4. Ορμή και στροφορμή

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998. Κεφ. 6, 8.

M. R. Spiegel, *Θεωρητική Μηχανική*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1985. Κεφ. 2, 7, 9.

4.1 Το κέντρο μάζας και η κίνησή του

4.1.1 Το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας

Αν υπάρχουν N σωματίδια με μάζες M_n και διανύσματα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_n$ ($1 \le n \le N$), το διάνυσμα θέσης του *κέντρου μάζας* (C.M.) του συστήματος ορίζεται ως:

$$\vec{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}} \equiv \frac{\sum_{n=1}^{N} M_n \vec{\mathbf{r}}_n}{\sum_{n=1}^{N} M_n}. \tag{4.1}$$

Για δύο σωματίδια ανάγεται σε

$$\vec{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}} = \frac{M_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + M_2 \vec{\mathbf{r}}_2}{M_1 + M_2}. \tag{4.2}$$

και το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο σωματίδια.

Στο όριο συνεχούς κατανομής μάζας, η Εξ. (4.1) γίνεται:

$$\vec{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}} \equiv \frac{\int_{\text{σύστημα}} \vec{\mathbf{r}}\, dm}{\int_{\text{σύστημα}} dm} \tag{4.1α}$$

4.1.2 Η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Ολική ορμή του συστήματος

Καθώς τα σωματίδια κινούνται, το κέντρο μάζας τους κινείται. Η στιγμιαία ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

$$\vec{\mathbf{V}}_{\text{c.m.}} = \dot{\vec{\mathbf{R}}}_{\text{c.m.}} = \frac{\sum_{n=1}^{N} M_n \dot{\vec{\mathbf{r}}}_n}{\sum_{n=1}^{N} M_n} = \frac{\sum_{n} M_n \vec{\mathbf{v}}_n}{\sum_{n} M_n} \tag{4.3}$$

όπου $\vec{\mathbf{v}}_n$ είναι οι ταχύτητες των σωματιδίων. Όμως, $\sum_{n=1}^{N} M_n = M$ είναι η ολική μάζα και το μέγεθος

$$\sum_{n=1}^{N} M_n \dot{\vec{\mathbf{r}}}_n = \sum_{n=1}^{N} M_n \vec{\mathbf{v}}_n = \sum_{n=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_n = \vec{\mathbf{P}}$$ ορίζεται ως η *ολική ορμή του συστήματος*.

Επομένως:

$$\vec{\mathbf{P}} = M \vec{\mathbf{V}}_{\text{c.m.}}, \tag{4.4}$$

και *η ολική ορμή του συστήματος είναι ίση με αυτήν μιας μάζας M ίσης με την ολική μάζα του συστήματος, που κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος.*

4.1.3 Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας

Παραγωγίζοντας ξανά ως προς τον χρόνο, βρίσκουμε τη στιγμιαία επιτάχυνση του κέντρου μάζας:

$$\ddot{\vec{\mathbf{R}}}_{\text{c.m.}} = \frac{\sum_{n=1}^{N} M_n \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_n}{\sum_{n=1}^{N} M_n} = \frac{\sum_n M_n \vec{\mathbf{a}}_n}{\sum_n M_n} \tag{4.5}$$

Όμως $M_n \vec{\mathbf{a}}_n = \vec{\mathbf{F}}_n$ είναι η δύναμη που ασκείται πάνω στο n-οστό σωματίδιο και $\sum_n \vec{\mathbf{F}}_n$ είναι το άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε όλα τα σωματίδια. Επειδή λόγω του τρίτου νόμου του Νεύτωνα οι εσωτερικές αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων αλληλοαναιρούνται ανά δύο ($\vec{\mathbf{F}}_{ij} = -\vec{\mathbf{F}}_{ji}$), το άθροισμα είναι ίσο με την ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο σύστημα των σωματιδίων, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{εξωτ.}}$. Έτσι,

$$M \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_{\text{c.m.}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{εξωτ.}} \tag{4.6}$$

και *το κέντρο μάζας κινείται όπως μια σημειακή μάζα ίση με την ολική μάζα του συστήματος, που βρίσκεται στο κέντρο μάζας και υφίσταται δύναμη ίση με την ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο σύστημα.*

4.1.4 Η διατήρηση της ορμής

Αν η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο σύστημα των σωματιδίων είναι ίσο με μηδέν, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{εξωτ.}} = \mathbf{0}$, τότε $\ddot{\vec{\mathbf{R}}}_{\text{c.m.}} = \mathbf{0}$ και η ταχύτητα του κέντρου μάζας παραμένει σταθερή

$$\dot{\vec{\mathbf{R}}}_{\text{c.m.}} = \text{σταθ.}$$

Αυτό ισοδυναμεί με

$$\vec{\mathbf{P}} = \text{σταθ.} \tag{4.7}$$

ή ότι *η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται.*

4.2 Κίνηση των σωματιδίων ενός συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του

Αν τα διανύσματα θέσης των N σωματιδίων είναι $\vec{\mathbf{r}}_n$ ($1 \le n \le N$) και η θέση του κέντρου μάζας τους είναι $\vec{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}}$, τότε τα *διανύσματα θέσης των σωματιδίων ως προς το κέντρο μάζας τους* είναι

$$\vec{\mathbf{r}}'_n = \vec{\mathbf{r}}_n - \vec{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}}. \tag{4.8}$$

Οι ταχύτητες των σωματιδίων ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος είναι:

