Irreversibilidade, Desordem e Incerteza: Três Visões da Generalização do Conceito de Entropia

(Irreversibility, disorder and uncertainty: three points of view on the generalization of the concept of entropy)

Ernesto P. Borges*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas,

R. Dr. Xavier Sigaud 150, 22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brazil,

e

Universidade Federal da Bahia,

Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Química,

R. Aristides Novis, 2, 40210-630, Salvador-BA, Brazil

Recebido em 25 de Janeiro, 1999

Apresentamos uma comparação entre a entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon e a entropia de Tsallis dentro dos contextos da termodinâmica, da mecânica estatística e da teoria da informação, enfatizando as propriedades da entropia generalizada que indicam possibilidades dela estar associada a sistemas com interações de longo alcance, memória de longa duração ou espaço de fases com estrutura fractal.

We present a comparison between the Boltzmann-Gibbs-Shannon entropy and the Tsallis entropy within the contexts of thermodynamics, statistical mechanics and information theory. We emphasize on the properties of the generalized entropy that indicate possibilities of associating it with systems presenting long range interactions, long duration memory or phase space with fractal structure.

I Introdução

Podemos considerar a formulação do conceito de entropia (juntamente com a energia) como uma das grandes realizações da ciência. Permitiu formar o corpo teórico da termodinâmica de equilíbrio e de processos irreversíveis, constitui a pedra fundamental da mecânica estatística e também exerce papel central na teoria da informação. Além disso, encontrou terreno fértil em sua interpretação física, permitindo que outras áreas do conhecimento também se beneficiassem, tais como filosofia, economia e computação.

Uma proposta de generalização do conceito de entropia abre terreno para um trabalho gigantesco e muito seria esperado de tal formulação. Será que esta nova entropia serviria de base para a generalização de teorias nas áreas de conhecimento que o conceito usual tem servido? Haveria consistência entre as várias conclusões obtidas em cada uma dessas áreas? Quais os pontos que deveriam receber uma formulação geral e quais aqueles que deveriam permanecer intactos? Uma entropia generalizada manteria as interpretações físicas que são atribuídas à entropia usual? Que fenômenos não conseguem ser bem explicados com o formalismo usual? Seriam eles bem descritos com o formalismo generalizado? Que experimentos poderiam testar a validade da(s) nova(s) teoria(s)? A mecânica estatística generalizada manteria seu caráter preditivo, *i.e.* seria capaz de descrever comportamentos macroscópicos usando *apenas* informações microscópicas? As teorias generalizadas teriam uma estrutura lógica suficientemente simples e seriam esteticamente belas?

São muitas as questões, quase todas ainda abertas; não pretendemos respondê-las. Pretendemos tão somente fazer um paralelo entre o conceito original de entropia e uma versão generalizada, recentemente proposta, sob três pontos de vista: o da termodinâmica, o da mecânica estatística e o da teoria da informação.

Algumas propostas de generalização da entropia foram formuladas dentro do contexto da teoria da informação. Mencionamos a entropia de Rényi [29] em 1960, de Havrda e Charvat [15] em 1967 e a de Daróczy [11] em 1970 (veja a Ref. [35] e outras lá contidas). Mais tarde, em 1988, Constantino Tsallis [36] propôs outra generalização, no contexto da mecânica estatística — é desta formulação que vamos tratar aqui. Seguindo a mesma linha de Tsallis, têm surgido outras propostas [1, 6, 20, 25], relacionadas com grupos

*e-mail: ernesto@cbpf.br

quânticos ou com o q-cálculo de Jackson [18].

A mecânica estatística de Tsallis tem se mostrado uma boa candidata a descrever sistemas que apresentam interações de longo alcance, memória de longa duração ou espaço de fases com estrutura fractal. Neste artigo vamos ilustrar as propriedades da entropia de Tsallis que se relacionam com estas características. Uma revisão das propriedades da entropia usual pode ser encontrada em [4, 23, 45] e da entropia de Tsallis em [10, 35, 36, 37, 38, 39].

II Mecânica e estatística

Vamos iniciar esclarecendo uma questão de terminologia. Na mecânica estatística, *mecânica* é um substantivo, e *estatística* é um adjetivo. A mecânica estatística é essencialmente uma mecânica (que pode ser clássica, quântica ou relativística, as denominaremos genericamente por mecânica) aplicada a sistemas constituídos de um grande número de partículas, a respeito do qual se dispõe de informações incompletas.

A *mecânica* trata de sistemas sob os quais se dispõe de informações completas, sistemas definidos precisamente. Consideremos um sistema mecânico particular caracterizado por sua função Hamiltoniana $\mathcal{H}$. Os níveis de energia acessíveis (no caso quântico) ou a densidade de estados (no caso clássico) são completamente definidos por $\mathcal{H}$, sendo, portanto, propriedades mecânicas do sistema. Mas a mecânica não diz quão povoados estão estes níveis — esta informação vem da mecânica estatística. A mecânica pode ser vista como um caso particular da mecânica estatística de sistemas caracterizados por estados puros (ou, alternativamente, sistemas à temperatura nula).

A *estatística* é um instrumento matemático que utilizamos para minimizar os efeitos de nossa ignorância. Usualmente quanto mais complexos são os sistemas em estudo, maior a nossa ignorância a seu respeito. Estudos biológicos, econômicos ou sociais, p.ex., são freqüentemente acompanhados de uma análise estatística. Muitas vezes não se conhece com precisão quais os efeitos de uma nova droga no organismo humano. Assim, um novo medicamento só é liberado para a população após ter sido administrado a um conjunto controlado de pessoas ou cobaias, e após o tratamento estatístico dos dados ter indicado um resultado positivo, pois os efeitos de uma reação colateral desconhecida podem ser desastrosos.

Podemos levantar duas questões a respeito de nossa ignorância:
1) *É possível* obter todas as informações que estão faltando?
2) *É necessário* obter todas as informações que estão faltando?
Geralmente a resposta para a primeira pergunta é *infelizmente não*, e a resposta para a segunda pergunta é *felizmente não*. Cabe aqui um comentário de Brecht: *"De que serve poder duvidar quem não pode decidir? Pode atuar equivocadamente quem se contenta com razões demasiado escassas, mas ficará inativo ante o perigo quem necessite demasiadas"*.

O papel da estatística é tirar o máximo proveito das informações disponíveis. O que a estatística faz é reduzir o número de variáveis de um conjunto normalmente grande a poucos valores representativos, através de médias adequadamente realizadas. *Adequadamente* significa segundo uma receita bem definida. Quando dizemos, p.ex., que a altura média da população brasileira é de 1,68 m (valor fictício), o conjunto de 160 milhões de informações (as alturas de cada brasileiro) foi reduzido a apenas um número. É uma redução drástica e inevitavelmente a maioria das informações são perdidas nesse processo de média. Se quisermos um pouco mais de detalhe na descrição, podemos nos referir à média e à variância (primeiro e segundo momentos da distribuição das alturas) — teríamos agora duas informações sobre a altura média dos brasileiros.

