

# Astronomía esférica y mecánica celeste

Juan José de Orús Navarro  
M. Asunción Català Poch  
Jorge Núñez de Murga



UBe

# ASTRONOMÍA ESFÉRICA Y MECÁNICA CELESTE

Juan José de Orús Navarro  
M. Asunción Català Poch  
Jorge Núñez de Murga

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



# ÍNDICE

Prólogo

## CAPÍTULO 1. LA ESFERA CELESTE

1.1	Movimiento diurno de la esfera celeste .....	13
1.2	Coordenadas horizontales y horarias .....	15
	1.2.1 <i>Coordenadas horizontales</i> .....	15
	1.2.2 <i>Coordenadas horarias</i> .....	16
	1.2.3 <i>Paso de coordenadas horizontales a horarias y viceversa</i> .....	18
1.3	Movimiento ánuo del Sol.....	19
	1.3.1 <i>Generalidades</i> .....	19
	1.3.2 <i>Eclíptica media y verdadera</i> .....	21
1.4	Coordenadas ecuatoriales y eclípticas .....	23
	1.4.1 <i>Coordenadas ecuatoriales</i> .....	23
	1.4.2 <i>Coordenadas eclípticas</i> .....	24
	1.4.3 <i>Paso de coordenadas ecuatoriales a eclípticas y viceversa</i> .....	25
	1.4.4 <i>Variación de las coordenadas del Sol en su movimiento ánuo</i> .....	26
1.5	Tiempos sidéreos medio y aparente.....	27
1.6	Movimiento diurno del Sol.....	29
	1.6.1 <i>Generalidades</i> .....	29
	1.6.2 <i>Duración del día según la época del año</i> .....	29
	1.6.3 <i>Refracción astronómica</i> .....	31
	1.6.4 <i>Crepúsculos</i> .....	32
	1.6.5 <i>Semidiámetro aparente</i> .....	32
	1.6.6 <i>Movimiento diurno desde distintas latitudes</i> .....	33
1.7	Tiempos solares verdadero y medio .....	36
	1.7.1 <i>Tiempo civil y longitud geográfica</i> .....	38
	1.7.2 <i>Tiempo universal</i> .....	39
	1.7.3 <i>Ecuación de tiempo</i> .....	39
1.8	Problemas del movimiento diurno .....	41
	1.8.1 <i>Paso por un vertical de acimut a</i> .....	41
	1.8.2 <i>Paso por un almucantar de altura h</i> .....	46
1.9	Refracción astronómica .....	49
	1.9.1 <i>Primera aproximación</i> .....	49
	1.9.2 <i>Fórmula de Laplace</i> .....	52
	1.9.3 <i>Refracción en las proximidades del horizonte</i> .....	52
	1.9.4 <i>Corrección de refracción en coordenadas horizontales y horarias</i> .....	53

## CAPÍTULO 2. LA TIERRA

2.1	Elipsoide terrestre .....	55
	2.1.1 <i>Posición sobre la superficie de la Tierra</i> .....	58
	2.1.2 <i>Corrección de coordenadas por altitud</i> .....	62
2.2	Paralaje diurna .....	63
	2.2.1 <i>Coordenadas horizontales</i> .....	63
	2.2.2 <i>Coordenadas horarias</i> .....	65
2.3	Potencial terrestre .....	69

2.3.1	Expresión del campo gravitacional terrestre bajo la forma de un desarrollo en polinomios de Legendre .....	69
2.3.2	Simplificaciones .....	72
2.3.3	Aceleración $j$ de la gravitación .....	74
2.4	Potencial de la gravedad .....	75
2.4.1	Corrección por altitud .....	81
2.5	Rotación libre.....	81
2.5.1	Movimiento respecto al sistema inercial .....	82
2.5.2	Movimiento respecto al sistema no inercial .....	82
2.5.3	Variación de la longitud y de la latitud instantáneas de un lugar .....	86
2.6	Rotación forzada.....	89
2.6.1	Ángulos de Euler .....	94
2.7	Precesión y Nutación .....	95
2.7.1	Movimientos de los planos fundamentales a los que se refieren las coordenadas de los astros .....	95
2.7.2	Precesión y nutación solares .....	97
2.7.3	Precesión y nutación lunares .....	99
2.7.4	Precesión y nutación luni-solares.....	101
2.7.5	Precesión y nutación planetarias .....	101
2.7.6	Precesión y nutación generales .....	101
2.7.7	Correcciones .....	101
2.8	Posiciones medias y verdaderas.....	102
2.8.1	Variación de los polos celestes .....	103
2.8.2	Corrección de precesión y nutación de las coordenadas ecuatoriales.....	106
2.8.3	Ecuación de equinoccios .....	111
2.9	Variaciones de la velocidad de rotación de la Tierra.....	112
2.9.1	Distintos tipos de variaciones .....	112

### CAPÍTULO 3. PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

3.1	Conservación del momento lineal .....	115
3.2	Ecuación del movimiento relativo .....	117
3.3	Integral de las áreas. Segunda ley de Kepler .....	118
3.4	Ecuación de la órbita relativa. Primera y tercera leyes de Kepler .....	119
3.4.1	Forma de Newton de la tercera ley de Kepler .....	122
3.4.2	Constantes de integración .....	123
3.4.3	Hodógrafa del movimiento .....	124
3.5	Integral de la energía.....	125
3.5.1	Velocidades cósmicas. Satélites geoestacionarios.....	127
3.6	Movimiento elíptico.....	129
3.6.1	Ecuación de Kepler.....	131
3.6.2	Métodos de resolución de la ecuación de Kepler .....	132
3.7	Desarrollos en serie.....	134
3.7.1	Desarrollo en serie de la anomalía excéntrica .....	134
3.7.2	Desarrollo en serie del radio vector .....	135
3.7.3	Desarrollo en serie de la anomalía verdadera .....	135
3.7.4	Desarrollo en serie de las coordenadas reducidas .....	136
3.8	Movimiento hiperbólico .....	137
3.9	Movimiento parabólico.....	139
3.10	Movimiento casi-parabólico .....	142
3.11	Elementos de una órbita.....	144
3.11.1	Ángulos de Euler .....	144

3.11.2	Los restantes elementos .....	145
3.11.3	Constantes vectoriales $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ .....	146
3.11.4	Determinación de los elementos orbitales a partir de $r$ y $v$ .....	148
3.12	Cálculo de efemérides.....	149

## CAPÍTULO 4. TRASLACIÓN DE LA TIERRA

4.1	Órbita aparente del Sol .....	153
4.1.1	Elementos de la órbita aparente.....	154
4.1.2	Movimiento geocéntrico del Sol .....	156
4.2	Aberración de la luz.....	157
4.2.1	Aberración ánuva .....	159
4.2.2	Corrección de aberración ánuva a las coordenadas ecuatoriales.....	164
4.2.3	Aberración diurna .....	165
4.3	Paralaje ánuva.....	166
4.3.1	Corrección de paralaje ánuva a las coordenadas ecuatoriales.....	170
4.3.2	Efecto combinado de la aberración y la paralaje ánuas.....	170
4.4	Movimiento propio de las estrellas.....	171
4.5	Posiciones aparentes .....	173
4.6	Años y Estaciones.....	174
4.6.1	Calendarios juliano y gregoriano .....	175
4.6.2	Las fechas en Astronomía .....	176
4.6.3	Estaciones .....	177
4.7	Ecuación del centro y reducción al ecuador .....	179
4.7.1	Ecuación del centro .....	179
4.7.2	Reducción al ecuador .....	180
4.8	Ecuación de tiempo.....	182
4.9	Sol medio.....	184
4.9.1	Relaciones de conversión entre los tiempos sidéreo y medio.....	185
4.9.2	Distintas clases de tiempo. Resumen .....	186
4.10	Tiempo Universal y Tiempo de Efemérides.....	188
4.10.1	Tiempo atómico internacional .....	190
4.10.2	Tiempo dinámico terrestre. Tiempo dinámico baricéntrico. ....	190
	Relación entre las distintas escalas de tiempo.....	193

