

CAPITULO V

MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

5.1. INTRODUCCION

Las nociones sobre la información y codificación vistas en el Capítulo IV, más los principios de la representación espectro-temporal de señales y sistemas expuestos en los Capítulos I y II, constituyen un marco teórico básico suficiente para emprender el estudio de los diferentes métodos de modulación y transmisión de señales empleados en los sistemas de comunicación.

A pesar de la existencia de una gran cantidad de métodos de modulación, es posible identificar dos tipos básicos de modulación de acuerdo con la clase de portadora: (a) la “Modulación de Ondas Continuas (CW)”, en la cual la portadora es simplemente una señal sinusoidal, y (b) la “Modulación de Impulsos”, en la cual la portadora es un tren de impulsos.

La Modulación de Ondas Continuas es un proceso continuo y por lo tanto es la apropiada para señales que varían en forma continua en el tiempo. En este caso la frecuencia de la portadora sinusoidal tiene generalmente un valor mucho más elevado que el ancho de banda de la señal moduladora o señal mensaje, y el proceso de modulación es simplemente un proceso de traslación de espectros. En el Capítulo VI trataremos en detalle la Modulación de Ondas Continuas.

La Modulación de Impulsos es un proceso discreto, en el sentido de que los impulsos están presentes solamente en ciertos intervalos de tiempo, lo que hace que la Modulación de Impulsos sea la forma apropiada para mensajes o información de naturaleza discreta.

La modulación de impulsos puede, a su vez, clasificarse en “Modulación Analógica de Impulsos” y “Modulación Digital o Codificada de Impulsos”. En efecto, en la modulación analógica de impulsos los parámetros modulados (amplitud, duración o posición de los impulsos) varían en proporción directa respecto a la señal moduladora o mensaje. En la modulación digital de impulsos se efectúa una codificación o conversión, en el sentido visto en el Capítulo IV, mediante la cual el mensaje es transformado en palabras codificadas (secuencias de impulsos) que representan valores de la señal moduladora tomados en ciertos intervalos de tiempo, aunque ésta no es la única forma de modulación digital de impulsos, como veremos en su oportunidad. Asimismo, en el proceso de la modulación de impulsos se introduce una operación denominada “Muestreo de la Señal” que es una de las transformaciones más importantes en el procesamiento y transmisión de señales digitales.

En este Capítulo se desarrollarán los conceptos de muestreo de señales y de la modulación y transmisión de impulsos. La teoría del muestreo se presentará como la base teórica de todos los sistemas de modulación de impulsos y a este efecto se estudiarán algunos de los sistemas más utilizados en la práctica tanto en el procesamiento como en la transmisión de señales. En particular, se hará énfasis especial en los sistemas de modulación codificada, pues éstos son los sistemas utilizados en la transmisión de señales digitales o datos. También se presentará un breve estudio de la transmisión digital de señales mediante dispersión del espectro (Spread Spectrum). Los criterios de calidad de los diferentes sistemas, para efectos de comparación, se enfocarán (a) desde el punto de vista del ancho de banda de las señales y de los canales, (b) según las relaciones S/N presentes, y (c), en grado menor, en la complejidad de los sistemas. Finalmente, se estudiarán las “Técnicas de Multiplicidad en el Tiempo (TDM)” necesarias para la transmisión de una gran cantidad de mensajes por un mismo canal, así como los principios básicos de la transmisión y recepción de impulsos en banda de base o en portadora modulada. Sin perder el rigor teórico seguido, en todo

momento se dará ejemplos, circuitos y aplicaciones de sistemas prácticos, haciendo referencia principalmente a las Recomendaciones pertinentes de la UIT-T.

5.2. TEORIA DEL MUESTREO UNIFORME DE SEÑALES

5.2.1. Introducción

Bajo ciertas condiciones una señal continua en el tiempo puede especificarse completamente y recuperarse a partir del conocimiento de sus valores instantáneos o muestras tomadas a intervalos de tiempo uniformes. Un ejemplo muy ilustrativo de lo que esto significa lo constituye las series de fotografías de una cinta cinematográfica, donde cada fotografía representa escenas fijas espaciadas cada 1/24 segundos. Cuando estas fotografías se proyectan a esa misma velocidad (24 fotografías por segundo), nosotros percibimos una representación móvil, completa y exacta, de las escenas continuas originales.

Mucha de la importancia de la Teoría del Muestreo radica en que ella constituye un enlace o puente entre señales continuas y señales discretas y, como lo veremos en su oportunidad, su habilidad para representar una señal continua mediante una serie de muestras instantáneas, proporciona un mecanismo para representar señales continuas mediante señales discretas. En muchas aplicaciones el procesamiento de señales discretas es más fácil y flexible debido a la creciente disponibilidad de dispositivos digitales baratos, ligeros, fáciles de programar y adquirir.

La teoría del muestreo se puede resumir en cuatro teoremas, aunque no todos los autores la presentan en esta forma. Estos teoremas introducen y desarrollan el concepto de muestreo y el proceso de reconstitución o interpolación de una señal continua a partir de sus muestras. Estos conceptos son la base del procesamiento y transmisión digital de señales.

5.2.2. Teoremas del Muestreo Uniforme de Señales

Podemos preguntarnos si es necesario transmitir continuamente sobre un canal una señal de banda limitada B a fin de entregar toda la información asociada con ella. La respuesta es que no es necesario. Muchos de los sistemas de modulación de impulsos utilizan el hecho de que una señal de banda limitada puede transmitirse sin distorsión si se muestrea la señal periódicamente y se transmiten esos valores o muestras. Como la discusión estará limitada a sistemas físicos, solamente se considera señales reales continuas, monovalentes y limitadas en frecuencia o en el tiempo, según el caso.

Teorema N° 1. Teorema del Muestreo de Shannon [Shannon, 1949]

“Una señal $x(t)$ pasabaja cuya frecuencia máxima es f_m , se puede especificar unívocamente por sus valores o muestras $x(nT_s)$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, tomados en una serie de instantes discretos, llamados “instantes o puntos de muestra”, separados cada $T_s = 1/f_s$ segundos, donde $f_s \geq 2f_m$ ”.

En este contexto, f_s es la frecuencia de muestreo o “Frecuencia de Shannon” y T_s el “Intervalo de Muestreo”. La frecuencia mínima de muestreo, para la cual se verifica que $f_s = 2f_m$, se denomina “Frecuencia de Nyquist”, y el intervalo T_s correspondiente, “Intervalo de Nyquist”.

Formas más o menos complicadas de este teorema se conocían en la literatura matemática; pero fue Shannon quien en 1949 lo introdujo en el dominio de la teoría de la comunicación. Sin embargo, H. Nyquist ya había señalado en 1924 que $N = 2f_m T$ números eran suficientes para representar una función del tiempo de duración T y frecuencia máxima f_m , lo cual es otra forma de enunciar este teorema.

La demostración rigurosa del teorema de Shannon [Teorema 1, Shannon, 1949)] está fuera de los objetivos de este texto, pero sí haremos una demostración que introduce el concepto de muestreo a partir de nociones sencillas ya conocidas.

Sea entonces $x(t)$ una señal continua pasabajo de banda limitada f_m , cuya transformada de Fourier o espectro es $X(f)$.

Una señal muestreada $x_s(t)$ de $x(t)$ se puede considerar como el producto de la señal continua $x(t)$ por un tren de impulsos unitarios de período T_s , denominado “señal muestreadora”, es decir,

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \tag{5.1}$$

Este tipo de muestreo se conoce con el nombre de “Muestreo Ideal o Muestreo Instantáneo”.

Del Ejemplo 2.9, expresión (2.45), el espectro $X_s(f)$ de $x_s(t)$ es

$$X_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \tag{5.2}$$

Vemos que $X_s(f)$ representa un espectro periódico formado por el desplazamiento de $X(f)$ a las frecuencias $\pm nf_s$, y con un factor de escala f_s , como se muestra en la Fig. 5.1(f).

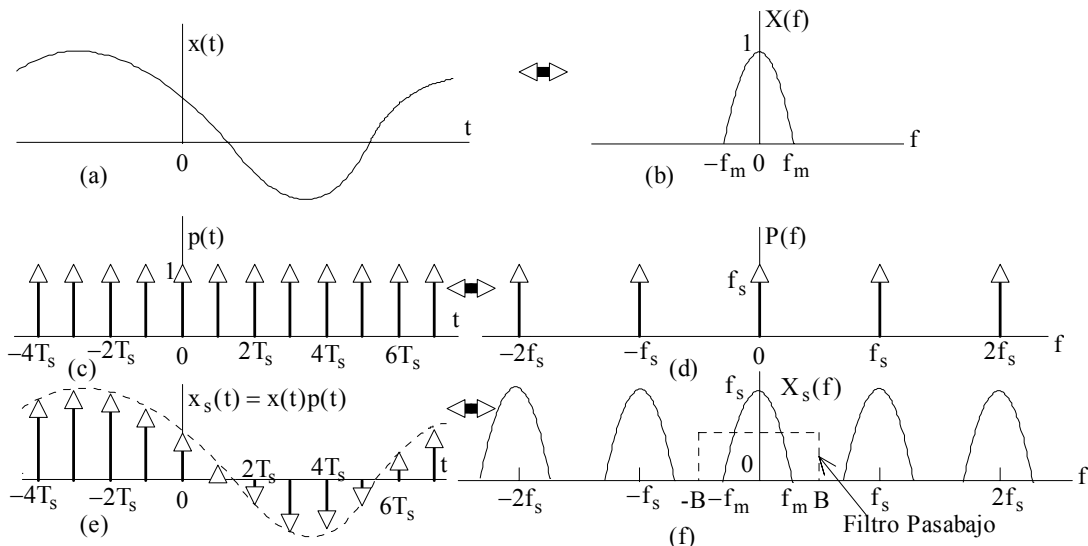


Fig. 3.1. Muestreo Instantáneo en el Dominio del Tiempo.

El espectro original de $x(t)$ aparece centrado en el origen y podrá ser recuperado con un filtro pasabajo mientras no se produzca solapamiento con los espectros adyacentes, lo que se verifica si $f_s \geq 2f_m$. Nótese que para valores de $f_s < 2f_m$, los espectros se solaparán y se producirá distorsión en la recuperación de $x(t)$. La recuperación de $x(t)$ la consideraremos en el siguiente teorema.

Teorema N° 2. Recuperación o Interpolación de la Señal

Este teorema tiene que ver con la recuperación de la señal original $x(t)$ a partir de su versión muestreada $x_s(t)$.

“Si una señal pasabajo cuya frecuencia máxima es f_m ha sido muestreada a una frecuencia igual o mayor que $2f_m$ muestras por segundo, y las muestras se presentan en forma de impulsos cuya área es proporcional a la amplitud de la muestra en un instante dado, la señal original $x(t)$ se puede recuperar si se pasa la señal muestreada a través de un filtro pasabajo ideal con un ancho de banda B tal que $f_m \leq B \leq f_s - f_m$ ”.

El proceso de recuperación de $x(t)$ es fácil de visualizar en la Fig. 5.1(f), pero nosotros vamos a verificarlo para demostrar algunas relaciones importantes.

Para la recuperación de $x(t)$, Fig. 5.1(f), la señal muestreada $x_s(t)$ se hace pasar por un filtro ideal pasabajo de ancho de banda B y ganancia T_s de la forma

$$H(f) = T_s \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \exp(-j2\pi t_0 f) \Leftrightarrow h(t) = 2BT_s \text{sinc}[2B(t - t_0)] \quad (5.3)$$

en el cual debe cumplirse que $f_m \leq B \leq f_s - f_m$.

Sea $x_r(t)$ la salida recobrada en el filtro, entonces $x_r(t) = x_s(t) * h(t)$

$$\text{De (5.1) y (5.3), } x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) * 2BT_s \text{sinc}[2B(t - t_0)]$$

$$\text{De donde } x_r(t) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}[2B(t - t_0 - nT_s)] \quad (5.4)$$

Esta expresión indica que hay que tomar cada muestra y multiplicarla por una función $\text{sinc}(\cdot)$ centrada en el instante de ocurrencia de la muestra y sumar los términos resultantes. Esto es exactamente lo que sucede cuando las muestras se pasan por un filtro pasabajo ideal de ancho de banda B tal que $f_m \leq B \leq f_s - f_m$. Se efectúa entonces una interpolación y por esa razón la expresión (5.4) recibe el nombre de “Ecuación de Interpolación”. En la Fig. 5.2 se puede observar este proceso de interpolación para $B = \frac{f_s}{2} > f_m$, $2BT_s = 1$ y $t_0 = 0$, en cuyo caso $x_r(t) = x(t)$.

Nótese en la Fig. 5.2 que cada muestra produce una señal $\text{sinc}(\cdot)$, la cual es cero en los otros puntos de muestra excepto en el propio. Por consiguiente, $x_r(t)$ toma los valores de $x(t)$ en los puntos de muestra. Pero la interpolación dada por (5.4) nos asegura también que entre los puntos de muestra $x_r(t) = x(t)$ debido a la forma como se suman las señales $\text{sinc}(\cdot)$; de modo que con $2BT_s = 1$ y $t_0 = 0$, se tiene la “Ecuación de Interpolación de Shannon”,

$$x_r(t) = x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}[2B(t - nT_s)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\text{sen}[2\pi B(t - nT_s)]}{2\pi B(t - nT_s)} \quad \text{para todo } t \quad (5.5)$$

Esta expresión se ha utilizado para demostrar el Teorema del Muestreo de Shannon.

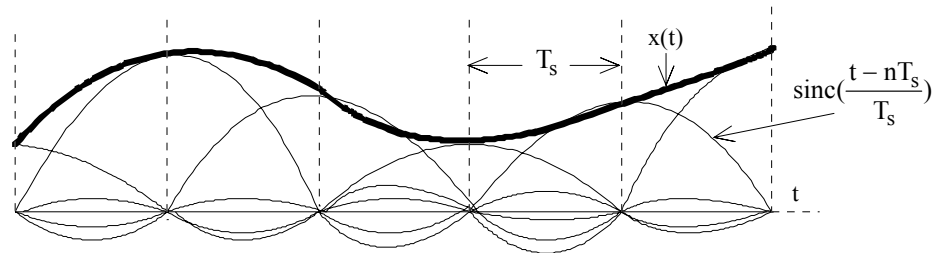


Fig. 5.2. Interpolación Lineal mediante la Señal Sinc(..).

Vemos entonces que si $f_s > 2f_m$ y $B = f_s / 2$, entonces la señal reconstruida $x_r(t)$ será exactamente igual a $x(t)$. Si se viola la restricción sobre el ancho de banda de $x(t)$, entonces $x_r(t)$ no será igual a $x(t)$. Sin embargo, podemos demostrar que si $B = f_s / 2$, entonces para cualquier valor de T_s y f_m , $x_r(t)$ y $x(t)$ serán iguales pero solamente en los instantes de muestreo. En efecto, si reemplazamos $B = f_s / 2 = 1 / 2T_s$ y $t_0 = 0$ en (5.4), obtenemos

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right) \quad (5.6)$$

En el instante kT_s , donde k es un entero, la expresión (5.6) queda en la forma

$$x_r(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \text{sinc}(k-n) = x(kT_s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(k-n)$$

Sea $m = k - n$, donde m es un entero pues k y n son enteros. De las propiedades de la función $\text{sinc}(\cdot)$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(m) = \begin{cases} 1 & \text{para } m = 0 \text{ ó } k = n \\ 0 & \text{para } m \neq 0 \text{ ó } k \neq n \end{cases}$$

Por consiguiente, $x_r(t) = x(kT_s)$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$x_r(t)$ y $x(t)$ tendrán la forma aproximada mostrada en la Fig. 5.3.

