Objektív anyagfüggvények felé a reológiában

Ván Péter

RMKI, Budapest, BCCS, Bergen

Montavid Elméleti és Alkalmazott Termodinamikai Kutatócsoport

- Bevezetés – objektivitás általában
- Objektivitás időderiváltak
- Objektív termodinamika
- Egyszerű nyírás
- Következmények
  - Az előadás eltér a konferenciakönyvben megjelenttől!

Objektivitás – függetlenség a megfigyelőtől

– Anyagi objektivitás: anyagtörvények függetlenek a vonatkoztatási rendszertől.

- – Parciális deriváltak NEM objektívak. Ebből a tényből problémák sokasága származik.
- – Fizikai mennyiségeknek van vonatkoztatási rendszertől független formája.
- – Az anyagra vonatkozó tér és *időbeli* anyagi deriváltak egyértelműen meghatározhatók. A formájuk adott vonatkoztatási rendszerben más és más, attól függően, hogy milyen tenzori rendű és típusú fizikai mennyiségről van szó.

–Objektivitás általában:

- – 4 dimenziós egységes kezelése nemrelativisztikusan is elkerülhetetlen.
- – Tenzori jelölések: koordinátarendszer függetlenség (~1890, Maxwell)

$$\text{Téridő} \neq \text{Tér} + \text{Idő}$$

Reológia:

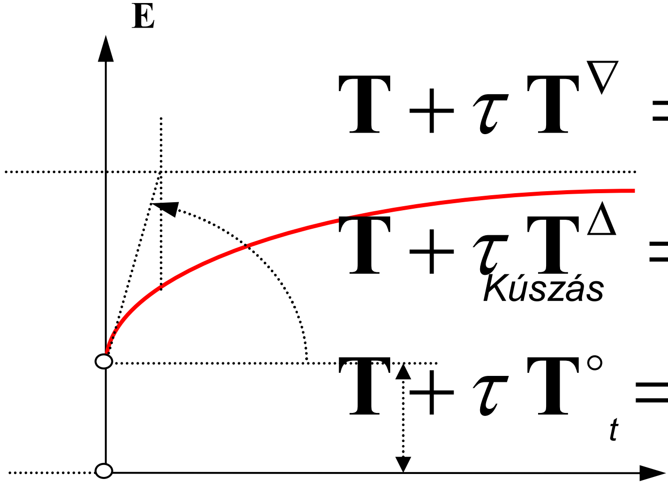
Relaxáció és kúszás. Folyadékok és szilárd anyagok.

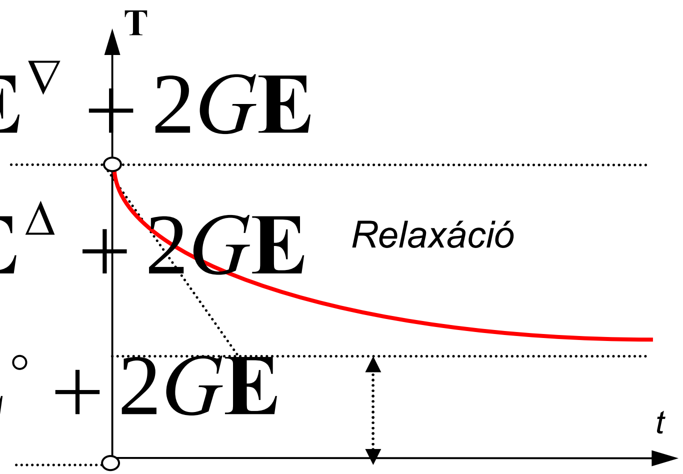
$$\mathbf{T} + \tau \cancel{\dot{\mathbf{T}}} = 2\eta \cancel{\dot{\mathbf{E}}} + 2G\mathbf{E}$$ Poynting-Thomson test

$$\mathbf{T} + \tau\, \mathbf{T}^{\nabla} = 2\eta \mathbf{E}^{\nabla} + 2G\mathbf{E}$$

$$\mathbf{T} + \tau\, \mathbf{T}^{\Delta} = 2\eta \mathbf{E}^{\Delta} + 2G\mathbf{E}$$

$$\mathbf{T} + \tau\, \mathbf{T}^{\circ} = 2\eta \mathbf{E}^{\circ} + 2G\mathbf{E}$$





$\mathbf{T} = const.$

$\mathbf{E} = const.$

Miféle időderiváltak? Hol van a vonatkoztatási rendszer?

