Astronomía esférica y mecánica celeste

Juan José de Orús Navarro
M. Asunción Català Poch
Jorge Núñez de Murga

UBe

ASTRONOMÍA ESFÉRICA Y MECÁNICA CELESTE

Juan José de Orús Navarro
M. Asunción Català Poch
Jorge Núñez de Murga

Publicacions i Edicions

U
UNIVERSITAT DE BARCELONA
B

ÍNDICE

CAPÍTULO 3. PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

CAPÍTULO 4. TRASLACIÓN DE LA TIERRA

CAPÍTULO 5. LOS PLANETAS

CAPÍTULO 6. DETERMINACIÓN DE ÓRBITAS

CAPÍTULO 7. PROBLEMA DE LOS N-CUERPOS

CAPÍTULO 8. TEORÍA DE PERTURBACIONES

PRÓLOGO

Nota sobre la nueva definición de planeta

Cuando este libro estaba ya en fase de impresión se produjo una importante modificación en la definición del concepto de planeta por parte de la Unión Astronómica Internacional (UAI). En la XXVI Asamblea General celebrada en Praga en agosto de 2006 la UAI ha adoptado las siguientes resoluciones:

Los planetas y el resto de los cuerpos a excepción de los satélites dentro del Sistema Solar se definen en tres categorías diferentes de la siguiente manera:

1. Un planeta es un cuerpo celeste que (a) está en órbita alrededor del Sol, (b) tiene suficiente masa para que su gravedad supere las fuerzas asociadas a un sólido rígido de manera que asuma una forma (casi) esférica en equilibrio hidrostático, y (c) que sea el objeto gravitatoriamente dominante en el entorno de su órbita. Los ocho planetas son: Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

2. Un "planeta enano" es un objeto celeste que (a) está en órbita alrededor del Sol, (b) tiene suficiente masa para que su gravedad supere las fuerzas asociadas a un sólido rígido de manera que asuma una forma (casi) esférica en equilibrio hidrostático, (c) que no sea el objeto gravitatoriamente dominante en el entorno de su órbita, y (d) que no sea un satélite. Plutón es un planeta enano según la definición anteriormente dada y se reconoce como el prototipo de una nueva categoría de objetos Trans-Neptunianos.

3. Todos los otros objetos orbitando el Sol deberían ser llamados colectivamente como "Pequeños Cuerpos del Sistema Solar". Esta categoría incluye actualmente la mayoría de los asteroides del Sistema Solar, la mayoría de los objetos Trans-Neptunianos (TNOs), cometas y otros cuerpos pequeños.

Aunque la UAI no ha dado la lista de los considerados como planetas enanos (a excepción de Plutón), a esta lista se añadirán, probablemente, Ceres (el mayor asteroide) y Eris (objeto trasneptuniano mayor que Plutón descubierto en 2003) así como otros objetos que se reclasifiquen o se descubran en el futuro.

Aunque las resoluciones citadas afectan ligeramente al contenido del capítulo 5 del presente libro, dado que las definiciones citadas han levantado cierta controversia y podrían modificarse en el futuro, hemos preferido mantener el contenido de dicho capítulo utilizando las definiciones antiguas e incluir en este prólogo dichos cambios.

Presentación

La presente obra está dirigida tanto a estudiantes universitarios que necesiten un texto para sus estudios, básicos o avanzados, de Astronomía como a profesores universitarios o investigadores que necesiten un texto de las presentes características para su docencia o investigación. El libro es el resultado de una dilatada experiencia docente de sus autores en la enseñanza de la Astronomía en la Universidad de Barcelona en un principio en la Facultad de Ciencias (secciones de Matemáticas y Física) y posteriormente en la Facultad de Física. El origen del libro son las asignaturas de Astronomía General y Astronomía Esférica (cada una de carácter anual) por lo que la mayor parte de su contenido se puede encuadrar en la División I (Astronomía Fundamental) de la UAI.

Con respecto a la faceta de texto docente, el hecho de tratarse de un libro mayoritariamente de Astronomía Fundamental hace que pueda utilizarse como texto para el desarrollo de cursos tanto básicos como avanzados de Astronomía tanto en las licenciaturas de Física como de Matemáticas o de Ingeniería Topográfica y Geodésica. Por otro lado parte de su contenido puede utilizarse como base para alumnos que cursen la especialidad de Astrofísica que sin duda necesitan sólidos conocimientos de Astronomía fundamental. Igualmente, el investigador en Astronomía o Astrofísica encontrará en el presente libro una obra rigurosa de consulta. A lo largo de toda la obra, los autores hemos intentado dar a todas las formulaciones el rigor matemático necesario así como incluir los pasos intermedios necesarios para una fácil comprensión de las mismas por parte del lector.

El presente libro viene a cubrir un hueco en la literatura docente en Español dado que aunque existen magníficos tratados sobre Astronomía Fundamental en Inglés como, por ejemplo, los de Green, Murray, Smart, Woolard and Clemence, etc. e incluso en Español como el Curso de Astronomía de Abad, Docobo y Elipe, ninguno de ellos coincide en su contenido con el presente texto en el que se incluyen numerosos temas no desarrollados en ninguno de los anteriores. El lector encontrará, igualmente, que determinados temas como, por ejemplo, las estrellas dobles, tratadas magníficamente en el libro de Abad, Docobo y Elipe no se han incluido. Ello es debido a que el presente libro no es un tratado exhaustivo sobre Astronomía Fundamental y se ha preferido desarrollar todos aquellos temas que, desde el punto de vista docente, pueden formar un curso básico y otro avanzado de Astronomía.

