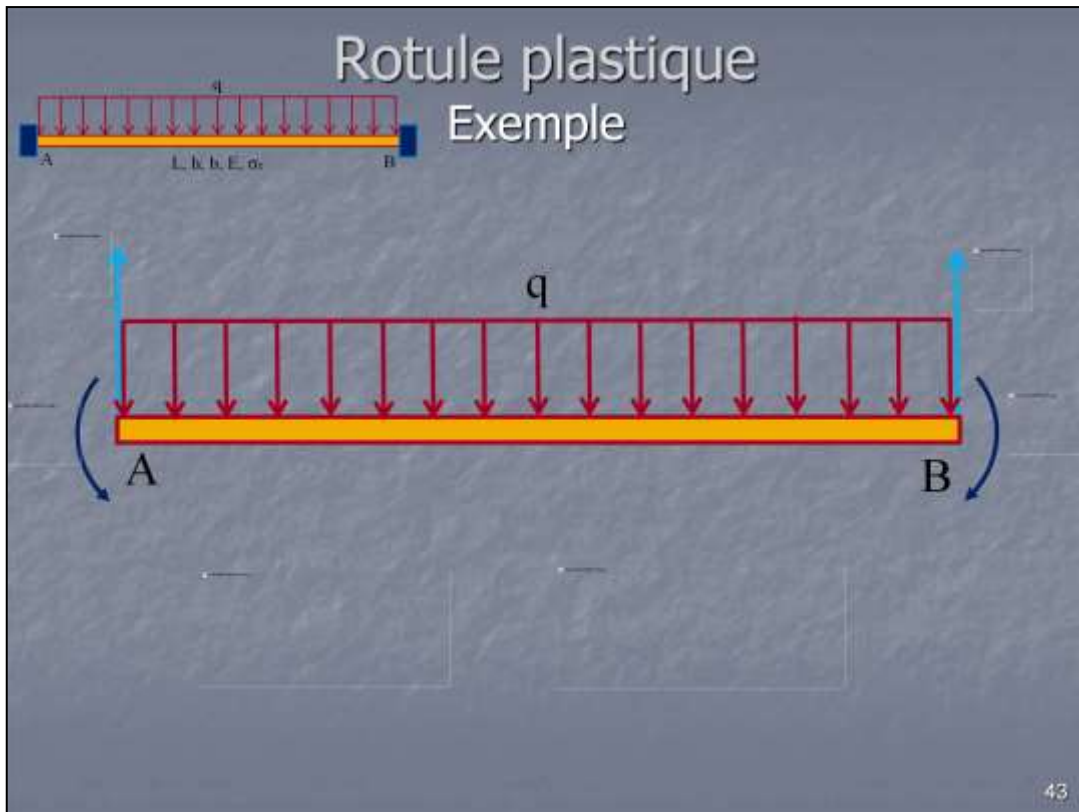
Dans le cas d'une section droite sous forme rectangulaire pleine, le moment de flexion plastique est de 1,5 fois le moment de flexion élastique.

Pour une section circulaire pleine le rapport est de 1,7.