Nos sistemas usualmente estudados pela mecânica estatística, a redução do número de informações é muitíssimo mais drástica. Um mol de algum material contém um número de moléculas da ordem de 10^{24}. A caracterização microscópica completa desse sistema (classicamente) requereria a especificação de posições e velocidades de cada partícula. Por outro lado, a caracterização macroscópica desse mesmo sistema requer especificação de um número de variáveis da ordem de 10 ou pouco mais, quando muito. Assim, todo sistema físico macroscópico é sempre definido de forma incompleta, do ponto de vista microscópico. Naquele exemplo que demos, o da distribuição de alturas dos brasileiros, a analogia com o sistema físico seria, p.ex., a temperatura e o calor específico, associados ao primeiro e segundo momentos da distribuição de energias das moléculas.

A mecânica clássica, formulada por Newton (e posteriormente por Lagrange e Hamilton) foi generalizada nas suas formas quântica e relativística. A formulação estatística da mecânica foi feita inicialmente por Boltzmann, nos anos 70 do Século XIX, quando foi associada uma variável macroscópica (a entropia) a conceitos microscópicos. Posteriormente Gibbs fez contribuições fundamentais à teoria, e por isso ela se denomina mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs. A mecânica estatística de Tsallis propõe generalizar a estatística, e não a mecânica.

III A visão da termodinâmica

O conceito de entropia surgiu pela primeira vez no âmbito da termodinâmica, na metade do Século XIX, impulsionado pelo advento das máquinas térmicas. A esse respeito, disse L.J. Henderson *"Science owes more to the steam engine than the steam engine owes to*

Science" [28]. Naquela época havia duas teorias conflitantes para explicar a obtenção de trabalho [32]. Uma delas era baseada no princípio de Carnot-Kelvin, que estabelecia que o trabalho produzido dependia da diferença de temperatura entre uma fonte quente e uma fonte fria. Dizia-se que o trabalho dependia da *qualidade* (o que hoje denominamos propriedade intensiva). A outra visão adotava o princípio de Mayer-Joule, que estabelecia que o trabalho produzido era proporcional ao calor (o chamado equivalente mecânico do calor), e portanto o trabalho dependia da *quantidade* (o que hoje denominamos propriedade extensiva). Estas duas visões foram unificadas por Clausius, em 1850, quando ele formulou o conceito de entropia. Gibbs fez o seguinte elogio: *"Clausius had the ability to bring order out of confusion, this breath of view which could apprehend one truth without loosing sight of another, this nice discrimination to separate truth from error..."* [33]. É de Clausius a frase *"A energia do mundo é constante. A entropia do mundo tende a um máximo"* (primeira e segunda leis da termodinâmica).

A termodinâmica interpreta a entropia como uma medida da irreversibilidade dos processos físicos. Imaginemos um processo no qual um sistema vai de um estado inicial I a um estado final F, enquanto troca matéria e energia sob as formas de calor e trabalho com as vizinhanças. Se for reversível, poderá ser operado de modo inverso ($F \rightarrow I$), e as quantidades de matéria, calor e trabalho no processo inverso serão as mesmas, em sentido contrário. Já um processo irreversível ou não pode ser operado de modo inverso ou, se puder, as quantidades de matéria, calor e trabalho não se compensarão — uma parte da energia sob a forma de trabalho é transformada em energia sob a forma de calor, e com isso ocorre uma perda definitiva (irreversível) da capacidade do sistema produzir trabalho. A esta geração de calor é associado um aumento da entropia. É possível ocorrer um aumento (ou diminuição) da entropia de um sistema num processo reversível, desde que ocorra também nas vizinhanças uma diminuição (ou aumento) exatamente igual, de modo que sua variação *total* (sistema + vizinhanças) seja nula. Particularmente não há variação de entropia num processo reversível operado em ciclo ($I \rightarrow F \rightarrow I$). Num processo irreversível, a variação total de entropia é sempre positiva. Não existe processo com variação total de entropia negativa. Esta é a segunda lei da termodinâmica ($\Delta S \geq 0$). Todos os processos naturais são, em diferentes graus, irreversíveis. Não é possível, p.ex., obter gasolina a partir dos gases de combustão de um automóvel fazendo o motor funcionar ao contrário.

Uma proposta que pretenda generalizar o conceito de entropia deve manter este caráter de irreversibilidade. A entropia de Tsallis mantém esta interpretação [24] — isto é verificado através do teorema H, formulado por Boltzmann.

Esta abordagem da termodinâmica, que parte de leis empíricas, é chamada heurística. A termodinâmica recebeu sua abordagem axiomática (baseada em postulados) nos trabalhos de Caratheódory [9] e Tisza [32]. A versão mais didática dos postulados foi enunciada por Callen [8], que vamos retomar aqui, para fazer a conexão com o formalismo de Tsallis.

Postulado I. Existência de *estados de equilíbrio* de sistemas simples† macroscopicamente caracterizados completamente pela energia interna, volume e número de moles das espécies químicas constituintes.

Postulado II. Existência da *entropia* S, função dos parâmetros extensivos de um sistema composto, que é máxima no estado de equilíbrio.

Postulado III. A entropia é uma função *contínua*, *diferenciável* e *monotonamente crescente* da energia, e é *aditiva* sobre os sub-sistemas constituintes.

Postulado IV. A entropia se anula na temperatura de zero absoluto.

Para se formular uma generalização de uma teoria é preciso violar pelo menos um de seus postulados. A entropia generalizada, proposta por Tsallis, viola a aditividade (parte do terceiro postulado de Callen). Vejamos como isso ocorre. Se considerarmos um sistema composto por dois outros sub-sistemas independentes (A) e (B), o terceiro postulado estabelece que a entropia do sistema composto é dada pela soma das entropias de cada sub-sistema:

$$S^{(A \cup B)} = S^{(A)} + S^{(B)}. \tag{1}$$

Na formulação de Tsallis, um sistema composto apresenta entropia generalizada

$$S_q^{(A \cup B)} = S_q^{(A)} + S_q^{(B)} + (1-q) S_q^{(A)} S_q^{(B)} \tag{2}$$

onde q é o índice entrópico que caracteriza a generalização. É evidente que o caso $q = 1$ recupera a aditividade. Daqui em diante simbolizaremos a entropia usual por S_1. Outras variáveis, além da entropia, também são generalizadas no formalismo de Tsallis; o índice inferior q representará esta generalização e o índice 1 denotará a variável usual. $(1-q)$ dá a medida da não-aditividade (também referida como não-extensividade). Se $q < 1$, o sistema é super-aditivo ($S_q^{(A \cup B)} > S_1^{(A \cup B)}$) e se $q > 1$, o sistema é sub-aditivo ($S_q^{(A \cup B)} < S_1^{(A \cup B)}$).