Con respecto al contenido del libro, el lector encontrará en los cuatro primeros capítulos un curso básico de Astronomía General que incluye la Esfera Celeste (coordenadas, movimientos diurno y ánuo y tiempo), la descripción de la Tierra (elipsoide, paralaje diurna, potencial, rotación, precesión, nutación y posiciones medias y verdaderas), el problema de los dos cuerpos (órbitas, ecuación de Kepler, movimiento elíptico, parabólico e hiperbólico y cálculo de efemérides) y la traslación de la Tierra (órbita de la Tierra, aberración, paralaje ánua, posiciones aparentes, años y estaciones y escalas de tiempo).

Los capítulos a partir del quinto describen un curso avanzado de Astronomía Esférica con elementos de Mecánica Celeste. Los capítulos incluyen los planetas (descripción, movimientos heliocéntrico y geocéntrico y las efemérides para las observaciones físicas), la determinación de órbitas (Métodos de Laplace, Gauss y Olbers), el problema de los N-cuerpos (integrales clásicas, teorema del virial, el problema de los tres cuerpos y puntos de Lagrange), la teoría de perturbaciones con aplicación tanto a los planetas como a los satélites artificiales (Ecuaciones de Gauss, perturbaciones debidas al potencial, resistencia atmosférica, presión de radiación y acción de otros astros), el movimiento de la Luna (libraciones ópticas y físicas, fases y movimiento orbital) y un capítulo sobre eclipses, ocultaciones y pasos (cálculo de circunstancias y mapas de los eclipses de Sol, cálculo de eclipses de Luna, ocultaciones de estrellas por la Luna y pasos de Mercurio y Venus por delante del Sol).

Finalmente, los autores queremos expresar nuestra gratitud a la Universidad de Barcelona por la edición de la presente obra tanto en su faceta de libro como su acceso informático a través de Internet.

Barcelona, Octubre de 2006

Capítulo 1

LA ESFERA CELESTE

1.1 Movimiento diurno de la esfera celeste

La *esfera celeste* es una esfera imaginaria de radio arbitrario y centro en el observador, sobre la cual se proyectan las estrellas para estudiar sus posiciones relativas.

Movimiento diurno es el movimiento aparente de rotación de la esfera celeste, de levante a poniente, debido al movimiento real de rotación de la Tierra de poniente a levante. De él, por tanto, participan todos los cuerpos celestes.

Eje del mundo es el diámetro alrededor del cual parece girar la esfera celeste. Su localización varia con el tiempo.

Polos celestes son los puntos de intersección del eje del mundo con la esfera celeste. Son, por tanto, los únicos puntos del cielo que no participan del movimiento diurno. De éstos el que vemos desde Barcelona (por hallarse sobre nuestro horizonte) es el *polo norte*, *P*, y el diametralmente opuesto es el *polo sur, P'* (Fig.1.1).

Vertical de un lugar es el diámetro de la esfera celeste dado por la dirección de la plomada. Su punto de intersección con la esfera celeste situado en el hemisferio visible para el observador se denomina *cenit.* El situado en el hemisferio invisible se denomina *nadir* (*Z* y *Z'* en Fig. 1.1).

Horizonte astronómico o verdadero es el plano diametral ortogonal a la vertical. La intersección de dicho plano con la esfera celeste es un círculo máximo denominado también *horizonte.* EL horizonte astronómico divide a la esfera celeste en dos *hemisferios,* situados por encima y por debajo del mismo, que se denominan *visible* e *invisible* respectivamente (Fig. 1.1)

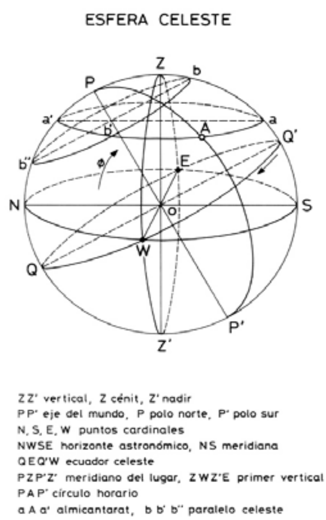

FIG 1.1

Horizonte sensible o aparente es el círculo menor que se obtiene al situarnos a una cierta altitud sobre el nivel del mar y trazar un cono con vértice en el observador y generatrices tangentes a la superficie de la Tierra. El ángulo formado por una generatriz del cono y el horizonte verdadero se denomina *depresión del horizonte.* Si llamamos α a dicho ángulo, R al radio medio de la Tierra y h a la altitud sobre el nivel del mar, se verifica (Fig. 2.1):

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h} \quad \text{y como} \quad 2\ \mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

tenemos $\quad 2\ \mathrm{sen}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{h}{R+h} \simeq \dfrac{h}{R}$

de donde: $\alpha \simeq \sqrt{\dfrac{2h}{R}}$

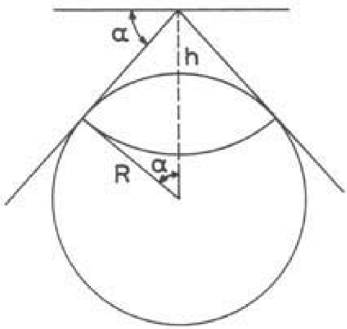

FIG 2.1

Ecuador celeste es el plano diametral ortogonal al eje del mundo o, también, el círculo máximo determinado por la intersección de dicho plano con la esfera celeste (Fig.1.1).