## Rotule plastique Exemple

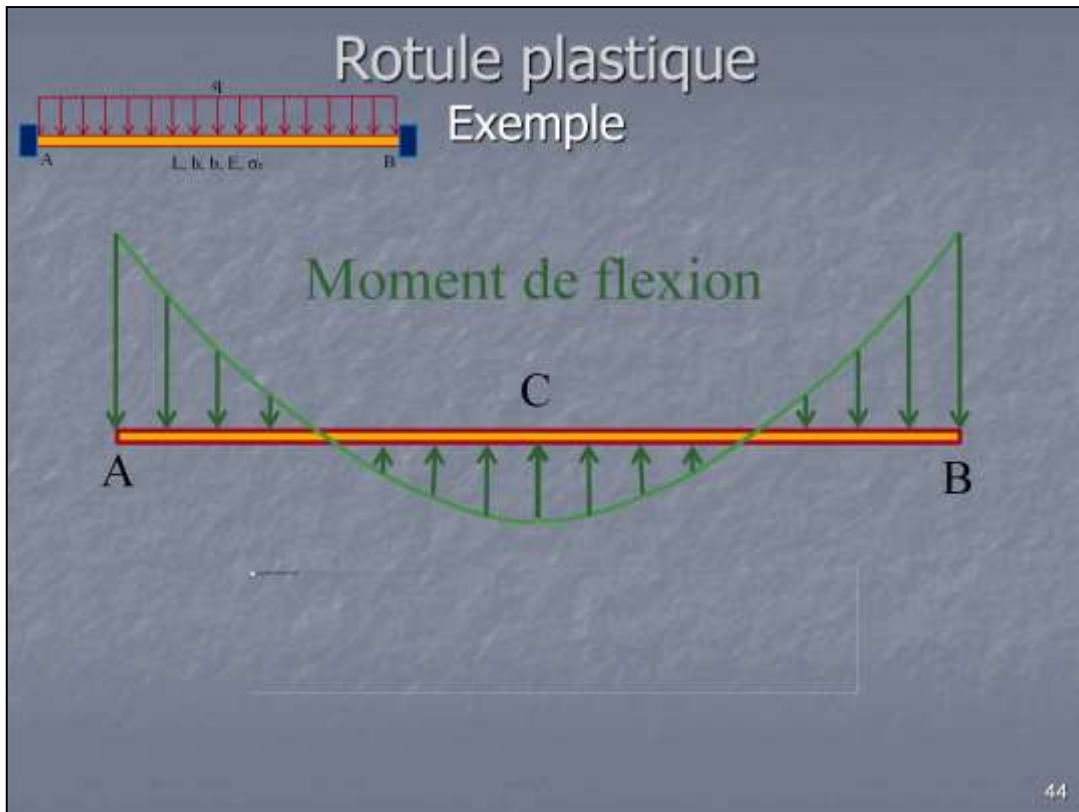


Afin de voir l'incidence de la prise en compte du phénomène de rotule plastique dans une structure, nous allons traiter un petit exemple, constitué d'une poutre de longueur  $L$ , avec une section droite constante rectangulaire. Le matériau utilisé a une loi de comportement élastique parfaitement plastique défini par un module d'Young  $E$  et une limite élastique  $s_e$ . La poutre est encastree à ses deux extrémités et elle supporte une charge uniformément répartie définie par une densité linéique  $q$ .