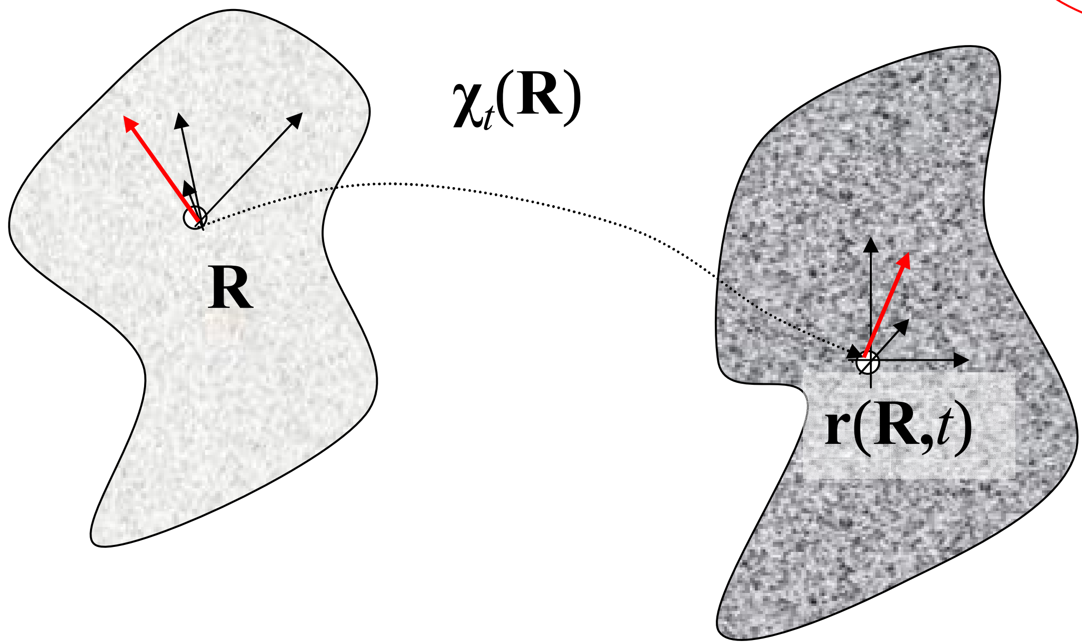
$$\mathbf{H}_t(\mathbf{R}) := \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = \nabla_R \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{R})$$

mozgásgradiens (deformációgradiens)

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$$

C vektormező

anyagi sokaság



pillanatnyi sokaság (konfiguráció)

$$\mathbf{H}_t^{-1}(\mathbf{R})\mathbf{C}\,(\chi_t(\mathbf{R}),\mathrm{t}) \longrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{r},\mathrm{t})$$

anyagi vektor

lokális vektor

Anyagi időderivált = anyagi mennyiség időderiváltja
(Lie-derivált az áramlás szerint)

Spec. 1: ***c*** vektor

$$\mathbf{c}^{\Diamond} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{c}\right) = \mathbf{H}^{-1}\dot{\mathbf{c}} - \mathbf{H}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{c} = \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{v}$$

térszerű vektormező anyagi deriváltja: felső-áramlásos derivált.

Spec. 2: *a* skalár

$$a^{\Diamond} = (\partial_0 + \mathbf{v}\cdot\nabla)a = \dot{a}$$

skalármező anyagi deriváltja: szubsztanciális derivált

De! Kellenek a négyes mennyiségek:

$$a^{\Diamond} = V^j \partial_j a \qquad\qquad V = (1, \mathbf{v})\,!$$

Spec. 4: **L** 3-as tenzormező (4-es tenzor térszerű része)

$$\mathbf{L}^{\lozenge} = \dot{\mathbf{L}} - \nabla \circ \mathbf{v}\,\mathbf{L} - \mathbf{L}\left(\nabla \circ \mathbf{v}\right)^{T}$$

térszerű rész:
felső áramlásos

Spec. 5: **A** 3-as vegyes tenzormező

$$\mathbf{A}^{\lozenge} = \dot{\mathbf{A}} - \nabla \circ \mathbf{v}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\,\nabla \circ \mathbf{v}$$

térszerű rész

Spec. 6: **A** 3-as vegyes tenzormező

$$\mathbf{B}^{\lozenge} = \dot{\mathbf{B}} + \nabla \circ \mathbf{v}^{T}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\nabla \circ \mathbf{v}$$

térszerű rész:
alsó áramlásos

De:

$$\mathbf{v}^{\lozenge} = \mathbf{0}$$

sebesség

$$\mathbf{H}^{\lozenge} = \dot{\mathbf{H}}$$

mozgásgradiens

$$(\nabla \circ \mathbf{v})^{\lozenge} = (\nabla \circ \mathbf{v})^{\boldsymbol{\cdot}} - (\nabla \circ \mathbf{v})(\nabla \circ \mathbf{v})$$

sebességgradiens

Termodinamika - Mechanika

$$s(e_A, \mathbf{H}_A, \boldsymbol{\xi}_A\overset{\cdot}{)} = \frac{\partial s}{\partial e}\dot{e} + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} + \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\xi}} : \boldsymbol{\xi}^{\Diamond}$$

1) Az entrópia anyagi mennyiségek függvénye.
2) Referenciakonfiguráció = jelenlegi, ezért csak a deriváltak változnak.

