

Physique du solide

Cyril Langlois

Le 4 avril 2008

Table des matières

| | |
|---|----------|
| 1 Déformations | 2 |
| 1.1 Description des déformations en deux dimensions | 2 |
| 1.2 Description en trois dimensions | 3 |
| 1.3 Tenseur des déformations d'un objet | 4 |
| 1.4 Déformations particulières | 4 |
| 2 Notion de contrainte mécanique | 5 |
| 2.1 Définitions | 5 |
| 2.2 Composantes des contraintes | 6 |
| 2.3 Expression tensorielle de la contrainte sur un plan | 6 |
| 2.4 Relations contrainte - déformation | 8 |
| 3 Ondes sismiques | 9 |
| 3.1 Onde sismique et déformations | 9 |
| 3.2 Équation de propagation d'onde | 10 |

Mots-clés : Cisaillements ; Contraintes ; Déformations ; Forces ; Ondes sismiques ; Solide.

1 Déformations

1.1 Description des déformations en deux dimensions

Dans un espace à deux dimensions, le changement de forme d'un petit objet placé dans un champ de déformation peut s'exprimer à l'aide des notations indiquées sur la figure 1.

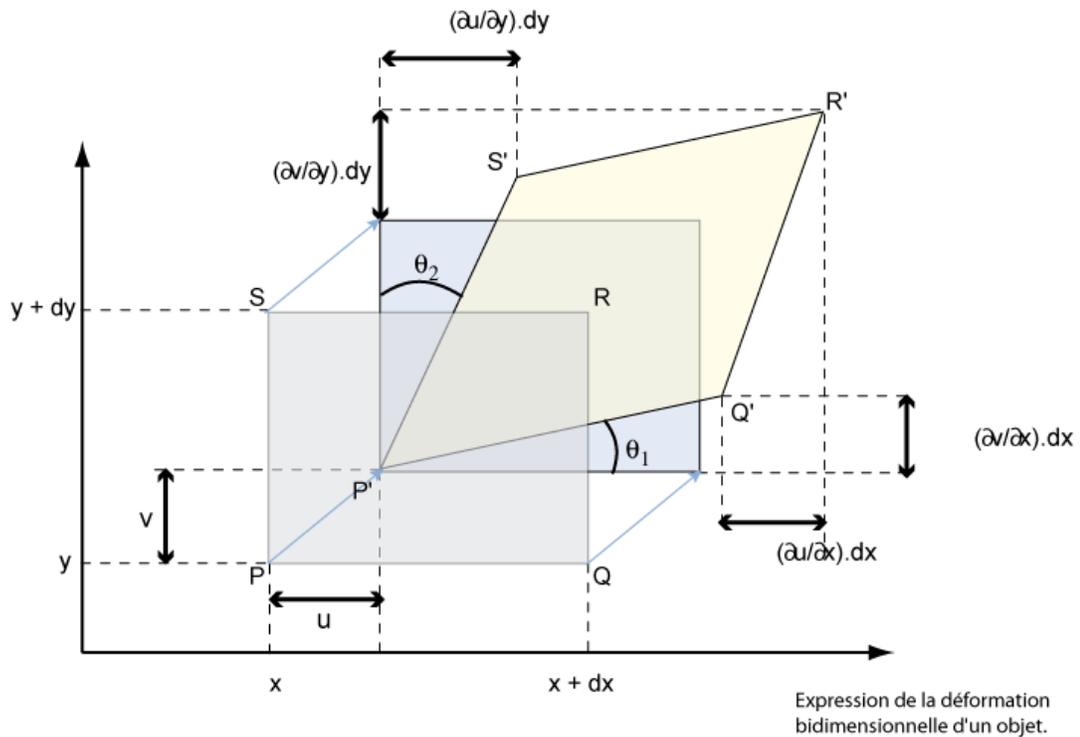


FIG. 1 – Déformation bidimensionnelle d'un objet

Les gradients de déformation sont considérés comme petits par rapport aux dimensions de l'objet :

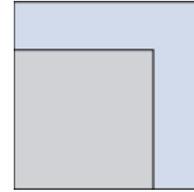
$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} \ll dx, dy$$