## CAPÍTULO 5. LOS PLANETAS

5.1	El Sistema Solar .....	195
5.2	Movimiento heliocéntrico .....	196
5.2.1	Evolución de los elementos orbitales .....	200
5.2.2	Elementos ecuatoriales .....	201
5.3	Movimiento geocéntrico de los planetas .....	201
5.3.1	Introducción.....	201
5.3.2	Configuraciones geocéntricas .....	202
5.3.3	Movimiento geocéntrico circular.....	204
5.4	Efemérides para observaciones físicas .....	210
5.4.1	Planetas .....	210
5.4.2	Sol .....	212
5.4.3	Aspecto geocéntrico de la iluminación de un planeta por el Sol.....	214
5.5	Brillos y magnitudes.....	217
	Tabla I .....	220

Tabla II .....	221
Tabla III .....	227
Tabla IV .....	228
Tabla V .....	229

## CAPÍTULO 6. DETERMINACIÓN DE ÓRBITAS

6.1	Introducción .....	232
6.2	Método de Laplace .....	233
	6.2.1 Corrección de aberración .....	237
	6.2.2 Corrección de los elementos. Método de Leuschner .....	238
6.3	Método de Gauss .....	241
	6.3.1 Determinación de las áreas triangulares .....	241
	6.3.2 Fórmulas aproximadas de Encke .....	245
	6.3.3 Cálculo de la $\rho_i$ el y de las posiciones heliocéntricas .....	247
	6.3.4 Corrección de aberración y de los parámetros $c_1/c_2$ , $c_3/c_2$ .....	248
	6.3.5 Cálculo de los elementos de una órbita por dos posiciones heliocéntricas .....	249
	6.3.6 Resumen de fórmulas y proceso de cálculo .....	256
6.4	Método de Olbers .....	257
	6.4.1 Teorema de Lambert para el movimiento elíptico .....	257
	6.4.2 Fórmula de Euler .....	260
	6.4.3 Movimiento de cometas .....	260
	6.4.4 Cálculo de los elementos orbitales .....	263

## CAPÍTULO 7. PROBLEMA DE LOS N-CUERPOS

7.1	Ecuaciones del movimiento .....	265
7.2	Las diez integrales clásicas .....	267
7.3	Teorema del virial .....	269
7.4	Coordenadas relativas .....	270
	7.4.1 Aplicación al Sistema Solar .....	272
7.5	Problema de los tres cuerpos .....	274
	7.5.1 Caso en que $r_{12} \ll r_{13}$ y $r_{12} \ll r_{23}$ .....	275
	7.5.2 El problema restringido circular .....	277
	7.5.3 Criterio de Tisserand .....	281
	7.5.4 Superficies de velocidad relativa nula .....	283
	7.5.5 Puntos dobles de las superficies $V = 0$ .....	288
	7.5.6 La estabilidad de los puntos de Lagrange .....	292

## CAPÍTULO 8. TEORÍA DE PERTURBACIONES

8.1	Movimiento de dos cuerpos perturbado .....	297
8.2	Ecuaciones de Gauss .....	300
8.3	Variación de los elementos en un periodo .....	304
8.4	Perturbaciones debidas al potencial terrestre .....	305
	8.4.1 Perturbaciones debidas al potencial terrestre en el caso particular de un potencial terrestre central .....	308
8.5	Perturbaciones debidas a la resistencia de la atmósfera .....	310
8.6	Perturbaciones debidas a la presión de radiación .....	319
	8.6.1 Ecuación de sombra .....	320
	8.6.2 Cálculo de las perturbaciones debidas a $\vec{f}$ .....	322
8.7	Perturbaciones debidas a la acción de otro astro lejano .....	325
8.8	Perturbaciones debidas a la acción de varios astros .....	331

8.8.1	<i>Perturbaciones especiales. Método de Encke</i> .....	333
8.8.2	<i>Método de variación de las constantes de Lagrange</i> .....	336
8.8.3	<i>Aplicación al movimiento planetario</i> .....	338
8.8.4	<i>Solución de las ecuaciones planetarias de Lagrange</i> .....	344
<b>CAPÍTULO 9. MOVIMIENTO DE LA LUNA</b>		
9.1	Rotación de la Luna. Leyes de Cassini .....	349
9.1.1	<i>Libraciones físicas</i> .....	350
9.1.2	<i>Libraciones ópticas</i> .....	360
9.1.3	<i>Libración diurna</i> .....	362
9.2	Fases de la Luna.....	364
9.3	Movimiento orbital de la Luna .....	368
9.3.1	<i>El sistema Tierra-Luna</i> .....	369
9.3.2	<i>Desarrollo de la fuerza perturbatriz</i> .....	370
9.3.3	<i>Desarrollo de la función perturbatriz</i> .....	375
9.3.4	<i>Perturbaciones independientes de la excentricidad de la órbita lunar</i> .....	376
9.3.5	<i>Perturbaciones que dependen de la excentricidad de la órbita lunar</i> .....	385
9.3.6	<i>Desigualdades que dependen de una perturbación ortogonal al plano orbital de la Luna</i> .....	393
9.3.7	<i>Desigualdades de la latitud celeste de la Luna</i> .....	398
<b>CAPÍTULO 10. ECLIPSES, OCULTACIONES Y PASOS</b>		
10.1	Eclipses de Sol. Predicción para la Tierra en general.....	401
10.1.1	<i>Ecuaciones fundamentales de la teoría de eclipses</i> .....	404
10.1.2	<i>Distancia al eje del cono de sombra</i> .....	408
10.1.3	<i>Radios de los cono de sombra y penumbra</i> .....	412
10.1.4	<i>Circunstancias de un eclipse para un lugar determinado</i> .....	414
10.1.5	<i>Mapa del eclipse</i> .....	421
10.2	Eclipses de Luna .....	423
10.2.1	<i>Posibilidad de los eclipses de Luna</i> .....	424
10.2.2	<i>Cálculo de las circunstancias de un eclipse de Luna</i> .....	427
10.2.3	<i>Efecto de la atmósfera terrestre</i> .....	431
10.3	Ocultaciones de estrellas por la Luna .....	432
10.3.1	<i>Predicción de ocultaciones para un lugar determinado</i> .....	432
10.3.2	<i>Epocas y ángulos de posición de la inmersión y la emersión para un lugar determinado</i> .....	434
10.3.3	<i>Reducción de observaciones</i> .....	437
10.3.4	<i>Curvas límites</i> .....	442
10.3.5	<i>Ocultaciones rasantes</i> .....	447
10.3.6	<i>Observaciones de ocultaciones rasantes</i> .....	451
10.3.7	<i>Reducción de observaciones rasantes</i> .....	453
10.4	Pasos de Mercurio y Venus por delante del Sol .....	454
	Bibliografía .....	457
	Índice alfabético .....	459