Nótese que $x_r(t)$ y $x(t)$ son iguales solamente en los instantes de muestreo, y $x_r(t)$ aparece como una señal de menor frecuencia que $x(t)$. A medida que disminuye la frecuencia f_m de $x(t)$, las curvas se superponen en una sola y $x_r(t) = x(t)$ para todo t .

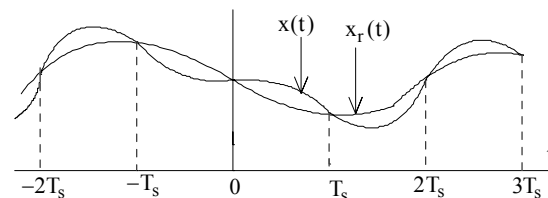


Fig. 5.3.

Si se muestrea periódicamente una señal $x(t)$ durante un tiempo $T = NT_s$, se tendrá N valores o muestras de la señal; entonces, de acuerdo con el teorema de Shannon, $T_s = \frac{1}{2f_m}$ y el número mínimo de muestras necesarias para una buena reconstrucción de la señal $x(t)$ será

$$N = 2f_m T \quad (5.7)$$

Esta expresión, estudiada por Nyquist, es conocida también con el nombre de “dimensionalidad o teorema de la dimensionalidad”. En rigor, las muestras no necesariamente deben ser periódicas de período T_s , pero sí deben ser independientes. El teorema de la dimensionalidad simplemente establece que la información contenida en una señal de banda limitada es proporcional al producto tiempo-ancho de banda. Este sencillo enunciado tiene, sin embargo, profundas implicaciones en el diseño y prestaciones de todos los tipos de sistemas de comunicación; por ejemplo, en sistemas de radar es bien conocido que el producto “tiempo-ancho de banda” de la señal recibida necesita ser muy alto para un mejor comportamiento. Los valores de muestra, una vez codificados digitalmente, se pueden almacenar en la memoria de una computadora para posterior reconstrucción o transmisión por un canal. Esto es de gran importancia en los sistemas de procesamiento y transmisión de señales digitales, como veremos posteriormente.

Teorema de Parseval para Señales Muestreadas

La ecuación de interpolación de Shannon, expresión (5.5), se puede utilizar para determinar una forma del Teorema de Parseval en el caso de señales muestreadas. En efecto, la energía de $x(t)$ viene dada por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

Como la potencia es igual a la energía por unidad de tiempo, podemos aproximar la potencia promedio de $x(t)$ dividiendo E_x por T_s ,

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{E_x}{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (5.8)$$

Reemplazando (5.4) con $2BT_s = 1$ y $t_0 = 0$ en (5.8),

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}[2B(t - nT_s)] \right] dt$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{sinc}[2B(t - nT_s)] dt$$

Pero de las propiedades de la función $\text{sinc}(\cdot)$, expresión (1.49),

$$\frac{1}{2B} \int_{-B}^B \exp[-j2\pi(t - nT_s)f] df = \text{sinc}[2B(t - nT_s)], \text{ entonces}$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2B} \int_{-B}^B \exp[-j2\pi(t - nT_s)] df \right] dt$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2BT_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-B}^B \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \right] \exp(j2\pi nT_s f) df$$

La integral dentro de los corchetes es igual a $X(f)$, de donde

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2BT_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-B}^B X(f) \exp(j2\pi nT_s f) df$$

Como $X(f)$ es de banda limitada $f_m = B$, la integral de la expresión anterior representa a $x(t)$ en los instantes discretos nT_s , es decir, la integral es igual a $x(nT_s)$. Por consiguiente,

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2f_m T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_s)$$

Como $X(f)$ es de banda limitada $f_m = B$, y para $2BT_s = 2f_m T_s = 1$, $x(t) = x_r(t)$, entonces

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x_r^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_s) \quad (5.9)$$

La expresión (5.9) es una forma o aplicación del Teorema de Parseval para señales muestreadas. Esta expresión la aplicaremos más adelante.

Teorema N° 3. Muestreo de Señales Pasabanda

“Una señal $x(t)$ pasabanda de ancho de banda B y cuya frecuencia más alta es f_2 , se puede muestrear a una frecuencia mínima $f_s = 2f_2 / m$, donde m es la parte entera de la relación f_2 / B ”.

Sea $X_s(f)$ el espectro de la señal muestreada $x_s(t)$ a una frecuencia de muestreo f_s , y sea f_1 y f_2 los bordes de la banda de paso de $X(f)$, es decir, $B = |f_2 - f_1|$.

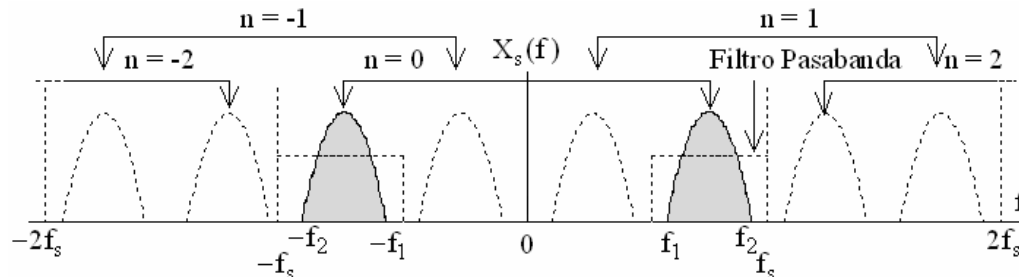


Fig. 5.4. Espectro de una Señal Pasabanda Muestreada.

En la Fig. 5.4 se muestra el espectro $X_s(f)$ de $x_s(t)$ en el cual, aunque $f_s < 2f_2$, no se produce solapamiento entre los espectros. Para señales pasabanda existe entonces una relación más general que la condición de Shannon, en la cual la frecuencia de muestreo puede tomar los valores [Hoffmann, 1975],

$$\frac{2}{m} f_2 \leq f_s \leq \frac{2}{m-1} f_1 \quad \text{para } m \text{ entero y } m > 1 \quad (5.10)$$

La frecuencia mínima de muestreo se puede expresar entonces en la forma $f_{s\min} = 2f_2 / m$

donde $m = \text{parte entera de } \left(\frac{f_2}{B}\right)$, siendo $B = |f_2 - f_1|$. Valores de frecuencia superiores no son necesariamente utilizables a menos que ellos cumplan con la condición (5.10) o que sean mayores que $2f_2$. Los valores permitidos de f_s se pueden representar en forma gráfica a partir del siguiente desarrollo. De (5.10),

$$f_s \geq \frac{2f_2}{m} \quad (5.11)$$

Si consideramos f_s como la frecuencia mínima de muestreo (convirtiendo la desigualdad (5.11) en una igualdad), se obtiene la relación

$$f_s = \left(\frac{2}{m}\right)f_2 \quad (5.12)$$

Graficando f_s vs f_2 en unidades de ancho de banda B , se obtiene el gráfico de la Fig. 5.5.

La frecuencia de muestreo mínima permitida depende entonces de la relación f_2 / B . Si $f_2 \gg B$, entonces la frecuencia de muestreo mínima tiende a $2B$; asimismo, su valor máximo será $4B$. Por consiguiente, la frecuencia mínima de muestreo de señales pasabanda estará siempre entre $2B$ y $4B$, donde B es el ancho de banda de la señal.

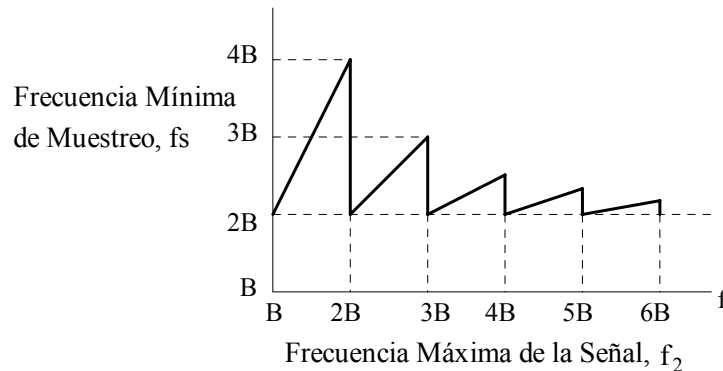


Fig. 5.5. Frecuencia Mínima de Muestreo Pasabanda

En cuanto a la reconstrucción de la señal original a partir de su forma muestreada, se puede utilizar un filtro pasabanda, como se muestra en las líneas a trazos en la Fig. 5. 4.

♣ Ejemplo 5.1

Consideremos una señal de audio que ha sido pasada por un filtro pasabajo ideal de ancho de banda $B = 5$ kHz. Para especificar esta señal sin ninguna distorsión, la frecuencia de muestreo debe ser como mínimo igual a $2B$, es decir, 10^4 muestras por segundo. Pero si la señal está desplazada en frecuencia de tal manera que la banda de paso se extiende desde $f_1 = 5$ kHz hasta $f_2 = 10$ kHz, entonces $B = 5$ kHz, $m = 2$, y del Teorema N° 3 la frecuencia mínima de muestreo será de 10^4 muestras por segundo. Vemos que las frecuencias de muestreo siguen siendo iguales. Sin embargo, si la gama de frecuencias se hubiese extendido desde $f_1 = 4,999$ kHz hasta $f_2 = 9,999$ kHz, entonces $B = 5$ kHz, $m = 1$ y la frecuencia mínima de muestreo será de 19998 muestras por segundo, es decir, casi $4B$ muestras por segundo.

En el primer caso se emplea una frecuencia de muestreo que es dos veces el ancho de banda de la señal, mientras que en el segundo caso se obtuvo una frecuencia de muestreo de aproximadamente cuatro veces el ancho de banda, que son los límites de la frecuencia mínima de muestreo y que están ilustrados en la Fig. 5.5.



Muestreo en el Dominio de la Frecuencia

Los teoremas anteriores han sido desarrollados para el muestreo en el dominio del tiempo de señales de banda limitada. Sin embargo, el muestreo puede también concebirse en el dominio de la frecuencia aunque no es tan directamente perceptible como lo es el muestreo en el dominio del tiempo. En el procesamiento de señales digitales se presenta el caso del muestreo en frecuencia cuando se trata de determinar numéricamente la Transformada de Fourier (Transformada de Fourier Discreta (DTF) y la Transformada de Fourier Rápida (FFT)) y en el análisis de imágenes y de voz. A este efecto, vamos a presentar el dual del Teorema N° 1, en el cual una señal limitada en el tiempo se puede representar y reconstruir a partir de sus muestras en el dominio de la frecuencia.

Teorema N° 4

“Si $X(f)$ es el espectro de frecuencias de una señal $x(t)$ limitada en el intervalo $(-T_m, T_m)$, entonces $X(f)$ se puede determinar unívocamente especificando sus valores en una serie de puntos separados cada $\frac{1}{2T_m}$ Hz”.

Para verificar este enunciado, consideremos el dual en el dominio de la frecuencia de las expresiones (5.1) y (5.2). Sea entonces $X(f)$ el espectro de una señal $x(t)$ limitada en el tiempo, y $\tilde{X}(f)$ el espectro muestreado de $X(f)$. En el dominio de la frecuencia,

$$\tilde{X}(f) = X(f) \cdot P(f) \quad (5.13)$$

$$\text{donde } P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \Leftrightarrow p(t) = \frac{1}{f_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{n}{f_0})$$

$$\text{y en el dominio del tiempo, } \tilde{x}(t) = x(t) * p(t) = \frac{1}{f_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - \frac{n}{f_0}) \quad (5.14)$$

siendo f_0 el intervalo de muestreo en frecuencia.

La expresión (5.14) es el dual de la expresión (5.2) y $x(t)$ es la señal generatriz de una señal periódica $\tilde{x}(t)$, Fig. 5.6 (b) y (f).

Si $x(t)$ es limitada en el tiempo de la forma

$$x(t) = 0 \quad \text{para } |t| > T_m \quad (5.15)$$

entonces, como se muestra en la Fig. 5.6, con $\frac{1}{f_0} > 2T_m$, $\tilde{x}(t)$ consistirá de réplicas periódicas de $x(t)$ separadas en múltiplos de $T_0 = 1/f_0$. En este caso, la señal $x(t)$ (y por supuesto, su transformada $X(f)$) se puede recuperar mediante el empleo de lo que se denomina “ventana temporal de ponderación, $v(t)$ ” que es el dual del filtro pasabajo definido en (5.3). En este caso

$$v(t) = f_0 \Pi\left(\frac{t}{1/f_0}\right) \quad \text{y} \quad x(t) = \tilde{x}(t) \cdot v(t) \quad (5.16)$$

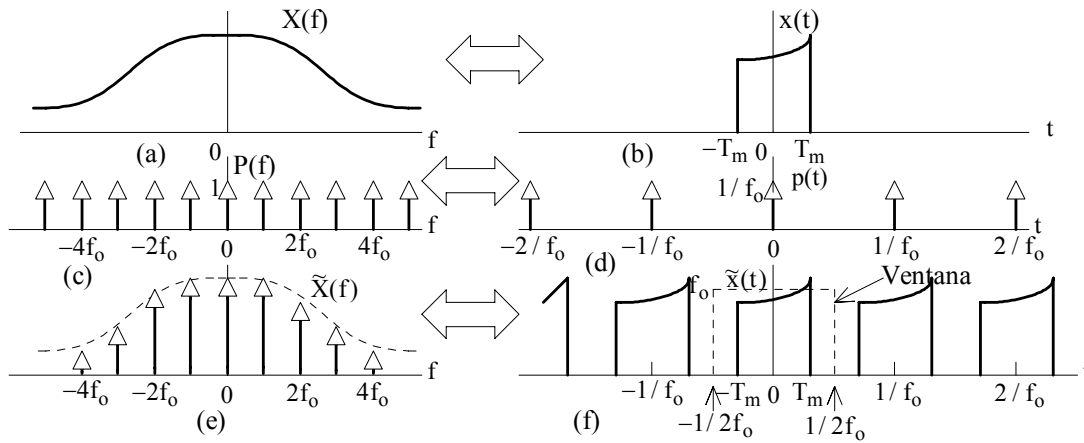


Fig. 5.6. Muestreo en el Dominio de la Frecuencia

Si la desigualdad $\frac{1}{f_0} > 2T_m$ no se cumple, entonces las réplicas de $x(t)$ se solaparán y $x(t)$ no podrá recuperarse a partir de $\tilde{x}(t)$, como puede observarse en la Fig. 5.6(f).

Mediante analogía con la interpolación en el dominio del tiempo, la recuperación de $x(t)$ utilizando la ventana temporal se puede interpretar como una interpolación en el dominio de la frecuencia. En efecto, de (5.16),

$$X(f) = \tilde{X}(f) * V(f) \quad (5.17)$$

donde $\tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \delta(f - nf_0)$ y $V(f) = \text{sinc}\left(\frac{f}{f_0}\right)$

por consiguiente,

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \text{sinc}\left(\frac{f - nf_0}{f_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \frac{\text{sen}[\pi(f - nf_0)/f_0]}{\pi(f - nf_0)/f_0} \quad \text{para todo } f \quad (5.18)$$

La expresión (5.18) es el dual de (5.5). En particular, la función $\text{sinc}(\cdot)$ permite la interpolación exacta entre muestras en el dominio de la frecuencia para una señal limitada en el tiempo, como lo era para muestras en el dominio del tiempo de una señal limitada en frecuencia.

El desarrollo anterior se ha efectuado para señales limitadas en el tiempo centradas en el origen, pero los resultados se pueden aplicar para cualquiera señal que exista en cualquier intervalo finito de duración $2T_m$.

♣ Ejemplo 5.2. El Osciloscopio de Muestreo

A menudo es necesario observar en un osciloscopio señales que varían mucho más rápido que el tiempo de alzada del osciloscopio y por lo tanto la observación no es posible. Sin embargo, si la señal es periódica, el resultado deseado se puede obtener indirectamente utilizando el Osciloscopio de Muestreo, cuyo principio de funcionamiento veremos a continuación.

