

# Dominio de la Frecuencia

Álvaro Gutiérrez & Félix Monasterio-Huelin

11 de abril de 2019

## Índice

<b>Índice</b>	<b>1</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Representaciones Gráficas</b>	<b>3</b>
2.1. Diagrama de Bode . . . . .	3
2.2. Diagrama de Nyquist . . . . .	6
2.2.1. Conclusiones en lazo cerrado . . . . .	8
<b>3. Estabilidad</b>	<b>9</b>
3.1. Criterio de Estabilidad de Nyquist . . . . .	9
3.1.1. Ejemplo 1 . . . . .	9
3.1.2. Ejemplo 2 . . . . .	10
3.1.3. Ejemplo 3 . . . . .	10
3.2. Margen de Fase y Margen de Ganancia . . . . .	10
3.3. Ancho de Banda . . . . .	13
3.4. Resonancia . . . . .	13
3.5. Relaciones entre el Dominio del Tiempo y el Dominio de la Frecuencia . . . . .	13
<b>4. Sintonización de PIDs</b>	<b>14</b>
4.1. Interpretación de un PID en el Dominio de la Frecuencia . . . . .	14
4.2. Interpretación del Segundo Método de Ziegler-Nichols en el Dominio de la Frecuencia	17
4.2.1. Ejemplo . . . . .	17
4.3. Método de Ziegler-Nichols Modificado . . . . .	18
4.3.1. Ejemplo . . . . .	19
<b>A. Demostración de la representación frecuencial de sistemas lineales e invariantes en el tiempo</b>	<b>23</b>

## Índice de Figuras

2.1. Diagramas de Bode de: (a) $G(j\omega) = 6$ , (b) $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ , (c) $G(j\omega) = j\omega$ y d) $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ . . . . .	4
2.2. Diagrama de Bode de $\mathbf{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$ , con $\omega = \omega_n$ y distintos valores de $\zeta$ . . . . .	5
2.3. Diagramas de Nyquist de: (a) $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ , (b) $G(j\omega) = j\omega$ , (c) $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ y (d) $\mathbf{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$ , con $\omega = \omega_n$ y distintos valores de $\zeta$ . . . . .	7

2.4. (a) Pico de resonancia representado en el diagrama de Nyquist y (b) diagramas de Nyquist en función del tipo del sistema. . . . .	8
2.5. (a) Sistema en lazo cerrado y (b) respuesta en lazo cerrado a partir del diagrama Nyquist en lazo abierto. Imágen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.	8
3.1. Diagramas de Nyquist para la función de transferencia $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$ con (a) $K = 1$ y (b) $K = 10$ . Imágenes de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.	10
3.2. Diagrama de Nyquist para la función de transferencia $G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$ . Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata. . . . .	11
3.3. Diagrama de Nyquist para la función de transferencia $G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$ . Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata. . . . .	11
3.4. Márgenes de Ganancia y de Fase de unas funciones de transferencia genéricas. Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata. . . . .	12
3.5. Frecuencia de corte $\omega_b$ y ancho de banda. Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata. . . . .	13
4.1. Representación del desplazamiento de un punto $A$ en el diagrama de Nyquist por la acción de (a) un controlador proporcional, (b) un controlador derivativo, (c) un controlador integral y d) un PID. . . . .	15
4.2. Posibles soluciones del desplazamiento de un punto $A$ en el diagrama de Nyquist por la acción de (a) un controlador P, (b) un controlador PD, (c) un controlador PI y d) un PID. . . . .	16
4.3. Diagrama de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$ , con $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ y $G_c(s)$ distintos controladores. . . . .	17
4.4. Respuesta en el tiempo a una entrada escalón de la función de transferencia en lazo cerrado y diagrama de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto para distinto valores de $K$ del controlador proporcional. . . . .	18
4.5. (a) Diagrama de Nyquist de la función de transferencia $G(s)$ y (b) repuesta en lazo cerrado a una entrada escalón unitario. . . . .	20
4.6. (a) Diagrama de Nyquist de la función de transferencia $G_c(s)G(s)$ y (b) repuesta en lazo cerrado a una entrada escalón unitario. . . . .	21

# 1. Introducción

La respuesta de un sistema en el dominio de la frecuencia hace referencia a la respuesta de un sistema en régimen permanente frente a una entrada sinusoidal. Téngase en cuenta que si la entrada ( $x(t)$ ) de un sistema lineal e invariante en el tiempo (representado por su función de transferencia  $G(s)$ ) es sinusoidal, su salida ( $y(t)$ ) en régimen permanente también será sinusoidal. Dicha salida tendrá la misma frecuencia ( $\omega$ ) pero distinta amplitud y fase. En el Apéndice A se demuestra dicha afirmación.

## 2. Representaciones Gráficas

### 2.1. Diagrama de Bode

El diagrama de Bode se representa mediante dos gráficas:

- **Magnitud:** Es la gráfica del logaritmo de la magnitud de la función de transferencia con respecto a la frecuencia:  $20 \log(|G(j\omega)|)$ .
- **Fase:** Es la gráfica de la fase de la función de transferencia con respecto a la frecuencia:  $\angle G(j\omega)$ .

En ambas gráficas el eje de la frecuencia se representan en escala logarítmica.

A continuación se exponen una serie de diagramas de Bode de funciones de transferencias típicas, que permitirán simplificar la representación en problemas complejos.

- $G(j\omega) = K$ .

El diagrama de Bode de  $G(j\omega) = K$  se muestra en la Figura 2.1a para el caso particular de  $K = 6$ . La curva de magnitud es una constante de valor  $20 \log(K)$ , que será positiva si  $K > 1$ , negativa si  $K < 1$  y cero si  $K = 1$ . La curva de fase es cero para cualquier valor de  $K$ . Por lo que variar la ganancia  $K$  de la función de transferencia modifica la curva de magnitud pero no de fase.

- $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

El diagrama de Bode de  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$  se muestra en la Figura 2.1b. La curva de magnitud es una recta de pendiente  $-20 \text{ dB/dec}$ , con valor  $0 \text{ dB}$  para  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ . La curva de fase es una recta de valor  $-90^\circ$  correspondiendo a  $\angle G(j\omega) = \arctan\left[\frac{-1/\omega}{0}\right] = -90^\circ$ .

- $G(j\omega) = j\omega$

El diagrama de Bode de  $G(j\omega) = j\omega$  se muestra en la Figura 2.1c. La curva de magnitud es una recta de pendiente  $20 \text{ dB/dec}$ , con valor  $0 \text{ dB}$  para  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ . La curva de fase es una recta de valor  $90^\circ$  correspondiendo a  $\angle G(j\omega) = \arctan\left[\frac{\omega}{0}\right] = 90^\circ$ .

- $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$

El diagrama de Bode de  $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$  se muestra en la Figura 2.1d. Si se analiza la función de transferencia para valores de  $\omega T \ll 1$ , se obtiene que  $G(j\omega) \approx 1$ . Bajo este supuesto, la magnitud y fase son 0.

Si se analiza la función de transferencia para valores de  $\omega T \gg 1$ , se observa que  $G(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega T}$ . Por lo tanto, la magnitud será una curva de pendiente  $-20 \text{ dB/dec}$  y fase  $-90^\circ$  para  $\omega \rightarrow \infty$ .

En la frecuencia esquina ( $\omega = \frac{1}{T} \text{ rad/s}$ ) se puede aproximar la magnitud por  $0 \text{ dB}$  y la fase por  $-45^\circ$ .

- $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$

El diagrama de Bode de  $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$  se muestra en la Figura 2.2 para distintos valores de  $\zeta$ . Si se analiza la función de transferencia para valores de  $\omega \ll \omega_n$ , se obtiene que  $G(j\omega) \approx 1$ . Bajo este supuesto, la magnitud y fase son 0.