# PRÓLOGO

## Nota sobre la nueva definición de planeta

Cuando este libro estaba ya en fase de impresión se produjo una importante modificación en la definición del concepto de planeta por parte de la Unión Astronómica Internacional (UAI). En la XXVI Asamblea General celebrada en Praga en agosto de 2006 la UAI ha adoptado las siguientes resoluciones:

Los planetas y el resto de los cuerpos a excepción de los satélites dentro del Sistema Solar se definen en tres categorías diferentes de la siguiente manera:

1. Un planeta es un cuerpo celeste que (a) está en órbita alrededor del Sol, (b) tiene suficiente masa para que su gravedad supere las fuerzas asociadas a un sólido rígido de manera que asuma una forma (casi) esférica en equilibrio hidrostático, y (c) que sea el objeto gravitatoriamente dominante en el entorno de su órbita. Los ocho planetas son: Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

2. Un "planeta enano" es un objeto celeste que (a) está en órbita alrededor del Sol, (b) tiene suficiente masa para que su gravedad supere las fuerzas asociadas a un sólido rígido de manera que asuma una forma (casi) esférica en equilibrio hidrostático, (c) que no sea el objeto gravitatoriamente dominante en el entorno de su órbita, y (d) que no sea un satélite. Plutón es un planeta enano según la definición anteriormente dada y se reconoce como el prototipo de una nueva categoría de objetos Trans-Neptunianos.

3. Todos los otros objetos orbitando el Sol deberían ser llamados colectivamente como "Pequeños Cuerpos del Sistema Solar". Esta categoría incluye actualmente la mayoría de los asteroides del Sistema Solar, la mayoría de los objetos Trans-Neptunianos (TNOs), cometas y otros cuerpos pequeños.

Aunque la UAI no ha dado la lista de los considerados como planetas enanos (a excepción de Plutón), a esta lista se añadirán, probablemente, Ceres (el mayor asteroide) y Eris (objeto trasneptuniano mayor que Plutón descubierto en 2003) así como otros objetos que se reclasifiquen o se descubran en el futuro.

Aunque las resoluciones citadas afectan ligeramente al contenido del capítulo 5 del presente libro, dado que las definiciones citadas han levantado cierta controversia y podrían modificarse en el futuro, hemos preferido mantener el contenido de dicho capítulo utilizando las definiciones antiguas e incluir en este prólogo dichos cambios.

## Presentación

La presente obra está dirigida tanto a estudiantes universitarios que necesiten un texto para sus estudios, básicos o avanzados, de Astronomía como a profesores universitarios o investigadores que necesiten un texto de las presentes características para su docencia o investigación. El libro es el resultado de una dilatada experiencia docente de sus autores en la enseñanza de la Astronomía en la Universidad de Barcelona en un principio en la Facultad de Ciencias (secciones de Matemáticas y Física) y posteriormente en la Facultad de Física. El origen del libro son las asignaturas de Astronomía General y Astronomía Esférica (cada una de carácter



anual) por lo que la mayor parte de su contenido se puede encuadrar en la División I (Astronomía Fundamental) de la UAI.

Con respecto a la faceta de texto docente, el hecho de tratarse de un libro mayoritariamente de Astronomía Fundamental hace que pueda utilizarse como texto para el desarrollo de cursos tanto básicos como avanzados de Astronomía tanto en las licenciaturas de Física como de Matemáticas o de Ingeniería Topográfica y Geodésica. Por otro lado parte de su contenido puede utilizarse como base para alumnos que cursen la especialidad de Astrofísica que sin duda necesitan sólidos conocimientos de Astronomía fundamental. Igualmente, el investigador en Astronomía o Astrofísica encontrará en el presente libro una obra rigurosa de consulta. A lo largo de toda la obra, los autores hemos intentado dar a todas las formulaciones el rigor matemático necesario así como incluir los pasos intermedios necesarios para una fácil comprensión de las mismas por parte del lector.

El presente libro viene a cubrir un hueco en la literatura docente en Español dado que aunque existen magníficos tratados sobre Astronomía Fundamental en Inglés como, por ejemplo, los de Green, Murray, Smart, Woolard and Clemence, etc. e incluso en Español como el Curso de Astronomía de Abad, Docobo y Elipe, ninguno de ellos coincide en su contenido con el presente texto en el que se incluyen numerosos temas no desarrollados en ninguno de los anteriores. El lector encontrará, igualmente, que determinados temas como, por ejemplo, las estrellas dobles, tratadas magníficamente en el libro de Abad, Docobo y Elipe no se han incluido. Ello es debido a que el presente libro no es un tratado exhaustivo sobre Astronomía Fundamental y se ha preferido desarrollar todos aquellos temas que, desde el punto de vista docente, pueden formar un curso básico y otro avanzado de Astronomía.

Con respecto al contenido del libro, el lector encontrará en los cuatro primeros capítulos un curso básico de Astronomía General que incluye la Esfera Celeste (coordenadas, movimientos diurno y ánuo y tiempo), la descripción de la Tierra (elipsoide, paralaje diurna, potencial, rotación, precesión, nutación y posiciones medias y verdaderas), el problema de los dos cuerpos (órbitas, ecuación de Kepler, movimiento elíptico, parabólico e hiperbólico y cálculo de efemérides) y la traslación de la Tierra (órbita de la Tierra, aberración, paralaje ánuo, posiciones aparentes, años y estaciones y escalas de tiempo).

Los capítulos a partir del quinto describen un curso avanzado de Astronomía Esférica con elementos de Mecánica Celeste. Los capítulos incluyen los planetas (descripción, movimientos heliocéntrico y geocéntrico y las efemérides para las observaciones físicas), la determinación de órbitas (Métodos de Laplace, Gauss y Olbers), el problema de los N-cuerpos (integrales clásicas, teorema del virial, el problema de los tres cuerpos y puntos de Lagrange), la teoría de perturbaciones con aplicación tanto a los planetas como a los satélites artificiales (Ecuaciones de Gauss, perturbaciones debidas al potencial, resistencia atmosférica, presión de radiación y acción de otros astros), el movimiento de la Luna (libraciones ópticas y físicas, fases y movimiento orbital) y un capítulo sobre eclipses, ocultaciones y pasos (cálculo de circunstancias y mapas de los eclipses de Sol, cálculo de eclipses de Luna, ocultaciones de estrellas por la Luna y pasos de Mercurio y Venus por delante del Sol).

Finalmente, los autores queremos expresar nuestra gratitud a la Universidad de Barcelona por la edición de la presente obra tanto en su faceta de libro como su acceso informático a través de Internet.

*Barcelona, Octubre de 2006*

# Capítulo 1

## LA ESFERA CELESTE

### 1.1 Movimiento diurno de la esfera celeste

La *esfera celeste* es una esfera imaginaria de radio arbitrario y centro en el observador, sobre la cual se proyectan las estrellas para estudiar sus posiciones relativas.

*Movimiento diurno* es el movimiento aparente de rotación de la esfera celeste, de levante a poniente, debido al movimiento real de rotación de la Tierra de poniente a levante. De él, por tanto, participan todos los cuerpos celestes.