El principio del Osciloscopio de Muestreo, como se muestra en la Fig. 5.7, consiste en muestrear la señal rápida $x(t)$ una vez cada período pero en diferentes puntos en los períodos

sucesivos. El incremento Δt , Fig. 5.7, debe ser un intervalo elegido apropiadamente según el ancho de banda de $x(t)$. Si el tren de impulsos resultantes $y_s(t)$ se pasa por un filtro interpolador pasabaja apropiado, su salida $y(t)$ será proporcional a la señal rápida original $x(t)$ pero expandida en el tiempo, es decir, $y(t)$ será proporcional a $x(\frac{t}{a})$ cuando $a \gg 1$. Por ejemplo, cada período de $x(t)$ tiene el mismo perfil que el de $y(t)$, pero se diferencia en el factor de expansión a , como se muestra en la Fig. 5.7. Para efectos ilustrativos en la Fig. 5.7, $a = 6$, pero en la práctica este valor es mucho mayor, es decir, $T \gg \Delta t$.

De la Fig. 5.7, si T es el período de $x(t)$, entonces la frecuencia de muestreo del osciloscopio será $f_s = 1/(T + \Delta t)$, con Δt tal que $T = a\Delta t$, pero como $T_y = aT_s$, entonces

$$f_s = \frac{1}{\Delta t(1+a)}; \quad \Delta t = \frac{1}{f_s(1+a)} \quad \text{con} \quad \frac{1}{2a\Delta t} < f_s < \frac{1}{a\Delta t}$$

Nótese que en la pantalla del osciloscopio aparece solamente $y_s(t)$, pero ella nos proporciona los valores de T_y y T_s . Esto nos permite obtener $a = T_y / T_s$ y $\Delta t = T_s / (1+a)$, de modo que, una vez determinados los valores de a y Δt , podemos conocer también el período de la señal desconocida $x(t)$ puesto que $T = a\Delta t$. La señal $y(t)$ se obtiene pasando $y_s(t)$ por un filtro pasabaja interpolador de ancho de banda $B = f_s / 2$. Las señales $y(t)$ y $x(t)$ tienen el mismo perfil.

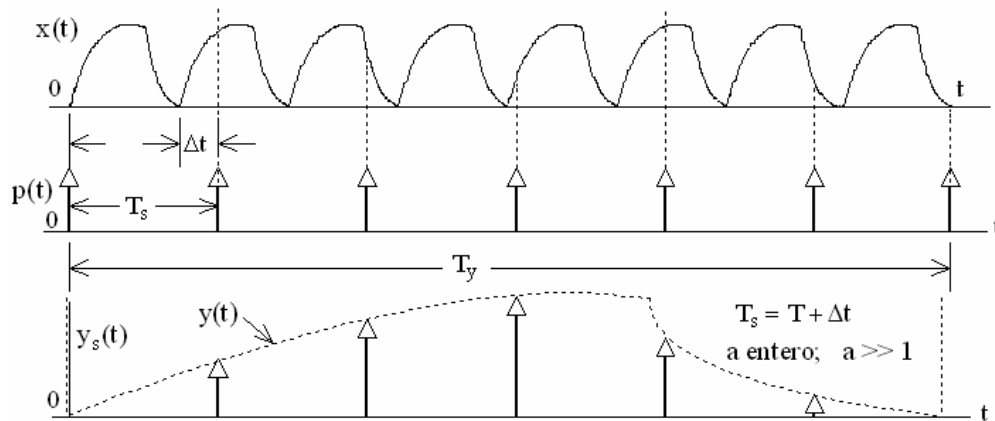


Fig. 5.7. Principio del Osciloscopio de Muestreo.

♣ Ejemplo 5.3

Sea el sistema de la Fig. 5.8(a) donde la señal periódica $p(t)$ tiene la forma mostrada en (b). Se desea calcular la salida $y(t)$ del filtro pasabaja.

Sea $x(t) = 5 \cdot \text{sinc}^2(5 \times 10^3 t) \Leftrightarrow X(f) = 10^{-3} \Lambda(\frac{f}{5 \times 10^3})$, de donde $f_m = 5 \times 10^3$ Hz.

Vamos a determinar $X_s(f)$ cuando el muestreo se efectúa a la frecuencia de Nyquist.

La frecuencia de muestreo de Nyquist es $f_s = 2f_m = 10^4$ Hz = 10 kHz

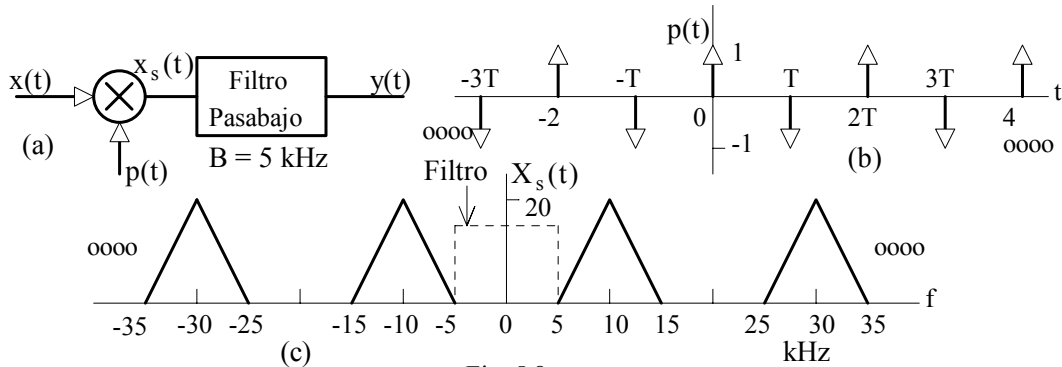


Fig. 5.8

De la Fig. 5.8(b),
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t - nT)$$

El espectro $P(f)$ de $p(t)$ se puede determinar siguiendo el mismo procedimiento del Ejemplo 1.28. En efecto, la función generatriz $g(t)$ de $p(t)$ es

$$g(t) = \delta(t) - \delta(t - T) \Leftrightarrow G(f) = 1 - \exp(-j2\pi Tf)$$

También, $f_s = \frac{1}{2T} = 10 \text{ kHz}$; $T = 5 \times 10^{-5} \text{ seg}$. De (1.103),

$$P_n = \frac{1}{2T} [1 - \exp(-j2\pi Tf)] \Big|_{f=\frac{n}{2T}} = \frac{1}{2T} [1 - \exp(-jn\pi)] = \frac{1}{T} \text{ para } n \text{ impar y } n \neq 0.$$

Entonces,
$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{2T}) & \text{para } n \text{ impar y } n \neq 0 \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Obsérvese que $P(f)$ no contiene una componente en el origen (cero componente continua) y por lo tanto $p(t)$ no podrá utilizarse para el muestreo de señales pasabajo. $X_s(f)$ será entonces,

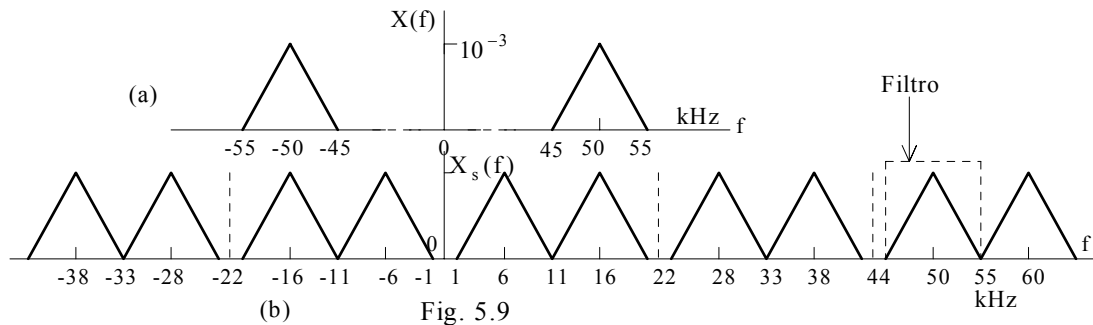
$$X_s(f) = X(f) * P(f) = \begin{cases} 20 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{f - 10^4 n}{5 \times 10^3}\right) & \text{para } n \text{ impar y } n \neq 0 \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

El espectro $X_s(f)$ tiene la forma mostrada en la Fig. 5.8(c). La salida del filtro pasabajo es cero. Nótese que, en general, la señal original podrá recuperarse a partir de su versión muestreada solamente si la señal muestreadora contiene una componente continua.



♣ Ejemplo 5.4

Sea $x(t) = 10\text{sinc}^2(5 \times 10^3 t) \cos(10^5 \pi t)$, una señal que vamos a muestrear y recuperar.



Del teorema de la modulación, $x(t) \Leftrightarrow X(f) = 10^{-3} \left[\Lambda\left(\frac{f + 5 \times 10^4}{5 \times 10^3}\right) + \Lambda\left(\frac{f - 5 \times 10^4}{5 \times 10^3}\right) \right]$

El espectro $X(f)$ se muestra en la Fig. 5.9(a), de donde

$$B = 10 \text{ kHz}; \quad f_2 = 55 \text{ kHz}; \quad \frac{f_2}{B} = 5,5 \rightarrow m = 5$$

$$f_s = \frac{2f_2}{m} = \frac{2 \times 55}{5} = 22 \text{ kHz}$$

El espectro $X_s(f)$ es el espectro $X(f)$ trasladado a las frecuencias $\pm n22 \text{ kHz}$, como se muestra en la Fig. 5.9(b). La señal original $x(t)$ se puede recuperar mediante un filtro ideal pasabanda centrado en $f = 50 \text{ kHz}$ y de ancho de banda $B = 10 \text{ kHz}$.

♣

5.2.3. Muestreo Práctico de Señales Pasabajo

En la sección anterior vimos que una señal se podía transmitir y recuperar si se muestreaba de manera instantánea y se recobraba mediante un filtro ideal. Pero en la práctica la situación es diferente: los impulsos de muestreo tienen una duración distinta de cero y los filtros interpoladores distan de ser ideales. Por otro lado, a menudo las señales están limitadas en el tiempo y por lo tanto no son de banda limitada como lo exige el teorema de Shannon. Un mejor conocimiento físico e intuitivo de los mecanismos y teoremas del muestreo se puede obtener si se considera circuitos reales, de fácil realización física. La distorsión producida por los circuitos reales de muestreo la trataremos en la próxima sección.

Dependiendo del uso que se hace de la señal muestreada, se pueden distinguir dos casos de muestreo práctico: el “muestreo natural” y el “muestreo con retención”, los cuales consideraremos a continuación.

Muestreo Natural

En la práctica, el muestreo debe ser realizado necesariamente con impulsos de amplitud finita y duración distinta de cero. El muestreo natural equivale a multiplicar la señal original por una señal muestreadora periódica rectangular de amplitud unitaria, período igual al intervalo de Shannon y valor promedio distinto de cero. Esta “multiplicación” generalmente se instrumenta con una compuerta analógica (por ejemplo, un MOSFET cualquiera), la cual deja pasar la señal cuando la señal muestreadora está en “ALTO” e impide el paso cuando está en “BAJO”, como se muestra en la Fig. 5.10(a).

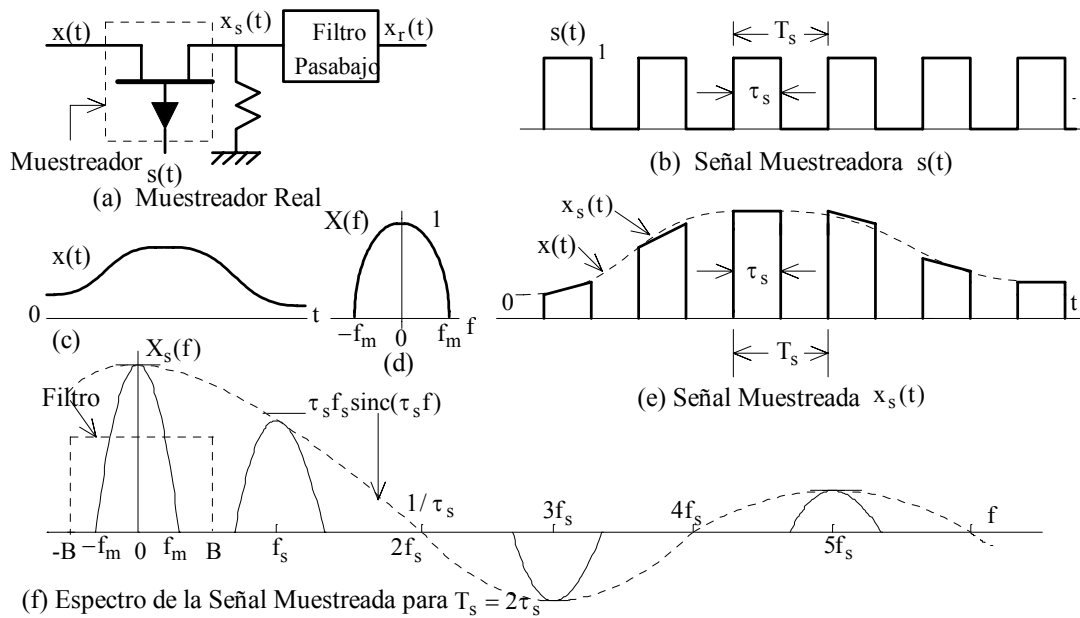


Fig. 5.10. Muestreo Natural de Señales Pasabajos

La señal muestreada, Fig. 5.10(e), tiene la forma $x_s(t) = x(t) \cdot s(t)$ (5.19)

donde $s(t)$ es una señal periódica rectangular, Fig. 5.10(b), cuya transformada de Fourier es, de (1.71) y (1.105),

$$S(f) = \tau_s f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau_s f_s) \delta(f - nf_s) \quad (5.20)$$

Del teorema de convolución, $X_s(f) = X(f) * S(f)$

$$\text{de donde } X_s(f) = \tau_s f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau_s f_s) X(f - nf_s) \quad (5.21)$$

El espectro $X_s(f)$ de la señal muestreada $x_s(t)$ es la repetición periódica, a las frecuencias $\pm nf_s$, del espectro $X(f)$ de la señal original; pero a diferencia del muestreo ideal, los espectros están ponderados por un factor de escala decreciente con nf_s que es $[\tau_s f_s \text{sinc}(n\tau_s f_s)]$, como se muestra en la Fig. 5.10(f).

Nótese que si $\frac{1}{\tau_s f_s} = \frac{T_s}{\tau_s}$ es un número entero, entonces a las frecuencias nf_s múltiplos de $1/\tau_s$ las correspondientes componentes de $X_s(f)$ serán cero. Nótese también que pese a que el muestreo no es instantáneo, no se produce distorsión: $x(t)$ se puede recuperar de $x_s(t)$ independientemente del valor de τ_s (pues, por definición, $\tau_s < T_s$), siempre que T_s cumpla con el teorema de Shannon.

La forma del espectro de la señal muestreada de la Fig. 5.10(f) sugiere la posibilidad de que se pueda muestrear una señal utilizando cualquiera señal periódica de período T_s que cumpla con el teorema de Shannon. Esto es más cierto por cuanto los circuitos electrónicos de conmutación no producen impulsos perfectamente rectangulares. Consideremos entonces una señal periódica $g_{T_s}(t)$ cuya señal generatriz $g(t)$ tiene cualquier perfil. La señal muestreada será

$$x_s(t) = x(t) \cdot g_{T_s}(t) \Leftrightarrow X_s(f) = X(f) * G_{T_s}(f)$$

donde $g_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT_s)$ y $g(t) \Leftrightarrow G(f)$

$$G_{T_s}(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(nf_s) \delta(f - nf_s) \quad \text{y} \quad X_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(nf_s) X(f - nf_s)$$

Esta expresión para $X_s(f)$ tiene la misma forma que (5.21) pero el factor de ponderación es $f_s G(nf_s)$, el cual se puede determinar fácilmente si $g(t)$ es conocida gráfica o analíticamente. Se puede decir entonces que una señal periódica cualquiera se puede utilizar para muestrear una señal de banda limitada B siempre que (a) su período T_s cumpla con el teorema de Shannon, y (b) que la señal periódica contenga una componente continua (Ver Ejemplo 5.3).