Au cours de la déformation, les points P, Q, R, S deviennent P', Q', R', S' tels que :

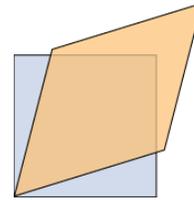
- * $P(x, y) \mapsto P'(x + u, y + v)$
- * $Q(x + dx, y) \mapsto Q'(x + u + (\partial u/\partial x).dx, y + (\partial v/\partial x).dx)$
- * $S(x, y + dy) \mapsto S'(x + u + (\partial u/\partial y).dy, y + dy + v + (\partial v/\partial y).dy)$
- * $R(x + dx, y + dy) \mapsto R'(x + dx + u + (\partial u/\partial x).dx + (\partial v/\partial x).dx, y + dy + v + (\partial v/\partial x).dx + (\partial v/\partial y).dy)$
- * $\theta_1 \cong (\partial v/\partial x)$ et $\theta_2 \cong (\partial u/\partial y)$ car $\tan \theta \cong \theta$

Outre le déplacement (*translation*) (u,v), la déformation proprement dite se décompose en :

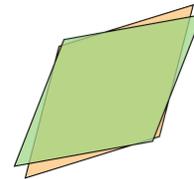
un changement des longueurs dans la direction des axes (*élongations normales*) sans changement de forme ;



un changement de la forme, indiqué par la fermeture de l'angle QPS, obtenu par un cisaillement parallèle à chaque axe, d'un même angle ($\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$) ;



une rotation d'ensemble de l'objet déformé autour d'un axe perpendiculaire au plan XY, d'un angle ($\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$).



1.2 Description en trois dimensions

Exprimées en trois dimensions, les déformations deviennent :

Élongation :

$$\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x$$

$$\varepsilon_{yy} = \partial v / \partial y$$

$$\varepsilon_{zz} = \partial w / \partial z$$

Cisaillement :

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = (\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = (\partial w / \partial y) + (\partial v / \partial z)$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = (\partial u / \partial z) + (\partial w / \partial x)$$

Rotation rigide :

$$\theta_x = (\partial w / \partial y) - (\partial v / \partial z)$$

$$\theta_y = (\partial u / \partial z) - (\partial w / \partial x)$$

$$\theta_z = (\partial v / \partial x) - (\partial u / \partial y)$$

Le volume de l'objet passe de V ($V = dx + dy + dz$) à $V + \Delta V$:

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= V + (dx + (\partial u/\partial x).dx) \times (dy + (\partial v/\partial y).dy) \times (dz + (\partial w/\partial z).dz) \\ &= V \times (1 + \varepsilon_{xx}) \times (1 + \varepsilon_{yy}) \times (1 + \varepsilon_{zz}) \\ &\quad \boxed{\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \Delta} \end{aligned}$$

1.3 Tenseur des déformations d'un objet

Les expressions des déformations (du, dv, dw) dans le système de coordonnées (x, y, z) s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

La matrice qui regroupe les déformations $(\partial j/\partial i)_{i=x,y,z}^{j=u,v,w}$ constitue le **tenseur** des déformations.

Le tenseur des déformations, comme on l'a illustré ci-dessus, se décompose en une partie symétrique, représentant la distorsion pure, et une partie antisymétrique, traduisant la rotation rigide (ou *vorticité*).

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

avec $i, j = 1, 2, 3$ ou x, y, z . Ce que l'on peut écrire encore :

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}}$$

Avec cette notation générale, la définition de ε_{ij} devient :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

1.4 Déformations particulières

- **Déformation homogène** : Les dérivées partielles $(\partial u_i/\partial x_j)_{i,j=x,y,z}$ sont indépendantes des coordonnées des points, donc constantes dans tout le volume.
- **Déformation coaxiale** (ant. *non-coaxiale*) : déformation pour laquelle les composantes $\varepsilon_{ij} = 1/2 (\partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i)$ sont toutes nulles.
- **Déformation plane** : déformation indépendante de l'une des directions de l'espace ($\equiv x_3$), par exemple ; tous les déplacements du sont parallèles à un même plan (x, y).