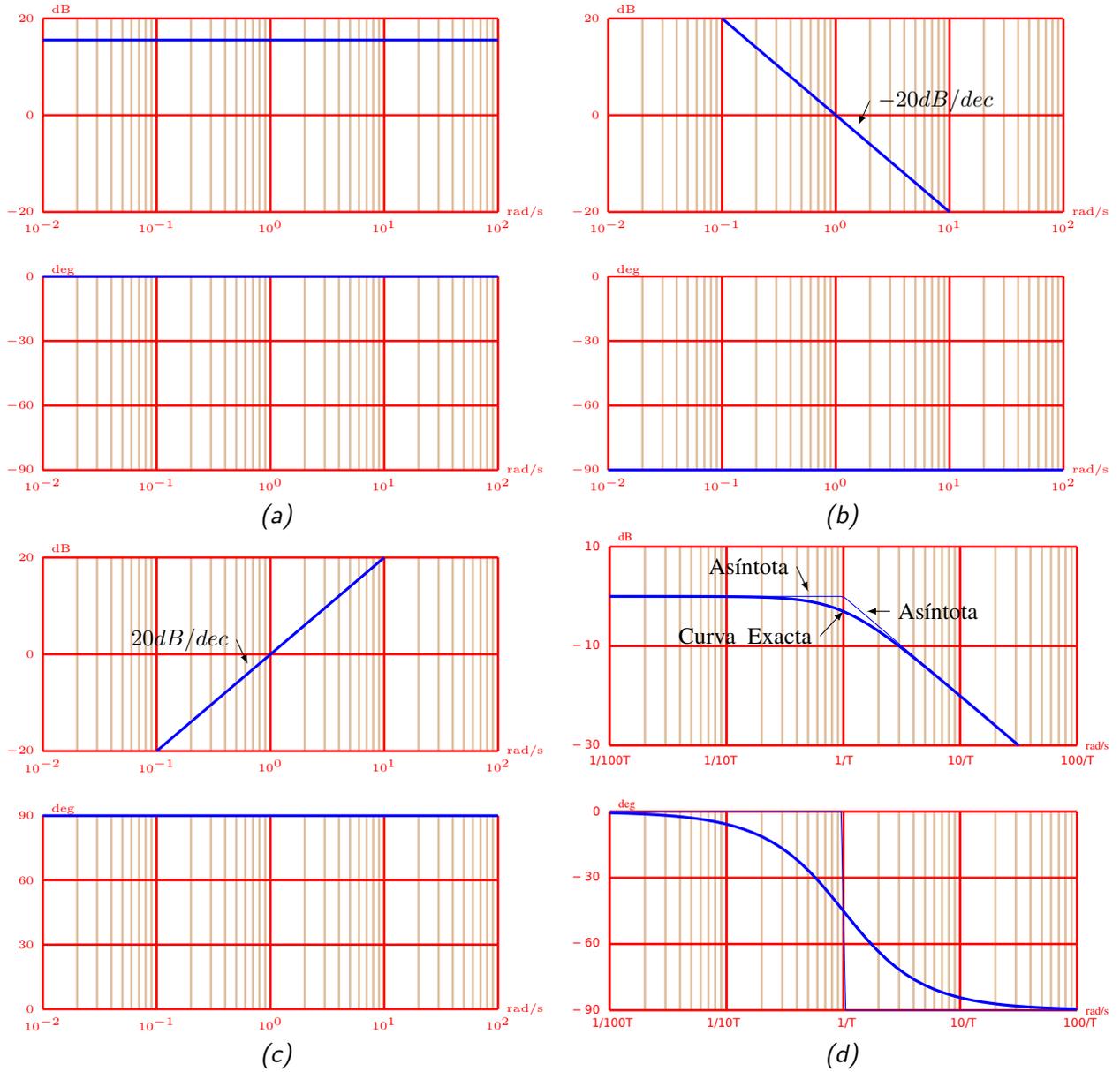


Figura 2.1: Diagramas de Bode de: (a)  $G(j\omega) = 6$ , (b)  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ , (c)  $G(j\omega) = j\omega$  y d)

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

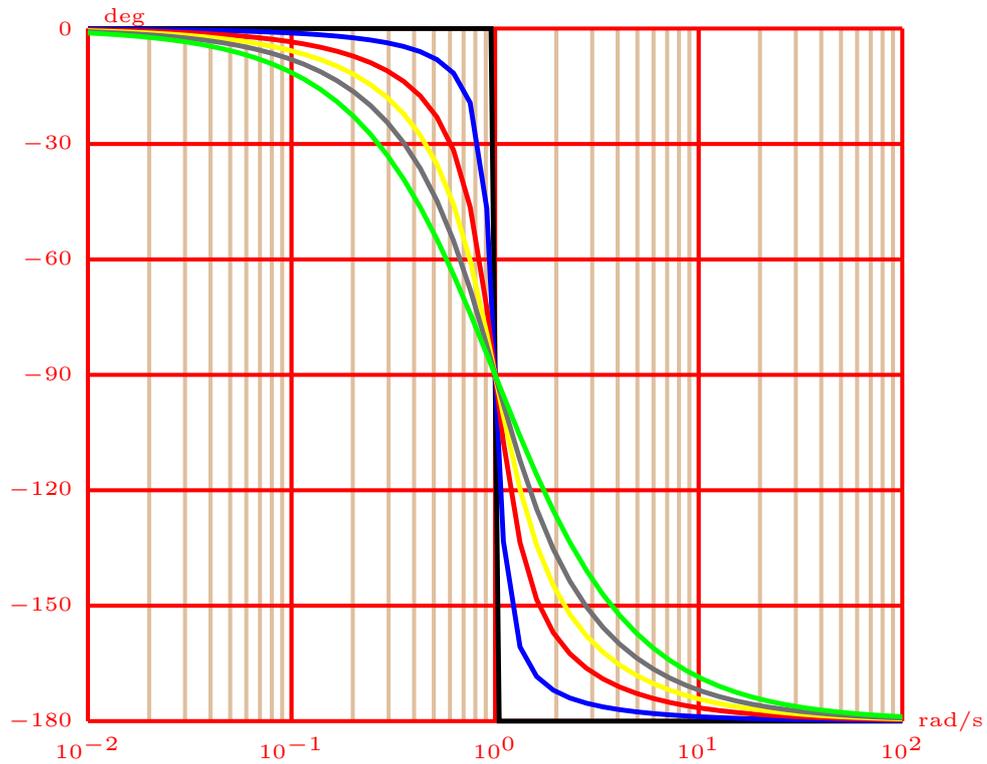
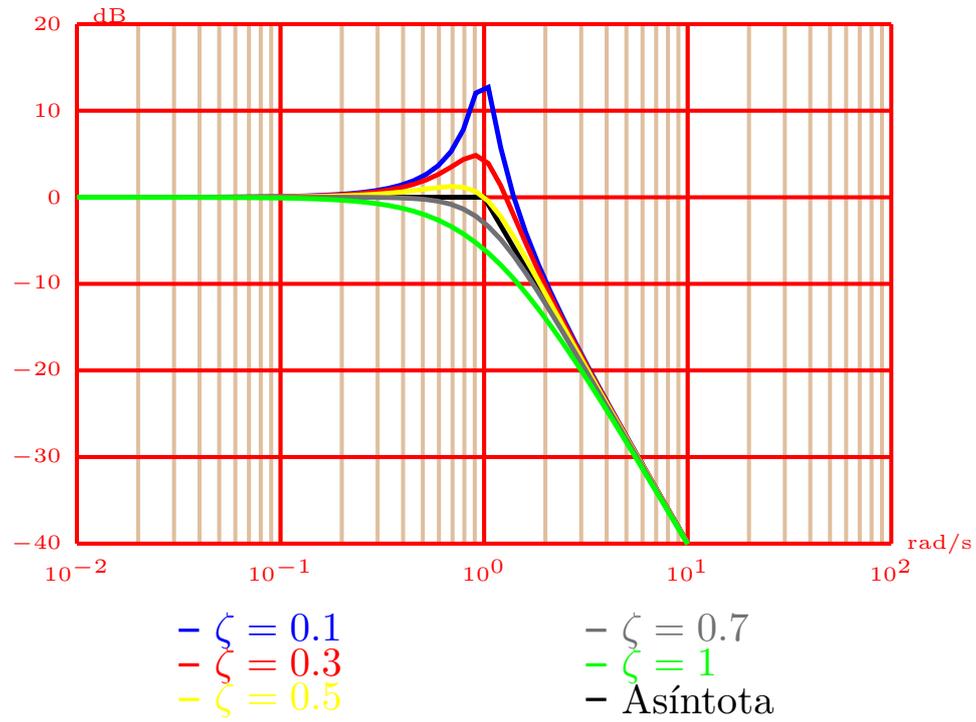


Figura 2.2: Diagrama de Bode de  $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$ , con  $\omega = \omega_n$  y distintos valores de  $\zeta$

Para valores de  $\omega \gg \omega_n$ ,  $G(j\omega) \approx \frac{1}{(j\omega/\omega_n)^2}$ . Por lo tanto, la magnitud será una curva de pendiente  $-40 \text{ dB/dec}$  y fase  $-180^\circ$  para  $\omega \rightarrow \infty$ . En la frecuencia esquina ( $\omega = \omega_n$ ) la magnitud se aproxima por  $0 \text{ dB}$  y la fase por  $-90^\circ$ .

En las inmediaciones del frecuencia esquina ( $\omega = \omega_n$ ) existe un pico de resonancia.

## 2.2. Diagrama de Nyquist

El diagrama de Nyquist es una representación en coordenadas polares de la magnitud de  $G(j\omega)$  ( $|G(j\omega)|$ ) con respecto al ángulo de fase de  $G(j\omega)$  ( $\angle G(j\omega)$ ),  $\forall \omega \in (-\infty, \infty)$ <sup>1</sup>. Por lo tanto, cada punto del diagrama representa un valor de  $G(j\omega)$  para una determinada  $\omega$ . Los ángulos de fase se representan en el sentido contrario a la agujas del reloj si son positivos y en el sentido de las agujas del reloj si son negativos.

La ventaja del diagrama de Nyquist es que permite mostrar las características de la respuesta en frecuencia para todo el rango de  $\omega$  en una única gráfica.

A continuación se exponen una serie de diagramas de Nyquist de funciones de transferencia típicas, que permitirán simplificar el análisis de problemas complejos.

- $G(j\omega) = K$ .

El diagrama de Nyquist de  $G(j\omega) = K$ , es un único punto.

- $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

El diagrama de Nyquist de  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$  es el eje imaginario negativo (ver Figura 2.3a).

- $G(j\omega) = j\omega$

El diagrama de Nyquist de  $G(j\omega) = j\omega = \omega \angle 90^\circ$  es el eje imaginario positivo (ver Figura 2.3b).

- $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$

El diagrama de Nyquist de  $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$  se muestra en la Figura 2.3c. En este caso, se puede reescribir  $G(j\omega)$  como

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\arctan \omega T \quad (2.1)$$

Para  $\omega \rightarrow 0$  se obtiene  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1/0$ , mientras que para  $\omega \rightarrow \infty$  se obtiene  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -90^\circ$ . En la frecuencia esquina  $\omega = \frac{1}{T}$  se obtiene  $G(j\frac{1}{T}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$

- $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2}$

El diagrama de Nyquist de  $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$  se muestra en la Figura 2.3d para distintos valores de  $\zeta$ .

