代数学第一 第 2 回 （加藤・川内　2021 年 4 月 22 日）

要提出問題

問 2.1. $M = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[\sqrt{-1}]$ とする．

(1) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-加群としての M の部分加群を全て求めよ．
(2) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[\sqrt{-1}]$-加群としての M の部分加群を全て求めよ．

問 2.2. $M = \mathbb{Z}^2$ を $\mathbb{Z}$-加群とする．M の部分加群 N を

$$N = \left\{ m\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

とする．次を示せ．

(1) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ おくと $N = \{m\boldsymbol{e}_1 + 2n\boldsymbol{e}_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ と表される．
(2) 剰余加群 M/N は $\mathbb{Z}$-加群として $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型である．

問 2.3. K を体とする．V は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ を基底とする K-ベクトル空間とし，W は $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ を基底とする K-ベクトル空間とする．K-線形写像 $f\colon V \to W$ を

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2 + 2\boldsymbol{f}_3,\ f(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 - 2\boldsymbol{f}_3,$$
$$f(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3,\ f(\boldsymbol{e}_4) = -4\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3$$

で定める．f の像と核 (の基底) を求めよ．

問 2.4. m, n を整数とする．

(1) m, n が互いに素であるとき $\mathbb{Z}$-加群準同型 $f\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を全て求めよ．
(2) $\mathbb{Z}$-加群準同型 $f\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ を全て求めよ．

補足問題

問 2.5. A を環，M を左 A-加群とする．次を示せ．

(1) $\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A \mid aM = \{0\}\}$ とおくと $\mathrm{Ann}(M)$ は A の両側イデアルである．$\mathrm{Ann}(M)$ を M の零化イデアルという．
(2) $I \subset \mathrm{Ann}(M)$ を A の両側イデアルとする．このとき M は自然に左 A/I-加群の構造をもつ．

問 2.6. K を体とし，V を K-ベクトル空間，$T\colon V \to V$ を K-線形変換とする．$f(X) \in K[X]$, $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $f(X) \cdot \boldsymbol{x} = f(T)(\boldsymbol{x})$ と定めると V は $K[X]$-加群であることを示せ．