A violação da aditividade representa o rompimento com um conceito muito básico na termodinâmica — o de *sistema isolado*. Um sistema isolado é aquele que não troca matéria nem energia nem informação com suas vizinhanças. Sendo o sistema composto $(A \cup B)$ formado pela união dos sub-sistemas independentes (A) e (B), o termo $S_1^{(A)}$ da equação (1) representa a entropia do

†Sistemas simples são aqueles macroscopicamente homogêneos, isotrópicos, quimicamente inertes, eletricamente descarregados, suficientemente grandes para que se possa desprezar efeitos de superfície e não sujeitos a campos eletromagnético ou gravitacional.

sistema (A) antes de ser posto em contato com o sub-sistema (B) — portanto o sistema (A) isolado; similarmente para $S_1^{(B)}$. Quando postos em contato para formar o sistema composto, cada sub-sistema contribui com sua parte. Na equação (2), é como se na formação do sistema $(A \cup B)$, o sub-sistema (A) contribuisse com $S_q^{(A)}[1+\frac{1}{2}(1-q)S_q^{(B)}]$, e o sistema (B) contribuisse com $S_q^{(B)}[1+\frac{1}{2}(1-q)S_q^{(A)}]$. Isso significa que antes do sistema composto ser formado os sub-sistemas já sentiam um ao outro, e não eram, portanto, isolados.

O conceito de sistema isolado é uma idealização, e é bem aproximado quando suas partes interagem apenas se estiverem relativamente próximas (interações de curto alcance, que decaem rapidamente com a distância, veja Ref. [8], p.330). Separar esses sistemas (seja por afastamento espacial, seja pela introdução entre eles de uma parede impermeável às interações que eles trocam) torna as interações tão pequenas que podem ser desprezadas, e assim eles se aproximam de sistemas isolados. Existem, entretanto, interações de *longo alcance* (que decaem lentamente com a distância) e tambem interações que não são blindadas por paredes físicas. Tais interações são significativas por mais distante que um sistema esteja do outro e não podem ser desprezadas. São exemplos de interações de longo alcance as gravitacionais e as devido a cargas elétricas não blindadas (forças de Coulomb). A não-aditividade da entropia de Tsallis expressa a impossibilidade de se separar completamente (isolar) sistemas interagentes.

IV A visão da mecânica estatística

O objetivo da mecânica estatística é calcular propriedades macroscópicas a partir de informações microscópicas. O tempo que dura uma medida macroscópica é extremamente longo quando comparado aos tempos característicos dos processos moleculares (da ordem de 10^{-15} s), permitindo que o sistema passe por um número de estados enormemente grande. Desse modo, medidas macroscópicas são sempre médias temporais de sistemas microscópicos. Calcular essas médias usando os métodos da mecânica — integrando as equações de movimento para todas as partículas — é uma tarefa impraticável do ponto de vista teórico, dado a ordem de grandeza do número de partículas e da razão entre os tempos característicos macro e microscópicos.

A mecânica estatística desenvolveu um procedimento, a teoria dos ensembles, para superar essa dificuldade, baseada na hipótese ergódica. Podemos ilustrar a essência desta hipótese através de um exemplo: jogar um único dado N vezes dá, aproximadamente, o mesmo valor médio que jogar N dados uma única vez. A aproximação melhora à medida que N cresce e, para valores suficientemente grandes, a aproximação se torna exata.

De um ponto de vista microscópico, o estado de um sistema clássico constituído por N partículas puntuais é completamente caracterizado por $6N$ informações (três posições e três velocidades por partícula). Macroscopicamente, este mesmo sistema físico fica caracterizado por um número muito menor de variáveis, p.ex., a energia, o volume e o número de partículas. Assim, para cada estado macroscópico bem definido, existe um número extraordinariamente grande de microestados compatíveis. O conjunto destes microestados é denominado *espaço de fases*.

Consideremos um experimento imaginário, no qual o estado macroscópico é mantido constante e inicialmente o sistema esteja em um microestado particular de seu espaço de fases. À medida que o tempo passa, seu estado microscópico vai mudar e, durante um tempo suficientemente longo, o sistema vai passar por todos os estados acessíveis, e passará muitas vezes em cada um deles. Se repetirmos este experimento, partindo de outro estado microscópico inicial, novamente todo o espaço será preenchido e cada estado será visitado na mesma proporção do experimento anterior. Isso significa dizer que o modo como o espaço de fases é preenchido não depende da condição inicial. Conseqüentemente, para calcular propriedades macroscópicas, podemos substituir a média temporal (acompanhar a evolução temporal do sistema, ou jogar um único dado N vezes) por uma média de diferentes microestados, ou média de ensembles (jogar N dados uma única vez). Esta é a hipótese ergódica, fundamental na mecânica estatística. Ela dá origem a duas abordagens computacionais: o método de dinâmica molecular, baseado nas médias temporais, e o método de Monte Carlo, baseado nas médias de ensembles [3].

A forma mais simples de relacionar uma propriedade macroscópica com uma informação microscópica foi proposta por Boltzmann, para um sistema com energia, volume e número de partículas constantes. Se o espaço de fases deste sistema macroscópico for constituído por W possíveis estados microscópicos, sua entropia fica dada por

$$S_1 = k \ln W, \tag{3}$$

onde k é uma constante positiva que define a unidade em que a entropia é medida. É desta relação que vem a interpretação da entropia como uma medida de *desordem* de um sistema. Quando queremos pôr ordem em casa, dizemos: "Cada coisa em seu lugar" — existe apenas um local para guardar cada objeto e, de acordo com a equação (3), $S_1(W=1)=0$. A casa desordenada segue o lema "Qualquer coisa em qualquer lugar"! Quanto maior o número de estados acessíveis, maior a desordem, maior a entropia.

A forma mais geral da entropia de Boltzmann-Gibbs é

$$S_1 = -k \sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i, \tag{4}$$

onde p_i é a probabilidade do sistema estar no microestado i. Dentro da hipótese ergodica, p_i é igual à fração de tempo que o sistema permanece no estado i, durante sua viagem no espaço de fases. A receita da estatística de Boltzmann-Gibbs é a seguinte: as propriedades macroscópicas são médias das propriedades microscópicas ponderadas pelas probabilidades p_i.

Os valores assumidos por p_i em princípio variam de acordo com o estado i. O que define o modo como estes valores se distribuem no espaço de fases são as condições macroscópicas às quais o sistema está submetido (seu estado macroscópico). O caso particular em que os valores de p_i são independentes do estado i (estados igualmente prováveis) ocorre quando são mantidas constantes a energia, o volume e o número de partículas (condições de validade da equação (3)). Este conjunto de estados é denominado *ensemble microcanônico*. Se substituirmos $p_i = 1/W$ (equiprobabilidade) em (4), obtemos a equação (3).