Para  $\omega \rightarrow 0$  se obtiene  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1/0$ , mientras que para  $\omega \rightarrow \infty$  se obtiene  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$ . En la frecuencia esquina ( $\omega = \omega_n$ ),  $G(j\omega_n) = \frac{1}{2\zeta} \angle -90^\circ$

En las inmediaciones del frecuencia esquina ( $\omega = \omega_n$ ) existe un pico de resonancia. Un ejemplo en el diagrama de Nyquist se muestra en la Figura 2.4a.

A modo general se pueden describir formas generales de los diagramas de Nyquist en función del tipo de la función de transferencia. En la Figura 2.4b se muestran los diagramas para los siguientes tipos:

- Tipo 0:

- $G(j0) =$  finito y sobre el eje real positivo. Fase(0) perpendicular al eje real

<sup>1</sup>Por simplicidad y sentido físico se suele representar para  $\omega \in [0, \infty)$

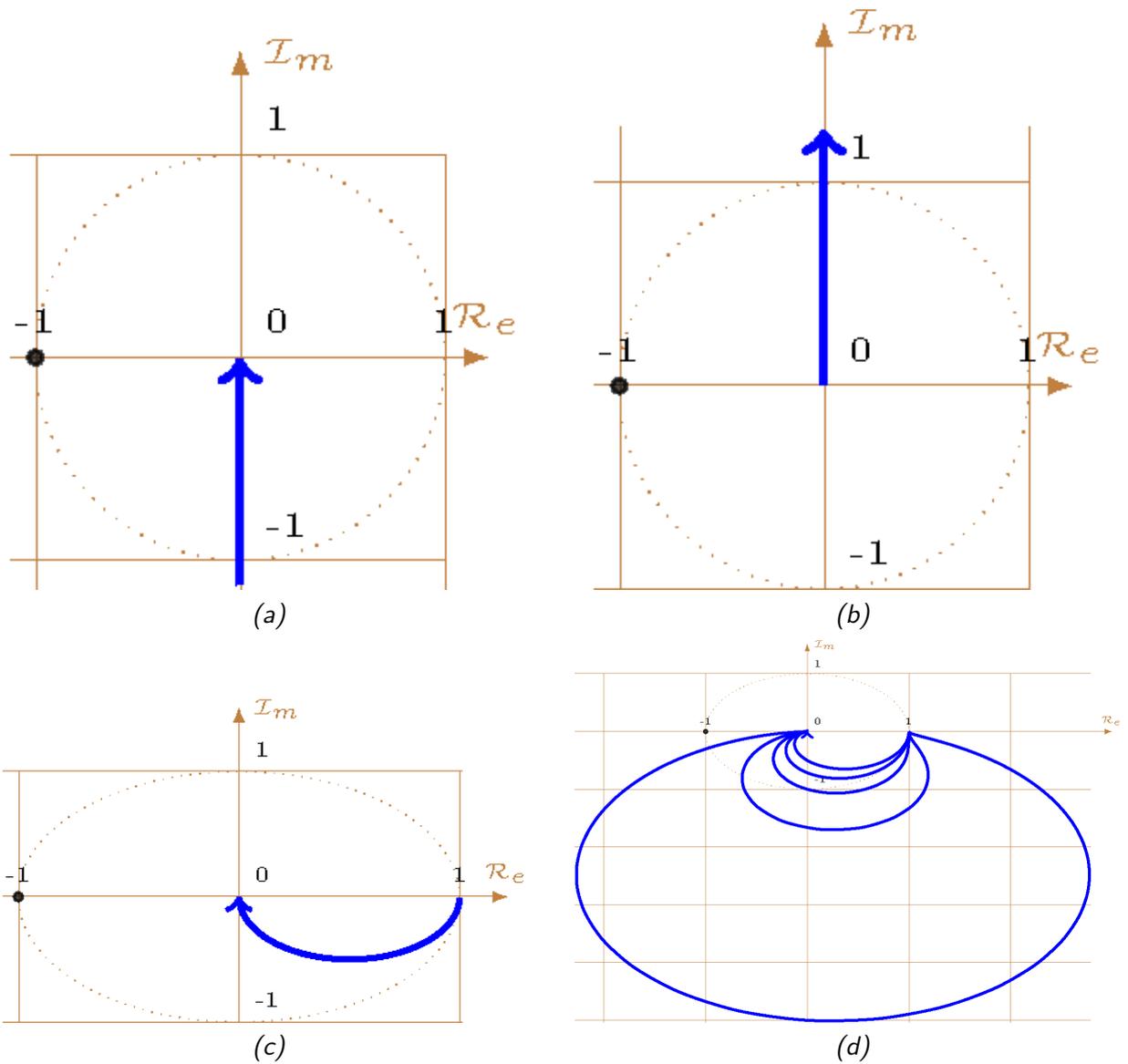


Figura 2.3: Diagramas de Nyquist de: (a)  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ , (b)  $G(j\omega) = j\omega$ , (c)  $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$  y (d)  $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$ , con  $\omega = \omega_n$  y distintos valores de  $\zeta$

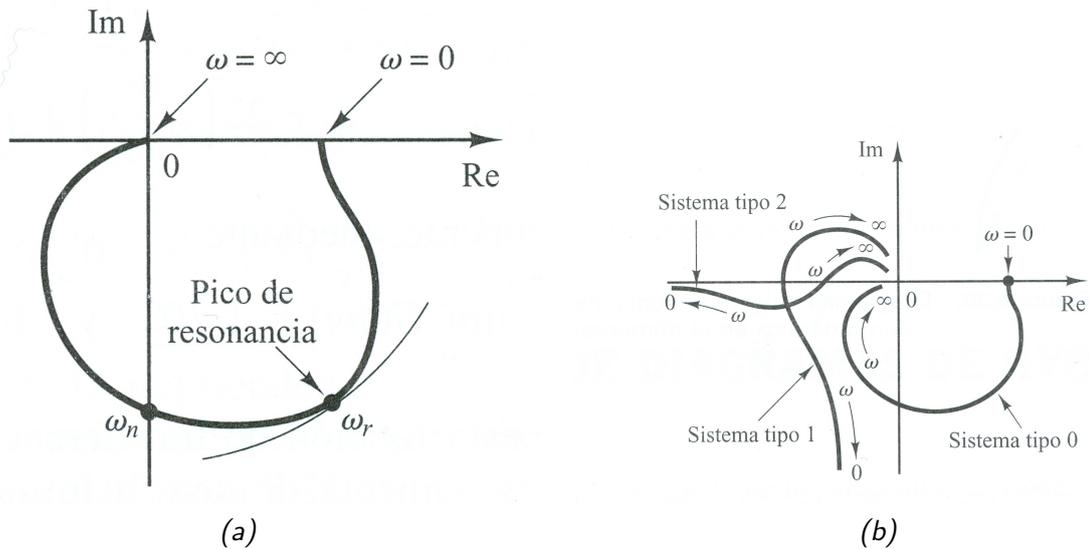


Figura 2.4: (a) Pico de resonancia representado en el diagrama de Nyquist y (b) diagramas de Nyquist en función del tipo del sistema.

- $G(j\infty) = 0$ . Fase ( $\infty$ ) tangente a uno de los ejes
- Tipo 1:
  - $G(j0) = \infty$ . Fase(0) =  $-90^\circ$
  - $G(j\infty) = 0$ . Fase ( $\infty$ ) tangente a uno de los ejes
- Tipo 2:
  - $G(j0) = \infty$ . Fase(0) =  $-180^\circ$
  - $G(j\infty) = 0$ . Fase ( $\infty$ ) tangente a uno de los ejes

### 2.2.1. Conclusiones en lazo cerrado

Es importante recordar que en las técnicas gráficas se presenta la función de transferencia en lazo abierto para obtener conclusiones de la función de transferencia en lazo cerrado.

En la Figura 2.5a se muestra un sistema en lazo cerrado de la Función de Transferencia  $G(s)$ . La Función de Transferencia en lazo cerrado del sistema es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.2)$$

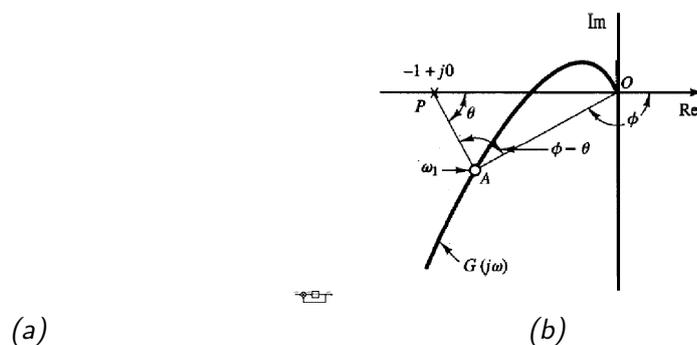


Figura 2.5: (a) Sistema en lazo cerrado y (b) respuesta en lazo cerrado a partir del diagrama Nyquist en lazo abierto. Imágen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

En la Figura 2.5b el punto  $A$  representa una frecuencia cualquiera  $\omega_1$ . El vector  $\overrightarrow{OA}$  representa a  $G(j\omega_1)$ , mientras que su longitud  $\overline{OA}$  su magnitud  $|G(j\omega_1)|$ . Además, el ángulo  $\phi$  entre  $\overrightarrow{OA}$  y el eje real positivo se corresponde con la fase  $\angle G(j\omega_1)$ .

Se puede observar también que el vector  $\overrightarrow{PA}$ , siendo  $P$  el punto  $-1 + j0$ , representa  $1 + G(j\omega_1)$ , y el ángulo  $\theta$  que forma dicho vector con el eje real negativo se corresponde con la fase  $\angle 1 + G(j\omega_1)$ .