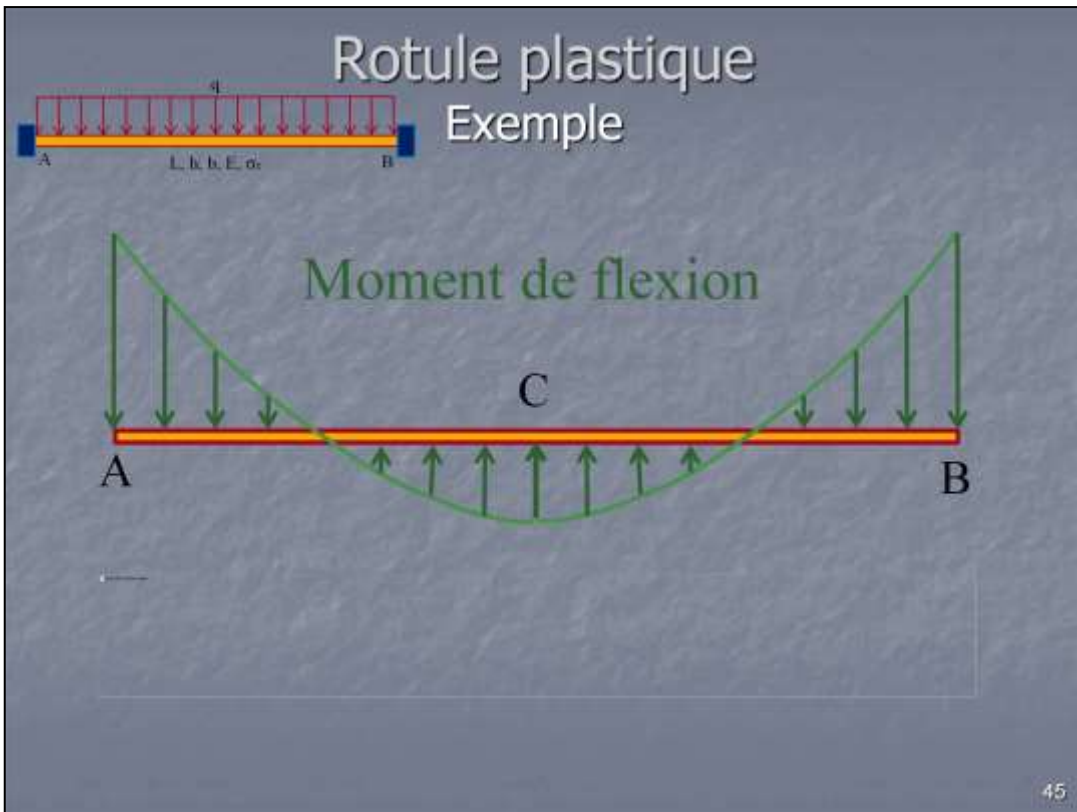


Compte tenu des conditions de liaison, le système est hyperstatique d'ordre 3, mais en négligeant les effets de traction devant les effets de flexion, on peut considérer que l'on a un hyperstatisme d'ordre 2.

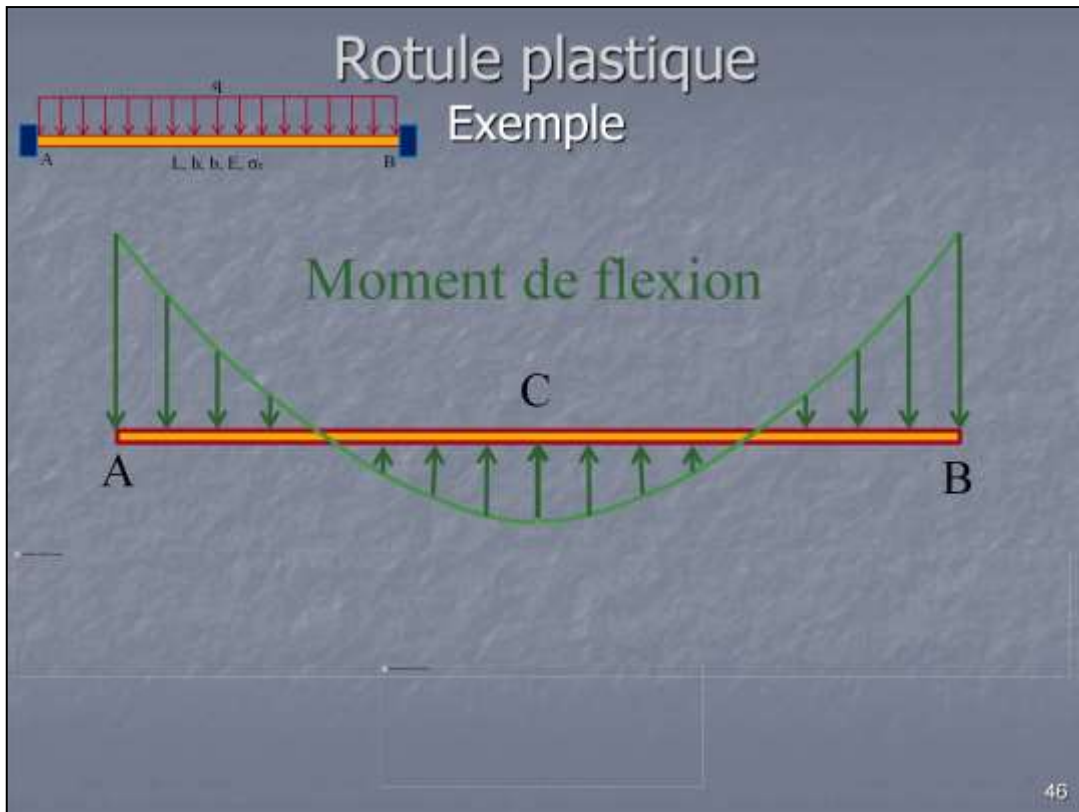
La détermination des inconnues de liaison va donc se faire en utilisant des équations de compatibilité des déplacements avec les liaisons imposées.