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}}'_n = \dot{\vec{\mathbf{r}}}_n - \dot{\vec{\mathbf{R}}}_{\text{c.m.}} \tag{4.9}$$

Η ολική ορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του είναι:

$$\vec{\mathbf{P}}' \equiv \sum_n M_n \dot{\vec{\mathbf{r}}}'_n = \sum_n M_n \dot{\vec{\mathbf{r}}}_n - \sum_n M_n \dot{\vec{\mathbf{R}}}_{\text{c.m.}} = \sum_n M_n \dot{\vec{\mathbf{r}}}_n - M \dot{\vec{\mathbf{R}}}_{\text{c.m.}}.$$

Επειδή είναι

$$\sum_n M_n \dot{\vec{\mathbf{r}}}_n = M \dot{\vec{\mathbf{R}}}_{\text{c.m.}},$$

έχουμε το αποτέλεσμα

$$\vec{\mathbf{P}}' = \mathbf{0} \tag{4.10}$$

ή ότι *η ολική ορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του είναι ίσο με μηδέν*. Από αυτό το γεγονός πηγάζουν τα πλεονεκτήματα της χρήσης ως συστήματος αναφοράς του *Συστήματος του Κέντρου Μάζας*, στο οποίο το κέντρο μάζας είναι ακίνητο, σε αντίθεση με το *Σύστημα του*

Εργαστηρίου, μέσα στο οποίο το κέντρο μάζας κινείται. Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας η ολική ορμή του συστήματος παραμένει ίση με μηδέν.

Θα αποδείξουμε τώρα ένα άλλο αποτέλεσμα που είναι χρήσιμο. Το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος *ως προς το ίδιο το κέντρο μάζας* είναι, εξ ορισμού,

$$\vec{\mathbf{R}}'_{\text{c.m.}} \equiv \frac{\sum_{n=1}^{N} M_n \vec{\mathbf{r}}'_n}{\sum_{n=1}^{N} M_n} = \frac{1}{M}\left(\sum_{n=1}^{N} M_n \vec{\mathbf{r}}'_n\right) = \frac{1}{M}\left(\sum_{n=1}^{N} M_n (\vec{\mathbf{r}}_n - \vec{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}})\right) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N} M_n \vec{\mathbf{r}}_n - \vec{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}} = \mathbf{0}.$$

Επομένως

$$\sum_{n=1}^{N} M_n \vec{\mathbf{r}}'_n \equiv \mathbf{0} \ , \tag{4.11}$$

όταν οι θέσεις $\vec{\mathbf{r}}'_n$ των μαζών λαμβάνονται ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος.

4.3 Συστήματα μεταβλητής μάζας

Στα συστήματα μεταβλητής μάζας, η εξίσωση

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d(M\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}} + M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \tag{4.12}$$

είναι συχνά δύσκολο να χρησιμοποιηθεί, εξ αιτίας της δυσκολίας ταύτισης των διαφόρων μεγεθών με τα δεδομένα του συγκεκριμένου προβλήματος.

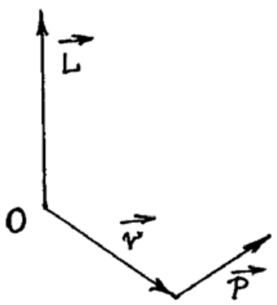
Ακολουθείται τότε η εξής αναλυτική μέθοδος:

1. Ορίζεται ένα *σύστημα*, η δυναμική του οποίου θα μελετηθεί.
2. Υπολογίζεται η ορμή του συστήματος $\vec{\mathbf{p}}(t)$ τη χρονική στιγμή t, και $\vec{\mathbf{p}}(t+\delta t) = \vec{\mathbf{p}}(t) + \delta\vec{\mathbf{p}}(t)$ τη χρονική στιγμή $t+\delta t$.
3. Εξισώνεται προσεγγιστικά η μεταβολή της ορμής του συστήματος, $\delta\vec{\mathbf{p}}(t) = \vec{\mathbf{p}}(t+\delta t) - \vec{\mathbf{p}}(t)$, με την ώθηση $\vec{\mathbf{F}}\,\delta t$ των εξωτερικών δυνάμεων στο ίδιο χρονικό διάστημα: $\vec{\mathbf{p}}(t+\delta t) - \vec{\mathbf{p}}(t) \approx \vec{\mathbf{F}}\,\delta t$.
4. Στο όριο, καθώς $\delta t \to 0$, η σχέση γίνεται απολύτως ακριβής και από αυτήν προκύπτει η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος.

Βλ. Παραδείγματα και Ασκήσεις βιβλίου.

4.4 Στροφορμή σώματος. Ροπή δύναμης

Η *στροφορμή ως προς ένα σημείο* Ο, μιας σημειακής μάζας M που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$ ως προς το Ο και κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$, ορίζεται ως:

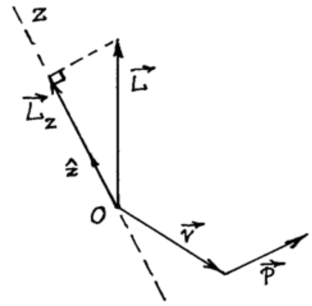


$$\vec{\mathbf{L}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{v}}. \qquad (4.13)$$

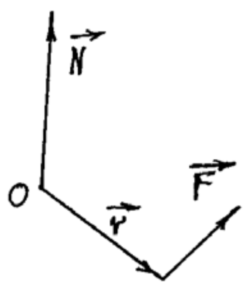
Η προβολή της στροφορμής πάνω σε άξονα z που περνά από το Ο είναι

$$\vec{\mathbf{L}}_z \equiv (\vec{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{z}})\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (4.14)$$

και ονομάζεται *στροφορμή του σωματιδίου ως προς τον άξονα* z.