En consecuencia:

$$\left| \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} \right| = \frac{\overline{OA}}{\overline{PA}} \quad (2.3)$$

$$\angle G(j\omega_1) - \angle 1 + G(j\omega_1) = \phi - \theta \quad (2.4)$$

y en conclusión:

$$\frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{PA}} \quad (2.5)$$

### 3. Estabilidad

En esta sección nos centramos en el estudio de la estabilidad absoluta y relativa del sistema. La primera hace mención a si el sistema es estable o no, mientras la estabilidad relativa cuantifica el nivel de estabilidad del sistema.

#### 3.1. Criterio de Estabilidad de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist permite determinar la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a partir del diagrama de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto. Se basa en la teoría de variable compleja, mediante una transformación de los contornos en el plano complejo. Dicho análisis no es objeto del presente documento, por lo que se relega su estudio a un futuro curso.

El criterio de estabilidad de Nyquist solo puede aplicarse para sistemas causales. En este caso, si la función de transferencia en lazo abierto  $G(s)$  tiene  $P$  polos en el semiplano derecho del *plano  $s$* , el lugar geométrico de  $G(j\omega)$  para  $\omega \in (-\infty, \infty)$  debe rodear  $P$  veces al punto  $-1 - j0$  en el sentido contrario de las agujas del reloj.

Se puede expresar el criterio de estabilidad de la siguiente manera:

$$Z = N + P \quad (3.1)$$

donde

- $Z$  = número de ceros de  $1 + G(s)$  en el semiplano derecho del *plano  $s$* , es decir, el número de polos inestables de la función de transferencia en lazo cerrado.
- $P$  = número de polos de  $G(s)$  en el semiplano derecho del *plano  $s$* , es decir, el número de polos inestables de la función de transferencia en lazo abierto.
- $N$  = número de rodeos al punto  $-1 + j0$  en el sentido de las agujas del reloj.

A continuación se proponen unos ejemplos extraídos de libro "Ingeniería de Control Moderna" de Katsuhiko Ogata.

##### 3.1.1. Ejemplo 1

Sea

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad (3.2)$$

El número de polos en el semiplano derecho del *plano  $s$*  de la función de transferencia en lazo abierto es  $P = 0$ , siendo un sistema estable en lazo abierto.

En la Figura 3.1a se muestra el diagrama de Nyquist para  $K = 1$ , donde el diagrama de Nyquist no muestra ningún rodeo al punto  $-1 + j0$ , por lo que  $N = 0$ . De esta manera, se obtiene que  $Z = N + P = 0$ , siendo un sistema estable en lazo cerrado.

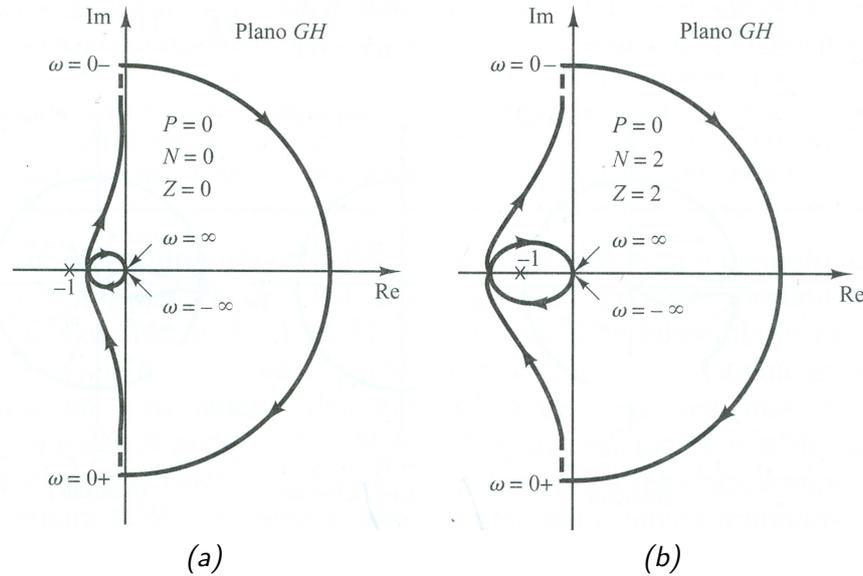


Figura 3.1: Diagramas de Nyquist para la función de transferencia  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$  con (a)  $K = 1$  y (b)  $K = 10$ . Imágenes de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

En la Figura 3.1b se muestra el diagrama de Nyquist para  $K = 10$ , donde el diagrama de Nyquist presenta un rodeo al punto  $-1 + j0$  en el sentido de las agujas del reloj, por lo que  $N = 1$ . De esta manera, se obtiene que  $Z = N + P = 1$ , siendo un sistema inestable en lazo cerrado.

### 3.1.2. Ejemplo 2

Sea

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)} \quad (3.3)$$

El número de polos en el semiplano derecho del plano  $s$  de la función de transferencia en lazo abierto es  $P = 1$ , siendo un sistema inestable en lazo abierto.

En la Figura 3.2 se muestra el diagrama de Nyquist, rodeando al punto  $-1 + j0$  una vez en sentido de las agujas del reloj, por lo que  $N = 1$ . Por lo tanto,  $Z = N + P = 2$  y el sistema tiene dos polos en lazo cerrado en el semiplano derecho, siendo un sistema inestable.

### 3.1.3. Ejemplo 3

Sea

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)} \quad | \quad K > 1 \quad (3.4)$$

El número de polos en el semiplano derecho del plano  $s$  de la función de transferencia en lazo abierto es  $P = 1$ .

En la Figura 3.3 se muestra el diagrama de Nyquist, rodeando al punto  $-1 + j0$  una vez en sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que  $N = -1$ . Por lo tanto  $Z = N + P = 0$ , indicando que no existen polos en el semiplano derecho del plano  $s$  de la función de transferencia en lazo cerrado y que el sistema es estable. Este es un ejemplo de sistema inestable en lazo abierto y estable en lazo cerrado.

## 3.2. Margen de Fase y Margen de Ganancia

El Margen de Fase y Margen de Ganancia son dos parámetros que se utilizan para medir la estabilidad relativa de un sistema.

- **Margen de Fase:** Variación relativa de la fase del sistema en lazo abierto necesaria para llevar el sistema en lazo cerrado al límite de la estabilidad. Si definimos  $\omega_1$  como la frecuencia a la

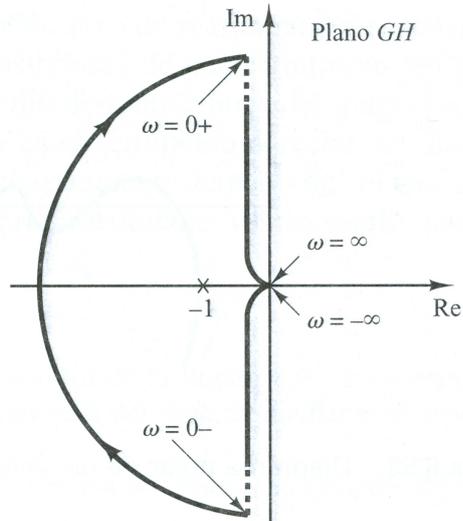


Figura 3.2: Diagrama de Nyquist para la función de transferencia  $G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$ . Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

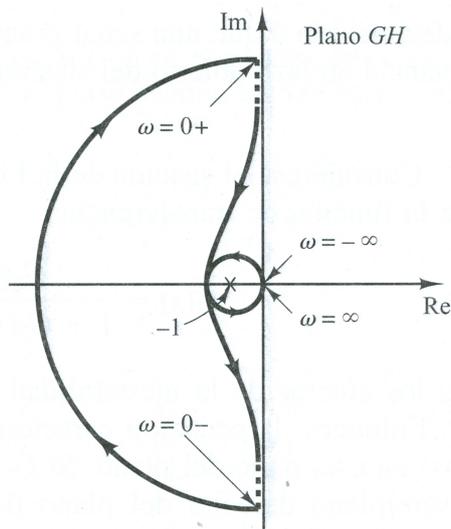


Figura 3.3: Diagrama de Nyquist para la función de transferencia  $G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$ . Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

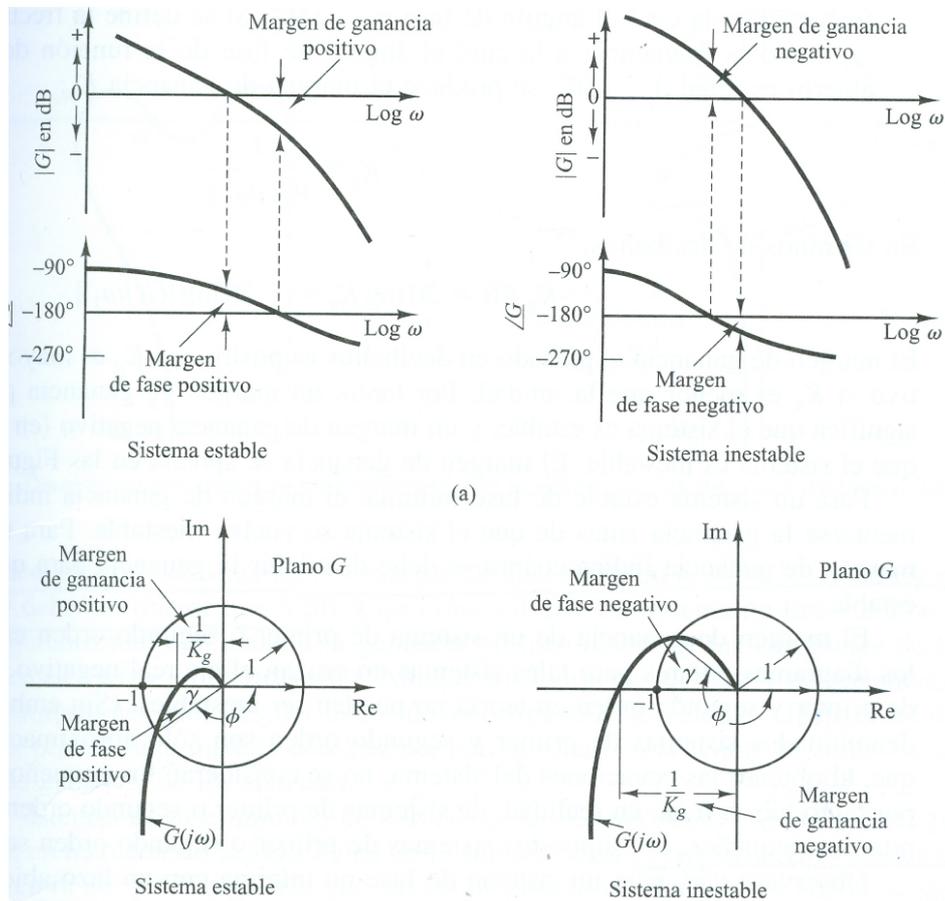


Figura 3.4: Márgenes de Ganancia y de Fase de unas funciones de transferencia genéricas. Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