Para recuperar $x(t)$, la señal muestreada $x_s(t)$ se pasa por un filtro interpolador de la forma $H(f) = (T_s / \tau_s) \Pi(f / 2B)$ cuya ganancia es T_s / τ_s . Nótese que la ganancia del filtro interpolador en el caso de muestreo ideal, expresión (5.3), es T_s .

♣ Ejemplo 5.5. Potencia de una Señal Muestreada Natural

Consideremos la señal muestreada $x_s(t)$ dada por (5.19) donde $s(t)$ es una señal periódica rectangular de amplitud unitaria y ciclo de trabajo τ/T_s , Fig. 5.10(b). Puesto que $s(t)$ es periódica, ella puede desarrollarse en serie de Fourier; entonces, de (1.47),

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n| \cos(2\pi n f_s t + \phi_n)$$

$$x_s(t) = |S_0| x(t) + 2|S_1| x(t) \cos(2\pi f_s t + \phi_1) + 2|S_2| x(t) \cos(4\pi f_s t + \phi_2) + \dots$$

Si $x(t)$ es de banda limitada f_m y $f_s \geq 2f_m$, los términos de la expresión anterior no se solapan en el dominio de la frecuencia y la potencia promedio de $x_s(t)$ será la suma de las potencias de cada uno de los términos. En este caso,

$$\langle x_s^2(t) \rangle = |S_0|^2 \langle x^2(t) \rangle + 2|S_1|^2 \langle x^2(t) \rangle + 2|S_2|^2 \langle x^2(t) \rangle + \dots$$

$$\langle x_s^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle [|S_0|^2 + 2|S_1|^2 + 2|S_2|^2 + \dots]$$

Pero la cantidad dentro de los corchetes es, del Teorema de Parseval, la potencia promedio de la señal periódica $s(t)$; entonces,

$$\langle x_s^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle \cdot \langle s^2(t) \rangle$$

Pero $\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{\tau} dt = \frac{\tau}{T_s}$

La potencia promedio de una señal muestreada en forma natural es

$$\langle x_s^2(t) \rangle = \left(\frac{\tau}{T_s}\right) \langle x^2(t) \rangle \tag{5.22}$$

Diremos, sin demostrarlo, que la expresión (5.22) es válida también cuando $x(t)$ es una señal aleatoria pasabajo (ruido, por ejemplo).



Muestreo con Retención

Algunas veces es necesario disponer de los valores instantáneos de una señal en los instantes de muestreo nT_s para poderlos procesar o codificar. Con el muestreo natural la amplitud de las muestras varía en el intervalo τ_s y el sistema, por ejemplo un codificador, no sabría cuál es el valor exacto de $x(nT_s)$. Esta situación se resuelve manteniendo o reteniendo los valores instantáneos $x(nT_s)$ durante un tiempo apropiado. Esta operación se denomina “Muestreo con Retención (Sample and Hold)” o “Muestreo de Topes Planos”. En la Fig. 5.11 (a) y (b) se muestran las dos formas típicas de una señal muestreada con retención: “Con Retorno a Cero (RZ)” y “Sin Retorno a Cero (NRZ)”.

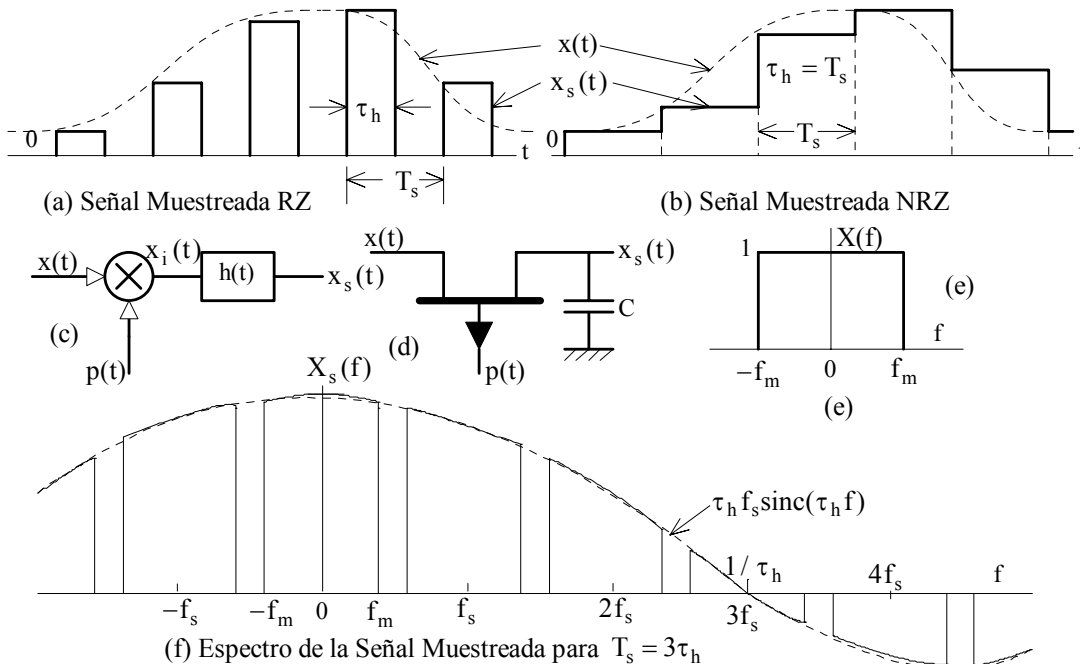


Fig. 5.11. Muestreo con Retención

Para propósito de análisis, el muestreo con retención se puede visualizar como una señal muestreada instantáneamente aplicada a un sistema lineal invariante en el tiempo de respuesta impulsional $h(t)$, como se muestra en la Fig. 5.11(c).

Puesto que $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \Leftrightarrow P(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$, entonces,

$$x_i(t) = x(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \Leftrightarrow X_i(f) = X(f) * P(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \quad (5.23)$$

$$X_s(f) = X_i(f) \cdot H(f) = [X(f) * P(f)] \cdot H(f) = \left[f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \right] \cdot H(f) \quad (5.24)$$

El sistema lineal en cuestión es el circuito de retención (zero-order hold) visto en el Ejemplo 2.17 y para el cual

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \tau_h/2}{\tau_h}\right) \Leftrightarrow H(f) = \tau_h \text{sinc}(\tau_h f) \cdot \exp(-j\pi\tau_h f) \quad (5.25)$$

En el caso de muestreo con retorno a cero (RZ), $\tau_h < T_s$; τ_h se denomina “tiempo de retención”. Si el muestreo es sin retorno a cero (NRZ), simplemente se reemplaza τ_h por T_s . La duración de τ_h depende de la utilización que se haga de la señal muestreada; por ejemplo, si se trata de codificar una muestra $x(kT_s)$, el tiempo τ_h deberá ser lo suficientemente largo para que se pueda efectuar la codificación. El tiempo de conversión generalmente es un parámetro dado por los fabricantes de los codificadores. Si t_c es el tiempo de conversión del codificador, debe verificarse entonces que $t_c \leq \tau_h$.

$$\text{De (5.1) y (5.23), } x_s(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \right] * \Pi\left(\frac{t - \tau_h/2}{\tau_h}\right)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \Pi\left(\frac{t - \tau_h/2 - nT_s}{\tau_h}\right) \quad (5.26)$$

cuya transformada de Fourier es, de (5.24),

$$X_s(f) = \tau_h f_s \text{sinc}(\tau_h f) \exp(-j\pi\tau_h f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \quad (5.27)$$

En la Fig. 5.11(f) se muestra $X_s(f)$ cuando $\tau_h = T_s/3$. Nótese que si $f_s < 2f_m$ se produce solapamiento. Por otra parte, el efecto del tiempo de retención τ_h se refleja en $H(f)$ produciendo ceros a las frecuencias k/τ_h . Las réplicas de $X(f)$ tendrán distorsión de amplitud: simétrica en el origen y asimétrica en las frecuencias nf_s . Esta distorsión en el espectro muestreado hace que la interpolación o recuperación exacta de $x(t)$ no sea posible con un filtro pasabajo. Esta distorsión se conoce con el nombre de “efecto de apertura” y es una distorsión de tipo lineal. El efecto de apertura se puede disminuir haciendo τ_h más pequeño y puede ser eliminado mediante una red equalizadora. En la próxima sección veremos esto con más detalle.

El muestreo con retención se realiza en la práctica agregando un capacitor a la salida de una compuerta analógica, como se muestra en la Fig. 5.11(d). El capacitor se carga cuando $s(t)$ está en “ALTO” y mantiene ese valor cuando $s(t)$ está en “BAJO”. En la Fig. 5.12 se muestra algunos muestreadores con retención usados en nuestro laboratorio. En particular, el circuito mostrado en (a) se utiliza cuando se necesita una alta impedancia para la señal de entrada $x(t)$ y una baja impedancia para la carga y descarga del capacitor C .

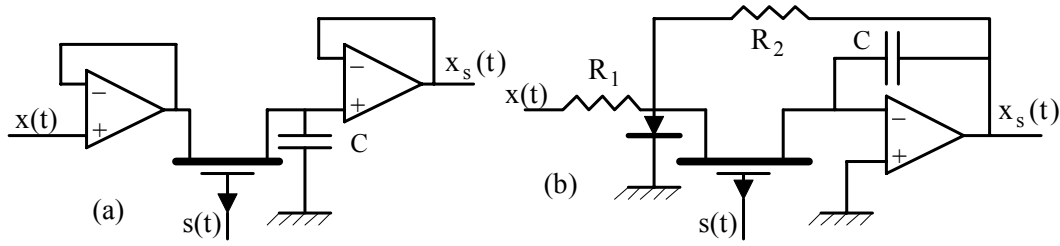


Fig. 5.12. Muestreadores con Retención.

Los circuitos muestreadores prácticos difieren de los ideales en que mientras la compuerta permanece cerrada, la corriente de carga del capacitor está limitada por la resistencia combinada de la compuerta y de la impedancia de salida de la fuente, lo que hace que el voltaje en el capacitor no alcance exactamente el valor $x(nT_s)$. Asimismo, cuando la compuerta abre, el capacitor tratará de descargarse sobre la impedancia de salida, la cual debe ser lo más alta posible. El valor de la capacitancia utilizada en una aplicación dada se elige generalmente mediante un compromiso entre la minimización de la constante de tiempo de carga y la maximización de la constante de tiempo de descarga o de fuga, sobretodo si la salida es sin retorno a cero (NRZ). La situación se simplifica un poco si la salida es con retorno a cero (RZ), pues, por un lado disminuye la distorsión por efecto de apertura, pero por otro lado el circuito se complica porque hay que agregar una compuerta adicional que descarga a cero al capacitor, para no hablar del aumento en el ancho de banda.

♣ Ejemplo 5.6. Potencia de una Señal Muestreada con Retención

Consideremos una señal muestreada con retención a la cual se le ha agregado una componente continua a fin de que la amplitud de los impulsos sea siempre positiva (> 0). Esta señal muestreada, Fig. 5.13, se puede representar en la forma

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A + x(nT_s)] \Pi\left(\frac{t - nT_s}{\tau}\right)$$

donde $[A + x(t)] > 0$; suponemos que $< x(t) \geq 0$.

La potencia promedio de $x_s(t)$ es simplemente la suma de la potencia de cada uno de los infinitos impulsos de amplitud $[A + x(nT_s)]$, duración τ y

período T_s , Fig. 5.13. Entonces,

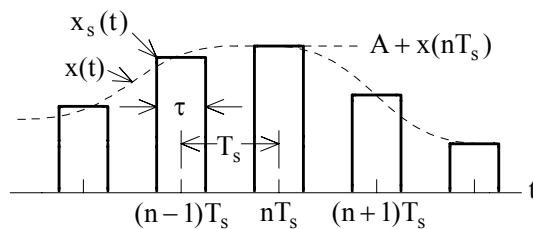


Fig. 5.13. Señal Muestreada con Retención.

$$\begin{aligned} \langle x_s^2(t) \rangle &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} [A + x(nT_s)]^2 dt = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A^2 \int_0^{\tau} dt + 2Ax(nT_s) \int_0^{\tau} dt + x^2(nT_s) \int_0^{\tau} dt \right] \\ &= \frac{\tau}{T_s} A^2 + \frac{2A\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) + \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_s) \end{aligned}$$

Puesto que $\langle x(t) \rangle = 0$, entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) = 0$, y de la expresión (5.9),

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_s) = \langle x^2(t) \rangle$$

La potencia promedio de la señal muestreada con retención será entonces

$$\langle x_s^2(t) \rangle = \frac{\tau}{T_s} A^2 + \frac{\tau}{T_s} \langle x^2(t) \rangle = \frac{\tau}{T_s} [A^2 + \langle x^2(t) \rangle] \quad (5.28)$$

$$\text{y si } A = 0, \quad \langle x_s^2(t) \rangle = \frac{\tau}{T_s} \langle x^2(t) \rangle \quad (5.29)$$

La potencia de la señal muestreada con retención es igual a τ/T_s veces la potencia de la señal original. El muestreo con retención, igual que el muestreo natural, reduce la potencia de la señal de entrada en un factor τ/T_s , puesto que $\tau < T_s$. Si el muestreo es NRZ, la potencia de la señal muestreada tiende en promedio a la potencia de la señal sin muestrear.

♣

♣ Ejemplo 5.7

Consideremos el muestreador con retención de la Fig. 5.11(c) donde $p(t)$ es un tren de impulsos rectangulares de amplitud unitaria, período T_s y duración τ_s . Vamos a determinar el espectro $X_s(f)$ de la señal muestreada y dibujarla para algunos valores numéricos, con

$$x(t) = 2A \text{sinc}(2Bt) \Leftrightarrow X(f) = \frac{A}{B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \quad \text{y}$$

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \tau_h/2}{\tau_h}\right) \Leftrightarrow H(f) = \tau_h \text{sinc}(\tau_h f) \exp(-j\pi\tau_h f)$$

Tenemos entonces que $x_s(t) = x_1(t) * h(t)$ donde $x_1(t) = x(t) \cdot p(t)$

$$\text{De (5.19) y (5.21),} \quad X_1(f) = \tau_s f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau_s f_s) \frac{A}{B} \Pi\left(\frac{f - nf_s}{2B}\right)$$

$$\text{pero} \quad X_s(f) = X_1(f) \cdot H(f) = \frac{A\tau_h\tau_s f_s}{B} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau_s f_s) \Pi\left(\frac{f - nf_s}{2B}\right) \right] \text{sinc}(\tau_h f) \exp(-j\pi\tau_h f)$$

$$X_s(f) = \frac{A\tau_h\tau_s f_s}{B} \exp(-j\pi\tau_h f) \text{sinc}(\tau_h f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau_s f_s) \Pi\left(\frac{f - nf_s}{2B}\right)$$

Este es el espectro $X_s(f)$ de la señal muestreada $x_s(t)$. Para dibujar su amplitud, vamos a suponer una frecuencia de muestreo del doble de la de Nyquist, y los siguientes valores numéricos:

$$A = 10 \text{ V}; \quad \tau_s = \frac{T_s}{2}; \quad \tau_h = \frac{T_s}{4}; \quad B = 5 \text{ kHz}$$

$$\text{Calculemos: } \begin{cases} f_m = B = 5 \text{ kHz}; & f_s = 4f_m = 4B = 20 \text{ kHz}; & T_s = \frac{1}{f_s} = 50 \times 10^{-6} \text{ seg.} \\ \tau_s = 25 \times 10^{-6} \text{ seg}; & \tau_h = 12,5 \times 10^{-6} \text{ seg} \end{cases}$$

La expresión para $X_s(f)$ será

$$X_s(f) = \begin{cases} 12,5 \times 10^{-9} \exp(-j12,5 \times 10^{-6} f) \text{sinc}\left(\frac{f}{8 \times 10^4}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} \Pi\left(\frac{f - 2 \times 10^4 n}{10^4}\right) & n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par y } n = 0 \end{cases}$$

En la Fig. 5.14(b) se muestra la forma del espectro $X_s(f)$, amplitud solamente.