Vamos analisar agora um outro caso, denominado *ensemble canônico*, no qual a energia não é mais mantida constante. São permitidas flutuações da energia em torno de um valor médio — este valor médio é que é mantido constante. Macroscopicamente isto equivale a manter a temperatura constante. O espaço de fases não mais terá estados equiprováveis. O sistema passará mais tempo nos estados de menor energia (estados com probabilidades maiores) e passará relativamente pouco tempo nos estados de alta energia (estados pouco prováveis). De acordo com a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, a distribuição de probabilidades será dada por

$$p_i = \frac{e^{-E_i/kT}}{Z_1}, \tag{5}$$

onde E_i é a energia do estado i, T é a temperatura do sistema e Z_1 é a função de partição, um fator que garante a normalização das probabilidades ($\sum_{i=1}^{W} p_i = 1$). p_i é denominado fator (ou peso) de Boltzmann. O valor médio da energia, $\langle E\rangle_1$, é uma propriedade macroscópica (usualmente representada por U, aqui por U_1) denominada energia interna. A receita de Boltzmann-Gibbs para relacionar U_1 com as propriedades microscópicas $\{E_i\}$ é

$$U_1 \equiv \langle E\rangle_1 = \sum_{i=1}^{W} p_i E_i. \tag{6}$$

Neste ponto estamos em condições de introduzir a formulação de Tsallis da mecânica estatística. Ele postula que a entropia generalizada S_q é relacionada com as probabilidades p_i dos microestados por

$$S_q = k\frac{1-\sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1}. \tag{7}$$

Se tomarmos o caso particular $q = 1$, a equação (7) se reduz à entropia de Boltzmann-Gibbs (4) (de um modo mais geral, $q = 1$ recupera todo o formalismo usual da mecânica estatística). Como toda abordagem axiomática, a validade dos postulados é verificada pelas conclusões a que eles levam. Assim, vamos investigar alguns resultados conseqüentes da definição (7).

A primeira observação é que S_q é não-negativa, para qualquer valor de q e esta é uma característica importante. Se considerarmos um sistema composto ($A \cup B$) no qual os espaços de fase dos sub-sistemas sejam estatisticamente independentes ($p_{ij}^{(A\cup B)} = p_i^{(A)} p_j^{(B)}$), obtemos como resultado a equação (2), que dá o caráter não extensivo de S_q. Outra propriedade importante é a concavidade. A entropia de Boltzmann-Gibbs é côncava, *i.e.*, a equação (4) é uma função que apresenta um e só um máximo. Esta é a propriedade que satisfaz a segunda lei da termodinâmica (e também o segundo postulado de Callen) e garante a estabilidade dos sistemas. A entropia generalizada S_q é sempre côncava (exibe um único ponto de máximo) para $q > 0$ e sempre convexa (exibe um único ponto de mínimo) para $q < 0$. Dessa forma, S_q satisfaz a segunda lei da termodinâmica, que deve ser reescrita como: "A entropia de um sistema isolado em equilíbrio é um extremo". Se $q > 0$, esse extremo é um máximo e aqui está incluído o caso usual $q = 1$. Se $q < 0$, o extremo é um mínimo. Ter um único extremo é uma característica importante do formalismo de Tsallis. Este parece ser um daqueles pontos que devem permanecer intactos. Nas palavras de Tisza [32] (p. 121), *"From the phenomenological point of view, the entropy maximum principle is so thoroughly corroborated by experiment that we are confident in interpreting any deviation in an actual case as an indication of incomplete thermodynamic equilibrium"*.

Se analisarmos o ensemble microcanônico, no qual todos os estados acessíveis são equiprováveis ($p_i = 1/W$), a equação (7) dá

$$S_q[1/W] = k\frac{W^{1-q}-1}{1-q}. \tag{8}$$

Por esta expressão, S_q é monotonamente crescente com W para $q < 1$, e satura (*i.e.*, aproxima-se assintoticamente de um valor limite) para $q > 1$. Além disso, esta equação representa o valor máximo (mínimo) da equação (7) para $q > 0$ ($q < 0$). De modo análogo, a equação (3) é o máximo valor possível para a equação (4). Isso permite manter a interpretação de entropia como uma medida da desordem do sistema quando $q > 0$. Para $q < 0$, a associação entre os dois conceitos continua válida, mas agora o estado de completa ordem é $S_q = \infty$.

No ensemble canônico de Tsallis, a energia pode flutuar em torno do valor esperado generalizado $\langle E\rangle_q$, definido por

$$U_q \equiv \langle E\rangle_q = \sum_{i=1}^{W} p_i^q E_i. \quad (9)$$

Voltaremos a tratar da generalização do valor esperado mais adiante. Esta definição origina uma distribuição de probabilidades dada por

$$p_i = \frac{1}{Z_q}\left[1-(1-q)\frac{E_i}{kT}\right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (10)$$

onde Z_q é a função de partição generalizada, que garante a normalização das probabilidades. Aqui surge uma diferença fundamental: no formalismo de Boltzmann-Gibbs, a distribuição de probabilidades é dada por uma lei exponencial (equação (5)), enquanto na mecânica estatística generalizada, a distribuição obedece a uma lei de potência (equação (10)). Se $q > 1$, a distribuição (10) tem um decaimento mais lento do que a função exponencial (de um argumento negativo, como é o caso de (5)). Isso faz com que os estados de energia mais elevados sejam visitados mais freqüentemente na estatística de Tsallis do que na estatística de Boltzmann-Gibbs. Se $q < 1$, a situação se inverte e a equação (10) tem decaimento muito mais acentuado do que uma exponencial, ao ponto de apresentar valores negativos (ou imaginários) para a probabilidade, quando

$$\frac{E_i}{kT} > \frac{1}{1-q}, \quad (11)$$

o que é fisicamente inaceitável. Alguns valores particulares de $q < 1$ apresentam probabilidades crescentes com a energia, quando ocorre (11), o que também é fisicamente inaceitável. Para corrigir este problema, Tsallis introduziu um corte (*cut-off*) na distribuição de probabilidades, que impõe que $p_i \equiv 0$ quando ocorre a condição (11). Neste caso ($q < 1$), a distribuição de probabilidades é de suporte compacto, essencialmente diferente da distribuição de Boltzmann-Gibbs. A Figura 1 ilustra as diferenças entre as distribuições.