cual  $G(j\omega_1) = 1$  ( $0 \text{ dB}$ ) y  $\phi = \angle G(j\omega_1)$ , el valor del Margen de Fase es:

$$MF = 180 + \phi \quad (3.5)$$

- Margen de Ganancia:** Variación relativa de ganancia del sistema en lazo abierto necesaria para llevar al sistema en lazo cerrado al límite de la estabilidad. Si definimos  $\omega_2$  como la frecuencia a la cual  $\angle G(j\omega_2) = -180^\circ$ , el Margen de Ganancia es:

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_2)|} \quad (3.6)$$

En la Figura 3.4 se muestran los Márgenes de Ganancia y de Fase de un sistema estable y otro inestable representados en los diagramas de Bode y Nyquist.

En el Diagrama de Bode, se puede calcular el cruce del diagrama de magnitud por  $0 \text{ dB}$  y proyectar dicha frecuencia sobre el diagrama de fase. Si el punto del diagrama de fase está por encima de  $-180^\circ$  el sistema tendrá un Margen de Fase positivo. En el Diagrama de Nyquist, el ángulo que forma el vector que une el origen con el corte del diagrama con la circunferencia unidad con el eje real negativo es el Margen de Fase.

En el Diagrama de Bode, se puede calcular el cruce del diagrama de fase por  $-180^\circ$  y proyectar dicha frecuencia sobre el diagrama de magnitud. Si el punto del diagrama de magnitud está por debajo de  $0 \text{ dB}$  el sistema tendrá un Margen de Ganancia positivo. En el Diagrama de Nyquist, se observa el corte del diagrama con el eje real negativo, siendo la distancia de ese punto con el origen el inverso del Margen de Ganancia.

Como se puede observar, el Margen de Ganancia y el de Fase nos permiten cuantificar la estabilidad de nuestro sistema. El sistema será estable si ambos márgenes son positivos, e inestable si alguno de ellos es negativo. Cuanto más positivos sean más estable será el sistema y viceversa. Sin

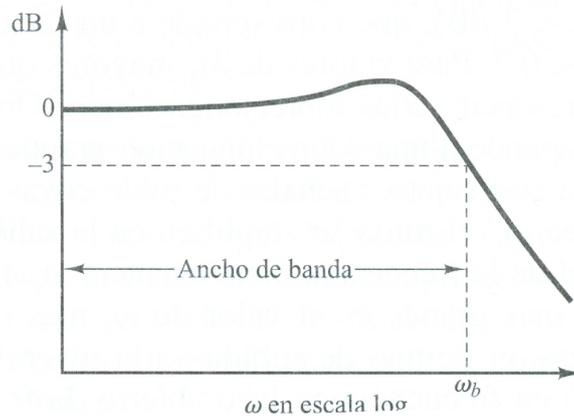


Figura 3.5: Frecuencia de corte  $\omega_b$  y ancho de banda. Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

embargo, hay que tener en cuenta que al ser valores relativos su valores óptimos dependerán del sistema y la aplicación. Como nota general, se consideran valores adecuados que el  $MF > 30^\circ$  y el  $MG > 2$ , aunque su elección depende del sistema y aplicación.

### 3.3. Ancho de Banda

La frecuencia de corte ( $\omega_b$ ) como la frecuencia en la que la magnitud de respuesta en frecuencia se encuentra  $3\text{ dB}$  por debajo de su valor a  $\omega = 0$ . El rango entre 0 y  $\omega_b$  se denomina Ancho de Banda. La Figura 3.5 muestra la respuesta en lazo de un sistema genérico, representando la frecuencia de corte y el ancho de banda.

### 3.4. Resonancia

La Frecuencia de Resonancia ( $\omega_r$ ) se define como la frecuencia a la que la magnitud de la respuesta en lazo cerrado presenta un máximo. La magnitud de la frecuencia de resonancia es la magnitud a dicha frecuencia.

Para un sistema en lazo abierto de segundo orden, representado por su primera ecuación canónica:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}; \quad 0 \leq \zeta \leq 0.707 \\ M_r &= |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}; \quad 0 \leq \zeta \leq 0.707 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$M_r$  es representativa de la estabilidad relativa del sistema. Una  $M_r$  alta implica la presencia de un par de polos dominantes en lazo cerrado con un coeficiente de amortiguamiento pequeño.

### 3.5. Relaciones entre el Dominio del Tiempo y el Dominio de la Frecuencia

Para sistemas de segundo orden expresados en su primera forma canónica es posible obtener una relación directa entre algunos parámetros del análisis en el Dominio del Tiempo y de la Frecuencia, para su respuesta a una señal de referencia escalón. Sin embargo, para sistemas de orden superior la relación es más compleja, y su respuesta en el Dominio del Tiempo no es sencilla de calcular.

Aún así, existen ciertas relaciones cualitativas a tener en cuenta para poder realizar comparativas entre ambos dominios.

- Resonancia:** Para un sistema de orden superior a 2, con un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado, se obtiene un comportamiento transitorio adecuado para valores de  $M_r \in [1.0, 1.4]$ , correspondiendo con un coeficiente de amortiguamiento  $\zeta \in [0.4, 0.7]$ . Valores superiores a  $M_r > 1.5$ , corresponden a un coeficiente de amortiguamiento pequeño, presentando la respuesta al escalón demasiadas oscilaciones en el dominio del tiempo.

Por otro lado, es conocido que el tiempo de subida,  $t_r \propto \frac{1}{\omega_d}$  ya que, para un sistema de segundo orden,  $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$ , siendo  $\beta$  el ángulo que forma  $G(j\omega_n)$  con el eje real negativo en el *plano s*. En un sistema con un coeficiente de amortiguamiento pequeño,  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \approx \omega_n$ , por lo que el tiempo de subida es inversamente proporcional a la frecuencia de resonancia ( $t_r \propto \frac{1}{\omega_r}$ ). Por último, la sobreelongación máxima y la magnitud de resonancia están ambas inversamente relacionadas con el coeficiente de amortiguamiento, por lo que  $M_r \propto M_p$ , para el rango de  $0 \leq \zeta \leq 0.707$  donde  $M_r$  está definida.

- **Ancho de Banda:** El ancho de banda expresa la capacidad de reproducir la señal de entrada. Para un ancho de banda grande, la respuesta será rápida ( $BW \propto \frac{1}{t_r}$ ). Sin embargo, es importante resaltar que un ancho de banda demasiado grande permitirá el paso de frecuencias de muy alta frecuencia, siendo un problema desde el punto de vista del ruido de la señal. Es por lo tanto importante mantener un compromiso entre el tiempo de subida y el ruido del sistema.
- **Margen de Fase:** A mayor coeficiente de amortiguamiento mayor margen de fase ( $MF \propto \zeta$ ). Por otro lado, la sobreelongación máxima está inversamente relacionada con el coeficiente de amortiguamiento, por lo que  $MF \propto \frac{1}{M_p}$ .
- **Margen de Ganancia:** Si se incrementa el Margen de Ganancia, el sistema será más lento, ya que se está reduciendo la ganancia del sistema en lazo cerrado. Por lo tanto el tiempo de subida es directamente proporcional al Margen de Ganancia ( $MG \propto t_r$ ).

## 4. Sintonización de PID's

### 4.1. Interpretación de un PID en el Dominio de la Frecuencia

Definamos la función de transferencia ( $G(s)$ ) de un sistema genérico en el dominio de la frecuencia como:

$$G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) \quad (4.1)$$

donde  $X(\omega)$  e  $Y(\omega)$  son la parte real e imaginaria representadas en el *plano s* para una frecuencia  $\omega$ .

Si se selecciona un punto  $A$  cualquiera para una frecuencia  $\omega_0$ , se obtiene que:

$$A \equiv G(j\omega_0) = X(\omega_0) + jY(\omega_0) \quad (4.2)$$

Si añadimos al sistema un controlador proporcional, tal que ( $G_p(s) = K_p$ ), la respuesta en frecuencia del nuevo sistema en lazo abierto para la frecuencia  $\omega_0$  es:

$$A_p \equiv G_p(j\omega_0)G(j\omega_0) = K_p X(\omega_0) + K_p Y(\omega_0) \quad (4.3)$$

Dicha transformación provoca un desplazamiento radial del punto  $A$  con respecto del origen tal y como se observa en la Figura 4.1a.