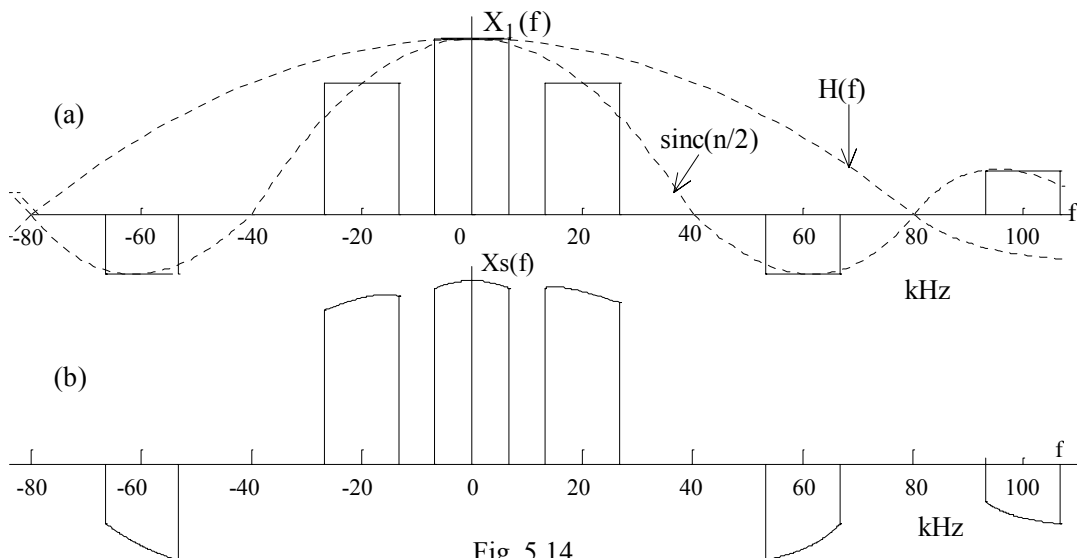


Fig. 5.14

♣

5.2.4. Distorsión producida por el Muestreo

En el proceso de muestreo y reconstrucción de una señal se producen varias formas de distorsión, algunas de las cuales pueden ser eliminadas mediante filtros ecualizadores apropiados.

Los tres tipos de distorsión presentes en el muestreo son la “Distorsión de Solapamiento (Aliasing)”, la “Distorsión de Interpolación” y la “Distorsión por Efecto de Apertura”. Vamos a ver con algún detalle cada tipo de distorsión señalando sus causas y mostrando los medios para evitarla o eliminarla.

Distorsión de Solapamiento (Aliasing)

En la práctica las señales no son estrictamente limitadas en banda y al muestrearse a las frecuencias usuales se produce solapamiento entre espectros adyacentes, como se muestra en la Fig. 5.15.

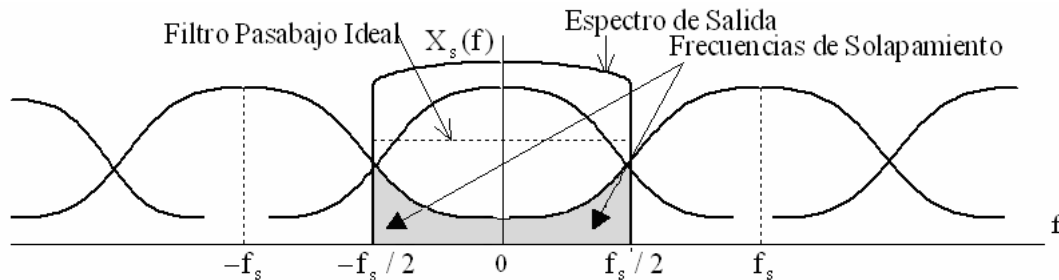


Fig. 5.15. Solapamiento de Espectros.

La distorsión de solapamiento hace que componentes de frecuencia superiores a $f_s/2$ sean reflejadas hacia las frecuencias bajas por debajo de $f_s/2$. Por ejemplo, si una señal sinusoidal de 60 Hz se muestrea a 100 muestras por segundo, al recuperarse mediante un filtro de ancho de banda de 60 Hz aparecerá una componente de frecuencia de 40 Hz no presente en la señal original.

Las componentes de frecuencia que se reflejan o invierten hacia las bajas frecuencias se denominan “frecuencias de solapamiento (folding frequencies)”, y ellas afectan seriamente la inteligibilidad de las señales de voz en los sistemas telefónicos. Sin embargo, este efecto de inversión se puede utilizar acentuándolo para efectuar la inversión completa del espectro, método utilizado para preservar la privacidad de las conversaciones telefónicas.

Para eliminar el efecto de las frecuencias de solapamiento, la práctica usual es la de filtrar previamente la señal a una frecuencia del 35% al 40% de la frecuencia de muestreo a fin de asegurarse que no hay componentes significativas más allá de $f_s/2$. La eliminación de las componentes en la parte alta de la gama de la señal degrada la fidelidad de la transmisión hasta cierto punto, pero el efecto de la pérdida de inteligibilidad es mucho menor que si se permitiera el solapamiento. Como ejemplo, en la telefonía digital las señales de voz se filtran a 3200 Hz antes de ser muestreadas a 8000 muestras por segundo. En el Problema de Aplicación 5.10 se cuantifica el efecto de la distorsión de solapamiento.

Distorsión de Interpolación

Para la recuperación de la señal original siempre hemos supuesto filtros ideales con bordes abruptos en las frecuencias de corte. Pero los filtros prácticos no poseen esas características y una cierta cantidad de la energía de los espectros adyacentes puede pasar a la salida. Esto se muestra en la Fig. 5.16.

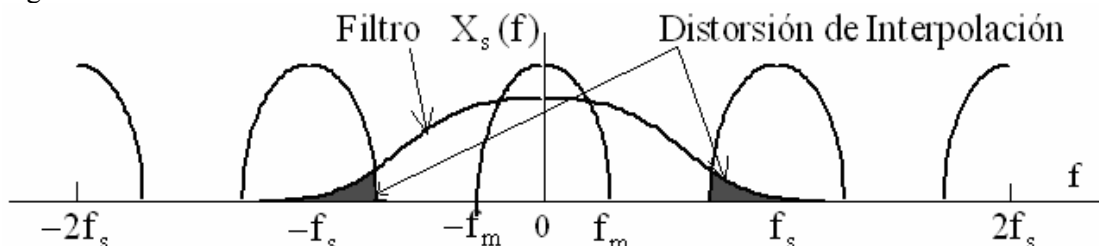


Fig. 5.16. Distorsión de Interpolación.

Nótese que aunque la señal original es estrictamente de banda limitada y la frecuencia de muestreo cumple con el teorema de Shannon, las colas del filtro permiten el paso de componentes de frecuencia de espectros adyacentes. El efecto de la distorsión de interpolación es la aparición de un silbido o “pito” de alta frecuencia en la señal recuperada.

La distorsión de interpolación se puede eliminar mediante un diseño apropiado de los filtros, tales como los filtros Butterworth de tercer o cuarto orden. En el Problema de Aplicación 5.12 se cuantifica el efecto de la distorsión de interpolación.

Distorsión por Efecto de Apertura

El efecto de apertura es una forma de distorsión de amplitud propia del muestreo con retención. Esta distorsión es producida por el producto de los espectros desplazados por la función de transferencia $H(f) = \tau_h \text{sinc}(\tau_h f)$, como se puede apreciar en las Figs. 5.11 y 5.14.

Como éste es un tipo de distorsión lineal, tanto $x_s(t)$ como la salida del filtro de interpolación se pueden procesar en un filtro ecualizador $H_e(f)$ que cancele el efecto de $H(f)$. Este proceso se muestra en la Fig. 5.17.

La función de transferencia $H_e(f)$ del filtro ecualizador debe ser el inverso de $H(f)$ para que se cancelen los efectos de la distorsión de apertura sobre la amplitud de la señal recuperada.

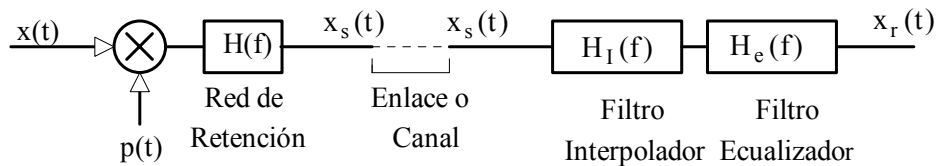


Fig. 5.17. Compensación del Efecto de Apertura.

$$\text{Entonces, } H_e(f) = \frac{1}{H(f)} \text{ para } |f| \leq B$$

$$\text{o también, } H_e(f) = \frac{1}{\tau_h \text{sinc}(\tau_h f)} \text{ para } |f| \leq B \quad (5.30)$$

donde B es el ancho de banda del filtro de interpolación $H_I(f)$. $H_e(f)$ debe tener la forma aproximada mostrada en la Fig. 5.18.

Nótese que si el tiempo de retención τ_h es lo suficientemente pequeño, la variación de $H(f)$ para $|f| \leq B$ puede ser despreciable y el filtro ecualizador puede no ser necesario. En efecto, sucede que mientras $\frac{\tau_h}{T_s} \leq \frac{1}{4}$, la

máxima diferencia entre la salida ideal $X(f)$ y la salida $X_s(f)$ para $|f| \leq B = f_m$ es menor del 3%.

En la práctica se puede omitir entonces el filtro ecualizador cuando $\tau_h \leq \frac{T_s}{4}$ ó $T_s \geq 4\tau_h$.

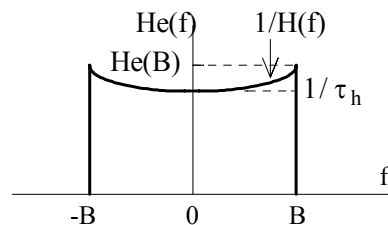


Fig. 5.18. Filtro Compensador del Efecto de Apertura.

5.3. SISTEMAS DE MODULACION ANALOGICA DE IMPULSOS

5.3.1. Introducción

De acuerdo con la definición de información que vimos en el Capítulo IV, un tren de impulsos periódicos, por ejemplo, no contiene ninguna clase de información. Un tren de impulsos está caracterizado por su amplitud, su período y la duración de cada impulso. Si en alguna forma se imprimiera sobre alguno de estos parámetros una variación proporcional a alguna otra señal, y que esta operación fuera reversible, se tendría lo que se conoce como “Modulación Analógica de Impulsos”.

Un mensaje adecuadamente descrito por sus valores de muestra se puede transmitir mediante la modulación analógica de un tren de impulsos. En la modulación analógica de impulsos cada valor de muestra hace variar proporcionalmente uno de los parámetros de cada impulso; el tren de impulsos, así modulado, puede transmitirse y en el destino se le puede extraer la información contenida en ella. Nótese que cada impulso dispone, para su transmisión, de todo el ancho de banda del canal pero sólo lo ocupa durante parte de un intervalo T_s .

Hay varias formas de modulación analógica de impulsos, pero tres son las más conocidas y utilizadas:

1. La “Modulación de Amplitud de Impulsos (Pulse-Amplitude Modulation, PAM)”, en la cual la altura o amplitud de cada impulso varía en función del valor de muestra de la señal mensaje. El período y la duración de los impulsos no cambian.
2. La “Modulación de Duración o Anchura de Impulsos (Pulse-Duration (Width) Modulation, PDM o PWM)”, en la cual la duración de cada impulso varía en función del valor de muestra de la señal mensaje. El período y la amplitud de los impulsos no cambian.
3. La “Modulación de Posición de Impulsos (Pulse-Position Modulation, PPM)”, en la cual la posición de cada impulso varía, respecto a un punto de referencia, en función del valor de muestra de la señal mensaje. La amplitud y la duración de los impulsos no cambian.

En la Fig. 5.19 se muestra una señal mensaje típica $m(t)$ y las tres formas de modulación analógica de impulsos correspondientes.

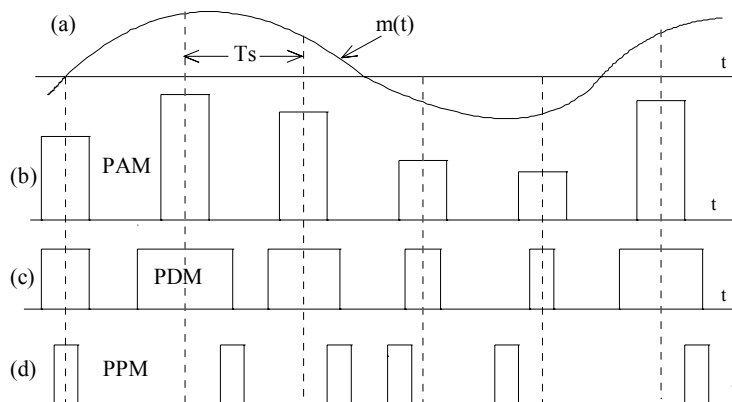


Fig. 5.19. Formas Básicas de la Modulación Analógica de Impulsos.

5.3.2. Modulación de Amplitud de Impulsos (PAM)

En la modulación PAM, vimos, la amplitud de cada impulso varía proporcionalmente con cada valor de muestra de la señal mensaje $m(t)$; por lo tanto, una señal PAM no es otra cosa que una señal muestreada con retención, como la señal PAM mostrada en la Fig. 5.19(b).

Una señal $x_{\text{PAM}}(t)$ unipolar con retorno a cero tiene entonces la forma, de (5.26),

$$x_{\text{PAM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A + m(nT_s)] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{\tau}\right) \quad (5.31)$$

donde $A > |\min m(t)|$ es una constante que se agrega a $m(t)$ para evitar, para efectos de sincronización, que los impulsos modulados puedan ser de amplitud cero o negativa, T_s es el intervalo de Shannon, τ la duración de los impulsos y $|\min m(t)|$ es el valor de la máxima excursión negativa de $m(t)$. Se supone también que $\langle m(t) \rangle = 0$. Nótese que en ausencia de modulación [$m(t) = 0$], la expresión (5.31) se convierte en un tren de impulsos periódicos de amplitud A , período T_s y duración τ , que representa la portadora sin modular.

Como la expresión (5.31) tiene la misma forma que la expresión (5.26), excepto por la constante A , se sigue que sus espectros serán iguales (salvo por un impulso en el origen). La recuperación o demodulación se efectúa mediante filtros interpoladores y ecualizadores, como se describió en la sección anterior.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas PAM

La señal PAM está formada por impulsos rectangulares de amplitud variable y duración τ que se transmiten directamente por un canal de ancho de banda B . En general, este tipo de transmisión se denomina “Transmisión en Banda de Base”, pues las señales se transmiten tal como se generan, sin ningún otro tipo de modulación. Si el ancho de banda del canal fuera igual a f_m , él se comportaría como un interpolador, la transmisión sería analógica continua y el proceso de muestreo no tendría sentido. Anchos de banda ligeramente mayores que f_m producirían solapamiento en el tiempo (time crosstalk) lo que introduce distorsión. Por otro lado, anchos de banda muy grandes no son necesarios. Como la señal PAM es interpolada en base a sus valores de amplitud en los instantes de muestreo, y como estos valores se mantienen aún cuando $B = \frac{1}{\tau}$, se puede tomar este valor como el mínimo ancho de banda B , el cual se denomina “Ancho de Banda de la Banda de Base”. Entonces,

$$\text{En PAM,} \quad B \geq \frac{1}{\tau} \quad (5.32a)$$

Si $\frac{T_s}{\tau} = k$, donde $k > 1$, y $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2f_m}$, entonces

$$B \geq 2kf_m \quad \text{y} \quad \beta_m = \frac{B}{f_m} \geq 2k \quad (5.32b)$$

Nótese que $\beta_m = B/f_m$ es “la relación o factor de expansión del ancho de banda” definida en el Capítulo IV. Como $k > 1$ y puede variar según la aplicación, entonces se tendrá que

$\beta_m \gg 1$, lo cual indica que el sistema PAM es un sistema de banda ancha que puede permitir el intercambio de ancho de banda por relación S/N, como veremos más adelante.