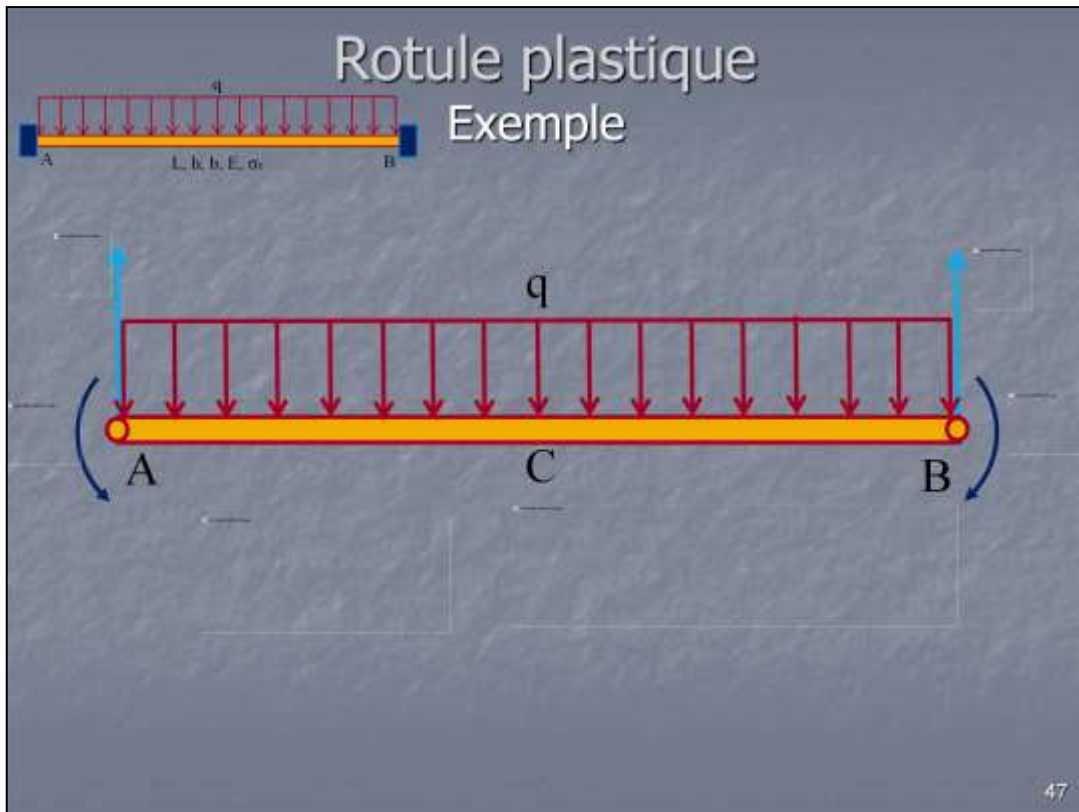
Il est alors possible de tracer le diagramme du moment de flexion.



Les valeurs extrémales sont au niveau des encastremets. Lorsque la contrainte normale maximale dans ces sections est égale à la limite élastique du matériau, le moment de flexion est égal au moment de flexion élastique. On a alors le chargement élastique.