Η *ροπή ως προς ένα σημείο* Ο, μιας δύναμης $\vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται στο σημείο που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$ ως προς το Ο, ορίζεται ως:

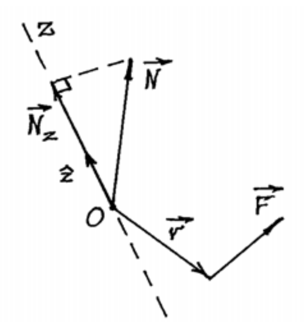


$$\vec{\mathbf{N}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}. \qquad (4.15)$$

Η προβολή της ροπής της δύναμης πάνω σε άξονα z που περνά από το Ο είναι

$$\vec{\mathbf{N}}_z \equiv (\vec{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{z}})\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (4.16)$$

και ονομάζεται *ροπή της δύναμης ως προς τον άξονα* z.



4.5 Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής

Αν $\vec{\mathbf{L}}$ είναι η στροφορμή μιας μάζας M ως προς το σημείο Ο, και $\vec{\mathbf{N}}$ είναι η ροπή ως προς το ίδιο σημείο Ο των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω στη μάζα, τότε

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{N}}, \qquad (4.17)$$

δηλαδή *ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με τη ροπή*. Αυτή η εξίσωση είναι η εξίσωση κίνησης για τη μάζα M και είναι για την περιστροφική κίνηση το ακριβές ανάλογο της εξίσωσης $\dfrac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$ για τη μεταφορική κίνηση. Το ρόλο της ορμής παίζει τώρα η στροφορμή (ροπή της ορμής), και το ρόλο της δύναμης η ροπή της δύναμης.

4.6 Η διατήρηση της στροφορμής

Αν για κάποιο σώμα είναι $\vec{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$ ως προς κάποιο σημείο, τότε και $\dfrac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \mathbf{0}$, και η στροφορμή $\vec{\mathbf{L}}$ του σώματος ως προς το σημείο αυτό διατηρείται:

$$\vec{\mathbf{L}} = \text{σταθ.} \qquad (4.18)$$

Ιδιαιτέρως, για τις κεντρικές δυνάμεις οι οποίες είναι της μορφής $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}}$, όπου r είναι η απόσταση από κάποιο σημείο (το κέντρο) και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από το κέντρο στο σημείο όπου υπολογίζεται η δύναμη, ισχύει $\vec{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$ ως προς το κέντρο, και επομένως η στροφορμή του σώματος πάνω στο οποίο ασκείται η κεντρική δύναμη παραμένει σταθερή ως προς το κέντρο. Αυτό ισχύει για τη στροφορμή του κάθε πλανήτη ως προς το κέντρο του Ήλιου, για τη στροφορμή ενός ηλεκτρονίου ως προς το κέντρο του πυρήνα γύρω από τον οποίο περιφέρεται κλπ.

Κάνοντας χρήση του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, αποδεικνύεται ότι οι εσωτερικές δυνάμεις ασκούν μηδενική ροπή πάνω σε ένα σώμα, ως προς οποιοδήποτε σημείο, και επομένως δεν επηρεάζουν τη στροφορμή του.

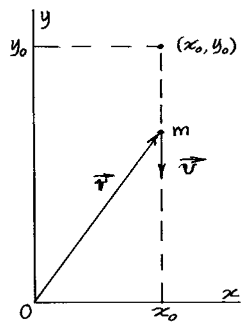
4.7 Η ροπή του βάρους ενός σώματος μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας

Μέσα σε ένα ομογενές πεδίο βαρύτητας, $\vec{\mathbf{g}}$, οι δυνάμεις της βαρύτητας που ασκούνται στις σημειακές μάζες οι οποίες συνθέτουν ένα σώμα, ασκούν συνολικά μια ροπή ως προς κάποιο σημείο που είναι ίση με τη ροπή, ως προς το ίδιο σημείο, μιας δύναμης ίσης με το βάρος του σώματος η οποία ασκείται στο κέντρο μάζας του σώματος:

$$\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}} \times M\vec{\mathbf{g}}. \tag{4.19}$$

Παράδειγμα 1

Μια αρχικά ακίνητη σημειακή μάζα m αφήνεται, τη χρονική στιγμή $t=0$, να πέσει υπό την επίδραση της βαρύτητας, από το σημείο (x_0, y_0).



(α) Να βρεθεί, συναρτήσει του χρόνου, η στροφορμή $\vec{\mathbf{L}}_O$ της μάζας ως προς το σημείο O $(0,0)$.

(β) Να βρεθεί η ροπή $\vec{\mathbf{N}}_O$, ως προς το σημείο O $(0,0)$, των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω στη μάζα.

(γ) Να ελεγχθεί ότι πράγματι ισχύει η σχέση $d\vec{\mathbf{L}}_O / dt = \vec{\mathbf{N}}_O$.

(α) $\vec{\mathbf{L}}_O = m\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} \qquad \vec{\mathbf{v}} = -gt\hat{\mathbf{y}} \qquad \vec{\mathbf{r}} = x_0\hat{\mathbf{x}} + (y_0 - \tfrac{1}{2}gt^2)\hat{\mathbf{y}}$

$$\vec{\mathbf{L}}_O = m\left[x_0\hat{\mathbf{x}} + (y_0 - \tfrac{1}{2}gt^2)\hat{\mathbf{y}}\right] \times \left(-gt\hat{\mathbf{y}}\right) = -mgx_0 t(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}) \qquad \vec{\mathbf{L}}_O = -mgx_0 t\,\hat{\mathbf{z}}$$

(β) Η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα είναι το βάρος του: $\vec{\mathbf{B}} = -mg\hat{\mathbf{y}}$.