*Eje del mundo* es el diámetro alrededor del cual parece girar la esfera celeste. Su localización varía con el tiempo.

*Polos celestes* son los puntos de intersección del eje del mundo con la esfera celeste. Son, por tanto, los únicos puntos del cielo que no participan del movimiento diurno. De éstos el que vemos desde Barcelona (por hallarse sobre nuestro horizonte) es el *polo norte*,  $P$ , y el diametralmente opuesto es el *polo sur*,  $P'$  (Fig. 1.1).

*Vertical de un lugar* es el diámetro de la esfera celeste dado por la dirección de la plomada. Su punto de intersección con la esfera celeste situado en el hemisferio visible para el observador se denomina *cenit*. El situado en el hemisferio invisible se denomina *nadir* ( $Z$  y  $Z'$  en Fig. 1.1).

*Horizonte astronómico o verdadero* es el plano diametral ortogonal a la vertical. La intersección de dicho plano con la esfera celeste es un círculo máximo denominado también *horizonte*. EL horizonte astronómico divide a la esfera celeste en dos *hemisferios*, situados por encima y por debajo del mismo, que se denominan *visible* e *invisible* respectivamente (Fig. 1.1)

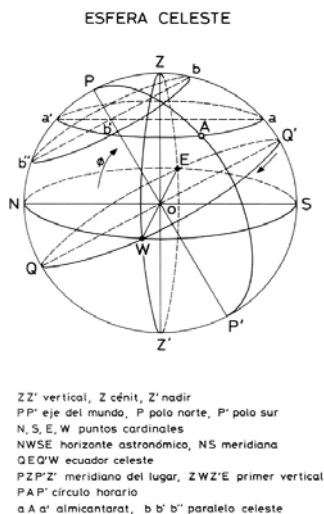


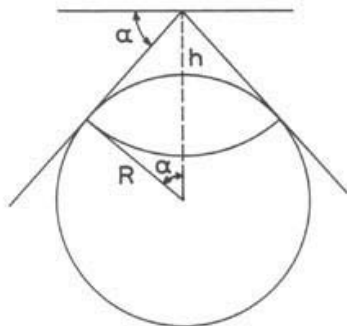
FIG 1.1

*Horizonte sensible o aparente* es el círculo menor que se obtiene al situarnos a una cierta altitud sobre el nivel del mar y trazar un cono con vértice en el observador y generatrices tangentes a la superficie de la Tierra. El ángulo formado por una generatriz del cono y el horizonte verdadero se denomina *depresión del horizonte*. Si llamamos  $\alpha$  a dicho ángulo,  $R$  al radio medio de la Tierra y  $h$  a la altitud sobre el nivel del mar, se verifica (Fig. 2.1):

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+h} \quad \text{y como} \quad 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

$$\text{tenemos} \quad 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{R+h} \approx \frac{h}{R}$$

$$\text{de donde: } \alpha \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}$$



**FIG 2.1**

*Ecuador celeste* es el plano diametral ortogonal al eje del mundo o, también, el círculo máximo determinado por la intersección de dicho plano con la esfera celeste (Fig.1.1).

*Plano meridiano* es el plano diametral determinado por el eje del mundo y la vertical. Su intersección con la esfera celeste es el *meridiano del lugar* (Fig.1.1).

*Meridiana* es el diámetro determinado por la intersección del plano meridiano con el horizonte verdadero. Sus intersecciones con la esfera celeste constituyen los *puntos cardinales norte y sur* (N y S en la Fig.1.1).

*Latitud del lugar* es el ángulo formado por la meridiana y el eje del mundo ( $\phi$  en la Fig.1.1). Su complementario ( $90^\circ - \phi$ ) se denomina *colatitud*.

*Perpendicular* es el diámetro determinado por la intersección del ecuador celeste con el horizonte verdadero. Sus intersecciones con la esfera celeste constituyen los *puntos cardinales este y oeste* (E y W en la Fig.1.1).

*Primer vertical* es el plano diametral determinado por la vertical y la perpendicular. También se denomina así el círculo máximo determinado por la intersección de dicho plano con la esfera celeste.

*Línea del medio cielo* es el diámetro determinado por la intersección del ecuador celeste con el plano meridiano. Su punto de intersección con la esfera celeste situado en el hemisferio visible se denomina *medio cielo* (Q en la Fig.1.1)

*Verticales* son los planos que pasan por la vertical. Los círculos máximos intersección de dichos planos con la esfera celeste reciben también el nombre de verticales. Son verticales tanto el plano meridiano como el primer vertical.

*Almucantarates* son los círculos menores de la esfera celeste paralelos al horizonte.

*Planos horarios* son los planos diametrales que pasan por el eje del mundo. Los círculos máximos determinados por su intersección con la esfera celeste se denominan *círculos horarios*.

*Paralelos celestes* son los círculos menores de la esfera celeste paralelos al ecuador.

## 1.2 Coordenadas horizontales y horarias

En cualquier sistema de coordenadas la localización de un punto de la esfera celeste viene dada por las componentes de su vector de posición expresadas en cartesianas (coordenadas rectilíneas) o bien en esféricas (coordenadas esféricas). En el primer caso las componentes no son independientes, dado que sólo existen dos grados de libertad al ser el radio de la esfera celeste arbitrario, pero constante una vez fijado.

### 1.2.1 Coordenadas horizontales

La vertical, la meridiana y la perpendicular de un lugar determinan un triedro trirectángulo con vértice en el observador. Tomaremos este triedro como sistema de referencia de coordenadas cartesianas y elegiremos los ejes de la siguiente forma:  $x$  en la dirección de la meridiana, sentido creciente hacia el sur;  $y$  en la dirección de la perpendicular, sentido creciente hacia el oeste;  $z$  en la dirección de la vertical, sentido creciente hacia el cenit. El triedro estará orientado en sentido retrógrado.

Las componentes del vector de posición de un astro  $A$  en dicha base constituirán las *coordenadas rectilíneas horizontales* del mismo  $A(x,y,z)$ .

Por otra parte, por cada punto de la esfera celeste, distinto del cenit y del nadir, pasan un único vertical y un único almucantarat que nos permiten definir las *coordenadas esféricas horizontales* (Fig. 3.1).

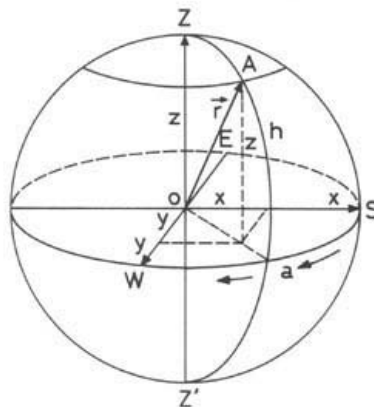


FIG 3.1

*Acimut*, ángulo diedro que forman el vertical que pasa por el astro con el plano meridiano. Se mide sobre el horizonte, desde el Sur, en sentido retrógrado, de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Si lo designamos por  $a$  tenemos:

$$0^\circ \leq a \leq 360^\circ$$

*Altura*, distancia esférica del horizonte al astro. Se mide en grados desde el horizonte; es positiva si el astro se halla en el hemisferio visible y negativa si en el invisible. Designándola por  $h$  tenemos:

$$-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$$

*Distancia  $r$*  es el módulo del vector de posición  $\vec{r}$ ; es decir, el radio de la esfera celeste.