Plano meridiano es el plano diametral determinado por el eje del mundo y la vertical. Su intersección con la esfera celeste es el *meridiano del lugar* (Fig.1.1).

Meridiana es el diámetro determinado por la intersección del plano meridiano con el horizonte verdadero. Sus intersecciones con la esfera celeste constituyen los *puntos cardinales norte y sur* (N y S en la Fig.1.1).

Latitud del lugar es el ángulo formado por la meridiana y el eje del mundo (ϕ en la Fig.1.1). Su complementario (90°- ϕ) se denomina *colatitud.*

Perpendicular es el diámetro determinado por la intersección del ecuador celeste con el horizonte verdadero. Sus intersecciones con la esfera celeste constituyen *los puntos cardinales este y oeste* (*E* y *W* en la Fig.1.1).

Primer vertical es el plano diametral determinado por la vertical y la perpendicular. También se denomina así el círculo máximo determinado por la intersección de dicho plano con la esfera celeste.

Línea del medio cielo es el diámetro determinado por la intersección del ecuador celeste con el plano meridiano. Su punto de intersección con la esfera celeste situado en el hemisferio visible se denomina *medio cielo (Q* en la Fig.1.1)

Verticales son los planos que pasan por la vertical. Los círculos máximos intersección de dichos planos con la esfera celeste reciben también el nombre de verticales. Son verticales tanto el plano meridiano como el primer vertical.

Almucantarates son los círculos menores de la esfera celeste paralelos al horizonte.

Planos horarios son los planos diametrales que pasan por el eje del mundo. Los círculos máximos determinados por su intersección con la esfera celeste se denominan *círculos horarios.*

Paralelos celestes son los círculos menores de la esfera celeste paralelos al ecuador.

1.2 Coordenadas horizontales y horarias

En cualquier sistema de coordenadas la localización de un punto de la esfera celeste viene dada por las componentes de su vector de posición expresadas en cartesianas (coordenadas rectilíneas) o bien en esféricas (coordenadas esféricas). En el primer caso las componentes no son independientes, dado que sólo existen dos grados de libertad al ser el radio de la esfera celeste arbitrario, pero constante una vez fijado.

1.2.1 Coordenadas horizontales

La vertical, la meridiana y la perpendicular de un lugar determinan un triedro trirrectángulo con vértice en el observador. Tomaremos este triedro como sistema de referencia de coordenadas cartesianas y elegiremos los ejes de la siguiente forma: x en la dirección de la meridiana, sentido creciente hacia el sur; y en la dirección de la perpendicular, sentido creciente hacia el oeste; z en la dirección de la vertical, sentido creciente hacia el cenit. El triedro estará orientado en sentido retrógrado.

Las componentes del vector de posición de un astro A en dicha base constituirán las *coordenadas rectilíneas horizontales* del mismo $A(x,y,z)$.

Por otra parte, por cada punto de la esfera celeste, distinto del cenit y del nadir, pasan un único vertical y un único almucantarat que nos permiten definir las *coordenadas esféricas horizontales* (Fig. 3.1).

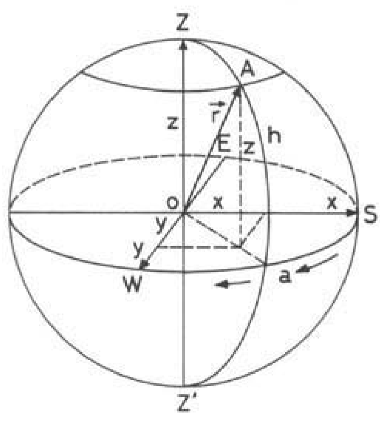

FIG 3.1

Acimut, ángulo diedro que forman el vertical que pasa por el astro con el plano meridiano. Se mide sobre el horizonte, desde el Sur, en sentido retrógrado, de 0º a 360º. Si lo designamos por a tenemos:

$$0^o \leq a \leq 360^o$$

Altura, distancia esférica del horizonte al astro. Se mide en grados desde el horizonte; es positiva si el astro se halla en el hemisferio visible y negativa si en el invisible. Designándola por h tenemos:

$$-90^o \leq h \leq 90^o$$

Distancia r es el módulo del vector de posición $\vec{r}$; es decir, el radio de la esfera celeste.

Distancia cenital es el arco complementario de la altura; esto es, la distancia esférica del cenit al astro. Designándola por z tendremos:

$$z = 90^o - h \qquad 0^o \leq z \leq 180^o$$

Las relaciones entre las coordenadas horizontales rectilíneas y esféricas vienen dadas por (Fig.3.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x = r\cos\ h\ \cos\ a \\ y = r\cos\ h\ \text{sen}\ a \\ z = r\ \text{sen}\ h \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$a = \arctan(y/x)$$
$$h = \text{arc}\,\text{sen}(z/r)$$

1.2.2 Coordenadas horarias

El eje del mundo, la línea del medio cielo y la perpendicular determinan un triedro trirrectángulo con vértice en el observador. Tomaremos este triedro como sistema de referencia de coordenadas cartesianas, eligiendo los ejes de la siguiente forma: x' en la dirección de la línea del medio cielo, en sentido creciente hacia el medio cielo; y' en la dirección de la perpendicular, en sentido creciente hacia el oeste; z' en la dirección del eje del mundo, en sentido creciente hacia el polo celeste norte. El triedro estará orientado en sentido retrógrado.

Las componentes del vector de posición de un astro A en dicha base constituirán las *coordenadas rectilíneas horarias* del mismo $A(x', y', z')$.