En cuanto a las relaciones S/N en PAM, consideremos el receptor PAM de la Fig. 5.20. Para permitir el funcionamiento en multiplex, que veremos en detalle más adelante, el receptor está abierto cuando no hay presencia de impulsos y cerrado cuando éstos están presentes. Este funcionamiento intermitente constituye, para las perturbaciones presentes en la entrada, un muestreo de tipo natural. Este muestreo, gracias a los dispositivos de sincronización del receptor, se hace a la misma frecuencia que el muestreo del mensaje en la emisión. Como consecuencia, el muestreo en el receptor no afecta a la señal útil pero sí al ruido presente a la entrada.

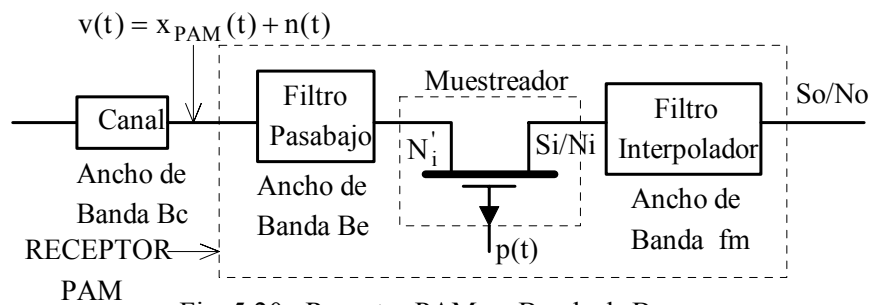


Fig. 5.20. Receptor PAM en Banda de Base

Si el ancho de banda B_e del filtro de entrada es lo suficientemente ancho y el sistema está sincronizado, tanto el filtro de entrada como el sincronizador serán transparentes para la señal PAM, apareciendo ésta a la entrada del filtro interpolador.

A la entrada del receptor PAM, Fig. 5.20, la señal recibida es

$$v(t) = x_{PAM}(t) + n(t) \quad (5.33)$$

donde $n(t)$ es ruido blanco de densidad espectral $\eta/2$.

Del Ejemplo 5.6, expresión (5.28), la potencia promedio de $x_{PAM}(t)$ es

$$\langle x_{PAM}^2(t) \rangle = \frac{\tau}{T_s} [A^2 + \langle m^2(t) \rangle] \quad (5.34)$$

A la entrada del filtro interpolador la potencia de la señal útil será

$$S_i = \frac{\tau}{T_s} \langle m^2(t) \rangle \quad (5.35)$$

$$\text{y a la salida, } S_o = G_p \frac{\tau}{T_s} \langle m^2(t) \rangle = \frac{T_s}{\tau} \langle m^2(t) \rangle \quad (5.36)$$

donde $G_p = \left(\frac{T_s}{\tau}\right)^2$ es la ganancia de potencia del filtro interpolador. Se supone que el filtro ecualizador no es necesario, es decir, que $T_s \gg \tau$.

En cuanto al ruido, la densidad espectral a la salida del filtro de entrada tendrá la forma de la Fig. 5.21. La potencia de ruido a la entrada del muestreador será

$$N'_i = \eta B_e$$

y a la entrada del filtro interpolador, de (5.22),

$$N_i = \left(\frac{\tau}{T_s}\right) N'_i = \left(\frac{\tau}{T_s}\right) \eta B_e ; B_e \gg f_m \quad (5.37)$$

Podemos demostrar que la densidad espectral de ruido a la salida del muestreador es

$$S_{ni}(f) = \left(\frac{\tau}{T_s}\right)^2 \frac{\eta}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(n \frac{\tau}{T_s}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f - nf_s}{2B_e}\right) \quad (5.38)$$

La densidad espectral de ruido disponible a la entrada del filtro interpolador de ancho de banda f_m se puede aproximar entonces en la forma

$$S_{nid}(f) \approx \left(\frac{\tau}{T_s}\right) \frac{\eta}{2} \quad \text{para } |f| \leq f_m \text{ y } T_s \gg \tau \quad (5.39)$$

A la salida del filtro interpolador de ancho de banda f_m y ganancia de potencia G_p , la potencia de ruido será entonces

$$N_o = G_p \left(\frac{\tau}{T_s}\right) \eta f_m = \frac{T_s}{\tau} \eta f_m \quad (5.40)$$

Las relaciones S/N entrada-salida serán, con $B_e = B$,

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{\eta B} \quad (5.41)$$

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{\eta f_m} \quad (5.42)$$

y la correspondiente ganancia de conversión,

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{B}{f_m} = \beta_m \quad \text{en PAM} \quad (5.43)$$

La ganancia de conversión en PAM es igual a la relación de expansión del ancho de banda. Esto nos permite expresar la ganancia de conversión en otra forma. En efecto, de (5.32), $B = 1/\tau$ y con $T_s = 1/2f_m$ la ganancia de conversión será

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 2 \frac{T_s}{\tau} \quad \text{en PAM} \quad (5.44)$$

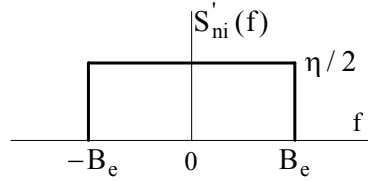


Fig. 5.21.

La ganancia de conversión en PAM depende también de la relación (T_s/τ) , es decir, de la relación de bloqueo del receptor. Nótese que el bloqueo del receptor permite aumentar la ganancia de conversión aunque a expensas de un aumento en el ancho de banda, y viceversa; hay entonces un intercambio o compromiso entre el ancho de banda y la relación S/N. Pero como el bloqueo del receptor no se hace para aumentar la ganancia de conversión sino para facilitar el funcionamiento en multiplex en canales de banda ancha, esto hace que el comportamiento de este sistema de modulación de impulsos sea superior, por ejemplo, al del sistema de doble banda lateral (DSB) de acuerdo con la expresión (2.164). En efecto, de (2.162) con $A_c = 1$, y (5.42), vemos que

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{PAM}} = 2 \frac{T_s}{\tau} \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{DSB}} \quad (5.45)$$

Aunque el receptor no estuviera bloqueado, en cuyo caso $\tau = T_s$, la relación $[S_o/N_o]_{\text{PAM}}$ es superior en 3 dB a la relación $[S_o/N_o]_{\text{DSB}}$; sin embargo, las ganancias de conversión serían iguales, lo que se puede apreciar haciendo $\tau = T_s$ en (5.44) y comparando con (2.164).

Como la información está contenida en la variación de la amplitud de los impulsos, los sistemas PAM son muy sensibles al ruido aditivo. En la práctica, la modulación PAM no se utiliza para transmisión directa de información sino como un paso previo de procesamiento, sobre todo en los sistemas de modulación de impulsos codificados (PCM), que veremos posteriormente.

5.3.3. Modulación de la Duración o Anchura de Impulsos (PDM o PWM)

En la modulación PDM la duración de los impulsos varía proporcionalmente a los valores de muestra de la señal mensaje, como se muestra en la Fig. 5.19(c). Obsérvese que el valor más positivo de $m(t)$ corresponde al impulso más ancho, mientras que el valor más negativo corresponde al impulso más angosto.

Como es evidente, hay que limitar las duraciones máximas y mínimas de los impulsos de tal manera que impulsos adyacentes no se solapen o que la duración mínima sea de tal magnitud que demande anchos de banda inadmisibles. A este efecto, el sistema PDM debe ser cuidadosamente diseñado de acuerdo con los niveles de señal máximos y mínimos esperados.

Una señal PDM tiene entonces la forma

$$x_{\text{PDM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \Pi \left[\frac{t - nT_s}{\tau(nT_s)} \right] \quad (5.46)$$

$$\text{donde } \tau(t) = \tau_o + \tau_1 m(t) = \tau_o [1 + m_t m(t)] = \tau_o [1 + \Delta(t)] \quad (5.47)$$

siendo $m_t = \frac{\tau_1}{\tau_o} \leq 1$ el “índice de modulación PDM” y $\Delta(t) = m_t m(t)$; τ_o es la duración de los impulsos no modulados.

Si T_s es el período o intervalo de Shannon, B el ancho de banda de transmisión y $\langle m(t) \rangle = 0$, los valores de τ_o y τ_1 se eligen de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones, ver Fig. 5.22.

$$T_s > \tau_{\text{max}} = \tau_o [1 + m_t |\max m(t)|] > \tau_o > \tau_{\text{min}} \quad (5.48)$$

$$\tau_{\text{min}} = \tau_o [1 - m_t |\min m(t)|] \geq \frac{1}{B} > 0 \quad (5.49)$$

$|\max m(t)|$ y $|\min m(t)|$ son los valores de las máximas excursiones positiva y negativa, respectivamente, de $m(t)$. Nótese que la expresión (5.49) implica que $m_t |\min m(t)| < 1$ o también que $\tau_o > \tau_1 |\min m(t)|$, lo cual nos asegura que el ancho mínimo del impulso nunca será cero o negativo.

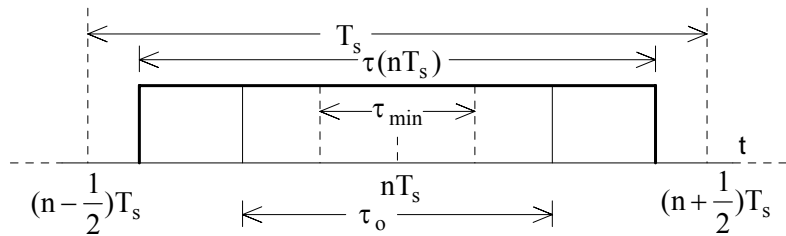


Fig. 5.22. Relaciones de Duración en PDM.

En la Fig. 5.22 se observa que la variación de la duración del impulso se efectúa simétricamente alrededor del instante de muestra nT_s , pero también se puede mantener fijo un borde del impulso mientras que el otro borde es el que se desplaza.

Demodulación PDM

La señal PDM se puede demodular con un simple filtro pasabajo, lo cual no parece tan obvio cuando se observa la forma de la señal. Para demostrarlo, primero hay que determinar el espectro de la señal PDM, lo cual es difícil de efectuar en el caso general. Sin embargo, si se supone el caso de modulación sinusoidal o modulación con un simple tono, la tarea se simplifica y el resultado se puede extender para el caso general.

Una forma de generación de una señal PDM se ilustra en la Fig. 5.23. En la misma figura se muestra el algoritmo de decisión del comparador y las relaciones entre los diferentes parámetros.

Un tren de impulsos sin modular, $x(t)$, se puede desarrollar en serie de Fourier de la forma

$$x(t) = X_o + 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(n\omega_s t) \quad \text{con} \quad \omega_s = 2\pi f_s; \quad f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2f_m$$

donde $X_n = \frac{A\tau}{T_s} \text{sinc}(nf_s\tau) = \frac{A}{n\pi} \text{sen}(n\pi f_s\tau)$ y $X_o = \frac{A\tau}{T_s}$

$$x(t) = \frac{A\tau}{T_s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \text{sen}(n\pi f_s\tau) \cos(n\omega_s t)$$

que se puede escribir en la forma $x(t) = \frac{A\tau}{T_s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \text{Im}\{\exp(j2\pi n f_s\tau)\} \cos(n\omega_s t)$

Si τ varía en función del mensaje y si el mensaje es un tono de frecuencia f_m , es decir, $m(t) = \text{sen}(\omega_m t)$, entonces $\tau = \tau(t) = [\tau_o + \tau_1 \text{sen}(\omega_m t)]$. Definiendo también $\alpha_n = n\pi\tau_o f_s$ y $\beta_n = n\pi\tau_1 f_s$, la señal PDM queda en la forma

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

$$x_{\text{PDM}}(t) = \frac{A}{T_s} [\tau_0 + \tau_1 \text{sen}(\omega_m t)] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \text{Im} \{ \exp(j\alpha_n) \exp[j\beta_n \text{sen}(\omega_m t)] \} \cos(n\omega_s t)$$

El término $\exp[j\beta_n \text{sen}(\omega_m t)]$ es una función periódica de período $1/f_m$ y como tal se puede desarrollar en serie de Fourier. En efecto, sea

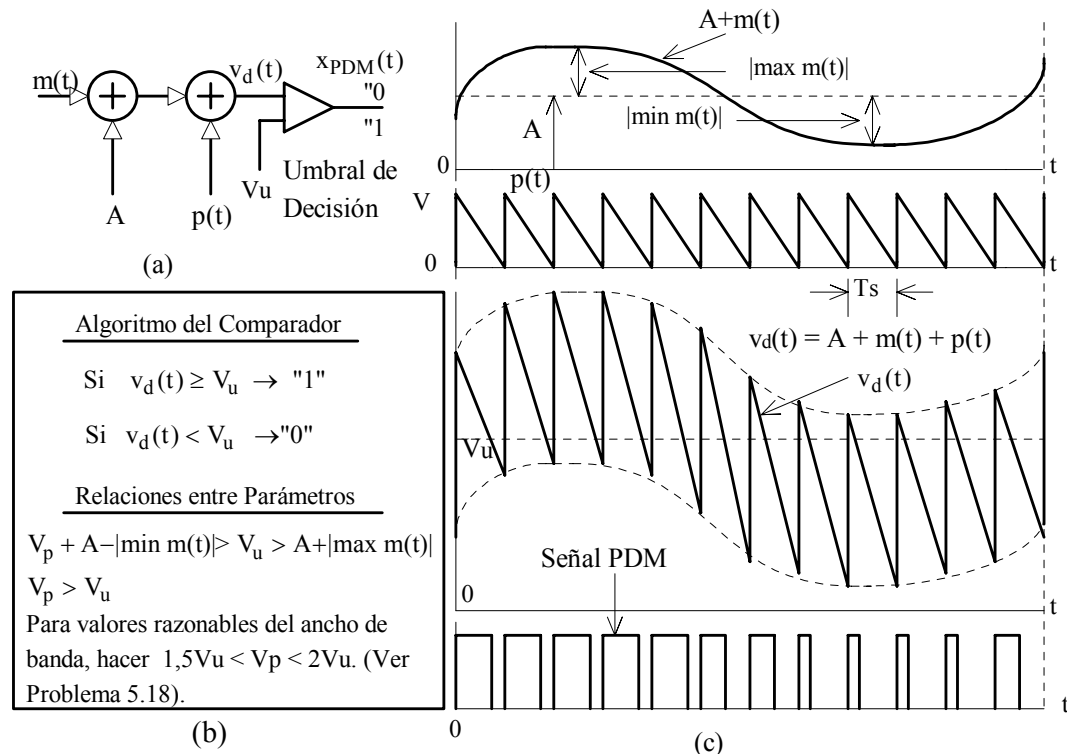


Fig. 5.23. Generación de una Señal PDM

$$\exp[j\beta_n \text{sen}(\omega_m t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k \exp(j2\pi k f_m t) \quad (5.50a)$$

donde $Z_k = f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} \exp[j\beta_n \text{sen}(\omega_m t)] \cdot \exp[-jk\omega_m t] \cdot dt$

$$Z_k = f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} \exp[j\beta_n \text{sen}(\omega_m t) - jk\omega_m t] \cdot dt$$

Con el cambio de variables $x = \omega_m t$, se obtiene

$$Z_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-j(kx - \beta_n \text{sen}(x))] \cdot dx \quad (5.50b)$$

Esta integral no puede resolverse en forma analítica, pero puede reconocerse como el Coeficiente de Bessel de primera clase, orden k y argumento β_n . Esta función generalmente se

denota en la forma $J_k(\beta_n)$ y se encuentra extensamente tabulada (En el Capítulo VI, Sección 6.3.3, se muestra una Tabla de Coeficientes de Bessel para algunos valores de k y β_n). Entonces,

$$Z_k = J_k(\beta_n) \quad (5.51)$$

de donde
$$\exp[j\beta_n \sin(\omega_m t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_n) \exp(j2\pi k f_m t) \quad (5.52)$$

$$x_{\text{PDM}}(t) = \frac{A}{T_s} [\tau_o + \tau_1 \sin(\omega_m t)] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \text{Im} \left[\exp(j\alpha_n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_n) \exp(jk\omega_m t) \right] \cos(\omega_s t)$$

y finalmente,

$$x_{\text{PDM}}(t) = \frac{A}{T_s} [\tau_o + \tau_1 \sin(\omega_m t)] + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(\beta_n)}{n} \sin[\alpha_n + k\omega_m t] \cdot \cos(\omega_s t) \quad (5.53)$$

Nótese que aunque la modulación es sinusoidal con un tono único de frecuencia f_m , el espectro de $x_{\text{PDM}}(t)$ contiene entonces una componente continua, una componente a la frecuencia f_m y componentes a las frecuencias $f_{nk} = nf_s + kf_m$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ y $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Algunas de estas frecuencias son iguales a f_m , constituyendo componentes de distorsión.