*Distancia cenital* es el arco complementario de la altura; esto es, la distancia esférica del cenit al astro. Designándola por  $z$  tendremos:

$$z = 90^\circ - h \quad 0^\circ \leq z \leq 180^\circ$$

Las relaciones entre las coordenadas horizontales rectilíneas y esféricas vienen dadas por (Fig.3.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x = r \cos h \cos a \\ y = r \cos h \sen a \\ z = r \sen h \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$a = \arctan(y/x)$$

$$h = \arcsen(z/r)$$

### 1.2.2 Coordenadas horarias

El eje del mundo, la línea del medio cielo y la perpendicular determinan un triedro trirectángulo con vértice en el observador. Tomaremos este triedro como sistema de referencia de coordenadas cartesianas, eligiendo los ejes de la siguiente forma:  $x'$  en la dirección de la línea del medio cielo, en sentido creciente hacia el medio cielo;  $y'$  en la dirección de la perpendicular, en sentido creciente hacia el oeste;  $z'$  en la dirección del eje del mundo, en sentido creciente hacia el polo celeste norte. El triedro estará orientado en sentido retrógrado.

Las componentes del vector de posición de un astro  $A$  en dicha base constituirán las *coordenadas rectilíneas horarias* del mismo  $A(x', y', z')$ .

Por otra parte, por cada punto de la esfera celeste, distinto de los polos, pasan un único paralelo celeste y un único círculo horario que definen las *coordenadas esféricas horarias* (Fig. 4.1).

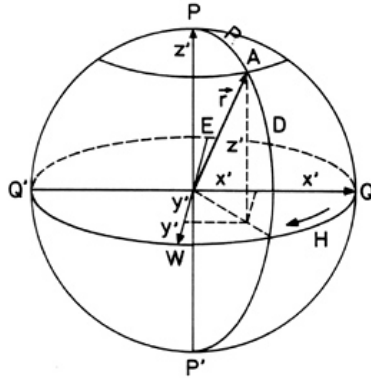


FIG 4.1

*Ángulo horario*, ángulo diedro que forman el plano horario que pasa por el astro con el plano meridiano del lugar. Se mide sobre el ecuador desde el medio cielo, en sentido retrógrado, de 0h a 24 h.

Si lo designamos por  $H$ , tenemos:

$$0^h \leq H \leq 24^h$$

*Declinación*, distancia esférica del ecuador al astro. Se mide en grados desde el ecuador; es positiva si el astro se halla en el hemisferio celeste norte y negativa si en el sur. Si la designamos por  $D$ , tendremos:

$$-90^\circ \leq D \leq 90^\circ$$

*Distancia polar* es la distancia esférica del polo al astro; es decir, es el complemento de la declinación,

Si la designamos por  $p$ , tendremos:

$$0^\circ \leq p \leq 180^\circ$$

Las relaciones entre las coordenadas horarias rectilíneas y esféricas son (Fig. 4.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x' = r \cos D \cos H \\ y' = r \cos D \operatorname{sen} H \\ z' = r \operatorname{sen} D \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$H = \arctan(y' / x')$$

$$D = \operatorname{arcsen}(z' / r)$$

### 1.2.3 Paso de coordenadas horizontales a horarias y viceversa

Los triedros de referencia de los sistemas de coordenadas horizontales y horarias tienen el eje  $y$  común y ambos están orientados en sentido retrógrado, por lo que podrá efectuarse el cambio de un sistema al otro por un simple giro alrededor del eje  $y \equiv y'$  (Fig.5.1), de ángulo  $90^\circ - \phi$  en valor absoluto ( $\phi$  latitud del lugar).

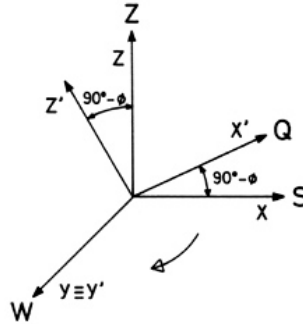


FIG 5.1

Recordemos que las matrices que definen un giro de ángulo  $i$  son:

$$\text{alrededor del eje } x: R_1(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \text{sen } i \\ 0 & -\text{sen } i & \cos i \end{pmatrix}$$

$$\text{alrededor del eje } y: R_2(i) = \begin{pmatrix} \cos i & 0 & -\text{sen } i \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } i & 0 & \cos i \end{pmatrix}$$

$$\text{alrededor del eje } z: R_3(i) = \begin{pmatrix} \cos i & \text{sen } i & 0 \\ -\text{sen } i & \cos i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices son ortogonales; por tanto, sus inversas coinciden con sus traspuestas:

$$R_h^{-1} = R_h^T \quad (h = 1, 2, 3)$$

y además

$$R_h^T(i) = R_h(-i)$$

Lo que hemos de hacer es pues un cambio de base expresado por donde  $R_2(i)$  tiene las propiedades indicadas.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_2(i) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Para pasar de coordenadas horizontales a horarias tomaremos  $i=\phi - 90^\circ$ , ya que el ángulo está contado en sentido contrario al de la orientación del triedro. Por tanto, siendo:

$$R_2(\phi' - 90^\circ) = R_2^T(90^\circ - \phi) \quad (2.1)$$

y recordando el valor de las componentes de  $\vec{r}$  en las bases horizontal y horaria, según (1.1).

$$\begin{bmatrix} r \cos D \cos H \\ r \cos D \sin H \\ r \sin D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sen \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sen \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos h \cos a \\ r \cos h \sen a \\ r \sen h \end{bmatrix}$$

y operando:

$$\left. \begin{aligned} \cos D \cos H &= \sen \phi \cos h \cos a + \cos \phi \sen h \\ \cos D \sen H &= \cos h \sen a \\ \sen D &= -\cos \phi \cos h \cos a + \sen \phi \sen h \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Para pasar de coordenadas horarias a horizontales, aplicando la matriz inversa de  $R_2$  en (1.1).

$$R_2^{-1}(\phi - 90^\circ) = R_2^T(\phi - 90^\circ) = R_2(90^\circ - \phi)$$

y por tanto:

$$\begin{bmatrix} r \cos h \cos a \\ r \cos h \sen a \\ r \sen h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sen \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sen \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos D \cos H \\ r \cos D \sen H \\ r \sen D \end{bmatrix}$$

y operando:

$$\left. \begin{aligned} \cos h \cos a &= \sen \phi \cos D \cos H - \cos \phi \sen D \\ \cos h \sen a &= \cos D \sen H \\ \sen h &= \cos \phi \cos D \cos H + \sen \phi \sen D \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Las fórmulas (3.1) y (4.1) de cambio de base también pueden obtenerse por aplicación de la trigonometría esférica al triángulo de posición polo-cenit-astro.

## 1.3 Movimiento ánuo del Sol

### 1.3.1 Generalidades

El movimiento aparente del Sol es el resultado de dos movimientos aparentes: el movimiento diurno, retrógrado, debido al movimiento de rotación de la Tierra, y el movimiento ánuo, directo, debido al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol y 365 veces más lento que el anterior. El Sol participa del primero como todo objeto



celeste; el segundo es un movimiento propio (es decir, que no experimentan los demás astros) sobre la esfera celeste.