Por otra parte, por cada punto de la esfera celeste, distinto de los polos, pasan un único paralelo celeste y un único circulo horario que definen las *coordenadas esféricas horarias* (Fig. 4.1).

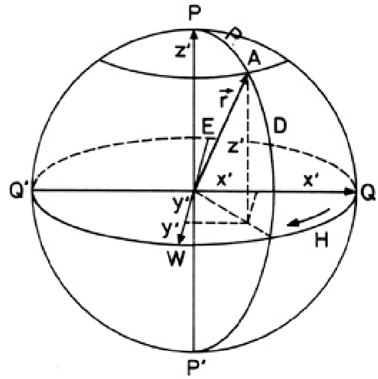

FIG 4.1

Ángulo horario, ángulo diedro que forman el plano horario que pasa por el astro con el plano meridiano del lugar. Se mide sobre el ecuador desde el medio cielo, en sentido retrógrado, de 0h a 24 h.

Si lo designamos por *H,* tenemos:

$$0^h \leq H \leq 24^h$$

Declinación, distancia esférica del ecuador al astro. Se mide en grados desde el ecuador; es positiva si el astro se halla en el hemisferio celeste norte y negativa si en el sur. Si la designamos por D, tendremos:

$$-90^o \leq D \leq 90^o$$

Distancia polar es la distancia esférica del polo al astro; es decir, es el complemento de la declinación,

Si la designamos por p, tendremos:

$$0^o \leq p \leq 180^o$$

Las relaciones entre las coordenadas horarias rectilíneas y esféricas son (Fig. 4.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x' = r\cos D\cos H \\ y' = r\cos D\ \mathrm{sen}H \\ z' = r\ \mathrm{sen}D \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$H = \arctan(y'/x')$$

$$D = \mathrm{arcsen}(z'/r)$$

1.2.3 Paso de coordenadas horizontales a horarias y viceversa

Los triedros de referencia de los sistemas de coordenadas horizontales y horarias tienen el eje y común y ambos están orientados en sentido retrógrado, por lo que podrá efectuarse el cambio de un sistema al otro por un simple giro alrededor del eje $y \equiv y'$ (Fig.5.1), de ángulo 90º-ϕ en valor absoluto (ϕ latitud del lugar).

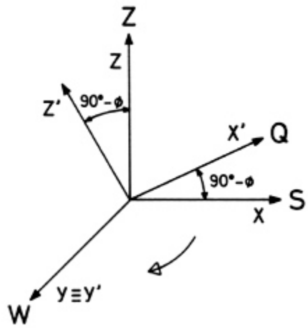

FIG 5.1

Recordemos que las matrices que definen un giro de ángulo i son:

alrededor del eje x: $R_1(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \operatorname{sen} i \\ 0 & -\operatorname{sen} i & \cos i \end{pmatrix}$

alrededor del eje y: $R_2(i) = \begin{pmatrix} \cos i & 0 & -\operatorname{sen} i \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} i & 0 & \cos i \end{pmatrix}$

alrededor del eje z: $R_3(i) = \begin{pmatrix} \cos i & \operatorname{sen} i & 0 \\ -\operatorname{sen} i & \cos i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Estas matrices son ortogonales; por tanto, sus inversas coinciden con sus traspuestas:

$$R_h^{-1} = R_h^T \quad (\mathrm{h} = 1, 2, 3)$$

y además

$$R_h^T(i) = R_h(-i)$$

Lo que hemos de hacer es pues un cambio de base expresado por donde $R_2(i)$ tiene las propiedades indicadas.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_2(i) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Para pasar de coordenadas horizontales a horarias tomaremos $i=\phi$ - 90°, ya que el ángulo está contado en sentido contrario al de la orientación del triedro. Por tanto, siendo:

$$R_2(\phi' - 90^o) = R_2^{\,T}(90^o - \phi) \tag{2.1}$$

y recordando el valor de las componentes de $\vec{r}$ en las bases horizontal y horaria, según (1.1).

$$\begin{bmatrix} r\cos D\cos H \\ r\cos D\operatorname{sen} H \\ r\operatorname{sen} D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r\cos h\cos a \\ r\cos h\operatorname{sen} a \\ r\operatorname{sen} h \end{bmatrix}$$

y operando:

$$\left.\begin{aligned} &\cos D\cos H = \operatorname{sen}\phi\cos h\cos a + \cos\phi\operatorname{sen} h \\ &\cos D\operatorname{sen} H = \cos h\operatorname{sen} a \\ &\operatorname{sen} D = -\cos\phi\cos h\cos a + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen} h \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Para pasar de coordenadas horarias a horizontales, aplicando la matriz inversa de R_2 en (1.1).

$$R^{-1}{}_2(\phi - 90^o) = R_2^{\,T}(\phi - 90^o) = R_2(90^o - \phi)$$

y por tanto:

$$\begin{bmatrix} r\cos h\cos a \\ r\cosh\operatorname{sen} a \\ r\operatorname{sen} h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi & 0 & -\cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r\cos D\cos H \\ r\cos D\operatorname{sen} H \\ r\operatorname{sen} D \end{bmatrix}$$

y operando:

$$\left.\begin{aligned} &\cos h\cos a = \operatorname{sen}\phi\cos D\cos H - \cos\phi\operatorname{sen} D \\ &\cos h\operatorname{sen} a = \cos D\operatorname{sen} H \\ &\operatorname{sen} h = \cos\phi\cos D\cos H + \operatorname{sen}\phi\sin D \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Las fórmulas (3.1) y (4.1) de cambio de base también pueden obtenerse por aplicación de la trigonometría esférica al triángulo de posición polo-cenit-astro.