Si por el contrario añadimos al sistema un controlador derivativo, tal que  $G_d(s) = \tau_d s$ , la respuesta en frecuencia del nuevo sistema en lazo abierto para la frecuencia  $\omega_0$  es:

$$\begin{aligned} A_d \equiv G_d(j\omega_0)G(j\omega_0) &= j\tau_d \omega_0 (X(\omega_0) + jY(\omega_0)) \\ &= -\tau_d \omega_0 Y(\omega_0) + j\tau_d \omega_0 X(\omega_0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dicha transformación provoca un movimiento ortogonal, en el sentido contrario a las agujas del reloj, y un movimiento radial con respecto a ese nuevo eje, tal y como se muestra en la Figura 4.1a.

Igualmente, si se define un controlador integral, tal que  $G_i(s) = \frac{1}{\tau_i s}$ , la respuesta en frecuencia del nuevo sistema en lazo abierto para la frecuencia  $\omega_0$  es:

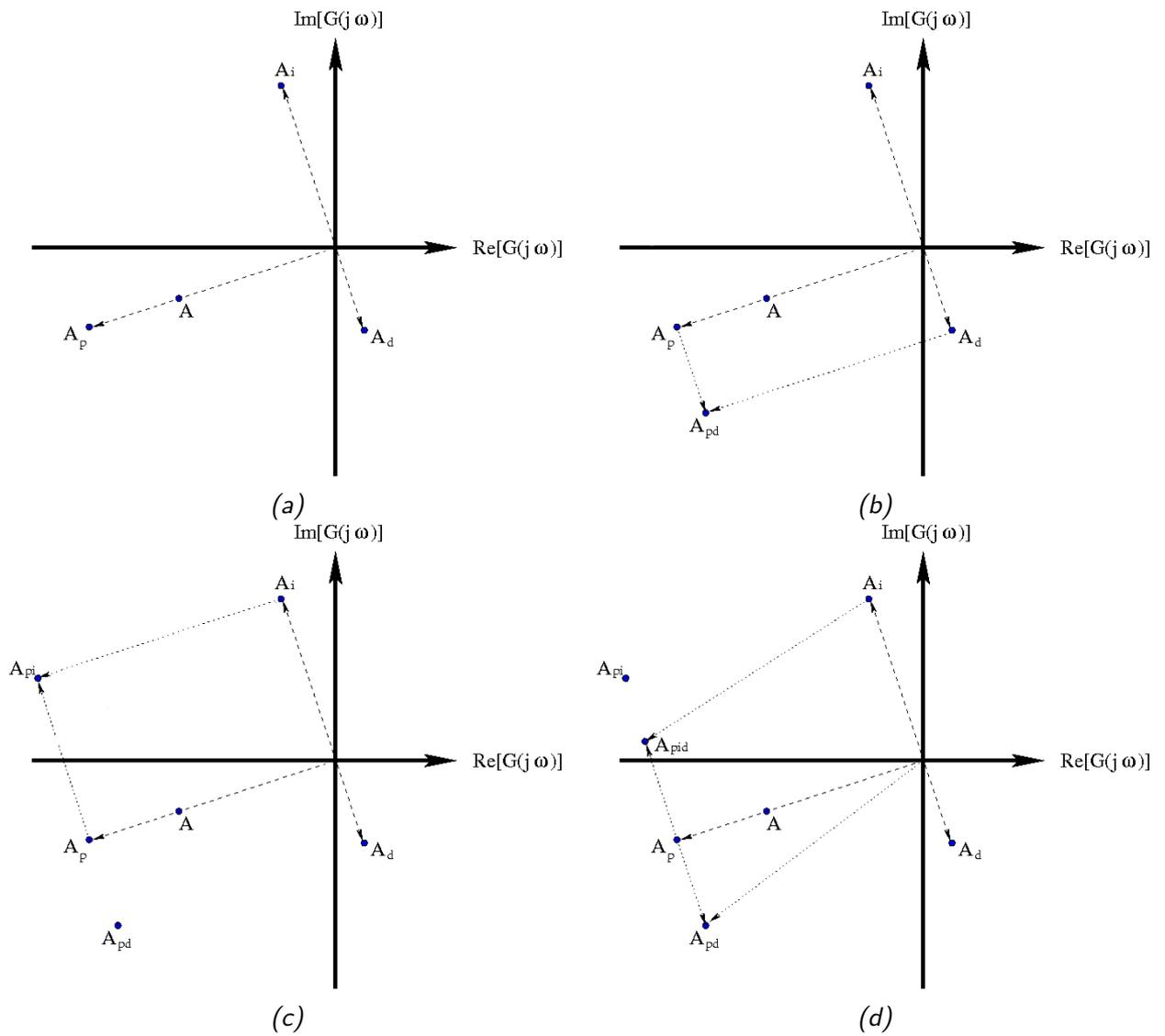


Figura 4.1: Representación del desplazamiento de un punto  $A$  en el diagrama de Nyquist por la acción de (a) un controlador proporcional, (b) un controlador derivativo, (c) un controlador integral y d) un PID.

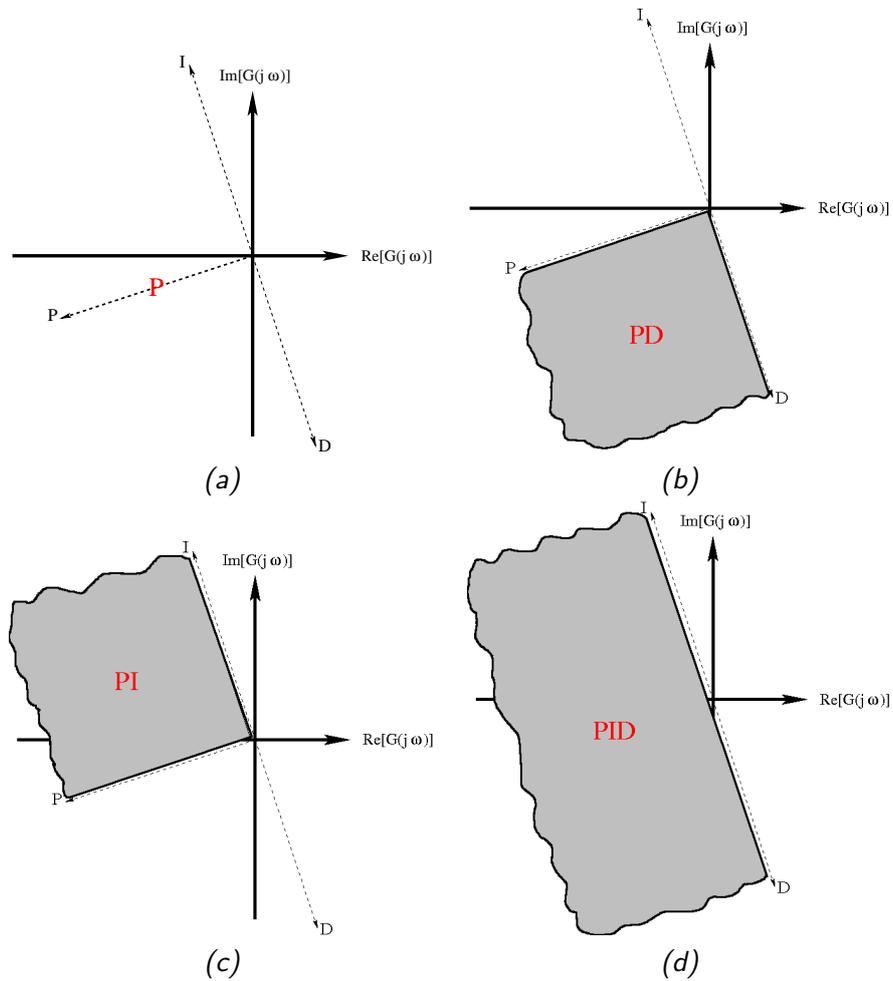


Figura 4.2: Posibles soluciones del desplazamiento de un punto  $A$  en el diagrama de Nyquist por la acción de (a) un controlador P, (b) un controlador PD, (c) un controlador PI y d) un PID.

$$\begin{aligned}
 A_i \equiv G_i(j\omega_0)G(j\omega_0) &= \frac{1}{j\tau_i\omega_0} (X(\omega_0) + jY(\omega_0)) \\
 &= -j \frac{1}{\tau_i\omega_0} (X(\omega_0) + jY(\omega_0)) \\
 &= \frac{Y(\omega_0)}{\tau_i\omega_0} - j \frac{X(\omega_0)}{\tau_i\omega_0}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dicha transformación provoca un movimiento ortogonal, en el sentido de las agujas del reloj, y un movimiento radial con respecto a ese nuevo eje, tal y como se muestra en la Figura 4.1a.

Combinaciones de estos controladores producen desplazamientos del punto  $A$  que pueden ser obtenidas como sumas vectoriales, tal y como se observa en la Figura 4.1b para un PD, en la Figura 4.1c para un PI y en la Figura 4.1d para un PID. Por lo tanto, combinaciones de estos tres controladores permiten el desplazamiento de cualquier punto del diagrama de Nyquist en una recta, para el caso de un controlador proporcional, un cuadrante en el caso de controladores PI o PD, y a un semiplano en el caso de un controlador PID, tal y como se muestra en la Figura 4.2.