La trayectoria aparente del Sol sobre la esfera celeste es la *eclíptica*. Dado que el Sol describe, aparentemente, una elipse con la Tierra en uno de sus focos, la eclíptica es un círculo máximo cuyo correspondiente plano diametral se denomina *plano de la eclíptica*.

*Oblicuidad de la eclíptica* es el ángulo que forman el plano de la eclíptica y el plano del ecuador (Fig.6.1). Se representa por  $\varepsilon$  y su valor actual es  $\varepsilon = 23^\circ 26'$ . La oblicuidad de la eclíptica no es constante, sino que disminuye a razón de  $0''47$  por año.

*Eje de la eclíptica* es el diámetro perpendicular al plano de la eclíptica. Sus extremos constituyen los *polos de la eclíptica* y se denominan norte y sur según su proximidad a los polos celestes norte y sur respectivamente ( $P_e$  y  $P'_e$  en la Fig. 6.1).

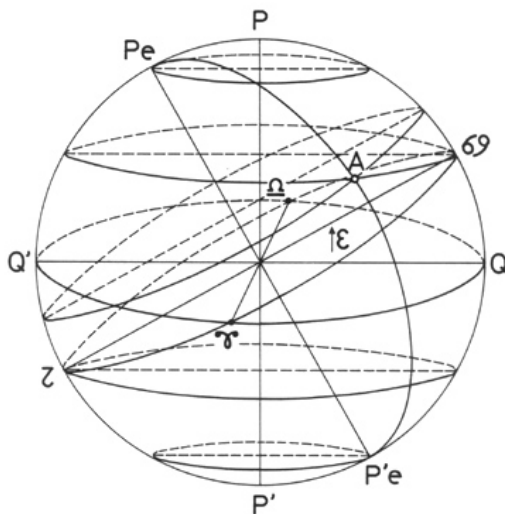


FIG 6.1

*Línea de los equinoccios* es el diámetro determinado por la intersección del plano del ecuador y el plano de la eclíptica ( $\Upsilon \varpi$  en la Fig. 6.1).

*Equinoccios* son los extremos de la línea de los equinoccios. Se denomina *punto Aries, punto vernal o equinoccio de primavera* y se representa por  $\Upsilon$ , el punto en el cual el Sol pasa del hemisferio celeste sur al hemisferio celeste norte. El punto diametralmente opuesto se denomina *punto Libra, punto autumnal o equinoccio de otoño* y se representa por  $\varpi$ .

*Línea de los solsticios* es el diámetro de la eclíptica perpendicular a la línea de los equinoccios ( $\vartheta \sigma$  en la Fig.6.1).

*Solsticios* son los extremos de la línea de los solsticios. Se denomina *punto Cáncer o solsticio de verano*, y se representa por  $\sigma$ , el solsticio situado en el hemisferio celeste norte; se denomina *punto Capricornio o solsticio de invierno*, y se representa por  $\vartheta$ , el situado en el hemisferio sur.

*Trópicos de Cáncer y de Capricornio* son los paralelos celestes que pasan por los puntos Cáncer y Capricornio, respectivamente.

*Círculos polares Ártico o norte y Antártico o sur* son los paralelos celestes que pasan por los polos de la eclíptica, norte y sur, respectivamente.

*Coluros de los equinoccios y de los solsticios* son los meridianos celestes que pasan por los puntos equinociales y solsticiales, respectivamente.

*Máximos de longitud* son los círculos máximos (o sus correspondientes planos diametrales) que pasan por los polos de la eclíptica ( $P_e A P_e'$  en la Fig. 6.1).

*Menores de latitud* son los círculos menores paralelos a la eclíptica.

*Zodiaco* es la zona de la esfera celeste, de  $17^\circ$  de amplitud, limitada por dos menores de latitud a  $8,5^\circ$  a ambos lados de la eclíptica. Sobre el zodiaco se observan los planetas de nuestro sistema solar y las *constelaciones zodiacales*. Los antiguos dividían el zodiaco en doce regiones de  $30^\circ$  de amplitud, medidos sobre la eclíptica a partir del punto Aries y en sentido directo, correspondiendo a cada región o *signo del zodiaco* una constelación zodiacal. Partiendo del punto Aries y recorriendo el zodiaco en sentido directo, dichos signos son:

Aries	$\gamma$	Leo	$\varrho$	Sagitario	$\xrightarrow{\wedge}$
Tauro	$\tau$	Virgo	$\text{♍}$	Capricornio	$\text{♐}$
Géminis	$\text{II}$	Libra	$\text{♎}$	Acuario	$\text{♒}$
Cáncer	$\text{♋}$	Escorpio	$\text{♏}$	Piscis	$\text{♓}$

Hace unos 2.000 años los signos del zodiaco se correspondían con las constelaciones homónimas. Pero, debido a que el punto Aries retrograda sobre la eclíptica a razón de  $50'',29$  por año (fenómeno conocido como precesión de los equinoccios), en la actualidad no se da esta correspondencia y las constelaciones ocupan el signo del zodiaco siguiente, en sentido directo, al que les correspondía.

### 1.3.2 Eclíptica media y verdadera

En realidad, el Sol no describe un círculo máximo de la esfera celeste sino que se desplaza según una línea sinuosa cuyo valor medio constituye la eclíptica definida en el apartado anterior. Dos son las causas principales de dicho comportamiento: En primer lugar, no es la Tierra la que describe una elipse con el Sol en uno de sus focos sino, con mucha aproximación, el centro de gravedad  $G$  del sistema Tierra-Luna, alrededor del cual giran a su vez la Tierra y la Luna. Si  $M$  es la masa de la Tierra,  $T$ , y  $m$  la de la Luna,  $L$ ;  $D$  y  $d$  las distancias del centro de gravedad  $G$  a la Tierra y a la Luna, respectivamente y  $\Delta$  la distancia Tierra-Luna, siendo  $M = 81 m$  y debiéndose de verificar (Fig. 7.1).

$$M \cdot D = m \cdot d$$

$$D + d = \Delta$$

se tiene

$$D = \frac{\Delta}{82} \quad d = \frac{81}{82} \Delta$$

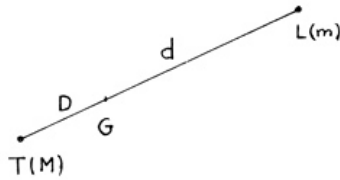


FIG 7.1

Como que  $\Delta \approx 380.000$  km, resulta  $D = 4.700$  km, distancia que es menor que el radio medio de la Tierra (6.400 km), es decir: el centro de gravedad del sistema se encuentra dentro de la Tierra. Por otra parte, si  $i$  es el ángulo que forma el plano del sistema Tierra-Luna con el plano de la eclíptica,  $E$ , mientras que el centro de gravedad del sistema describe la eclíptica, la Tierra y la Luna oscilarán a uno y otro lado de la misma, lo cual dará lugar a un *efecto paraláctico* que variará periódicamente, con una amplitud del orden de  $0''{,}6$ .