1.3 Movimiento ánuo del Sol

1.3.1 Generalidades

El movimiento aparente del Sol es el resultado de dos movimientos aparentes: el movimiento diurno, retrógrado, debido al movimiento de rotación de la Tierra, y el movimiento ánuo, directo, debido al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol y 365 veces más lento que el anterior. El Sol participa del primero como todo objeto celeste; el segundo es un movimiento propio (es decir, que no experimentan los demás astros) sobre la esfera celeste.

La trayectoria aparente del Sol sobre la esfera celeste es la *eclíptica.* Dado que el Sol describe, aparentemente, una elipse con la Tierra en uno de sus focos, la eclíptica es un círculo máximo cuyo correspondiente plano diametral se denomina *plano de la eclíptica.*

Oblicuidad de la eclíptica es el ángulo que forman el plano de la eclíptica y el plano del ecuador (Fig.6.1). Se representa por ε y su valor actual es ε= 23° 26'. La oblicuidad de la eclíptica no es constante, sino que disminuye a razón de 0”47 por año.

Eje de la eclíptica es el diámetro perpendicular al plano de la eclíptica. Sus extremos constituyen los *polos de la eclíptica* y se denominan norte y sur según su proximidad a los polos celestes norte y sur respectivamente (P_e y P_e' en la Fig. 6.1).

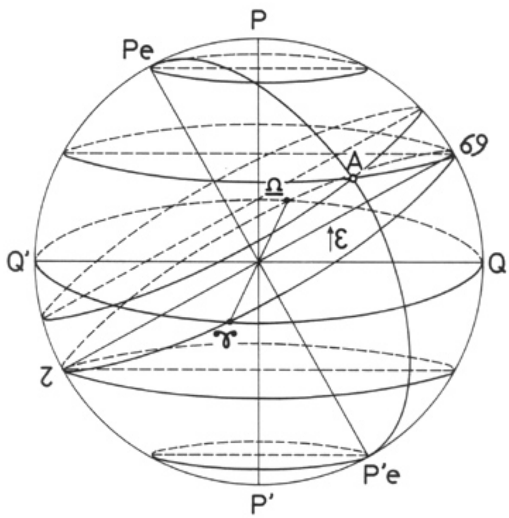

FIG 6.1

Línea de los equinoccios es el diámetro determinado por la intersección del plano del ecuador y el plano de la eclíptica (♈♎en la Fig. 6.1).

Equinoccios son los extremos de la línea de los equinoccios. Se denomina *punto Aries, punto vernal o equinoccio de primavera* y se representa por ♈, el punto en el cual el Sol pasa del hemisferio celeste sur al hemisferio celeste norte. El punto diametralmente opuesto se denomina *punto Libra, punto autumnal o equinoccio de otoño* y se representa por ♎.

Línea de los solsticios es el diámetro de la eclíptica perpendicular a la línea de los equinoccios (♑ ♋en la Fig.6.1).

Solsticios son los extremos de la línea de los solsticios. Se denomina *punto Cáncer* o *solsticio de verano,* y se representa por ♋, el solsticio situado en el hemisferio celeste norte; se denomina punto *Capricornio o solsticio de invierno, y se* representa por ♑, el situado en el hemisferio sur.

Trópicos de Cáncer y de Capricornio son los paralelos celestes que pasan por los puntos Cáncer y Capricornio, respectivamente.

Círculos polares Ártico o norte y Antártico o sur son los paralelos celestes que pasan por los polos de la eclíptica, norte y sur, respectivamente.

Coluros de los equinoccios y de los solsticios son los meridianos celestes que pasan por los puntos equinocciales y solsticiales, respectivamente.

Máximos de longitud son los círculos máximos (o sus correspondientes planos diametrales) que pasan por los polos de la ecliptica ($P_eA\ P_e'$ en la Fig. 6.1).

Menores de latitud son los círculos menores paralelos a la eclíptica.

Zodíaco es la zona de la esfera celeste, de 17° de amplitud, limitada por dos menores de latitud a 8,5º a ambos lados de la eclíptica. Sobre el zodiaco se observan los planetas de nuestro sistema solar y las *constelaciones zodiacales.* Los antiguos dividían el zodiaco en doce regiones de 30° de amplitud, medidos sobre la ecliptica a partir del punto Aries y en sentido directo, correspondiendo a cada región o *signo del zodíaco* una constelación zodiacal. Partiendo del punto Aries y recorriendo el zodiaco en sentido directo, dichos signos son:

Aries	♈	Leo	♌	Sagitario	♐
Tauro	♉	Virgo	♍	Capricornio	♑
Géminis	♊	Libra	♎	Acuario	♒
Cáncer	♋	Escorpio	♏	Piscis	♓

Hace unos 2.000 años los signos del zodiaco se correspondían con las constelaciones homónimas. Pero, debido a que el punto Aries retrograda sobre la ecliptica a razón de 50'',29 por año (fenómeno conocido como precesión de los equinoccios), en la actualidad no se da esta correspondencia y las constelaciones ocupan el signo del zodiaco siguiente, en sentido directo, al que les correspondia.