En particular, si $f_s = 2f_m$, entonces $f_{nk} = (2n+k)f_m$ y habrá componentes de distorsión para $(n=1$ y $k=-1)$, $(n=2$ y $k=-3)$, etc. Sin embargo, para $n \geq 1$ o $(\beta_n > 1)$, la amplitud de las componentes de distorsión se

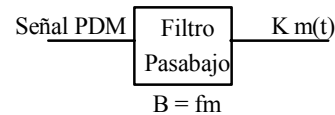


Fig. 5.24. Demodulación de Señales PDM.

hace muy pequeña en comparación con la señal deseada y puede ser despreciada. La situación mejora si el muestreo se hace a una frecuencia mayor que la frecuencia de Nyquist, aunque en general es suficiente un filtro pasabajo de ancho de banda f_m , como se muestra en la Fig. 5.24.

La modulación PDM o PWM se aplica actualmente no solamente en aplicaciones en comunicaciones y procesamiento de señales, sino también en el control de motores eléctricos. Como dato histórico, antiguamente a la modulación PDM se la conocía con el nombre de Amplificación Clase D.

Ancho de Banda en Sistemas PDM

En los sistemas PDM la información está contenida en la duración de los impulsos y por lo tanto la modulación está representada como diferencias de energía en los impulsos sucesivos de diferente duración. Fundamentalmente, hay que transmitir impulsos y el ancho de banda del canal dependerá de la duración del impulso más angosto, es decir, del τ_{\min} del sistema. El ancho de banda de la banda de base en PDM será entonces,

$$B \geq \frac{1}{\tau_{\min}} \quad \text{en PDM} \quad (5.54)$$

donde τ_{\min} viene dado por (5.49).

Nótese que el τ_{\min} en PDM es, en general, más pequeño que el τ en PAM, de modo que se puede decir que

$$B_{\text{PDM}} > B_{\text{PAM}} \quad (5.55)$$

La relación exacta entre B_{PDM} y B_{PAM} dependerá de los valores de τ , τ_o , τ_1 y $m(t)$.

Debido a la compatibilidad que existe entre los sistemas PDM y PPM, sus relaciones S/N serán tratadas simultáneamente en la próxima sección.

5.3.4. Modulación por Posición de Impulsos (PPM)

En la modulación PPM la posición de los impulsos, con referencia a un punto dado, varía proporcionalmente de acuerdo con los valores de muestra de la señal mensaje, como se muestra en la Fig. 5.19(d).

En un sistema PPM la información está contenida en los desplazamientos de los impulsos de un tren de impulsos, la portadora. Como la amplitud y la duración de los impulsos se mantienen constantes, la información posicional es también transmitida por la posición del borde frontal del impulso, o por la posición del punto, en el eje del tiempo, por donde cruza el borde frontal.

Las modulaciones PPM y PDM están íntimamente relacionadas, a tal punto que la modulación PPM se puede obtener directamente a partir de la modulación PDM en la forma mostrada en la Fig. 5.25.

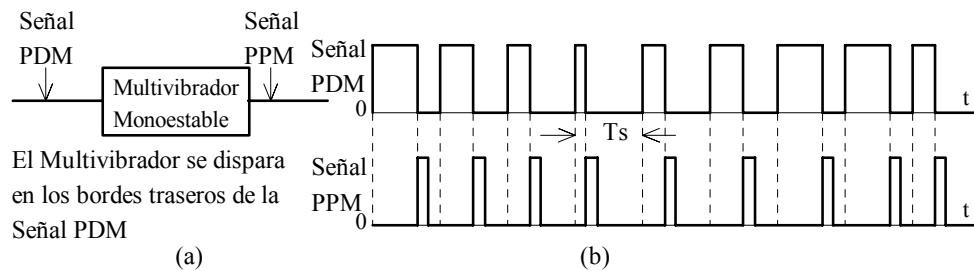


Fig. 5.25. Generación de Señales PPM a partir de Señales PDM.

Como la información reside en la posición temporal de los bordes del impulso y no en el impulso mismo, y como la potencia es proporcional a la duración de los impulsos, sería muy conveniente, si el ancho de banda del canal lo permite, transmitir impulsos muy angostos modulados en PPM. La potencia requerida para PPM será entonces inferior a la requerida para PDM y ésta ya es una ventaja muy importante que se refleja en las correspondientes relaciones S/N, como veremos más adelante.

Una señal PPM se puede expresar en la forma

$$x_{PPM}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \Pi \left[\frac{t - nT_s - \Delta(nT_s)}{\tau} \right] \quad (5.56)$$

donde $\Delta(t) = m_t m(t)$ es el desplazamiento instantáneo del impulso respecto al instante de referencia $t = nT_s$, como puede observarse en la Fig. 5.26.

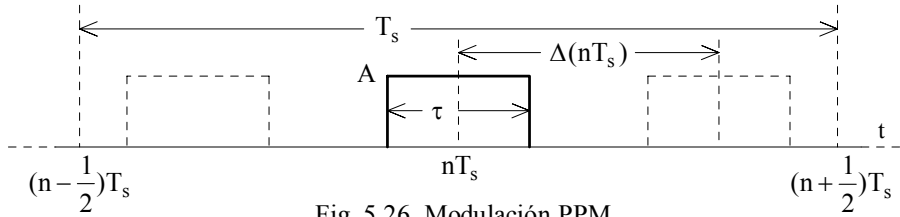


Fig. 5.26. Modulación PPM.

La posición del impulso respecto a $t = nT_s$ es proporcional a $m(t)$; el desplazamiento máximo será

$$|\Delta(t)|_{\max} = m_t |m(t)|_{\max} \leq \frac{1}{2} (T_s - \tau) \quad (5.57)$$

donde $|m(t)|_{\max}$ es el valor máximo de $m(t)$ y m_t el índice de modulación PPM.

Demodulación PPM

Para determinar el proceso de demodulación de una señal PPM es necesario conocer su espectro, el cual, igual que en PDM, es difícil de calcular en el caso general, pero que se puede estimar en el caso de modulación sinusoidal.

Sea entonces, $D(t) = nT_s + \Delta(t)$

$$\text{de donde } x_{\text{PPM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \Pi \left[\frac{t - D(nT_s)}{\tau} \right] = A \left\{ \Pi \left(\frac{t}{\tau} \right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - D(nT_s)] \right\} \quad (5.58)$$

Pero como la información está contenida en el desplazamiento $D(t)$ del impulso y no en el impulso mismo, el ancho del impulso puede hacerse tan pequeño que se puede aproximar mediante impulsos unitarios, es decir, que $\Pi \left(\frac{t}{\tau} \right) \approx \delta(t)$ [no tomando en cuenta su efecto sobre el ancho de banda]. Entonces,

$$x_{\text{PPM}}(t) = A \left\{ \delta(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - D(nT_s)] \right\} = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - D(nT_s)]$$

Se ha demostrado [Greg, 1977] que si $D(t) = nT_s + \Delta(t)$, entonces

$$\delta[t - D(nT_s)] = |1 - \Delta'(t)| \delta[t - nT_s - \Delta(t)] \quad (5.59)$$

donde $\Delta'(t)$ es la derivada de $\Delta(t)$

$$\text{Por consiguiente, } x_{\text{PPM}}(t) = A \cdot |1 - \Delta'(t)| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - \Delta(t) - nT_s]$$

El signo de módulo se puede eliminar postulando que

$$|\Delta'(t)| = m_t m'(t) \leq 1 \quad \text{para todo } t; \quad 0 < m_t \leq 1$$

lo cual nos asegura que los impulsos serán siempre positivos. Entonces, de (1.106),

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

$$x_{PPM}(t) = A[1 - m_t m'(t)] f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi n f_s (t - m_t m(t))]$$

Definiendo $\beta_n = 2\pi n f_s m_t$ y con $m(t) = \text{sen}(\omega_m t)$,

$$x_{PPM}(t) = A f_s [1 - m_t m'(t)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[j(n\omega_s t - \beta_n \text{sen}(\omega_m t))]$$

pero, de (1.106b), vemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[j(n\omega_s t - \beta_n \text{sen}(\omega_m t))] = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n\omega_s t - \beta_n \text{sen}(\omega_m t)]$$

El coseno se puede expresar en la forma

$$\cos[n\omega_s t - \beta_n \text{sen}(\omega_m t)] = \text{Re}\{\exp(jn\omega_s t) \cdot \exp[-j\beta_n \text{sen}(\omega_m t)]\}$$

Aplicando el mismo procedimiento utilizado para deducir la expresión (5.52) mediante los coeficientes de Bessel, podemos demostrar que

$$\exp[-j\beta_n \text{sen}(\omega_m t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_n) \exp(-jk\omega_m t), \text{ de donde}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[j(n\omega_s t - \beta_n \text{sen}(\omega_m t))] = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_k(\beta_n) \cos[2\pi(nf_s - kf_m)t]$$

y finalmente,

$$x_{PPM}(t) = A f_s [1 - m_t m'(t)] \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_n) \cos[2\pi(nf_s - kf_m)t] \right\} \quad (5.60)$$

Desarrollando (5.60) podemos observar lo siguiente: aunque la modulación es sinusoidal con un simple tono de frecuencia f_m , la señal PPM, igual que en el caso PDM, contiene un término de componente continua que es igual al valor promedio del tren de impulsos sin modular y un segundo término que es proporcional a la derivada de la señal mensaje; los términos restantes son productos de intermodulación entre la frecuencia de muestreo f_s y la frecuencia f_m de la señal: la señal PPM contiene entonces un número infinito de componentes laterales alrededor de $\pm n f_s$ separadas en $\pm k f_m$. Muchas de estas componentes, igual que en PDM, constituyen términos de distorsión de muy baja amplitud que pueden ser despreciados, pero aún así la distorsión de la señal es más pronunciada que en PDM. Además del filtrado pasabajo, es necesario efectuar una integración para restaurar la componente de la señal útil a su perfil original. La demodulación directa de señales PPM se puede efectuar entonces en la forma indicada en la Fig. 5.27(a), pero este tipo de modulación no se emplea en la práctica.

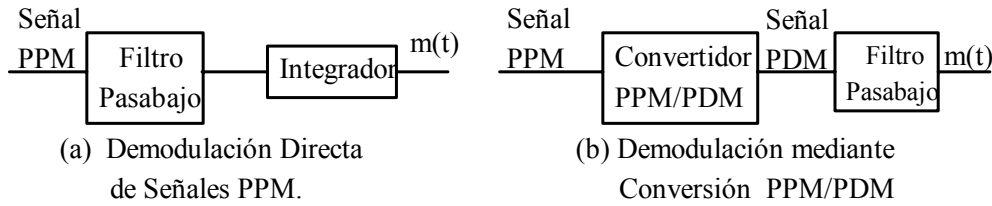


Fig. 5.27. Demodulación de Señales PPM.

Una forma de demodulación de fácil instrumentación, más eficiente en cuanto a su inmunidad al ruido y con menor distorsión se puede obtener mediante conversión PPM a PDM y filtrado pasabajo, Fig. 5.27(b). Esta transformación, que es la inversa de la mostrada en la Fig. 5.25, se puede efectuar haciendo que la portadora (un reloj) active un circuito basculador (un flip-flop RS), el cual, a su vez, es puesto a cero por los impulsos PPM. Sin embargo, como la señal PPM no contiene la información de portadora o temporización (ver Problema de Aplicación 5.21), ésta tiene que ser transmitida por separado. En la Fig. 5.28 se muestra el proceso de demodulación PPM/PDM/m(t).

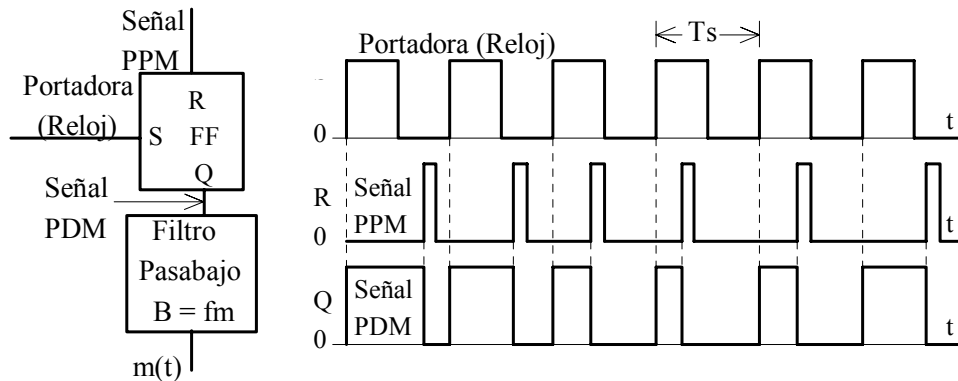


Fig. 5.28. Mecanismo de Demodulación PPM/PDM/m(t).

Ancho de Banda y Relaciones S/N en la Modulación PPM y PDM

En los sistemas PPM la información está contenida en la posición o desplazamiento de los impulsos. En presencia de ruido es necesario que los bordes de los impulsos estén bien definidos a fin de poder interpretar adecuadamente la posición del impulso. Esto significa que el impulso debe tener una mejor resolución o definición que en el caso PDM. Para transmisión en banda de base se puede tomar como ancho de banda [Greg, 1977],

$$B_{\text{PPM}} \approx \frac{5}{\tau} \quad (5.61)$$

donde τ es la duración de los impulsos. El sistema PPM es un sistema de banda ancha en el cual la relación de expansión del ancho de banda β_m es mucho mayor que la unidad.

La relación entre los anchos de banda de la banda de base en PAM, PDM y PPM será

$$B_{PPM} > B_{PDM} > B_{PAM} \quad (5.62)$$

Veamos ahora la influencia del ruido en PPM. Como los impulsos se transmiten por canales de ancho de banda finito, se produce dispersión en los bordes de los impulsos recibidos, de tal manera que estos se pueden considerar como impulsos trapezoidales, como se muestra en la Fig. 5.29.

Si la señal recibida se ha contaminado con ruido, éste causará un error en la posición de los impulsos. En la Fig. 5.29 se muestra el impulso recibido en ausencia de ruido y la forma (punteada) mediante la cual el ruido $n(t)$ introduce un error $\Delta\tau$ en la posición del impulso.