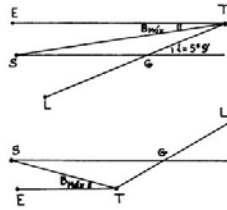


FIG 8.1

En efecto, siendo la distancia Tierra-Sol de unos 150.000.000 km e  $i = 5^{\circ}9'$ , podemos evaluar la separación máxima,  $B_{M\acute{a}x}$ . (Fig.8.1) que constituye la amplitud de la oscilación, sustituyendo el seno por el arco:

$$\text{sen } B_{M\acute{a}x} = \frac{D \text{ sen } i}{a} \qquad B_{\text{max}} \approx \frac{D \cdot i}{a} = 0''{,}6$$

El periodo de oscilación es el del sistema Tierra-Luna: 27,5 días.

En segundo lugar, los planetas, en especial Júpiter por su gran masa y Venus por su proximidad, originan perturbaciones sobre el movimiento de la Tierra. Las variaciones a que dan lugar son también periódicas, dependiendo el periodo del planeta de que se trate. Al perturbar el movimiento de la Tierra producen desviaciones del Sol respecto a la eclíptica media, cuyo máximo es también, en valor absoluto, del orden de  $0''{,}6$ .

En definitiva, dicha desviación es la resultante de varios movimientos periódicos, de tal forma que, cuando se suman las amplitudes máximas de estos movimientos, tal desviación puede llegar a ser de  $1''{,}2$  en valor absoluto. Como que dicha variación es muy pequeña, en muchos problemas podemos considerar que el Sol describe un círculo máximo, sin incurrir en grandes errores.

## 1.4 Coordenadas ecuatoriales y eclípticas

En los sistemas de coordenadas ecuatoriales (o uranográficas) y eclípticas los triedros de referencia están orientados en sentido directo y son solidarios a la esfera celeste.

### 1.4.1 Coordenadas ecuatoriales

En el sistema de coordenadas ecuatoriales se define el triedro de referencia tomando como eje  $x$  la dirección de la línea de los equinoccios, en sentido positivo hacia el punto Aries, el eje  $y$  situado sobre el ecuador, a  $90^\circ$  del anterior, en sentido directo y el eje  $z$  en la dirección del eje del mundo y en sentido positivo hacia el polo celeste norte.

Las componentes del vector de posición de un astro  $E$  en dicha base constituyen las *coordenadas ecuatoriales rectilíneas* del mismo  $E$  ( $x, y, z$ ).

Un punto de la esfera celeste, distinto de los polos, también queda completamente determinado por un único meridiano y un único paralelo celestes, que permiten definir las *coordenadas ecuatoriales esféricas* (Fig.9.1)

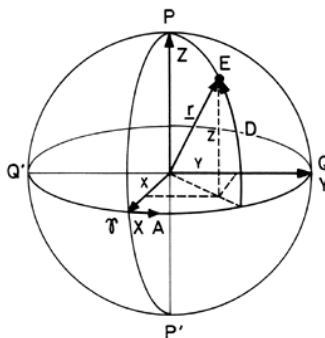


FIG 9.1

*Ascensión recta, A*, es el ángulo diedro que forman el plano meridiano que pasa por el astro y el coluro de los equinoccios. Se mide en tiempo, sobre el ecuador, desde el punto Aries hasta el pie del meridiano que pasa por el astro, en sentido directo de 0 h a 24 h:

$$0^h \leq A \leq 24^h$$

*Declinación, D*, es la distancia esférica desde el ecuador hasta el paralelo que pasa por el astro. Se mide en grados desde el ecuador, de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ ; es positiva si el astro se encuentra en el hemisferio celeste norte y negativa si en el sur:

$$-90^\circ \leq D \leq 90^\circ$$

*Distancia, r*, es el módulo del vector de posición.

*Distancia polar, p*, es la distancia esférica del polo celeste norte al astro:

$$0^\circ \leq p \leq 180^\circ$$

Las relaciones entre las coordenadas ecuatoriales rectilíneas y esféricas vienen dadas por (Fig. 9.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x = r \cos D \cos A \\ y = r \cos D \sen A \\ z = r \sen D \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A = \arctan(y/x)$$

$$D = \arcsen(z/r)$$

### 1.4.2 Coordenadas eclípticas

En el sistema de coordenadas eclípticas definiremos el triedro de referencia tomando el eje  $x'$  idéntico al anterior  $x$ , el eje  $y'$  en la dirección de la línea de los solsticios, sentido positivo hacia el punto de Cáncer, y el eje  $z'$  en la dirección del eje de la eclíptica, en sentido positivo hacia el polo eclíptico norte.

Las componentes del vector de posición del astro  $E$  en dicha base constituyen las *coordenadas eclípticas rectilíneas*  $E(x', y', z')$ .

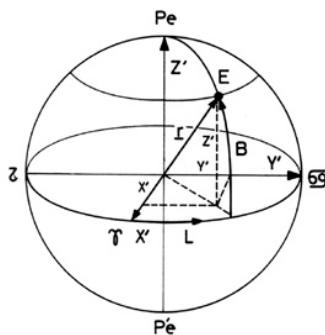


FIG 10.1

Por cada punto de la esfera celeste, distinto de los polos eclípticos, pasan un único máximo de longitud y un único menor de latitud que nos permiten definir las *coordenadas eclípticas esféricas* (Fig.10.1).

*Longitud celeste*,  $L$ , es el ángulo diedro que forman el máximo de longitud que pasa por el astro y el máximo de longitud que pasa por el punto Aries, contado a partir del punto Aries, sobre la eclíptica, en sentido directo, de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ :

$$0^\circ \leq L \leq 360^\circ$$

*Latitud celeste*,  $B$ , es la distancia esférica desde la eclíptica hasta el menor de latitud que pasa por el astro. Se mide en grados y es positiva si el astro se encuentra en el hemisferio norte y negativa si en el sur:

$$-90^\circ \leq B \leq 90^\circ$$

*Distancia, r*, es el radio de la esfera celeste.

Las relaciones entre las coordenadas eclípticas rectilíneas y esféricas son (Fig.10.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x' = r \cos B \cos L \\ y' = r \cos B \sen L \\ z' = r \sen B \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$L = \arctan(y' / x')$$

$$B = \arcsen(z' / r)$$

### 1.4.3 Paso de coordenadas ecuatoriales a eclípticas y viceversa

Los triedros de referencia de los sistemas de coordenadas ecuatoriales y eclípticas tienen común el eje  $x$ , y ambos están orientados en sentido directo, por lo que podrá efectuarse el cambio de un sistema al otro por una simple rotación  $R_1$  alrededor del eje  $x$  de ángulo  $\varepsilon$  o  $-\varepsilon$  (Fig. 11.1).