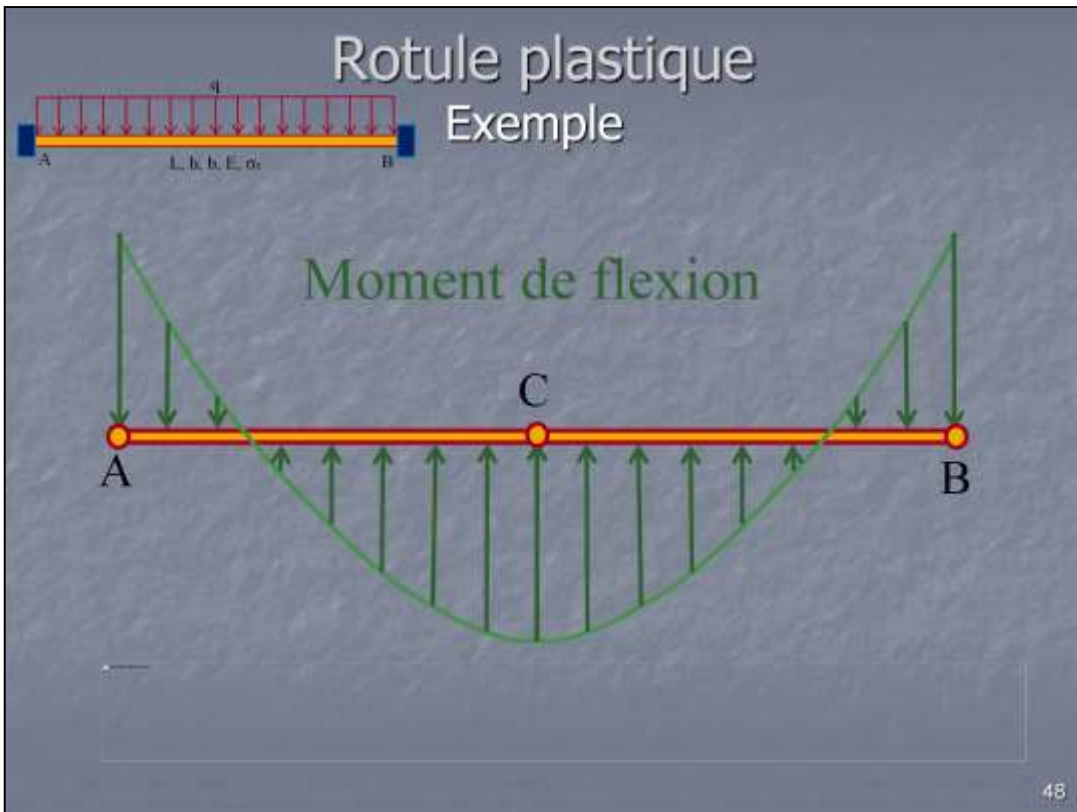


Si l'on continue d'augmenter le chargement, nous allons atteindre en ces points le moment de flexion plastique. On crée des rotules plastiques en ces points ce qui nous oblige à changer de modèle pour toute nouvelle augmentation de chargement.



Compte tenu des conditions de liaison, le système est hyperstatique d'ordre 3, mais en négligeant les effets de traction devant les effets de flexion, on peut considérer que l'on a un hyperstatisme d'ordre 2.

La détermination des inconnues de liaison va donc se faire en utilisant des équations de compatibilité des déplacements avec les liaisons imposées.



Le chargement ultime sera obtenu lorsque le moment de flexion au point milieu C est égal au moment de flexion plastique, ce qui va créer une nouvelle rotule plastique. Le système devient alors un mécanisme.



# Rotule plastique

## Exemple

Théorème des travaux virtuels

Le moment de flexion plastique s'oppose à la rotation

49

Le résultat précédent peut être obtenu en utilisant la méthode des travaux virtuels. En plaçant des rotules plastiques aux endroits judicieux on crée un mécanisme. En se plaçant au tout début de la cinématique caractérisé par l'angle de rotation on peut écrire que le somme des travaux des forces extérieures est nulle. Connaissant le moment de flexion plastique, on en déduit le chargement ultime.