– *Déformation pure et plane* : déformation coaxiale, avec :

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \gamma/2$$

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

– *Cisaillement simple* : Déformation plane pour laquelle :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \gamma$$

et

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$$

Un cisaillement simple infinitésimal peut être considéré comme la somme d'une déformation pure, avec un cisaillement de $\gamma/2$ (figure 2, (a)), et d'une rotation rigide d'un angle $\gamma/2$ (b).

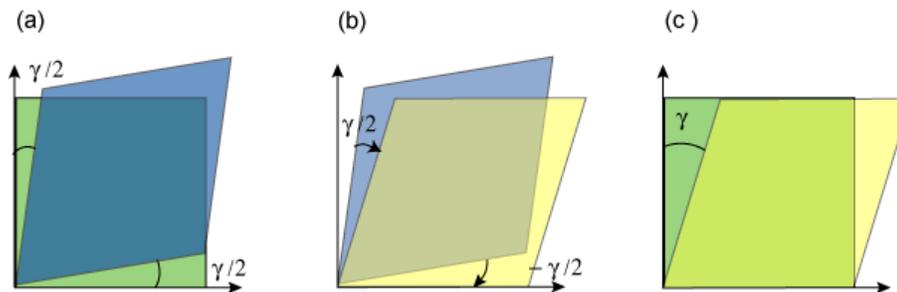


FIG. 2 – Décomposition d'un cisaillement simple infinitésimal

2 Notion de contrainte mécanique

2.1 Définitions

Une contrainte se définit comme la limite d'une force appliquée sur une surface quand cette surface tend vers zéro.

$$\sigma = \lim_{ds \rightarrow 0} \left(\frac{dF}{ds} \right)$$

avec ds un élément de surface sur lequel s'exerce la force dF . La composante de dF perpendiculaire à ds est appelée force (et contrainte) *normale* ; la composante de dF parallèle à ds est la force (et contrainte) *cisailante*.

2.2 Composantes des contraintes

Le plan sur lequel s'exerce la contrainte est défini par sa *normale* \mathbf{n} . Les contraintes qui s'applique sur un volume élémentaire sont représentées sur la figure 3. Les composantes des contraintes sont notées σ_{ij} où i indique le plan dont la normale est parallèle à l'axe i alors que j désigne la direction de la composante (figure 3).

Supposer que le volume élémentaire représenté est à l'équilibre signifie que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

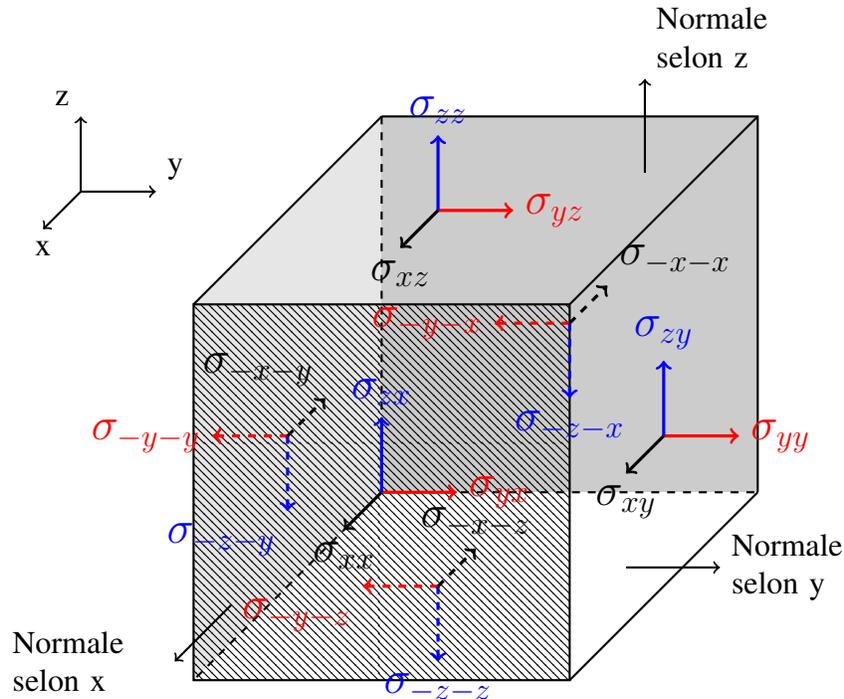


FIG. 3 – Contraintes sur un élément de matière élémentaire, de dimensions dx , dy , dz .