Sin embargo, es importante resaltar que dicha transformación modifica substancialmente la forma del diagrama de Nyquist completo, tal y como se puede observar en la Figura 4.3. Dicha figura muestra los diferentes diagramas de Nyquist para la función de transferencia en lazo abierto  $G_c(s)G(s)$ , donde  $G_c(s)$  representa distintos controladores y

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{4.6}$$

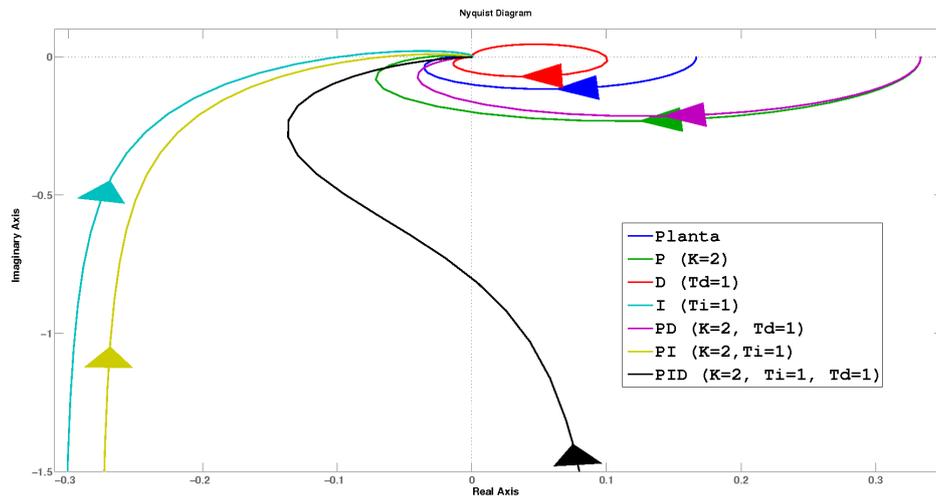


Figura 4.3: Diagrama de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto  $G_c(s)G(s)$ , con  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$  y  $G_c(s)$  distintos controladores.

## 4.2. Interpretación del Segundo Método de Ziegler-Nichols en el Dominio de la Frecuencia

El segundo método de Ziegler-Nichols está basado en la respuesta en frecuencia de un sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional, que presente oscilaciones permanentes para un valor de  $K = K_{cr}$  frente a una entrada escalón.

Teniendo en cuenta ese valor de  $K_{cr}$  y el periodo de oscilación  $P_{cr}$ , Ziegler-Nichols desarrollaron la Tabla 4.1 para el cálculo de los valores de un P, PI o PID.

	$K_P$	$\tau_I$	$\tau_D$
P	$0.5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Tabla 4.1: Valores proporcionados por el segundo método de Ziegler-Nichols.

Se puede interpretar el segundo método de Ziegler-Nichols, como el desplazamiento del punto de corte con el eje real negativo  $A \equiv -\frac{1}{K_{cr}} + j0$  radialmente con respecto al origen, hasta que se sitúa sobre el punto  $-1 + j0$ , siendo  $K_{cr} = \frac{1}{MG}$ . Si se aplica la Tabla 4.1, el punto  $A \equiv (-\frac{1}{K_{cr}} + j0)$  es desplazado a los puntos  $-0.45 + j0.08$  o al punto  $-0.6 - j0.28$  para el caso de un PI o PID respectivamente.

### 4.2.1. Ejemplo

Sea

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (4.7)$$

Si se incorpora un controlador proporcional  $G_c(s) = K \mid K > 0$  con  $K$  variable, y se incrementa  $K$  hasta que  $K = K_{cr} = 60$ , la respuesta a la entrada escalón presenta cada vez más oscilaciones hasta que se proporciona oscilaciones permanentes (ver Figura 4.4). El diagrama de Nyquist refleja un desplazamiento hasta cortar el eje real negativo en  $-1 + j0$  (ver Figura 4.4).

Si se resuelve el desplazamiento del punto  $A \equiv G(j\omega_{cr})$  para el caso de un controlador PI o un PID, en función de los valores de la Tabla 4.1, se obtiene:

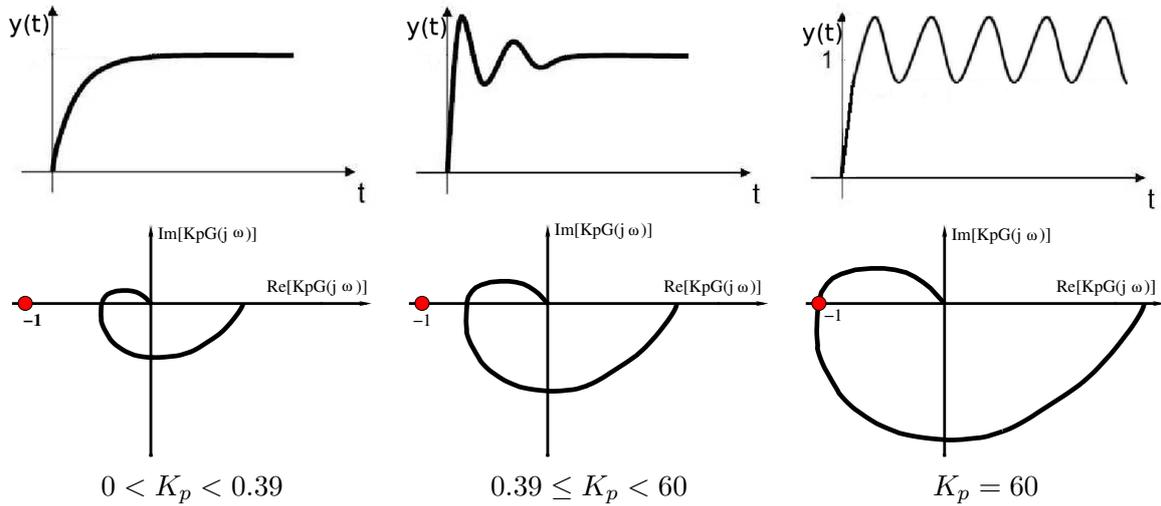


Figura 4.4: Respuesta en el tiempo a una entrada escalón de la función de transferencia en lazo cerrado y diagrama de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto para distintos valores de  $K$  del controlador proporcional.

- PI:  $G(j\omega_{cr}) = -1/K_{cr} \rightarrow G(j\omega_{cr})G_c(j\omega_{cr}) = -0.45 + j0.08$
- PID:  $G(j\omega_{cr}) = -1/K_{cr} \rightarrow G(j\omega_{cr})G_c(j\omega_{cr}) = -0.6 - j0.28$

### 4.3. Método de Ziegler-Nichols Modificado

El método de Ziegler-Nichols modificado es un procedimiento general para la sintonización de los parámetros de PID en base al desplazamiento de un punto cualquiera del diagrama de Nyquist.

Sea  $A \equiv G(j\omega_0) = r_a e^{j(\pi+\phi_a)}$  un punto cualquiera del diagrama de Nyquist de un sistema en lazo abierto en coordenadas polares. Sea  $B \equiv G(j\omega_0)G_c(j\omega_0) = r_b e^{j(\pi+\phi_b)}$  un punto del conjunto controlador + planta del diagrama de Nyquist donde se quiere desplazar el punto  $A$ . Entonces, se define  $G_c(j\omega_0) = r_c e^{j\phi_c}$  como el controlador a aplicar para cumplir dicho desplazamiento <sup>2</sup>

Si se igualan términos entre las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned}
 r_b e^{j(\pi+\phi_b)} &= r_a r_c e^{j(\pi+\phi_a+\phi_c)} \\
 r_c &= \frac{r_b}{r_a} \\
 \phi_c &= \phi_b - \phi_a
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para un controlador PI, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 G_c(j\omega_0) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{j\tau_i \omega_0} \right) \\
 &= K_p \left( 1 - j \frac{1}{\tau_i \omega_0} \right)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por otro lado,

$$G_c(j\omega_0) = r_c e^{j\phi_c} = r_c \cos \phi_c + j r_c \sin \phi_c \tag{4.10}$$

por lo que igualando las Ecuaciones 4.9 y 4.10, se obtiene

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ \frac{K_p}{\tau_i \omega_0} = -r_c \sin \phi_c \end{cases} \tag{4.11}$$

<sup>2</sup>Es imprescindible tener en cuenta las capacidades de desplazamiento de los controladores a aplicar.

Desarrollando la Ecuación 4.11,

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ \tau_i = -\frac{1}{\omega_0 \operatorname{tg} \phi_c} \end{cases} \quad (4.12)$$

De manera análoga, para un controlador PD se obtiene los valores que se muestran en la Ecuación 4.13

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ \tau_d = \frac{\operatorname{tg} \phi_c}{\omega_0} \end{cases} \quad (4.13)$$

Para realizar el mismo desarrollo con un controlador PID se dispone de un grado de libertad. Si se define  $\tau_d = \alpha \tau_i$ ,

$$K_p \left(1 + j\omega_0 \tau_d - j \frac{1}{\tau_i \omega_0}\right) = r_c \cos \phi_c + j r_c \operatorname{sen} \phi_c \quad (4.14)$$

Igualando términos,

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ K_p \left(\omega_0 \tau_d - \frac{1}{\tau_i \omega_0}\right) = r_c \operatorname{sen} \phi_c \end{cases} \quad (4.15)$$

Despejando  $K_p$ ,

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ \omega_0 \tau_d - \frac{1}{\tau_i \omega_0} = \operatorname{tg} \phi_c \end{cases} \quad (4.16)$$

Finalmente, desarrollando para  $\tau_d = \alpha \tau_i$ ,

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ \tau_d = \alpha \tau_i \\ \tau_I = \frac{1}{2\omega_0 \alpha} (\operatorname{tg} \phi_c + \sqrt{4\alpha + \operatorname{tg}^2 \phi_c}) \end{cases} \quad (4.17)$$

### 4.3.1. Ejemplo

Sea

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{2})(s+\frac{1}{4})} \quad (4.18)$$

diseñar un controlador mediante el método de Ziegler-Nichols Modificado, tal que el Margen de Fase sea  $MF = 50^\circ$  y el error en régimen permanente en lazo cerrado a una entrada escalón sea nulo.