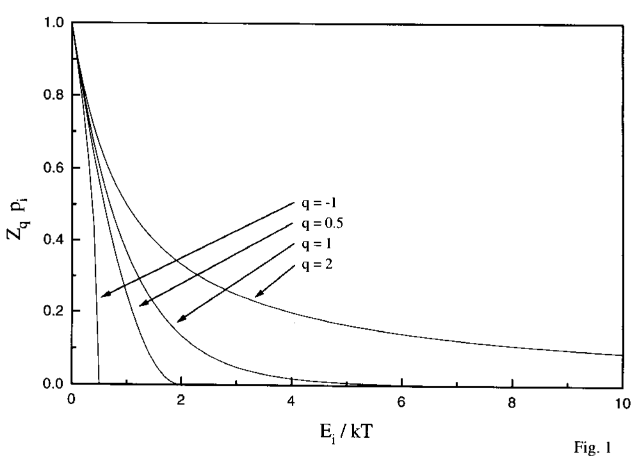

Figura 1. Distribuição de probabilidades para diferentes valores de q. Decaimento lento ($q = 2$), exponencial ($q = 1$), e "cut-off" ($q = 0.5$ e $q = -1$).

Alguns sistemas podem apresentar um espaço de fases com regiões atratoras. Se o estado microscópico do sistema cair numa dessas regiões, não consegue mais sair, violando a ergodicidade. Pode acontecer que o padrão de preenchimento do espaço de fases apresente uma estrutura fractal. Como os fractais são relacionados com leis de potência, o fato da mecânica estatística de Tsallis também apresentar leis de potência (ela foi, na verdade, inspirada nos multi-fractais, vide Ref. [36]) sugere a possibilidade deste formalismo generalizado ser capaz de descrever alguns sistemas não-ergódicos.

V A visão da teoria da informação

A primeira formulação da entropia, no contexto da termodinâmica, foi estimulada pela Revolução Industrial. Surgiu, portanto, num ambiente de construção. Esta terceira visão da entropia, dentro da teoria da informação, ao contrário, nasceu num ambiente de destruição — foi resultado dos esforços de Guerra para decifrar mensagens criptografadas. Neste contexto, a entropia é interpretada como uma medida do *"grau de incerteza que existe antes que uma escolha seja feita"* [7]. Busquemos uma função S_1 que meça a incerteza. É natural que a incerteza dependa do número de possibilidades W: comparemos um jogo de dado com um jogo de moeda. Neste último existem apenas duas possibilidades, enquanto no dado existem seis possibilidades. Nossa incerteza quanto ao resultado do jogo do dado é maior que no jogo da moeda. Devemos esperar, portanto, que a medida da incerteza $S_1 = S_1(W)$ seja monotonamente crescente com W, e $\lim_{W\to\infty} S_1(W) = \infty$, ou seja, se houver infinitas possibilidades, nossa incerteza também será infinita.

No jogo do dado, como também da moeda, todos os eventos são equiprováveis (50% para cara e 50% para coroa no jogo da moeda, e 1/6 para cada face no jogo do dado). Mas existem circunstâncias nas quais os eventos têm probabilidade de ocorrência diferenciada. Assim, é razoável supor que nossa medida da incerteza dependa também da probabilidade p_i de ocorrência de cada evento i, $S_1 = S_1(\{p_i\}, W)$. Para cada evento i existe uma medida de incerteza $I_1(p_i)$ que depende da sua probabilidade de ocorrência p_i. É razoável também supor que a incerteza total S_1, associada ao conjunto de eventos possíveis, seja uma média das incertezas associadas a cada evento i particular ponderada pela sua probabilidade de ocorrência:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{W} p_i I_1(p_i). \tag{12}$$

Quanto menor for p_i, maior a nossa incerteza a respeito desse evento ($I_1(p_i)$ deve ser monotonamente decrescente com p_i). Por outro lado, se um evento i é certo ($p_i = 1$), então $I_1(1) = 0$.

Outra característica que devemos esperar de $I_1(p_i)$, apesar de

$$\lim_{p_i \to 0} I_1(p_i) = \infty, \tag{13}$$

é que

$$\lim_{p_i \to 0} p_i I_1(p_i) = 0, \tag{14}$$

pois, se assim não fosse, seríamos incapazes de tomar decisões pelo simples fato da existência de eventos impossíveis: cair um meteoro em minha cabeça é um evento excepcionalmente raro, e a incerteza associada a ele é praticamente infinita (equação (13)), mas apesar disso eu saio de casa sem medo que ocorra este acidente — isto é refletido na equação (14).

Uma propriedade que se costuma esperar da medida de incerteza é que se tivermos um evento composto por dois outros eventos independentes, p.ex. jogar dois dados, a incerteza associada a sair 3 em um dado e sair 2 no outro deve ser a *soma* das incertezas de cada dado separadamente, enquanto a probabilidade de sairem esses dois números é dada pelo *produto* das probabilidades de cada evento individual. Assim,

$$p_{ij}^{(A\cup B)} = p_i^{(A)} p_j^{(B)} \tag{15}$$

e

$$I_1(p_i^{(A)} p_j^{(B)}) = I_1(p_i^{(A)}) + I_1(p_j^{(B)}). \tag{16}$$

A equação (15) expressa matematicamente o que antes estávamos denominando sistemas estatisticamente independentes. Shannon [30] provou que a única função que satisfaz a essas condições que estamos procurando é

$$I_1(p_i) = -k \ln p_i, \tag{17}$$

sendo k uma constante positiva que define a unidade de medida da incerteza. A incerteza S_1 é dada pela mesma expressão da entropia de Boltzmann-Gibbs (compare (12) e (17) com (4)). Temos assim a interpretação da entropia como uma média da incerteza, ou da desinformação, associada a um conjunto de eventos.

Vamos agora estreitar o paralelo entre as mecânicas estatísticas de Boltzmann-Gibbs e de Tsallis. Nos inspiremos nas equações (3) e (8), que dão a entropia do ensemble microcanônico em ambos os formalismos, para definir a função logarítmo generalizado [40]

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \tag{18}$$

onde a função logarítmo usual é um caso particular, $\ln_1 x$. Com isso, a entropia generalizada (equação (7)) fica reescrita na forma

$$S_q = -k \sum_{i=1}^{W} p_i^q \ln_q p_i. \tag{19}$$

Quando comparamos com a expressão de Shannon, reescrita na forma $S_1 = -k\langle \ln p_i \rangle_1$, sendo $\langle O \rangle_1$ o valor esperado usual de uma grandeza O, definido por (receita de Boltzmann-Gibbs)

$$\langle O \rangle_1 = \sum_{i=1}^{W} p_i O_i, \tag{20}$$

somos imediatamente tentados a escrever $S_q = -k\langle \ln_q p_i \rangle_q$, onde o valor esperado generalizado da grandeza O é definido como

$$\langle O \rangle_q = \sum_{i=1}^{W} p_i^q O_i, \tag{21}$$

que é a expressão sugerida pela equação (9). Posto desta forma, S_q é uma espécie de média generalizada de uma medida generalizada da desinformação $I_q(p_i) = -k \ln_q p_i$. Vamos denominar a inversa da função q-logarítmo como função q-exponencial:

$$\exp_q x \equiv e_q^x = [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}}. \tag{22}$$

Com isso, a distribuição de probabilidades no ensemble canônico (equação (10)) fica $p_i \propto e_q^{-E_i/kT}$, em perfeita analogia com a estatística de Boltzmann-Gibbs, onde $p_i \propto e_1^{-E_i/kT}$ (equação (5)).