2.3 Expression tensorielle de la contrainte sur un plan

On considère un élément de matière en équilibre mécanique (figure 4).

On note \mathbf{n} (de coordonnées n_1, n_2, n_3), la normale au plan ABC (de surface dS), \vec{T} , \vec{T}' , \vec{T}'' , \vec{T}''' les contraintes qui s'exercent sur les faces du tétraèdre OABC, et $\vec{\phi} \times dV$ la force de volume agissant sur OABC, de volume dV (p. ex. son poids).

L'hypothèse d'équilibre implique les relations :

$$\begin{aligned} \vec{T} \cdot dS - \vec{T}' \cdot dS_1 - \vec{T}'' \cdot dS_2 - \vec{T}''' \cdot dS_3 - \vec{\phi} \cdot dV &= \vec{0} \\ \vec{T} \cdot dS - \vec{T}' \cdot dS \cdot n_1 - \vec{T}'' \cdot dS \cdot n_2 - \vec{T}''' \cdot dS \cdot n_3 - \vec{\phi} \cdot dV &= \vec{0} \\ \vec{T} - \vec{T}' \cdot n_1 - \vec{T}'' \cdot n_2 - \vec{T}''' \cdot n_3 - \vec{\phi} \cdot \frac{dV}{dS} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Et si $dV \rightarrow 0$, le dernier terme est négligeable.

Les contraintes ont pour composantes :

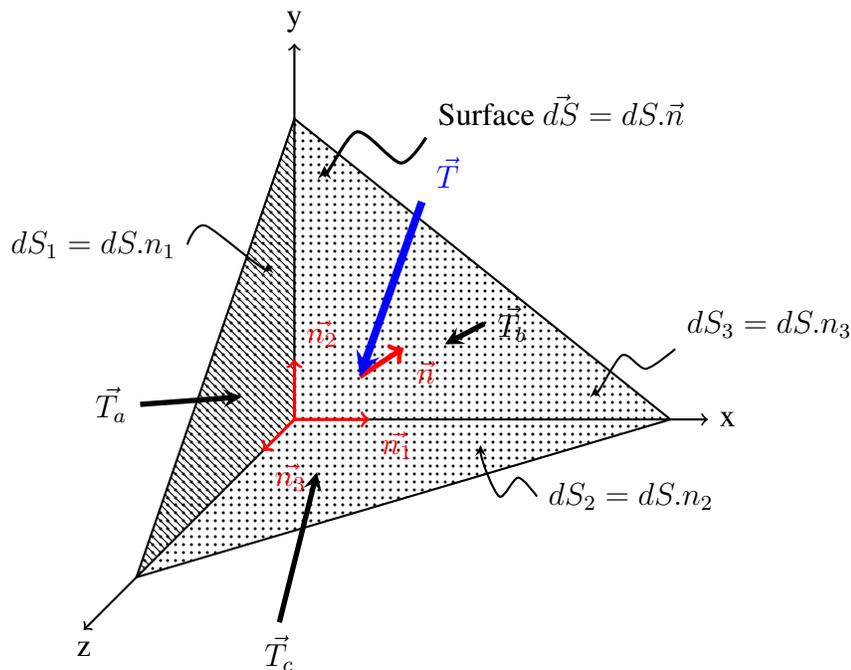


FIG. 4 – Expression d'une contrainte sur un plan quelconque.

$$T \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = T' \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = T'' \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix} = T''' \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

D'où, en projetant sur les axes la relation d'équilibre :

$$T_1 = \sigma_{11} \times n_1 + \sigma_{12} \times n_2 + \sigma_{13} \times n_3$$

$$T_2 = \sigma_{21} \times n_1 + \sigma_{22} \times n_2 + \sigma_{23} \times n_3$$

$$T_3 = \sigma_{31} \times n_1 + \sigma_{32} \times n_2 + \sigma_{33} \times n_3$$