1.3.2 Eclíptica media y verdadera

En realidad, el Sol no describe un circulo máximo de la esfera celeste sino que se desplaza según una línea sinuosa cuyo valor medio constituye la eclíptica definida en el apartado anterior. Dos son las causas principales de dicho comportamiento: En primer lugar, no es la Tierra la que describe una elipse con el Sol en uno de sus focos sino, con mucha aproximación, el centro de gravedad G del sistema Tierra-Luna, alrededor del cual giran a su vez la Tierra y la Luna. Si M es la masa de la Tierra, T, y m la de la Luna, L; D y d las distancias del centro de gravedad G a la Tierra y a la Luna, respectivamente y Δ la distancia Tierra-Luna, siendo $M = 81\ m$ y debiéndose de verificar (Fig. 7.1).

$$M \cdot D = m \cdot d$$
$$D + d = \Delta$$

se tiene

$$D = \frac{\Delta}{82} \qquad d = \frac{81}{82}\Delta$$

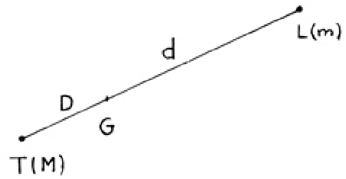

FIG 7.1

Como que $\Delta \approx 380.000$ km, resulta $D = 4.700$ km, distancia que es menor que el radio medio de la Tierra (6.400 km), es decir: el centro de gravedad del sistema se encuentra dentro de la Tierra. Por otra parte, si i es el ángulo que forma el plano del sistema Tierra-Luna con el plano de la eclíptica, *E*, mientras que el centro de gravedad del sistema describe la eclíptica, la Tierra y la Luna oscilarán a uno y otro lado de la misma, lo cual dará lugar a un *efecto paraláctico* que variará periódicamente, con una amplitud del orden de 0",6.

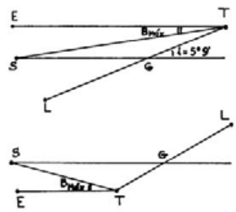

FIG 8.1

En efecto, siendo la distancia Tierra-Sol de unos 150.000.000 km e $i = 5°9'$, podemos evaluar la separación máxima, $B_{Máx}$. (Fig.8.1) que constituye la amplitud de la oscilación, sustituyendo el seno por el arco:

$$\operatorname{sen} B_{Max} = \frac{D \operatorname{sen} i}{a} \qquad\qquad B_{max} \simeq \frac{D \cdot i}{a} = 0'',6$$

El periodo de oscilación es el del sistema Tierra-Luna: 27,5 días.

En segundo lugar, los planetas, en especial Júpiter por su gran masa y Venus por su proximidad, originan perturbaciones sobre el movimiento de la Tierra. Las variaciones a que dan lugar son también periódicas, dependiendo el periodo del planeta de que se trate. A1 pertubar el movimiento de la Tierra producen desviaciones del Sol respecto a la eclíptica media, cuyo máximo es también, en valor absoluto, del orden de 0",6.

En definitiva, dicha desviación es la resultante de varios movimientos periódicos, de tal forma que, cuando se suman las amplitudes máximas de estos movimientos, tal desviación puede llegar a ser de 1'',2 en valor absoluto. Como que dicha variación es muy pequeña, en muchos problemas podemos considerar que el Sol describe un círculo máximo, sin incurrir en grandes errores.

1.4 Coordenadas ecuatoriales y eclípticas

En los sistemas de coordenadas ecuatoriales (o uranográficas) y eclípticas los triedros de referencia están orientados en sentido directo y son solidarios a la esfera celeste.

1.4.1 Coordenadas ecuatoriales

En el sistema de coordenadas ecuatoriales se define el triedro de referencia tomando como eje x la dirección de la línea de los equinoccios, en sentido positivo hacia el punto Aries, el eje y situado sobre el ecuador, a 90° del anterior, en sentido directo y el eje z en la dirección del eje del mundo y en sentido positivo hacia el polo celeste norte.

Las componentes del vector de posición de un astro E en dicha base constituyen las *coordenadas ecuatoriales rectilíneas* del mismo E (x, y, z).

Un punto de la esfera celeste, distinto de los polos, también queda completamente determinado por un único meridiano y un único paralelo celestes, que permiten definir las *coordenadas ecuatoriales esféricas* (Fig.9.1)

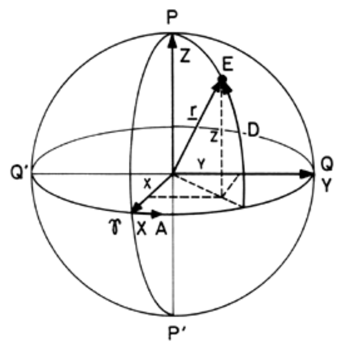

FIG 9.1

Ascensión recta, A, es el ángulo diedro que forman el plano meridiano que pasa por el astro y el coluro de los equinoccios. Se mide en tiempo, sobre el ecuador, desde el punto Aries hasta el pie del meridiano que pasa por el astro, en sentido directo de 0 h a 24 h:

$$0^h \leq A \leq 24^h$$

Declinación, D, es la distancia esférica desde el ecuador hasta el paralelo que pasa por el astro. Se mide en grados desde el ecuador, de 0° a 90°; es positiva si el astro se encuentra en el hemisferio celeste norte y negativa si en el sur:

$$-90^o \leq D \leq 90^o$$

Distancia, r, es el módulo del vector de posición.