Vamos ilustrar a diferença entre as duas estatísticas através do problema da caixa de chocolate, descrito na Ref. [41]. Este problema mostra a evolução temporal da entropia desde a máxima desinformação até a certeza. Imagine que no tempo $t = 0$, quatro caixas lhe são mostradas, onde uma (e apenas uma) delas contém um chocolate. No tempo $t = 1$ você obtém uma informação adicional, que o chocolate está em uma de duas caixas (duas outras caixas são eliminadas). Finalmente no tempo $t = 2$, você é informado qual a caixa que contém o chocolate (certeza). Consideremos três casos, $q = 0$, $q = 1$ e $q = 2$. A entropia é calculada pelas equações (3) ou (8). A Figura 2, similar à contida no artigo citado, ilustra a evolução temporal de $S_q(t)/S_q(0)$ (incerteza no tempo t relativa à incerteza inicial) na direção do conhecimento completo. Vemos que a evolução é mais lenta a medida que q aumenta. O caso $q = 1$ é interpretado como ausência de conhecimento prévio. $q < 1$ corresponde a conhecimento prévio correto (a pessoa pensa que sabe e, de fato, sabe), e $q > 1$ corresponde a conhecimento prévio incorreto (a pessoa pensa que sabe mas, de fato, não sabe). Esta interpretação já havia sido feita por Jumarie [21], analisando a entropia de Rényi, e continua válida para a entropia de Tsallis, como comentam os autores [41]. Podemos dizer que $q > 1$ corresponde a crenças falsas, $q < 1$ a conhecimentos confiáveis e $q = 1$ a ignorância. Em outras palavras, a fronteira entre a crença falsa e o conhecimento é a ignorância!

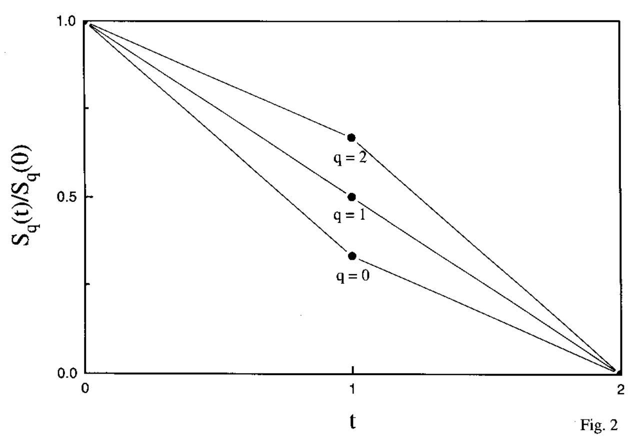

Figura 2. Evolução temporal de $S_q(t)/S_q(0)$ para $q = 0$, 1 e 2, no problema da caixa de chocolate.

Sócrates tinha tocado esse problema, quando ele perguntou a um escravo qual o tamanho do lado de um quadrado que tem o dobro da área de outro quadrado menor [27]. O escravo prontamente respondeu que o quadrado de área dupla tem também o lado duplo. Através de seu método próprio, Sócrates fez o escravo perceber que ele estava errado. O escravo, que não sabia, mas acreditava saber (crença falsa), agora estava em dúvida e tinha apenas a convicção que não sabia (ignorância). Sócrates comentou, então, que este estado de ignorância do escravo era melhor que sua certeza (crença) anterior. Continuando, as perguntas de Sócrates conduziram o escravo à resposta correta — ele finalmente chegou à conclusão que o quadrado maior tem lado igual à diagonal do quadrado menor. Assim é ilustrada a idéia que para ir da crença ao conhecimento é preciso passar pela ignorância. O próprio Sócrates reconhecia que ele permanecia sempre neste estágio, quando dizia *"só sei que nada sei"*. (Será que Sócrates era uma pessoa que funcionava com $q = 1$?).

VI Comentários finais

Vamos examinar algumas conseqüências da definição do valor esperado generalizado, equação (21). Esta definição permitiu superar divergências no segundo momento de algumas distribuições do tipo leis de potência (*i.e.*, para algumas distribuições, $\langle x^2\rangle_1$ diverge, enquanto $\langle x^2\rangle_q$ é finito. Vide [2, 31]). Entretanto a equação (21) introduz três problemas: *(i)* a distribuição de probabilidades do ensemble canônico, equação (10), *não é* invariante por translação do espectro de energia; *(ii)* o valor esperado q de uma constante *não é* igual à própria constante ($\langle\lambda\rangle_q \neq \lambda$, $\lambda \in \mathcal{R}$) e *(iii)* a primeira lei da termodinâmica, que expressa a conservação da energia, *não respeita* a aditividade num sistema composto por sub-sistemas independentes, mas uma forma pouco usual [42]

$$U_q^{(2)(A\cup B)} = U_q^{(2)(A)} + U_q^{(2)(B)} + (1-q)[U_q^{(2)(A)} S_q^{(B)}/k + U_q^{(2)(B)} S_q^{(A)}/k], \tag{23}$$

onde o índice superior $^{(2)}$ indica valor esperado q de segunda espécie, definido pela equação (21). O índice é agora necessário para diferenciar do valor esperado q de terceira espécie, a ser definido em seguida. O valor esperado de primeira espécie, $\langle O\rangle_1^{(1)}$, é o usual, dado pela equação (20). Para superar esses problemas, Tsallis, Mendes e Plastino [43] definiram o valor esperado q de terceira espécie

$$\langle O\rangle_q^{(3)} \equiv \sum_{i=1}^{W} P_i^{(q)} O_i, \tag{24}$$

onde $P_i^{(q)}$ é a probabilidade associada ("escort probability"), definida por

$$P_i^{(q)} = \frac{p_i^q}{\sum_{j=1}^{W} p_j^q}. \quad (25)$$

Na Figura 3, mostramos a probabilidade associada contra a probabilidade usual, para um sistema com dois possíveis estados ($W = 2$) e para três valores de q. Fica evidente que $q < 1$ privilegia eventos *raros*, enquanto $q > 1$ privilegia eventos *freqüentes*. Como dito na Ref. [43], esta característica contém o cerne da generalização.