Soit :

$$T_i = \sum_j \sigma_{ij} \times n_j$$

En général, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et il n'y a donc plus que 6 composantes indépendantes, dont la valeur est fonction du choix des axes. Par contre la somme $P = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ (trace de la matrice des contraintes) n'en dépend pas, et $P/3$ représente la pression isotrope au point 0. On peut donc décomposer le tenseur des contraintes en une partie isotrope et une partie anisotrope, ou déviatorique.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \frac{P}{3} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \frac{P}{3} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \frac{P}{3} \end{pmatrix}$$

2.4 Relations contrainte - déformation

Cas de la déformation élastique : déformation réversible montrant une relation linéaire entre contrainte appliquée et déformation.

Dans le cas le plus général, la relation $\sigma - \varepsilon$ a pour forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (\text{Loi de Hooke})$$

Avec $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ou x, y, z et C_{ijkl} la matrice des constantes élastiques, fonctions des propriétés mécaniques du solide. Soit, avec 9 composantes pour les deux tenseurs, 81 constantes élastiques !

Cependant, les propriétés de symétrie des tenseurs réduisent ce nombre. De plus, si l'on étudie des matériaux comme les roches dont les composants (les minéraux) ne présentent pas, à l'échelle examinée, d'orientation préférentielle, on peut considérer le solide comme isotrope. Dans cette situation, la loi de Hooke se réduit aux deux relations suivantes :

$$\sigma_{ii} = \lambda \times \Delta + 2 \times \mu \times \varepsilon_{ij} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_{ij} = \mu \times \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Dans ces relations, λ et μ représentent les *coefficients de Lamé* et $\Delta = \Delta V / V$.

À partir d'un seuil de contrainte donné, la relation $\sigma - \varepsilon$ n'est plus linéaire : la déformation s'accroît beaucoup en réponse à une augmentation bien plus faible des contraintes, voire pour une contrainte constante (fluage), et elle n'est plus réversible.

Autres relations : Les essais de déformation d'échantillon permettent de définir d'autres constantes élastiques. Les études en contrainte monoaxiale – où une seule contrainte déviatorique est non nulle (contrainte « agissante » par exemple σ_{xx}) – fournissent d'autres paramètres :

– le module d'Young, E :

$$E = \sigma_{xx} / \varepsilon_{xx}$$

– le coefficient de Poisson, ν :

$$\nu = -\varepsilon_{yy} / \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} / \varepsilon_{xx}$$

Si l'on considère un milieu seulement soumis à une pression *hydrostatique* (ou *lithostatique*), p , on peut définir encore le *coefficient d'incompressibilité*, k :

$$k = -p / \Delta$$

(le signe négatif rendant k positif car Δ est négatif).

Par substitution de ces définitions dans la loi de Hooke, on aboutit aux relations suivantes entre ces différents coefficients :

$$E = \mu \times \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$k = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3}$$

3 Ondes sismiques

3.1 Onde sismique et déformations

Bien que les roches soient fréquemment anisotropes (roches métamorphiques, sédimentaires), on considérera ici les milieux de propagation des ondes sismiques comme isotropes :

Si l'on reprend la figure de l'élément de matière de dimension $(dx \times dy \times dz)$ (figure 3) : On ne suppose plus que l'élément est en équilibre. Les contraintes sur les faces opposées ne sont donc plus égales et on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sigma'_{xx} &= \sigma_{xx} + (\partial\sigma_{xx}/\partial x) \cdot dx \\ \sigma'_{yx} &= \sigma_{yx} + (\partial\sigma_{yx}/\partial x) \cdot dx \\ \sigma'_{zx} &= \sigma_{zx} + (\partial\sigma_{zx}/\partial x) \cdot dx\end{aligned}$$

Et de même pour les deux autres directions. La force résultante $(\sigma'_{xx} - \sigma_{xx})$ dans la direction x est donc :

$$\Delta\sigma_x \begin{pmatrix} (\partial\sigma_{xx}/\partial x) \cdot dx \\ (\partial\sigma_{yx}/\partial x) \cdot dx \\ (\partial\sigma_{zx}/\partial x) \cdot dx \end{pmatrix} \text{ et, par unité de volume : } \begin{pmatrix} \partial\sigma_{xx}/\partial x \\ \partial\sigma_{yx}/\partial x \\ \partial\sigma_{zx}/\partial x \end{pmatrix}$$