Entrópia produkció:

$$T\sigma_S = \cancel{\frac{1}{T}\mathbf{q}\cdot\nabla T} + \left(\mathbf{T} + \rho T \mathbf{H}\frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}}\right) : \dot{\mathbf{H}}\mathbf{H}^{-1} - \rho\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\xi}} : \boldsymbol{\xi}^{\Diamond} \geq 0$$

erő

áram

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{T}^{v} &= \mathbf{L}^{1}\ \nabla\circ\mathbf{v}-\mathbf{L}^{12}\rho\,\boldsymbol{\xi},\\ \boldsymbol{\xi}^{\Diamond} &= \mathbf{L}^{21}\nabla\circ\mathbf{v}-\mathbf{L}^{2}\rho\,\boldsymbol{\xi}\end{aligned}}$$

Lineáris vezetési egyenletek
(lásd pl. Asszonyi-Ván-Szarka)

$$\left(\mathbf{T}^{v}\right)^{\Diamond}-\mathbf{L}_{12}\mathbf{L}_{2}\mathbf{L}_{12}^{-1}\mathbf{T}^{v}=\mathbf{L}_{1}\left(\nabla\circ\mathbf{v}\right)^{\Diamond}+\left(\rho\mathbf{L}_{12}\mathbf{L}_{2}\mathbf{L}_{12}^{-1}\mathbf{L}_{1}-\rho\mathbf{L}_{12}\mathbf{L}_{21}\right)\nabla\circ\mathbf{v}$$

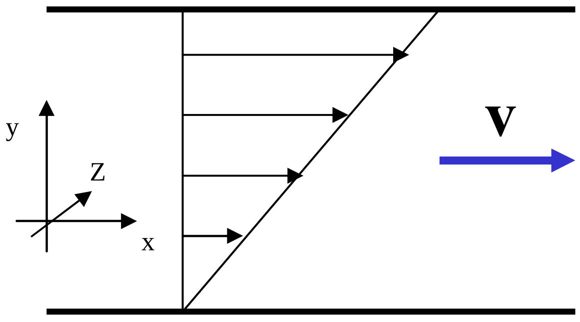
Izotrópia: csak a szimmetrikus nyomnélküli rész számít:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}\mathbf{t}^{\Diamond}+\underset{\text{tenzor}}{\underbrace{\mathbf{t}}}=2\boldsymbol{\eta}\left(\boldsymbol{\tau}_{d}\left(\nabla\circ\mathbf{v}\right)^{\Diamond}+\underset{\text{kotenzor}}{\underbrace{\nabla\circ\mathbf{v}}}\right)}$$

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{\rho l_{2}},\quad \boldsymbol{\eta}=\frac{l_{1}l_{2}-l_{12}l_{21}}{2l_{2}},\quad \boldsymbol{\tau}_{d}=\frac{l_{1}}{\rho(l_{1}l_{2}-l_{12}l_{21})}$$

Egyszerű nyírás:

$$\nabla \circ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_2 & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_3 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{T}^{\lozenge} = \dot{\mathbf{T}} - \nabla \circ \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \left(\nabla \circ \mathbf{v}\right)^T = -\boldsymbol{\kappa} \begin{pmatrix} t_{12} + t_{21} & t_2 & t_{23} \\ t_2 & 0 & 0 \\ t_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\nabla \mathbf{v})^{\lozenge} = (\nabla \circ \mathbf{v})^{\boldsymbol{\cdot}} + \left(\nabla \circ \mathbf{v}\right)^T \nabla \circ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\kappa}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A megoldás:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \frac{t_{12}}{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\boldsymbol{\eta}(3 + 4\boldsymbol{\kappa}^2\boldsymbol{\tau\tau}_d)}{3 + 2\boldsymbol{\kappa}^2\boldsymbol{\tau}^2},$$

$$\Psi_1 = \frac{t_1 - t_2}{\boldsymbol{\kappa}^2} = \frac{2\boldsymbol{\eta}(3\boldsymbol{\tau} - 3\boldsymbol{\tau}_d + 2\boldsymbol{\kappa}^2\boldsymbol{\tau}^2\boldsymbol{\tau}_d)}{3 + 2\boldsymbol{\kappa}^2\boldsymbol{\tau}^2},$$

$$\Psi_2 = -\frac{t_2 - t_3}{\kappa^2} = -2\boldsymbol{\eta\tau}_d.$$

Együttforgó, szimmetrikus nyomtalan tenzor: Jeffreys-Verhás:

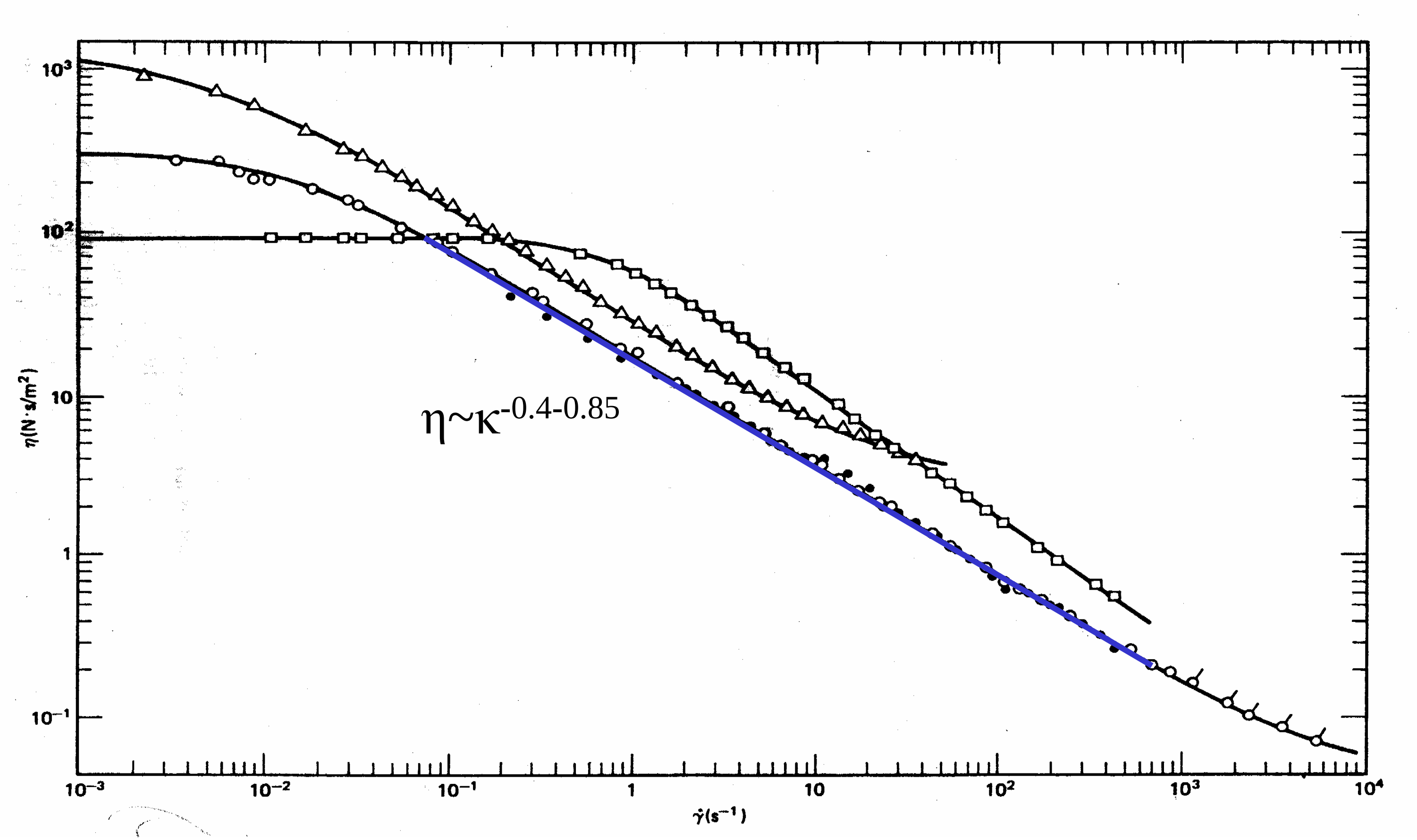
$$\hat{\eta} = \frac{t_{12}}{\kappa} = \eta\,\frac{1 + \tau_t\tau_d\kappa^2}{1 + \tau_t^2\kappa^2},$$

$$\Psi_1 = \frac{t_1 - t_2}{\kappa^2} = \frac{2\eta\,(\tau_t - \tau_d)}{1 + \tau_t^2\kappa^2},$$

$$\Psi_2 = -\frac{t_2 - t_3}{\kappa^2} = \frac{\Psi_1}{2}.$$

Kísérletek:

- Hatvány aszimptotika (≠2) – több szabadsági fokkal
- $\Psi_2 \sim$ -0.1-0.2 Ψ_1
- stabilitás, relaxáció – nincsenek oszcillációk



Trans. Soc. Rheol., 11 (1967), p159-179, from Bird-Armstrong-Hassager, p144

Összefoglalás

-Ad-hoc időderiváltak helyett egyértelmű forma.

$\Rightarrow$ jobb egyezés a kísérletekkel

- Dilatáció!
- Időfüggő eset bonyolultabb (4D).

Köszönöm a figyelmet!