Η ροπή του βάρους ως προς το σημείο O $(0,0)$ είναι: $\vec{\mathbf{N}}_O = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{B}}$

$$\vec{\mathbf{N}}_O = \left[x_0\hat{\mathbf{x}} + (y_0 - \tfrac{1}{2}gt^2)\hat{\mathbf{y}}\right] \times \left(-mg\hat{\mathbf{y}}\right) = -mgx_0(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}})$$

$$\vec{\mathbf{N}}_O = -mgx_0\,\hat{\mathbf{z}}.$$

(γ) $$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(-mgx_0 t\,\hat{\mathbf{z}}) = -mgx_0\,\hat{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{N}}_O \qquad \text{ό.έ.δ.}$$

4.8 Η στροφορμή ενός σώματος ως προς το κέντρο μάζας του

Αν ένα σύστημα σωματιδίων (ή σώμα) έχει στροφορμή $\vec{\mathbf{L}}$ ως προς κάποιο σημείο O, τότε

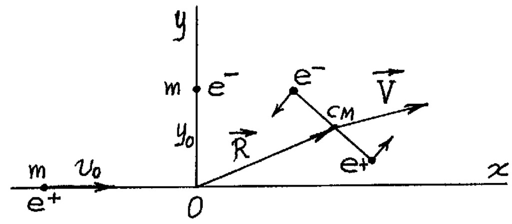
$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_{\text{c.m.}} + \vec{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}} \times \vec{\mathbf{P}} \tag{4.20}$$

όπου $\vec{\mathbf{L}}_{\text{c.m.}}$ είναι η στροφορμή του σώματος ως προς το κέντρο μάζας του (*ιδία στροφορμή* ή *σπιν*) και $\vec{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}} \times \vec{\mathbf{P}}$ είναι η στροφορμή, ως προς το O, ενός σώματος που βρίσκεται στο κέντρο μάζας του συστήματος των σωματιδίων και έχει ορμή $\vec{\mathbf{P}}$ ίση με τη συνολική ορμή των σωματιδίων.

Αν πάρουμε το κέντρο μάζας του συστήματος των σωματιδίων ως σημείο αναφοράς για τη στροφορμή, ολική στροφορμή είναι απλώς η $\vec{\mathbf{L}}_{\text{c.m.}}$.

Παράδειγμα 2

Ένα ηλεκτρόνιο βρίσκεται ακίνητο στο σημείο $(0, y_0)$ του επιπέδου (x, y). Ένα ποζιτρόνιο κινείται (πάνω στον άξονα των x με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}} = \upsilon_0 \hat{\mathbf{x}}$) έτσι ώστε η θέση του συναρτήσει του χρόνου να είναι $\vec{\mathbf{r}} = \upsilon_0 t\,\hat{\mathbf{x}}$. Τα δύο σωματίδια έχουν την ίδια μάζα m και ίσα και αντίθετα φορτία $\pm e$. Όταν πλησιάσουν αρκετά κοντά το ένα στο άλλο, τα σωματίδια σχηματίζουν, για λίγο, ένα σύστημα (γνωστό ως *ποζιτρόνιουμ*), στο οποίο κινούνται πάνω σε έναν κύκλο με κέντρο το κέντρο μάζας τους, *CM*. Τα σωματίδια βρίσκονται σε διαμετρικώς αντίθετα σημεία και έχουν ίσες και αντίθετες ταχύτητες ως προς το κέντρο μάζας τους.



(α) Να βρεθούν, συναρτήσει του χρόνου, (i) η θέση $\vec{\mathbf{R}}$ και (ii) η ταχύτητα $\vec{\mathbf{V}}$ του κέντρου μάζας των σωματιδίων, και (iii) η στροφορμή $\vec{\mathbf{L}}_O$ των σωματιδίων ως προς το σημείο O $(0, 0)$. Ισχύουν οι σχέσεις αυτές για κάθε τιμή του t, και γιατί;

(β) Για το ποζιτρόνιουμ που δημιουργείται, να βρεθούν: (i) η θέση του $\vec{\mathbf{R}}_\pi$, (ii) η ταχύτητά του $\vec{\mathbf{V}}_\pi$, (iii) η στροφορμή του $\vec{\mathbf{L}}_{\pi,O}$ ως προς το σημείο O $(0, 0)$, και (iv) η ιδία στροφορμή του (σπιν) $\vec{\mathbf{L}}_C$.

(α) (i) $\vec{\mathbf{R}} = \dfrac{1}{2m}(m\upsilon_0 t\,\hat{\mathbf{x}} + m y_0\,\hat{\mathbf{y}})$, $\quad\vec{\mathbf{R}} = \tfrac{1}{2}\upsilon_0 t\,\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2} y_0\,\hat{\mathbf{y}}$.

(ii) $\vec{\mathbf{V}} = d\vec{\mathbf{R}}/dt = \tfrac{1}{2}\upsilon_0\,\hat{\mathbf{x}}$.

(iii) $\vec{\mathbf{L}}_O = m\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = m(\upsilon_0 t\,\hat{\mathbf{x}}) \times (\upsilon_0\,\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$.

Επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή ροπές στο σύστημα, η ορμή του και η στροφορμή του διατηρούνται, και οι σχέσεις αυτές ισχύουν για κάθε τιμή του t.

(β) (i) Η θέση του κέντρου μάζας του ποζιτρόνιουμ θα είναι

$\vec{\mathbf{R}}_\pi = \vec{\mathbf{R}} = \tfrac{1}{2}\upsilon_0 t\,\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2} y_0\,\hat{\mathbf{y}}$.

(ii) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του ποζιτρόνιουμ θα είναι

$\vec{\mathbf{V}}_\pi = \vec{\mathbf{V}} = \tfrac{1}{2}\upsilon_0\,\hat{\mathbf{x}}$.

(iii) Η ολική στροφορμή του ποζιτρόνιουμ θα είναι όση και η αρχική στροφορμή του συστήματος

$$\vec{\mathbf{L}}_{\pi,O} = \vec{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0} .$$

(iv) Από τη σχέση $\quad\vec{\mathbf{L}}_{\pi,O} = \vec{\mathbf{L}}_C + (2m)\vec{\mathbf{R}}_\pi \times \vec{\mathbf{V}}_\pi = \mathbf{0}$

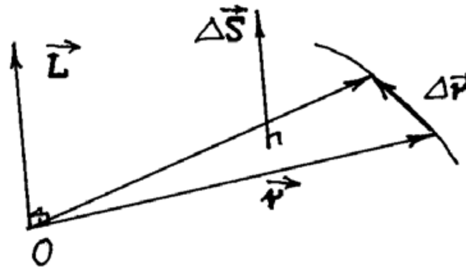
προκύπτει ότι $\quad\vec{\mathbf{L}}_C = -2m(\tfrac{1}{2}\upsilon_0 t\,\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2} y_0\,\hat{\mathbf{y}}) \times (\tfrac{1}{2}\upsilon_0\,\hat{\mathbf{x}}) = -\tfrac{1}{2} m\upsilon_0 y_0 (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}})$

$$\vec{\mathbf{L}}_C = \tfrac{1}{2} m\upsilon_0 y_0\,\hat{\mathbf{z}} .$$

4.9 Η γεωμετρική ερμηνεία της στροφορμής

Αν μια σημειακή μάζα έχει στροφορμή $\vec{\mathbf{L}}$ ως προς κάποιο σημείο Ο, τότε σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt το σώμα θα μετακινηθεί από το σημείο $\vec{\mathbf{r}}$ στο σημείο $\vec{\mathbf{r}}+\Delta\vec{\mathbf{r}}$, και η επιβατική ακτίνα $\vec{\mathbf{r}}$ που ενώνει τη μάζα με το Ο σαρώνει μια τριγωνική επιφάνεια, της οποίας το διανυσματικό εμβαδόν είναι ίσο με

$$\Delta\vec{\mathbf{S}} = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{r}}\times\Delta\vec{\mathbf{r}} \,. \qquad (4.21)$$



Ο ρυθμός σάρωσης επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου είναι

$$\frac{d\vec{\mathbf{S}}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{r}}\times\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{v}} = \frac{\vec{\mathbf{L}}}{2M}\,. \qquad (4.22)$$

Αν είναι $\vec{\mathbf{L}} = \text{σταθ.}$, τότε και
$$\frac{d\vec{\mathbf{S}}}{dt} = \text{σταθ.} \qquad (4.23)$$

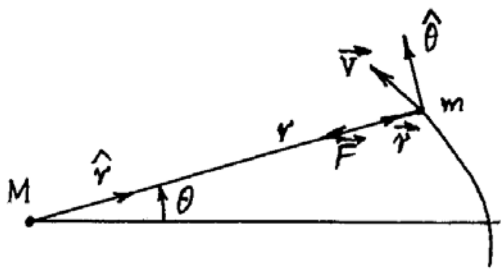
Για την κίνηση ενός πλανήτη, αυτός είναι ο *δεύτερος νόμος του Κέπλερ*.

Παράδειγμα 3

Η κίνηση των πλανητών (Βλ. C. Kittel κ.ά., *Μηχανική*, Κεφ. 9.)

Η δύναμη που ασκείται από τον Ήλιο πάνω σε έναν πλανήτη είναι

$$\vec{\mathbf{F}} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \,,$$



όπου G η σταθερά της βαρύτητας, M η μάζα του Ήλιου, m η μάζα του πλανήτη, r η απόσταση του πλανήτη από τον Ήλιο και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από τον Ήλιο προς στον πλανήτη.

Σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες, η εξίσωση κίνησης του πλανήτη είναι:

$$m\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dr^2} = \vec{\mathbf{F}} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\,, \qquad \text{ή} \qquad \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dr^2} = (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\,.$$

Επομένως $\qquad \ddot{r}-r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{GM}{r^2} \quad (1) \qquad$ και $\qquad r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0 \quad (2)$

Η (2) δίνει

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad\Rightarrow\quad r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m} = \text{σταθ.} \qquad L = \text{στροφορμή}.$$

Η λύση αυτών των εξισώσεων για τα $r(t)$ και $\theta(t)$ σε κλειστή μορφή δεν είναι δυνατή. Θα βρούμε αντί αυτών την εξίσωση της τροχιάς $r(\theta)$. Για τον σκοπό αυτό θέτουμε $u \equiv 1/r$. Απαλείφοντας τα t και r από τις εξισώσεις (1) και (2), έχουμε τελικά, για $L \neq 0$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}\,, \qquad \text{της οποίας η γενική λύση είναι} \qquad u = \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} + A\cos(\theta+\phi)$$