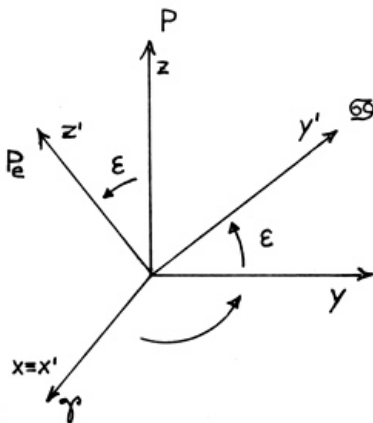


FIG 11.1

Si queremos pasar de coordenadas ecuatoriales a eclípticas, procediendo de manera análoga a como hicimos en la sección 1.2.3, tendremos:

$$\begin{bmatrix} r \cos B \cos L \\ r \cos B \sen L \\ r \sen B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sen \varepsilon \\ 0 & -\sen \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos D \cos A \\ r \cos D \sen A \\ r \sen D \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos L &= \cos D \cos A \\ \cos B \sin L &= \cos \varepsilon \cos D \sin A + \sin \varepsilon \sin D \\ \sin B &= -\sin \varepsilon \cos D \sin A + \cos \varepsilon \sin D \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

El cambio inverso será:

$$\begin{bmatrix} r \cos D \cos A \\ r \cos D \sin A \\ r \sin D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos B \cos L \\ r \cos B \sin L \\ r \sin B \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\left. \begin{aligned} \cos D \cos A &= \cos B \cos L \\ \cos D \sin A &= \cos \varepsilon \cos B \sin L - \sin \varepsilon \sin B \\ \sin D &= \sin \varepsilon \cos B \sin L + \cos \varepsilon \sin B \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Estas fórmulas (5.1) y (6.1) también pueden obtenerse aplicando el grupo de Bessel al triángulo polo del ecuador-polo de la eclíptica-astro.

#### 1.4.4 Variación de las coordenadas del Sol en su movimiento ánuo

De acuerdo con la ley de las áreas de Kepler, aunque la longitud aparente del Sol sea siempre creciente, su variación no es uniforme. Si consideramos que el Sol, S, describe la eclíptica, B es nula; las demás coordenadas varían según la tabla adjunta obtenida al resolver el triángulo  $\gamma S_1 S$  donde  $\widehat{\gamma S}$  = longitud,  $\widehat{\gamma S_1}$  = ascensión recta y  $\widehat{S_1 S}$  = declinación (Fig. 12.1).

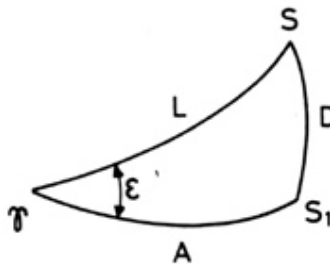


FIG 12.1

TABLA I

Situación del Sol	L	A	D
$\gamma$	$0^\circ$	$0^h$	$0^\circ$
$\text{♋}$	$90^\circ$	$6^h$	$+\varepsilon$
$\text{♌}$	$180^\circ$	$12^h$	$0^\circ$
$\text{♍}$	$270^\circ$	$18^h$	$-\varepsilon$
$\gamma$	$360^\circ$	$24^h$	$0^\circ$

Se observa que  $A$  es siempre creciente y  $D$  toma sus valores máximo y mínimo en los puntos Cáncer y Capricornio, respectivamente.

En un día las variaciones de  $A$  y de  $D$  son pequeñas, suponiendo el movimiento uniforme, por lo que en muchas aplicaciones, a lo largo de un día, tanto la ascensión recta como la declinación pueden considerarse constantes e iguales a su valor medio en dicho día.

$$\Delta A \approx \frac{360^\circ}{365^\circ} \approx 1^\circ \text{ dia}^{-1} = 4^m \text{ dia}^{-1}$$

$$\Delta D \approx \frac{23^\circ 26'}{\frac{365}{4}} \approx 15' \text{ dia}^{-1}$$

Del mismo triángulo  $\gamma S_1 S$  (Fig.12.1) determinado por la posición del Sol,  $S$ , el punto Aries,  $\gamma$ , y la intersección del meridiano celeste que pasa por el centro del Sol con el ecuador,  $S_1$ , deducimos también las relaciones:

$$\begin{aligned} \tan A &= \cos \varepsilon \tan L \\ \text{sen } D &= \text{sen } \varepsilon \text{ sen } L \end{aligned}$$

## 1.5 Tiempos sidéreos medio y aparente

Como ya se ha comentado en apartadas anteriores, el punto Aries no es un punto fijo en la esfera celeste sino que, debido a la *precesión de los equinoccios*, retrograda sobre la eclíptica a razón de  $50''$ ,29 por año. Por lo tanto, por definición, retrograda también sobre el ecuador unos 3s por año:

$$50'',29 \cos \varepsilon \frac{24^h}{360^\circ} \approx 3^s \text{ año}^{-1}$$

Además, debido al fenómeno de la *nutación*, el punto Aries oscila alrededor de la posición media dada por la precesión con una semiamplitud de  $17''$  sobre la eclíptica (1s sobre el ecuador) con un periodo de 18,6 años.

El punto Aries que se obtiene al considerar sólo el fenómeno de la precesión es el *punto Aries medio*; si además tenemos en cuenta el de la nutación obtenemos el *punto Aries verdadero*. Según consideremos uno u otro obtendremos, respectivamente, la ascensión recta media verdadera de un astro.



En primera aproximación la ascensión recta verdadera de una estrella ecuatorial será:

$$A = A_0 + at + b\text{sen}(wt)$$

Con  $A_0$  la ascensión recta para  $t = 0$ ,  $a = 3^s \text{ año}^{-1}$ ,  $b = 1^s$ ,  $w = (2\pi/18.6) \text{ año}^{-1}$  ( $t$  en años).

*Día sideral* es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos de un punto fijo de la esfera celeste por un mismo meridiano. Coincide, por tanto, con el periodo de rotación de la Tierra.

*Día sidéreo* es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del punto Aries por un mismo meridiano. Si consideramos el punto Aries medio, obtendremos el *día sidéreo medio*; si consideramos el verdadero, obtendremos el *día sidéreo aparente*.

Como que el punto Aries medio retrograda  $3^s \text{ año}^{-1}$  sobre el ecuador, el día sideral será  $3^s/365 = 0^s,01$  más largo que el día sidéreo.

*Tiempo sidéreo medio*,  $\theta_m$ , es el ángulo horario del punto Aries medio.

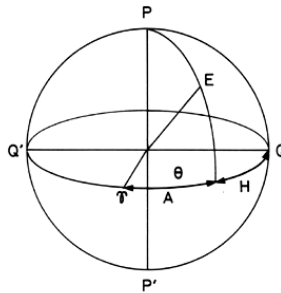
*Tiempo sidéreo aparente*,  $\theta_v$ , es el ángulo horario del punto Aries verdadero.

Ambos son locales. Sólo el primero es uniforme con mucha aproximación y es el que miden los relojes de tiempo sidéreo.

*Ecuación de equinoccios* es la diferencia entre el tiempo sidéreo aparente y el sidéreo medio:

$$N = \theta_v - \theta_m \quad |N| \leq 1^s$$

(el término "ecuación" procede de la palabra árabe que significa "diferencia"). Se designa por  $N$  por coincidir con la nutación en ascensión recta, según veremos en el próximo capítulo, y soluciona el paso de un tiempo sidéreo al otro mediante una simple suma algebraica. El concepto de tiempo sidéreo permite relacionar los sistemas de coordenadas solidarios al observador con los solidarios a la esfera celeste. En efecto, siendo la declinación una coordenada común a los sistemas de coordenadas horarias y ecuatoriales, para las otras dos, ángulo horario  $H$  y ascensión recta  $A$  de un astro  $E$



**FIG 13.1**

(Fig.13.1), observando los sentidos en que se miden los ángulos, se tiene la relación fundamental: que se verifica tanto para los valores medios  $\theta_m$  y  $A_m$  como para los verdaderos  $\theta_v$  y  $A_v$ .

$$\theta = A + H \quad (7.1)$$