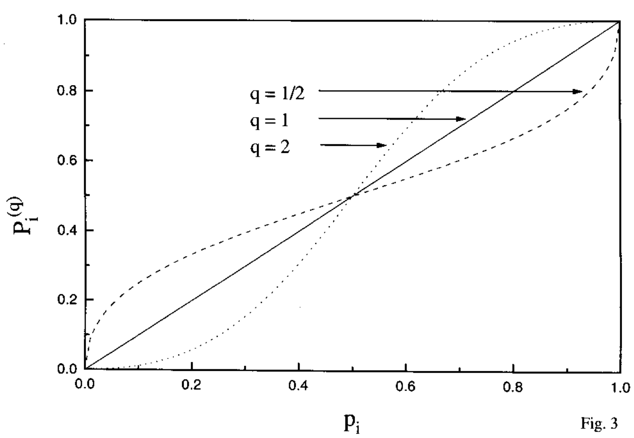

Fig. 3

Figura 3. Probabilidade associada $P_i^{(q)}$ versus probabilidade p_i para um sistema com duas possibilidades ($W = 2$).

As três espécies de valor esperado são relacionadas por

$$\langle O\rangle_q^{(3)}(\{p_i\}) = \frac{\langle O\rangle_q^{(2)}(\{p_i\})}{\langle 1\rangle_q^{(2)}(\{p_i\})} = \langle O\rangle_1^{(1)}\left(\{P_i^{(q)}\}\right). \quad (26)$$

A adoção de $\langle O\rangle_q^{(3)}$ corrige os três problemas citados. Particularmente a energia interna (de terceira espécie) de um sistema composto fica aditiva: $U_q^{(3)(A\cup B)} = U_q^{(3)(A)} + U_q^{(3)(B)}$. O ensemble canônico agora é aquele cuja energia flutua em torno do valor $\langle E\rangle_q^{(3)} \equiv U_q^{(3)}$, que é mantido constante. A média de segunda espécie é mantida na definição da q-entropia (equação (19)).

O custo destas correções, entretanto, é que a distribuição de probabilidades não fica mais dada pela equação (10), que é relativamente simples, mas pela função implícita

$$p_i = \frac{\exp_q\left[-\left(\frac{E_i - U_q^{(3)}}{kT}\right)\Big/\sum_{j=1}^{W} p_j^q\right]}{Z_q^{(3)}}, \quad (27)$$

com $Z_q^{(3)}$ a função de partição de terceira espécie. A distribuição (27) é ainda uma lei de potência, e isso mantém as características essenciais da mecânica estatística generalizada.

Vamos agora mencionar algumas conjecturas a respeito do formalismo generalizado. Uma das belezas e glórias da mecânica estatística é obter os resultados de equilíbrio termodinâmico como conseqüência de suas hipóteses. Vejamos o que significa equilíbrio termodinâmico. *Equilíbrio* é invariância com o tempo — as propriedades que caracterizam o estado do sistema são constantes do movimento. Ele é alcançado quando tomamos tempos suficientemente longos. A *termodinâmica* diz respeito a sistemas macroscópicos, *i.e.*, sistemas com número suficientemente grande de partículas. No formalismo de Boltzmann-Gibbs, não importa a ordem que esses limites são tomados, *i.e.*,

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty} f_1(t,N) = \lim_{N\to\infty}\lim_{t\to\infty} f_1(t,N). \quad (28)$$

Existem suspeitas que esses limites não necessariamente comutam no caso genérico $q \neq 1$ [39]. A não comutação indica que o estado final depende do modo como ele foi alcançado (sistemas com memória). Neste caso, o primeiro postulado de Callen, que estabelece a existência de estados de equilíbrio termodinâmico, também necessitará uma reformulação.

Vimos que a não-aditividade implica na não validade do conceito de sistema isolado. Isso parece ter uma conseqüência sutil, mas primordial, no método de análise. Desde Descartes [12], problemas complexos são tratados através da sua decomposição em problemas mais simples, que possam ser descritos individualmente. O parâmetro q da generalização introduz um termo [10] *dependente do contexto*, ou *holístico*. Isto parece sugerir um rompimento com o método cartesiano de análise.

Iniciamos este trabalho esclarecendo as diferenças entre a mecânica e a estatística. Voltemos agora a este assunto. De um ponto de vista metodológico, podemos fazer uma distinção entre as abordagens da mecânica e da estatística: a mecânica utiliza uma lógica *dedutiva*, enquanto a estatística utiliza uma lógica *indutiva* [16]. No processo dedutivo, as conseqüências são derivadas de implicações lógicas de postulados, assumidos verdadeiros. Por exemplo, postulando as leis de Newton se obtém todas as conseqüências da mecânica clássica. É um procedimento que parte do geral para o particular. O processo indutivo faz o caminho contrário, do particular para o geral. Chega-se a conclusões sobre todos os membros de uma classe pelo exame de apenas alguns de seus membros. O formalismo de Tsallis corresponde, talvez, a uma nova formulação do método indutivo de inferência probabilística.

A probabilidade pode ter uma interpretação objetiva ou subjetiva [16, 19]. Em aplicações físicas, a interpretação objetiva pode parecer mais aceitável, mas em problemas de planejamento, onde são necessárias decisões a respeito de qual caminho seguir (com implicações financeiras, temporais ou outras), a interpretação subjetiva se torna evidente. A estatística generalizada pode incluir, na análise, aspectos subjetivos da pessoa que decide — seu comportamento de busca ou de aversão ao risco [41]. O caso particular $q = 1$ (estatística usual) corresponde à imparcialidade, onde os aspectos subjetivos não são considerados.

É uma experiência comum na história das ciências que apenas alcançamos uma compreensão mais profunda de uma teoria, particularmente a respeito de suas limitações, quando estudamos uma formulação generalizada. Assim acontece com a mecânica clássica, que supõe implicitamente que é possível obter-se informações com precisão infinita e se propagando instantaneamente. Estas hipóteses implícitas se tornam explícitas com as generalizações quântica e relativística. O mesmo ocorre com a mecânica estatística usual de Boltzmann-Gibbs, e a versão de Tsallis exerce um papel epistemológico similar [44].

Existem algumas ciências que se comportam como rainhas. São ciências que nos inspiram reverência e merecem muito cuidado ao tocá-las. Einstein considerava o eletromagnetismo assim e resolveu mantê-lo intacto, modificando os conceitos de espaço e tempo, na formulação da teoria da relatividade. Einstein também considerava a termodinâmica com igual respeito, como vemos em suas Notas Autobiográficas [13]: *"Quanto maior a simplicidade das premissas, mais impressionante é a teoria, maior o número de coisas diferentes com as quais se relaciona e mais extensa sua área de aplicação. Daí a profunda impressão que me causou o conhecimento da termodinâmica clássica. É a única teoria física de conteúdo universal que, estou convencido, dentro da estrutura da aplicabilidade dos seus conceitos básicos, jamais será derrubada"*. As profundas implicações da mecânica estatística de Tsallis nos trazem sentimentos de ousadia e respeito e saber a justa medida entre eles nem sempre é fácil.