El diagrama de Nyquist de la función de transferencia  $G(s)$  en lazo abierto se muestra en la Figura 4.5a. La respuesta a la señal de referencia escalón de la función de transferencia en lazo cerrado se muestra en la Figura 4.5b. La respuesta al escalón presenta una sobreelongación máxima de  $M_p = 1.52$  y un tiempo de establecimiento  $t_s = 62$  segundos, con un error en régimen permanente. Además, el Margen de Ganancia es  $MG = 1.4$  y el Margen de Fase  $MF = 11^\circ$ .

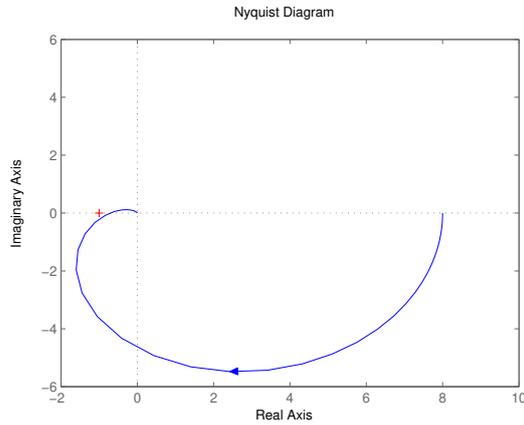
El Margen de Fase se obtiene gráficamente como el ángulo que forma el vector que une el origen con el punto de corte de la circunferencia unidad con el eje real negativo. Se define ese punto como el punto  $A \equiv G(j\omega_0)$ , donde  $\omega_0 = 0.795 \text{ rad/s}$ . El objetivo es desplazar dicho punto a la posición  $B \equiv G_c(j\omega_0)G(j\omega_0)$ , tal que  $MF = 50^\circ$ .

Según vimos previamente, dicho punto  $B$  se encuentra en el cuadrante al cual se puede desplazar un punto gracias a un controlador PD. Sin embargo, puesto que las especificaciones requieren que  $e_0 = 0$ , es imprescindible incorporar un polo en el origen para satisfacer dicha condición. Por lo que, es necesario un controlador PID para satisfacer ambas especificaciones.

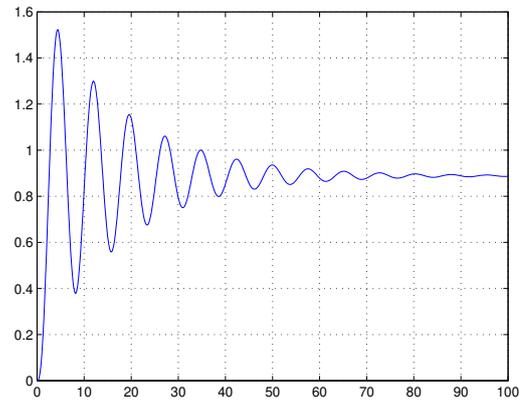
Por lo tanto, sea

$$A \equiv G(j\omega_0) = r_a e^{j(\pi + \phi_a)} \quad (4.19)$$

tal que  $r_a = 1$  y  $\phi_a = MF = 11^\circ$



(a)



(b)

Figura 4.5: (a) Diagrama de Nyquist de la función de transferencia  $G(s)$  y (b) respuesta en lazo cerrado a una entrada escalón unitario.

Sea

$$B \equiv G(j\omega_0)G_c(j\omega_0) = r_b e^{j(\pi + \phi_b)} \quad (4.20)$$

tal que  $r_b = 1$  y  $\phi_b = MF' = 50^\circ$

Definimos un controlador PID, tal que

$$K_p \left(1 + j\omega_0 \tau_d - j \frac{1}{\tau_i \omega_0}\right) = r_c \cos \phi_c + j r_c \sin \phi_c \quad (4.21)$$

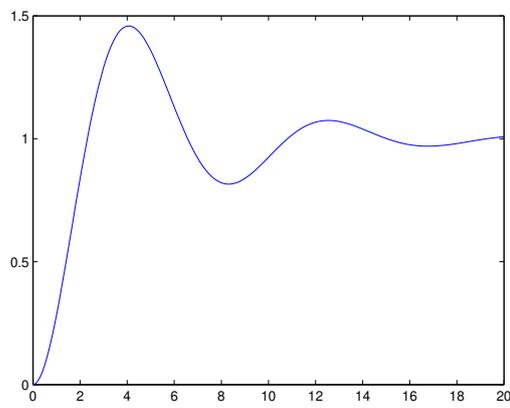
$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ \tau_d = \alpha \tau_i \\ \tau_i = \frac{1}{2\omega_0 \alpha} (tg \phi_c + \sqrt{4\alpha + tg^2 \phi_c}) \end{cases} \quad (4.22)$$

Si se define arbitrariamente  $\alpha = 0.25$ <sup>3</sup>, entonces  $r_c = r_b/r_a = 1$  y que  $\phi_c = \phi_b - \phi_a = 50^\circ - 11^\circ = 39^\circ$ . Por lo tanto, a través de la Ecuación 4.13 se pueden calcular los parámetros del controlador, de tal manera que:

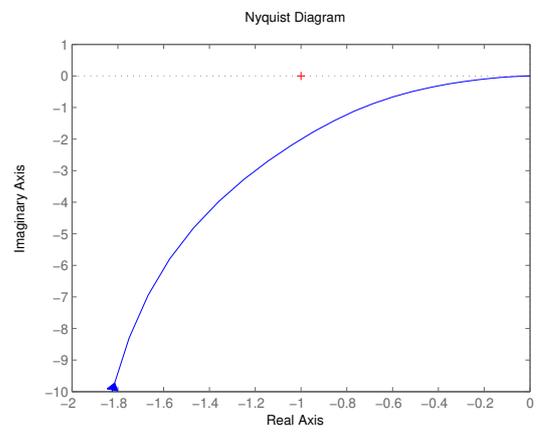
$$\begin{cases} K_p = 0.78 \\ \tau_i = 5.26 \\ \tau_d = 1.31 \end{cases} \quad (4.23)$$

La respuesta al escalón al conjunto de planta más controlador presenta una sobreelongación máxima de  $M_p = 1.19$ , un tiempo de establecimiento  $t_s = 5.9s$ . y error en régimen permanente nulo (ver Figura 4.6). Además, el Margen de Ganancia es  $MG = \infty$  y el Margen de Fase  $MF = 50^\circ$ .

<sup>3</sup>Al igual que el segundo método de Ziegler-Nichols.



(a)



(b)

Figura 4.6: (a) Diagrama de Nyquist de la función de transferencia  $G_c(s)G(s)$  y (b) repuesta en lazo cerrado a una entrada escalón unitario.

# Apéndices

## A. Demostración de la representación frecuencial de sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Sea

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (\text{A.1})$$

la entrada de un sistema estable, lineal e invariante en el tiempo representado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (\text{A.2})$$

donde  $X(s)$  es la función de transferencia de la entrada  $x(t)$  e  $Y(s)$  la función de transferencia de la salida  $y(t)$ .

La transformada de Laplace de la entrada  $x(t)$  es:

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{A.3})$$

por lo que<sup>4</sup>

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} G(s) = \left[ \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} \right] G(s) \quad (\text{A.4})$$

donde  $a = \frac{1}{2} \frac{A\omega}{s - j\omega}$  y  $\bar{a}$  es el complejo conjugado de  $a$ .

Si se representa  $G(s)$  como un cociente de polinomios

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (\text{A.5})$$

y se supone  $G(s)$  de orden  $n$  con todos sus polos reales y simples, entonces:

$$G(s) = \frac{q(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (\text{A.6})$$

Descomponiendo en fracciones simples, se obtiene:

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + p_1} + \frac{b_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + p_n} \quad (\text{A.7})$$

donde  $b_i \in \mathbb{R} \mid \forall i \in [1, n] \mid n \in \mathbb{N}$ .

Aplicando la transformada inversa de Laplace en la Ecuación A.7, se obtiene:

$$y(t) = a e^{j\omega t} + \bar{a} e^{-j\omega t} + b_1 e^{-p_1 t} + b_2 e^{-p_2 t} + \cdots + b_n e^{-p_n t} \quad (\text{A.8})$$

Al ser un sistema estable,  $\text{Re}\{-p_i\} \leq 0 \mid \forall i \in [1, n]$ , por lo que en régimen permanente,

$$y_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = a e^{j\omega t} + \bar{a} e^{-j\omega t} \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la Ecuación A.4, en régimen permanente podemos reescribir  $a$  y  $\bar{a}$  cómo:

$$\begin{aligned} a &= G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j} \\ \bar{a} &= G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Si se representa  $G(j\omega)$  como una variable compleja:

<sup>4</sup>Téngase en cuenta que la respuesta en régimen permanente de un sistema estable, lineal e invariante en el tiempo a una entrada sinusoidal no depende de las condiciones iniciales, supuestas nulas en el presente desarrollo.

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi} \quad (\text{A.11})$$

donde  $|G(j\omega)|$  es el módulo y  $\phi = \angle G(j\omega)$  su fase, entonces:

$$\begin{aligned} a &= \frac{A|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j} \\ \bar{a} &= \frac{A|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto, se puede reescribir la Ecuación A.9 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= A|G(j\omega)| \frac{e^{j\omega t}e^{j\phi} - e^{-j\omega t}e^{-j\phi}}{2j} = \\ &= A|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} = \\ &= A|G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi) = \\ &= B \text{sen}(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde  $B = A|G(j\omega)|$  representa la amplitud de la salida sinusoidal y  $\phi$  su desfase.

Se puede concluir por lo tanto, que para entradas sinusoidales:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| \\ \angle G(j\omega) &= \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Téngase en cuenta que el mismo razonamiento puede ser aplicado para sistemas estables con polos múltiples o complejos conjugados, quedando como tarea del alumno su demostración.