En utilisant les expressions équivalentes pour les autres axes, la force totale résultante selon x s'écrit : $((\partial\sigma_{xx}/\partial x) + (\partial\sigma_{xy}/\partial y) + (\partial\sigma_{xz}/\partial z))$ et est égale, d'après le principe fondamental de la dynamique, à $\rho \cdot (\partial^2 u / \partial t^2)$, avec u le déplacement dans la direction x, et ρ la masse volumique.

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} \right)$$

On écrit ensuite les relations correspondantes pour les autres axes. En remplaçant les contraintes par les déformations, *via* la loi de Hooke, et en exprimant ces dernières en termes de déplacements, on obtient :

$$\begin{aligned}\rho \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) &= \lambda \times \left(\frac{\partial\Delta}{\partial x} \right) + 2\mu \times \left(\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x} \right) + \mu \times \left(\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) + \mu \times \left(\frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial z} \right) \\ &= \lambda \times \left(\frac{\partial\Delta}{\partial x} \right) + \mu \left[2 \times \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \\ &= \lambda \times \left(\frac{\partial\Delta}{\partial x} \right) + \mu \times \nabla^2 u + \mu \left(\frac{\partial(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z)}{\partial x} \right) \\ &= (\lambda + \mu) \times \frac{\partial\Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u\end{aligned}$$

Dans cette expression, $\nabla^2 u$ est le *Laplacien* de u . Par le même raisonnement en y et z , on obtient finalement pour les trois axes :

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = (\lambda + \mu) \times \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (1)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = (\lambda + \mu) \times \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (2)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = (\lambda + \mu) \times \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \quad (3)$$

3.2 Équation de propagation d'onde

On obtient une première équation d'onde en différentiant les trois équations du paragraphe précédent par rapport à x , y et z respectivement, puis en les additionnant. Ce qui donne :

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial^2 (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z)}{\partial t^2} \right] = (\lambda + \mu) \times \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \right) + \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Ce qui s'écrit plus simplement :

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \times \nabla^2 \Delta$$

Si l'on pose :

$$\alpha = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}$$

l'équation devient :

$$\frac{1}{\alpha^2} \times \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = \nabla^2 \Delta$$

L'opération effectuée ici revient à calculer la **divergence** de l'équation du mouvement. Cette équation est celle d'une onde, l'**onde de compression** ou **onde P** (première), de vitesse α .

Si l'on soustrait maintenant de la dérivée de (2) par rapport à z , la dérivée de (3) par rapport à y , il vient :

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial (\partial w / \partial y - \partial v / \partial z)}{\partial t^2} \right] = \mu \times \nabla^2 (\partial w / \partial y - \partial v / \partial z)$$

C'est-à-dire, en posant cette fois $\beta^2 = \mu / \rho$:

$$\frac{1}{\beta^2} \times \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = \nabla^2 \theta_x$$

Par les soustractions adéquates, on aboutit à des formules semblables pour θ_y et θ_z . Toutes ont la forme de l'équation générale des cordes vibrantes, ou *équation d'onde* :

$$\frac{1}{V^2} \times \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Psi$$

Où V est une constante. Les trois opérations effectuées correspondent au calcul du *rotationnel* du déplacement et démontrent l'existence d'une **onde de cisaillement**, ou onde S (seconde), de vitesse β .

Références

- [1] CARA, M., *GÉOPHYSIQUE*. Dunod, 1989.
- [2] LARROQUE, C. et J. VIRIEUX, *PHYSIQUE DE LA TERRE SOLIDE. Observations et théories*. Gordon and Breach Science Publishers, 2001.
- [3] MERCIER, J. et VERGELY, P., *TECTONIQUE*. Dunod, 1992.
- [4] MONTAGNIER, J.-P., *SISMOLOGIE. La musique de la Terre*. Hachette, 1997.