Se formos dominados por um pensamento pragmatista, poderíamos perguntar: "Será útil esta generalização?" Só o tempo pode responder com certeza. A mecânica estatística generalizada tem recebido bastante atenção na literatura. Tem sido aplicada a uma variedade de sistemas, tais como difusão anômala de Lévy [2], sistemas auto-gravitantes [26], turbulência em plasma de elétrons [5], neutrinos solares [22], entre outros. Alguns artigos de revisão [35, 37, 38, 39] ou o endereço eletrônico [17] podem ser consultados para maiores informações. Se, no lugar da utilidade, perguntarmos pela *finalidade*, podemos evocar dois grandes cientistas, falando dos objetivos das teorias científicas:

"One of the principal objects of theoretical research in any department of knowledge is to find the point of view from which the subject appears in its greatest simplicity" (Josiah Willard Gibbs [34]).

"The object of all science, whether natural science or psychology, is to co-ordinate our experience and to bring them into a logical system (...) The only justification for our concepts and system of concepts is that they serve to represent the complex of our experiences; beyond this they have no legitimacy" (Albert Einstein [14]).

Terminamos com uma esperança, lançada exatamente um século antes da generalização que tratamos, referente a duas ciências emergentes da época, a termodinâmica e a mecânica estatística: *"These investigations of a rather theoretical sort are capable of much more immediate practical application than one could be inclined to believe"* (Le Chatelier, 1888).

Agradecimentos

Agradeço a Constantino Tsallis e a Evaldo M. F. Curado pelas discussões que têm ajudado a *ordenar* minhas idéias sobre a entropia. Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro.

References

[1] Abe, S., Phys. Lett. A **224**, 326 (1997).

[2] Alemany, P. A. e Zanette, D. H., Phys. Rev. E **49**, R956 (1994); Zanette, D. H. e Alemany, P. A., Phys. Rev. Lett. **75**, 366 (1995); Tsallis, C., Levy, S. V. F., de Souza, A. M. C. e Maynard, R., ibid. **75**, 3589 (1995); Erratum: **77**, 5442 (1996); Caceres, M. O. e Budde, C. E., ibid. **77**, 2589 (1996); Zanette, D. H. e Alemany, P. A., ibid. **77**, 2590 (1996).

[3] Allen, M. P. e Tildesley, D. J., *Computer Simulation of Liquids*, Clarendon Press, Oxford, 1987.

[4] Balian, R., *From Microphysics to Macrophysics*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin 1982.

[5] Boghosian, B. M., Phys. Rev. E **53**, 4754 (1996); Anteneodo, C. e Tsallis, C., J. Mol. Liq. **71**, 255 (1997).

[6] Borges, E. P. e Roditi, I., Phys. Lett. A **246**, 399 (1998).

[7] Brillouin, L., *Science and Information Theory*, 2nd. ed., Academic Press, New York, 1962.

[8] Callen, H. B., *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, New York, 1985.

[9] Carathéodory, C., Math. Ann. **67**, 355 (1909).

[10] Curado, E. M. F. e Tsallis, C., J. Phys. A: Math. Gen. **24**, L69 (1991); Corrigenda **24**, 3187 (1991) e **25**, 1019 (1992).

[11] Daróczy, Z., Information and Control **16**, 36 (1970).

[12] Descartes, R., *Discurso do Método*, in *Obra Escolhida*, Clássicos Garnier, DIFEL, São Paulo, 1973.

[13] Einstein, A., *Notas Autobiográficas*, Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1982 (original de 1949).

[14] Einstein, A., *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press, New Jersey, 1945.

[15] Havrda, J. e Charvat, F., Kybernetica **3**, 30 (1967).

[16] Hobson, A., *Concepts in Statistical Mechanics*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1971.

[17] http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm

[18] Jackson, F. H., Mess. Math. **38**, 57 (1909); Quart. J. Pure Appl. Math. **41**, 193 (1910).

[19] Jaynes, E. T., Phys. Rev. **106**, 620 (1957).

[20] Johal, R. S., Phys. Rev. E **58**, 4147 (1998).

[21] Jumarie, G., *Relative Information. Theories and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1988; Cybernetics and Systems **19**, 169 e 311 (1988).

[22] Kaniadakis, G., Lavagno, A. e Quarati, P., Phys. Lett. B **369**, 308 (1996).

[23] Lebowitz, J. L., Physics Today **46**, 32 (Sept. 1993).

[24] Mariz, A. M., Phys. Lett. A **165**, 409 (1992); Ramshaw, J. D., Phys. Lett. A **175**, 169 (1993).

[25] Papa, A. R. R., J. Phys. A **31**, 5271 (1998).

[26] Plastino, A. R. e Plastino, A., Phys. Lett. A **174**, 384 (1993); Hamity, V. H. e Barraco, D. E., Phys. Rev. Lett. **76**, 4664 (1993).

[27] Platão, *Menon*, in *Diálogos: Menon, Banquete, Fedro*, Edições de Ouro, Rio de Janeiro (sem data).

[28] *in* Reid, C. E., *Chemical Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1990.

[29] Rényi, A., *"On measures of entropy and information", in Proc. Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* **1**, 547 (1960); *Probability Theory*, North-Holland, Amsterdam (1970).

[30] Shannon, C. E., Bell Syst. Tech. J. **27**, 379 (1948).

[31] de Souza, A. M. C. e Tsallis, C., Physica A **236**, 52 (1997).

[32] Tisza, L., *Generalized Thermodynamics*, The MIT Press, 1966.

[33] *in* [32], p. 30.

[34] *in* [32], p. *v*.

[35] Tsallis, C., Chaos, Solitons and Fractals **6**, 539 (1995).

[36] Tsallis, C., J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).

[37] Tsallis, C., *Extensive versus Nonextensive Physics, in New Trends in Magnetism, Magnetic Materials and Their Applications*, J. L. Morán-López e J. M. Sanchez, Plenum Press, New York, p.451 (1994).

[38] Tsallis, C., Physica A **221**, 277 (1995).

[39] Tsallis, C., Braz. J. Phys. **29**, 1 (1999).

[40] Tsallis, C., Química Nova, **17**, 468 (1994).

[41] Tsallis, C., Deutscher, G. e Maynard, R., Braz. J. Prob. Stat. **10**, 103 (1996).

[42] Tsallis, C., Phys. Lett. A **195**, 329 (1994).

[43] Tsallis, C., Mendes, R. S. e Plastino, A. R., Physica A **261**, 534 (1998).

[44] Tsallis, C. e Abe, S., Physics Today **51**, 114, October 1998.

[45] Wehrl, A., Rev. Mod. Phys. **50**, 221 (1978); Reports on Mathematical Physics **30**, 119 (1991).