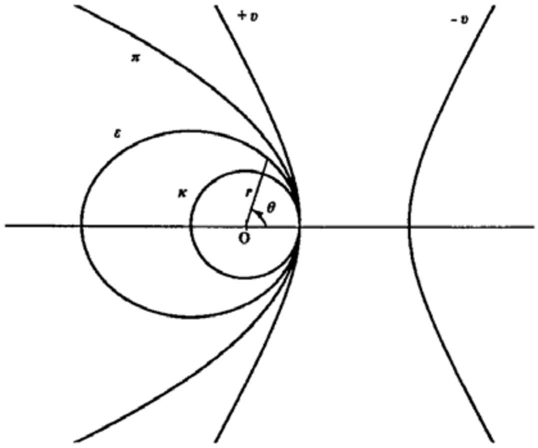
όπου τα A και ϕ είναι αυθαίρετες σταθερές. Θέτουμε $\phi = 0$, καθορίζοντας έτσι απλώς τον προσανατολισμό της τροχιάς στο επίπεδο. Η A καθορίζεται από τη στροφορμή και την ολική ενέργεια του πλανήτη και είναι

$$A=\sqrt{\left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2+\frac{2mE}{L^2}}$$

όπου $E=$ ολική ενέργεια του πλανήτη.
Η τροχιά του σώματος είναι επομένως

$$r=\frac{s}{1+\varepsilon\cos\theta},$$

όπου $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$ είναι η *εκκεντρότητα* της τροχιάς, και s είναι ένα μήκος που καθορίζει την κλίμακα της τροχιάς.



Για *ελκτική δύναμη* έχουμε:

για $E<0$, $\rightarrow$ $\varepsilon<1$, έλλειψη
για $E=0$, $\rightarrow$ $\varepsilon=1$, παραβολή
για $E>0$, $\rightarrow$ $\varepsilon>1$, υπερβολή.

Στην ειδική περίπτωση που είναι $E=-\frac{G^2M^2m^3}{2L^2}$, είναι $\varepsilon=0$ και η τροχιά είναι κυκλική.

Γενικά, για δύναμη $\vec{\mathbf{F}}=\frac{C}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, είναι $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{C^2m}}$.

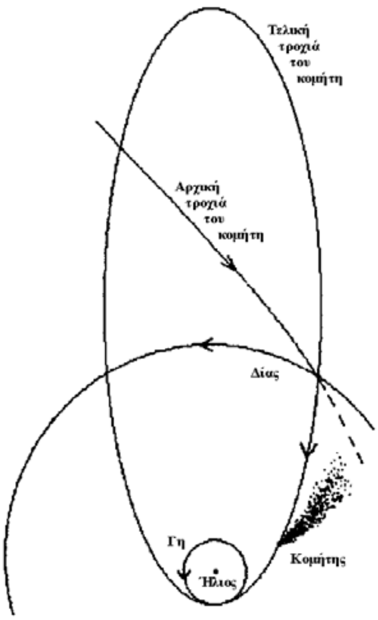
Για σκέδαση Rutherford: $GMm\rightarrow-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}$ (θετικό ή αρνητικό).

Για απωστική δύναμη η τροχιά είναι παραβολική ή υπερβολική.

Προβλήματα

Από το βιβλίο Kittel κ.ά. Μηχανική: Κεφ. 6, Ασκ. 3, 7, 14.

4.1 Ένας κομήτης, είχε αρχικά μια τροχιά της οποίας το περιήλιο απείχε από τον Ήλιο περισσότερο από 3 ua (1 ua = 1 αστρονομική μονάδα = 1,5 10^8 km, η μέση απόσταση Γης-Ηλίου). Οι κομήτες που δεν πλησιάζουν σε μικρότερη απόσταση από περίπου 3 ua από τον Ήλιο, δεν αποκτούν “κόμη” και δεν παρατηρούνται. Σε μια από τις περιφορές του, ο κομήτης πέρασε κοντά από τον πλανήτη Δία, με αποτέλεσμα να μεταβληθεί η κατεύθυνση κίνησής του και η στροφορμή του ως προς το κέντρο του Ηλίου. Μετά από αυτό, η νέα τροχιά του κομήτη τον φέρνει σε αρκετά μικρές αποστάσεις από τον Ήλιο, ώστε να αποκτά ουρά και να γίνεται ορατός. Η διεργασία αυτή είναι γνωστή ως *άγρα κομητών* (άγρα = κυνήγι, ψάρεμα), στην οποία επιδίδονται οι μεγάλοι πλανήτες και κυρίως ο Δίας. Αμέσως μετά τη συνάντησή του αυτή με τον Δία, ο κομήτης είχε ταχύτητα $\upsilon=\sqrt{15}$ ua/y (y = έτος). Ως προς τον Ήλιο, και στην απόσταση των 5 ua από αυτόν, ο κομήτης έχει ακτινική συνιστώσα της ταχύτητάς του ίση με $\upsilon_r=\frac{2}{5}\sqrt{74}$ ua/y , εγκάρσια συνιστώσα



$\upsilon_\theta = \frac{1}{5}\sqrt{79}$ ua/y, και κινείται στο επίπεδο της τροχιάς της Γης. Προφανώς είναι $\upsilon^2 = \upsilon_r^2 + \upsilon_\theta^2$.