Distancia polar, p, es la distancia esférica del polo celeste norte al astro:

$$0^o \leq p \leq 180^o$$

Las relaciones entre las coordenadas ecuatoriales rectilíneas y esféricas vienen dadas por (Fig. 9.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x = r\cos D\cos A \\ y = r\cos D\,\mathrm{sen}\,A \\ z = r\,\mathrm{sen}\,D \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A = \arctan(y/x)$$

$$D = \mathrm{arcsen}(z/r)$$

1.4.2 Coordenadas eclípticas

En el sistema de coordenadas eclípticas definiremos el triedro de referencia tomando el eje x' idéntico al anterior x, el eje y' en la dirección de la línea de los solsticios, sentido positivo hacia el punto de Cáncer, y el eje z' en la dirección del eje de la eclíptica, en sentido positivo hacia el polo eclíptico norte.

Las componentes del vector de posición del astro E en dicha base constituyen las *coordenadas eclípticas rectilíneas* $E(x', y', z')$.

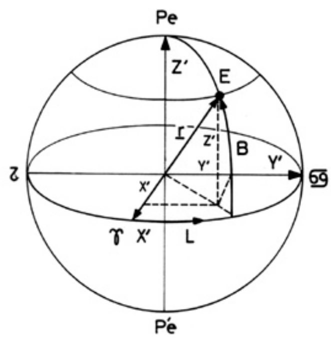

FIG 10.1

Por cada punto de la esfera celeste, distinto de los polos eclípticos, pasan un único máximo de longitud y un único menor de latitud que nos permiten definir las *coordenadas eclípticas esféricas* (Fig.10.1).

Longitud celeste, L, es el ángulo diedro que forman el máximo de longitud que pasa por el astro y el máximo de longitud que pasa por el punto Aries, contado a partir del punto Aries, sobre la eclíptica, en sentido directo, de 0° a 360°:

$$0^o \leq L \leq 360^o$$

Latitud celeste, *B*, es la distancia esférica desde la eclíptica hasta el menor de latitud que pasa por el astro. Se mide en grados y es positiva si el astro se encuentra en el hemisferio norte y negativa si en el sur:

$$-90^o \leq B \leq 90^o$$

Distancia, r, es el radio de la esfera celeste.

Las relaciones entre las coordenadas eclípticas rectilíneas y esféricas son (Fig.10.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x' = r\cos B\cos L \\ y' = r\cos B\,\mathrm{sen}\,L \\ z' = r\,\mathrm{sen}\,B \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$
$$L = \arctan(y'/x')$$
$$B = \mathrm{arcsen}(z'/r)$$

1.4.3 Paso de coordenadas ecuatoriales a eclípticas y viceversa

Los triedros de referencia de los sistemas de coordenadas ecuatoriales y eclípticas tienen común el eje x, y ambos están orientados en sentido directo, por lo que podrá efectuarse el cambio de un sistema al otro por una simple rotación R_1 alrededor del eje x de ángulo ε o $-\varepsilon$ (Fig. 11.1).

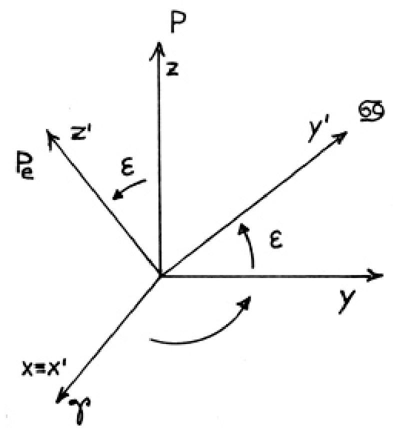

FIG 11.1

Si queremos pasar de coordenadas ecuatoriales a eclípticas, procediendo de manera análoga a como hicimos en la sección 1.2.3, tendremos:

$$\begin{bmatrix} r\cos B\cos L \\ r\cos B\,\mathrm{sen}\,L \\ r\,\mathrm{sen}\,B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \mathrm{sen}\,\varepsilon \\ 0 & -\mathrm{sen}\,\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r\cos D\cos A \\ r\cos D\,\mathrm{sen}\,A \\ r\,\mathrm{sen}\,D \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\left.\begin{aligned} \cos B\cos L &= \cos D\cos A \\ \cos B\,\mathrm{sen}\, L &= \cos\varepsilon\cos D\,\mathrm{sen}\, A + \mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\, D \\ \mathrm{sen}\, B &= -\mathrm{sen}\,\varepsilon\cos D\,\mathrm{sen}\, A + \cos\varepsilon\,\mathrm{sen}\, D \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

El cambio inverso será:

$$\begin{bmatrix} r\cos D\cos A \\ r\cos D\sin A \\ r\sin D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r\cos B\cos L \\ r\cos B\sin L \\ r\sin B \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\left.\begin{aligned} \cos D\cos A &= \cos B\cos L \\ \cos D\,\mathrm{sen}\, A &= \cos\varepsilon\cos B\,\mathrm{sen}\, L - \mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\, B \\ \mathrm{sen}\, D &= \mathrm{sen}\,\varepsilon\cos B\,\mathrm{sen}\, L + \cos\varepsilon\,\mathrm{sen}\, B \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

Estas fórmulas (5.1) y (6.1) también pueden obtenerse aplicando el grupo de Bessel al triángulo polo del ecuador-polo de la eclíptica-astro.

1.4.4 Variación de las coordenadas del Sol en su movimiento ánuo

De acuerdo con la ley de las áreas de Kepler, aunque la longitud aparente del Sol sea siempre creciente, su variación no es uniforme. Si consideramos que el Sol, S, describe la eclíptica, *B* es nula; las demás coordenadas varían según la tabla adjunta obtenida al resolver el triángulo $\gamma S_1 S$ donde $\widehat{\gamma S}$ = longitud, $\widehat{\gamma S_1}$ = ascensión recta y $\widehat{S_1 S}$ = declinación (Fig. 12.1).