Χρησιμοποιώντας μονάδες au για το μήκος και y για το χρόνο, στις οποίες είναι $GM = 40\ \text{au}^3/\text{y}^2$, και τη μάζα του κομήτη m όπου αυτή χρειάζεται,

(α) Βρείτε την τροχιακή στροφορμή L του κομήτη ως προς τον Ήλιο, και την ολική του ενέργεια E.

(β) Βρείτε την ελάχιστη, r_1, και τη μέγιστη απόσταση, r_2, του κομήτη από τον Ήλιο.

(γ) Βρείτε τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ελλειπτικής τροχιάς του κομήτη:

(i) τον μεγάλο ημιάξονά της $a = \frac{r_1 + r_2}{2}$, (ii) την εκκεντρότητά της $\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$,

(iii) τον μικρό ημιάξονά της $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{r_1 r_2}$.

(δ) Το εμβαδόν της έλλειψης είναι $S = \pi ab$. Από το γεγονός ότι ο ρυθμός σάρωσης επιφάνειας από την επιβατική ακτίνα που συνδέει τον κομήτη με τον Ήλιο είναι σταθερός και ίσος με $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m}$, βρείτε την περίοδο περιφοράς T του κομήτη γύρω από τον Ήλιο.

4.2 Ένας δορυφόρος έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα υ_0 σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρω από τη Γη. Η Γη θεωρείται τελείως σφαιρική και έχει μάζα M. Ένα σώμα μάζας m, κινούμενο ακτινικά με ταχύτητα υ_0, συγκρούεται με τον δορυφόρο και ενσωματώνεται σε αυτόν δημιουργώντας ένα σώμα μάζας $2m$.

(α) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή L των δύο σωμάτων ως προς το κέντρο της Γης παραμένει σταθερή και βρείτε την τιμή της.

(β) Βρείτε την ολική ενέργεια $E_{ο\lambda}$ που θα έχει το σώμα που σχηματίζεται μετά τη σύγκρουση.

(γ) Αν η $E_{ο\lambda}$ είναι αρνητική, το σώμα θα κινηθεί σε κλειστή τροχιά, που είναι κύκλος ή έλλειψη. Δείξετε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η τροχιά του σώματος θα είναι ελλειπτική.

(δ) Χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης της στροφορμής, βρείτε την ελάχιστη, r_1, και τη μέγιστη απόσταση, r_2, του σώματος από τη Γη, καθώς αυτό κινείται στην ελλειπτική του τροχιά. Εκφράστε τα αποτελέσματα συναρτήσει του r_0.

4.3 Αβαρής ράβδος μήκους l έχει τα δύο της άκρα στα σημεία $(0, 0)$ και $(l, 0)$. Στο άκρο της στο σημείο $(0, 0)$ υπάρχει σημειακή μάζα m στερεωμένη στη ράβδο. Μια άλλη μάζα $2m$ κινείται ελεύθερη στην κατεύθυνση $+y$ με ταχύτητα V. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ φθάνει στο σημείο $(l, 0)$ και προσκολλάται στο ελεύθερο άκρο της ράβδου. Οι δύο μάζες και η ράβδος κινούνται μετά ως ενιαίο σύνολο, στο επίπεδο xy, το οποίο είναι οριζόντια και λεία επιφάνεια. Στο σύστημα δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη.

(α) Βρείτε τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος τη χρονική στιγμή $t = 0$, την ολική ορμή του συστήματος, καθώς και την ταχύτητα $\dot{\vec{\mathbf{R}}}_{CM}$ και τη θέση $\vec{\mathbf{R}}_{CM}$ του κέντρου μάζας του ως προς το σημείο $(0, 0)$, για $t > 0$.

(β) Βρείτε τη στροφορμή του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων, $\vec{\mathbf{L}}_0$, και ως προς το κέντρο μάζας του, $\vec{\mathbf{L}}_{CM}$. Εξηγήστε γιατί οι τιμές αυτές παραμένουν σταθερές.

(γ) Από τη στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του, $\vec{\mathbf{L}}_{CM}$, και εξετάζοντας το σύστημα όπως το βλέπει ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο κέντρο μάζας του και κινείται με αυτό, υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος.

(δ) Περιγράψετε την κίνηση που εκτελεί το σύστημα μαζών και ράβδου. Επαληθεύσετε ότι ισχύει η σχέση $\vec{\mathbf{L}}_0 = \vec{\mathbf{L}}_{CM} + M_{ο\lambda}\vec{\mathbf{R}}_{CM} \times \dot{\vec{\mathbf{R}}}_{CM}$, όπου $M_{ο\lambda} = 3m$.

4.4 Δύο πίθηκοι A και B είναι κρεμασμένοι από τα δύο άκρα ενός σχοινιού, που περνάει από μία τροχαλία ακτίνας R. Οι πίθηκοι βρίσκονται σε ίση απόσταση L από την τροχαλία. Οι μάζες του σχοινιού και της τροχαλίας είναι αμελητέες. Οι πίθηκοι έχουν την ίδια μάζα, είναι αρχικά ακίνητοι και αρχίζουν ταυτόχρονα να αναρριχώνται με ταχύτητες υ και 3υ, αντίστοιχα, ως προς το σκοινί.

Εξετάζοντας την ολική στροφορμή των δύο πιθήκων ως προς το κέντρο της τροχαλίας, βρείτε τις ταχύτητές τους ως προς αυτήν. Υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται ο καθένας για να φτάσει στην τροχαλία.

4.5 Αλυσίδα βρίσκεται σωριασμένη στο έδαφος. Η αλυσίδα έχει γραμμική πυκνότητα μάζας ίση με λ kg/m. Δύναμη $\vec{\mathbf{F}} = F\hat{\mathbf{y}}$ δρα στο ένα άκρο της αλυσίδας, ανυψώνοντάς την κατακόρυφα. Να βρεθεί η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ που απαιτείται για να ανυψώσει την αλυσίδα με σταθερή ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \upsilon\hat{\mathbf{y}}$. Υπολογίστε, συναρτήσει του ύψους y του άνω άκρου της αλυσίδας, το έργο $W(y)$ που έχει παραχθεί από τη δύναμη, την κινητική ενέργεια E_K και τη δυναμική ενέργεια E_Δ της αλυσίδας, καθώς και την απώλεια ενέργειας ως κλάσμα της E_K.

4.6 Αμάξι μάζας M_0 κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά με ταχύτητα υ_0 και αμελητέες τριβές. Η μάζα του αρχίζει να αυξάνει τη χρονική στιγμή $t = 0$ γραμμικά με το χρόνο με ρυθμό $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = a > 0$, π.χ. λόγω βροχής που πέφτει κατακόρυφα και ομοιόμορφα.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του αμαξιού για $t > 0$.

(β) Αν στο αμάξι ασκείται για $t > 0$ εξωτερική δύναμη, τέτοια ώστε η ταχύτητά του να παραμένει σταθερή και ίση με υ, να βρεθεί η απαιτούμενη ισχύς. Ποιο ποσοστό της ισχύος μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια;

4.7 Διαστημόπλοιο κινείται πάνω σε ευθεία, αποβάλλοντας αέρια με σταθερό ρυθμό α. Έτσι, αν $M(t)$ είναι η μάζα του διαστημοπλοίου, τότε $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\alpha$ (μάζα ανά μονάδα χρόνου). Τα αέρια αποβάλλονται προς τα πίσω με ταχύτητα V ως προς το διαστημόπλοιο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα του διαστημοπλοίου είναι M_0 και η ταχύτητά του $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{\mathbf{0}}$. Η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο διαστημόπλοιο είναι μια δύναμη τριβής ίση με $\vec{\mathbf{F}}_{\tau\rho} = -k\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ η ταχύτητα του διαστημοπλοίου και k μια θετική σταθερά.

(α) Βρείτε την ταχύτητα $\upsilon(t)$ του διαστημοπλοίου ως συνάρτηση του χρόνου t.

(β) Βρείτε την απόσταση $s(t)$ που έχει διανύσει το διαστημόπλοιο ως συνάρτηση του t.

(γ) Βρείτε τα $\upsilon(t)$ και $s(t)$ για την ειδική περίπτωση που είναι $k = \alpha$. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα στην περίπτωση αυτή;

4.8 Ένα σώμα εκτοξεύεται από το σημείο (0, 0) με οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας ίση με u και κατακόρυφη ίση με w. Η μάζα του σώματος αυξάνει λόγω της προσρόφησης, από ένα νέφος, υδρατμών οι οποίοι είναι ακίνητοι στην ατμόσφαιρα, με ρυθμό m_0/τ μονάδες μάζας ανά μονάδα χρόνου, όπου m_0 είναι η αρχική τιμή της μάζας και τ μια θετική σταθερά. Η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα είναι το βάρος του.

(α) Δείξετε ότι, όταν η μάζα του σώματος έχει την τιμή $m(t)$, η θέση του είναι:

$$x = u\tau\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) \qquad y = \frac{1}{4}g\tau^2\left(1 - \frac{m^2}{m_0^2}\right) + \left(w\tau + \frac{1}{2}g\tau^2\right)\ln\left(\frac{m}{m_0}\right).$$

(β) Δείξετε επίσης πως, αν $\upsilon > 0$, το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει το σώμα είναι:

$$y_m = \frac{1}{2}\left(w\tau + \frac{1}{2}g\tau^2\right)\ln\left(1 + \frac{2w}{g\tau}\right) - \frac{1}{2}w\tau.$$

(γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που ακολουθεί το σώμα;

4.9 Μια σφαιρική σταγόνα από χαλάζι πέφτει κατακορύφως λόγω της βαρύτητας, χωρίς αντίσταση από τον αέρα. Λόγω στερεοποίησης υδρατμών στην επιφάνεια της σφαίρας, η ακτίνα της r αυξάνει με ρυθμό $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = \lambda r$, όπου λ είναι μια θετική σταθερά. Η αρχική ακτίνα της σταγόνας είναι α και η αρχική της μάζα m_0.

(α) Βρείτε τη μάζα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t.

(β) Βρείτε την ταχύτητα της σταγόνας συναρτήσει του t.

(γ) Δείξετε ότι η ταχύτητα της σφαίρας τείνει προς μια ορική τιμή ίση με $g/3\lambda$.

4.10 Νήμα είναι περασμένο πάνω από τροχαλία, με τα δύο του άκρα κατακόρυφα. Στο ένα άκρο του νήματος είναι δεμένη μάζα m = 0,5 kg που είναι αρχικά ακίνητη στο έδαφος, και στο άλλο άκρο άδειο δοχείο μάζας 0,3 kg. Το δοχείο μαζεύει βροχή με ρυθμό 0,05 kg/s. Η ταχύτητα των σταγόνων της βροχής, η οποία πέφτει κατακόρυφα, είναι 1 m/s. Πόση μάζα νερού πρέπει να μαζευτεί στο δοχείο ώστε αυτό να αρχίσει να κινείται προς τα κάτω; (Η τροχαλία θεωρείται χωρίς τριβές).