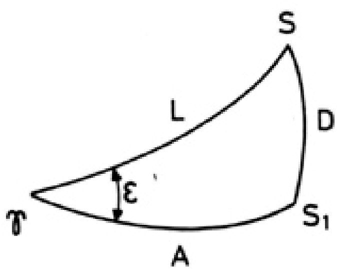

FIG 12.1

TABLA I

Situación del Sol	L	A	D
γ	0^{o}	0^{h}	0^{o}
♋	90^{o}	6^{h}	$+\varepsilon$
♎	180^{o}	12^{h}	0^{o}
♑	270^{o}	18^{h}	$-\varepsilon$
γ	360^{o}	24^{h}	0^{o}

Se observa que A es siempre creciente y D toma sus valores máximo y mínimo en los puntos Cáncer y Capricornio, respectivamente.

En un día las variaciones de A y de D son pequeñas, suponiendo el movimiento uniforme, por lo que en muchas aplicaciones, a lo largo de un día, tanto la ascensión recta como la declinación pueden considerarse constantes e iguales a su valor medio en dicho día.

$$\Delta A \simeq \frac{360^{o}}{365^{o}} \simeq 1^{o}\, dia^{-1} = 4^{m}\, dia^{-1}$$

$$\Delta D \simeq \frac{23^{o}26'}{\frac{365}{4}} \simeq 15'\, dia^{-1}$$

Del mismo triángulo $\gamma S_1 S$ (Fig.12.1) determinado por la posición del Sol, S, el punto Aries, γ, y la intersección del meridiano celeste que pasa por el centro del Sol con el ecuador, S_1, deducimos también las relaciones:

$$\tan A = \cos\varepsilon \tan L$$
$$\operatorname{sen} D = \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen} L$$

1.5 Tiempos sidéreos medio y aparente

Como ya se ha comentado en apartadas anteriores, el punto Aries no es un punto fijo en la esfera celeste sino que, debido a la *precesión de los equinoccios,* retrograda sobre la eclíptica a razón de 50”,29 por año. Por lo tanto, por definición, retrograda también sobre el ecuador unos 3s por año:

$$50'', 29 \cos\varepsilon \frac{24^{h}}{360^{o}} \simeq 3^{s}\, año^{-1}$$

Además, debido al fenómeno de la *nutación,* el punto Aries oscila alrededor de la posición media dada por la precesión con una semiamplitud de 17" sobre la eclíptica (ls sobre el ecuador) con un periodo de 18,6 años.

El punto Aries que se obtiene al considerar sólo el fenómeno de la precesión es el *punto Aries medio;* si además tenemos en cuenta el de la nutación obtenemos el *punto Aries verdadero.* Según consideremos uno u otro obtendremos, respectivamente, la ascensión recta media verdadera de un astro.

En primera aproximación la ascensión recta verdadera de una estrella ecuatorial será:

$$A = A_o + at + b\,\mathrm{sen}(wt)$$

Con A_o la ascensión recta para t = 0, a = 3^s año^{-1}, b=1^s, w= (2π/18.6) año^{-1} (t en años).

Día sideral es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos de un punto fijo de la es fera celeste por un mismo meridiano. Coincide, por tanto, con el periodo de rotación de la Tierra.

Día sidéreo es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del punto Aries por un mismo meridiano. Si consideramos el punto Aries medio, obtendremos el *día sidéreo medio;* si consideramos el verdadero, obtendremos el *día sidéreo aparente.*

Como que el punto Aries medio retrograda 3^s año^{-1} sobre el ecuador, el día sideral será $3^s/365=0^s,01$ más largo que el día sidéreo.

Tiempo sidéreo medio, θ_m, es el ángulo horario del punto Aries medio.

Tiempo sidéreo aparente, θ_v, es el ángulo horario del punto Aries verdadero.

Ambos son locales. Sólo el primero es uniforme con mucha aproximación y es el que miden los relojes de tiempo sidéreo.

Ecuación de equinoccios es la diferencia entre el tiempo sidéreo aparente y el sidéreo medio:

$$N = \theta_v - \theta_m \qquad |N| \leq 1^s$$

(el término "ecuación" procede de la palabra árabe que significa "diferencia"). Se designa por N por coincidir con la nutación en ascensión recta, según veremos en el próximo capítulo, y soluciona el paso de un tiempo sidéreo al otro mediante una simple suma algebraica. El concepto de tiempo sidéreo permite relacionar los sistemas de coordenadas solidarios al observador con los solidarios a la esfera celeste. En efecto, siendo la declinación una coordenada común a los sistemas de coordenadas horarias y ecuatoriales, para las otras dos, ángulo horario H y ascensión recta A de un astro E

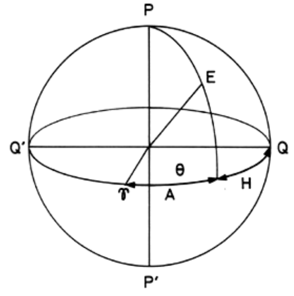

FIG 13.1

(Fig.13.1), observando los sentidos en que se miden los ángulos, se tiene la relación fundamental: que se verifica tanto para los valores medios θ_m y A_m como para los verdaderos θ_v y A_v.

$$\theta = A + H \tag{7.1}$$