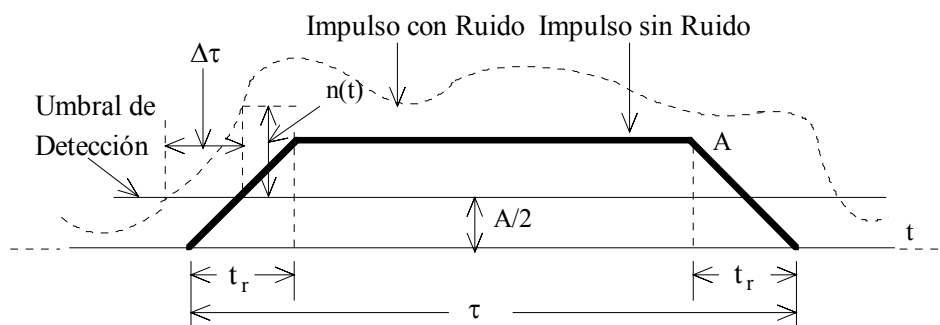


Fig. 5.29. Influencia del Ruido en PPM. Impulsos Recibidos.

De la geometría de la Fig. 5.29,

$$\frac{\Delta\tau}{t_r} = \frac{n(t)}{A} \quad (5.63)$$

Si $n(t)$ varía, entonces $\Delta\tau$ variará proporcionalmente. Vemos también que si $\Delta\tau$ es proporcional a $n(t)$, su potencia promedio será proporcional a la potencia promedio de $n(t)$, es decir,

$$\langle \Delta\tau^2 \rangle = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 \langle n^2(t) \rangle \quad (5.64)$$

Sea entonces N_τ la potencia promedio de $\Delta\tau$; si el ruido es blanco y tiene una densidad espectral $\eta/2$, dentro de la banda de transmisión B se verifica que

$$N_\tau = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 \eta B = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 N_i \quad (5.65)$$

donde N_i es la potencia de ruido a la entrada del demodulador en el receptor.

El valor t_r se puede relacionar con B en la forma dada en el Capítulo II, Ejemplo 2.19(a), es decir, $t_r \approx 1/2B$. Por consiguiente,

$$N_\tau = \frac{1}{4A^2 B^2} N_i$$

Como la salida es proporcional a la entrada con una constante k de proporcionalidad o de demodulación, entonces,

$$N_o = k^2 N_\tau = \frac{k^2}{4A^2 B^2} N_i$$

En cuanto a la señal, $s_o(t) = k m(t)$ y $S_o = \langle s_o^2(t) \rangle = k^2 \langle m^2(t) \rangle$

La potencia de entrada de la señal PPM, para $\tau \gg 2t_r$, es, de la Fig. 5.29,

$$S_i = \frac{\tau}{T_s} A^2 \quad (5.66)$$

La relación de postdetección S_o/N_o será entonces

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{4A^2 B^2 \langle m^2(t) \rangle}{N_i} \quad (5.67)$$

Reemplazando en (5.67) el valor de A^2 dado por (5.66), la ganancia de conversión será

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 4 \frac{T_s}{\tau} B^2 \langle m^2(t) \rangle \quad \text{en PPM} \quad (5.68)$$

La expresión (5.68) puede expresarse en otra forma. Si la modulación es sinusoidal y a máxima modulación (con $m_t = 1$), su efecto es el de producir un desplazamiento $\Delta(t)$ de la forma

$\Delta(t) = m(t) = \frac{1}{2}(T_s - \tau) \cdot \cos(\omega_m t)$, como se muestra en la Fig. 5.30.

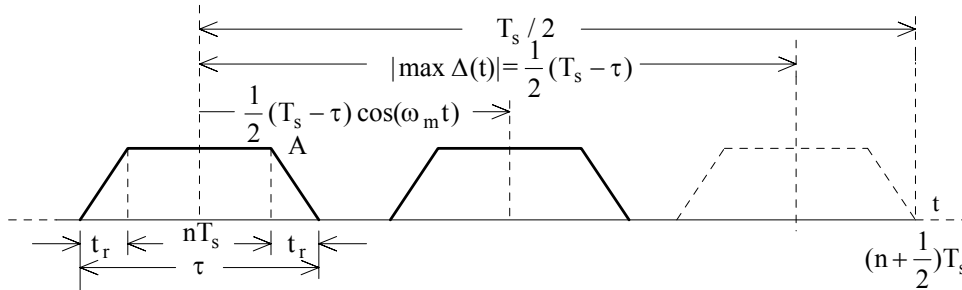


Fig. 5.30. Desviación Sinusoidal de la Posición de los Impulsos en PPM.

Se tiene entonces que $\langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{8}(T_s - \tau)^2$

Si el muestreo se ha efectuado a la frecuencia de Nyquist ($T_s = 1/2f_m$) y haciendo la aproximación $B = 1/\tau$, la ganancia de conversión será

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{B}{4f_m} \left[\frac{B}{2f_m} - 1 \right]^2 = \frac{\beta_m}{4} \left(\frac{\beta_m}{2} - 1 \right)^2 \quad \text{en PPM} \quad (5.69)$$

Si $\beta_m \gg 2$, la expresión (5.69) se reduce a

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{1}{16} \beta_m^3 \quad \text{en PPM} \quad (5.70)$$

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

La ganancia de conversión en PPM es proporcional al cubo de la relación de expansión del ancho de banda β_m . Cuando B aumenta, S_o/N_o aumenta y es posible intercambiar ancho de banda por relación S/N . La potencia de la señal pudiera disminuirse sin que la relación S_o/N_o cambie; esto ocurre, sin embargo, solamente si la relación S_i/N_i está sobre cierto umbral. En la literatura se toma el nivel umbral para una relación $[S_i/N_i] \approx 4$ (6 dB).

En el caso PDM, la operación de detección sobre el umbral de detección elimina todos los efectos del ruido excepto el desplazamiento en el tiempo que hemos evaluado en PPM. En la Fig. 5.31 se muestra la señal PDM recibida en la cual una porción de amplitud constante y duración $d(t)$ viene precedida y seguida por los flancos montantes o bajantes, respectivamente, idénticos a los vistos en PPM.

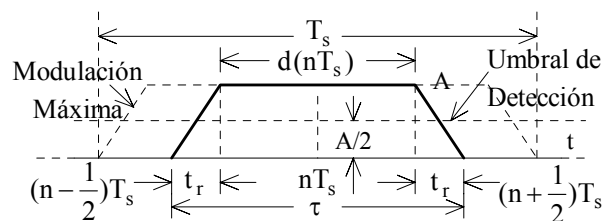


Fig. 5.31. Impulsos Recibidos en PDM.

En lo que se refiere a la potencia promedio en PDM, ella será la suma de las potencias promedio, referidas a un período T_s , de un rectángulo de amplitud A y duración promedio d_n , y de las dos rampas del trapecio que equivalen a un triángulo de la forma $A\Lambda(t/t_r)$, ya que estas señales no se solapan en el tiempo. Por consiguiente, la potencia promedio de la señal PDM viene dada por

$$S_i = \frac{A^2 d_n}{T_s} + \frac{2A^2 t_r}{3T_s} = \frac{A^2}{T_s} \left(d_n + \frac{2}{3} t_r \right) \quad (5.71)$$

La duración $d(t)$ de los impulsos PDM recibidos se puede expresar, para una señal sinusoidal de prueba y máxima modulación, a partir de la Fig. 5.31 en la forma

$$d(t) = \frac{1}{2} (T_s - 2t_r) \cdot [1 + \cos(\omega_m t)] \quad (5.72)$$

cuyo valor promedio es $d_n = \frac{1}{2} (T_s - 2t_r) \approx \frac{T_s}{2}$ puesto que $T_s \gg 2t_r$. En este caso, la potencia de entrada de la señal PDM, expresión (5.71), será

$$S_i = \frac{A^2}{2} + \frac{2A^2 t_r}{3T_s} = \frac{A^2}{T_s} \frac{3T_s + 4t_r}{6} \quad (5.73)$$

Si hacemos $B = 1/2t_r$, entonces

$$S_i = \frac{A^2}{T_s} \frac{3BT_s + 2}{6B} \quad (5.74)$$

Reemplazando A^2 de (5.74) en (5.67),

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{24T_s B^3 \langle m^2(t) \rangle S_i}{3BT_s + 2 N_i}, \text{ de donde}$$

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{24T_s B^3}{3BT_s + 2} \langle m^2(t) \rangle \quad \text{en PDM} \quad (5.75)$$

Si $B \gg 2f_m$, es decir, si $BT_s \gg 1$, la ganancia de conversión será

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 8B^2 \langle m^2(t) \rangle \quad \text{en PDM} \quad (5.76)$$

Con modulación sinusoidal y modulación máxima, $m(t) = \frac{1}{2}(T_s - 2t_r) \cdot \cos(\omega_m t)$, cuya potencia promedio es $\langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{8}(T_s - 2t_r)^2$. Reemplazando en (5.75) con $T_s = 1/2f_m$ y $B = 1/2t_r$, se obtiene finalmente

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{3B}{2f_m} \frac{(\frac{B}{2f_m} - 1)^2}{(\frac{3B}{2f_m} + 2)} = \frac{3}{2} \beta_m \frac{(\frac{\beta_m}{2} - 1)^2}{(\frac{3}{2} \beta_m + 2)} \quad \text{en PDM} \quad (5.77)$$

Si $\beta_m \gg 2$,

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{1}{4} \beta_m^2 \quad \text{en PDM} \quad (5.78)$$

La ganancia de conversión en PDM es proporcional al cuadrado del factor de expansión del ancho de banda β_m . El sistema de modulación PDM es un sistema de banda ancha que permite intercambiar ancho de banda por potencia.

5.3.5. Comparación entre las Ganancias de Conversión en Sistemas PAM, PDM y PPM

En la secciones anteriores se ha determinado las ganancias de conversión para los sistemas PAM, PPM y PDM. En todos los casos se ha tomado la potencia de ruido a la entrada igual a ηB , donde B es el ancho de banda de la banda de base. En función de la relación de expansión del ancho de banda $\beta_m = B/f_m$, se tiene

$$\text{En PAM:} \quad \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \beta_m \quad (5.79)$$

$$\text{En PPM:} \quad \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{\beta_m}{4} \left(\frac{\beta_m}{2} - 1\right)^2 \quad (5.80)$$

$$\text{Si } \beta_m \gg 2, \quad \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{\beta_m^3}{16} \quad (5.81)$$

$$\text{En PDM:} \quad \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{3}{2} \beta_m \frac{(\frac{\beta_m}{2} - 1)^2}{(\frac{3}{2} \beta_m + 2)} \quad (5.82)$$

$$\text{Si } \beta_m \gg 2, \quad \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{\beta_m^2}{4} \quad (5.83)$$

Si el ruido y el ancho de banda son los mismos en los tres sistemas, se puede comparar PPM con PAM. En efecto, de (5.79) y (5.80),

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PPM}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\beta_m}{2} - 1 \right)^2 \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PAM}} \quad (5.84)$$

Por ejemplo, si $\beta_m = 24$, situación que puede presentarse en sistemas con multiplex, el mejoramiento de la ganancia de conversión en PPM es 14,8 dB superior a PAM. El sistema PPM es superior a PAM para $\beta_m > 6$.

Comparemos ahora PDM con PAM. De (5.79) y (5.82),

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PDM}} = \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{\beta_m}{2} - 1 \right)^2}{\left(\frac{3}{2} \beta_m + 2 \right)} \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PAM}} \quad (5.85)$$

Para $\beta_m = 24$, el mejoramiento de la ganancia de conversión en PDM sobre PAM es de 6,8 dB. El sistema PDM es superior a PAM para $\beta_m > 8$.

Veamos ahora la comparación entre PPM y PDM. De (5.80) y (5.82),

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PPM}} = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} \beta_m + 2 \right) \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PDM}} \quad (5.86)$$

El mejoramiento de la ganancia de conversión en PPM, para $\beta_m = 24$, es de 8 dB superior a PDM. El sistema PPM es superior a PDM para $\beta_m > 3$.

En general, para las ganancias de conversión y con $\beta_m > 8$ se cumple que

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PPM}} > \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PDM}} > \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PAM}} \quad (5.87)$$

Estas consideraciones se pueden apreciar mejor en la Fig. 5.32, en donde se muestra la variación de las ganancias de conversión en función del factor de expansión del ancho de banda β_m .

En relación con los anchos de banda, de la expresión (5.62),

$$B_{\text{PPM}} > B_{\text{PDM}} > B_{\text{PAM}} \quad (5.88)$$

En la determinación de las ganancias de conversión anteriores no se ha tomado en cuenta los falsos impulsos producidos por los picos de ruido, los cuales tienen una cierta probabilidad de ocurrencia cuando el ruido es gaussiano.

Cuando el ancho de banda aumenta, el correspondiente aumento en la potencia de ruido produce una cantidad suficiente de falsos impulsos que impiden aumentar el ancho de banda; se llega entonces a una “región umbral” no importa si se aumenta el valor A de la amplitud de la portadora a fin de mantener una relación S_i / N_i fija; este umbral es uno de los factores limitativos de los sistemas de banda ancha, como podremos constatarlo a medida que avancemos en el texto. Las condiciones prácticas del medio establecerán el nivel umbral y los valores apropiados correspondientes de la relación S_i / N_i .

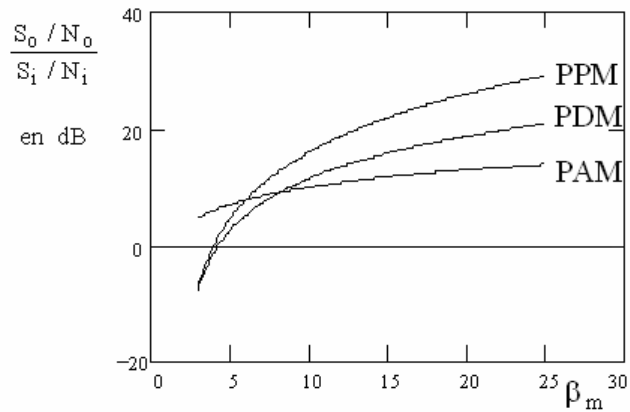


Fig. 5.32. Ganancias de Conversión vs β_m

5.4. SISTEMAS DE MODULACION DIGITAL DE IMPULSOS

5.4.1. Introducción

En los sistemas PAM, PDM y PPM solamente el tiempo se expresa en forma discreta, mientras que los respectivos parámetros de modulación (amplitud, duración y posición) varían en forma continua de acuerdo con la señal mensaje. La transmisión de información se lleva a cabo entonces en forma analógica en tiempos o instantes discretos. En la modulación digital de impulsos el mensaje es representado por secuencias de impulsos digitales, donde la palabra “digital” significa “amplitud y duración discreta”. En este tipo de modulación cada valor de muestra de la señal mensaje se codifica en secuencias de impulsos en el sentido visto en el Capítulo IV, cuando introducimos el concepto de codificación binaria y m-aria. Los sistemas prácticos de modulación digital de impulsos, por cuestiones de tipo tecnológico, son esencialmente sistemas binarios.

Los tres sistemas básicos de modulación digital de impulsos son:

- La Modulación de Impulsos Codificados (Pulse-Code Modulation, PCM)
- La Modulación Diferencial de Impulsos Codificados (Differential Pulse-Code Modulation, DPCM)
- La Modulación Delta Lineal (Delta Modulation, DM)

5.4.2. Modulación de Impulsos Codificados (PCM)

En 1926, P. M. Rainey, de los Estados Unidos, desarrolló un método para transmitir una representación de una señal continua mediante una sucesión de valores discretos de la misma señal. Posteriormente, en 1936, A. H. Reeves, entonces ingeniero de la ITT en Francia, patentó un sistema para la transmisión de voz basado en el método de Rainey. Este sistema se conoce desde entonces con el nombre de Modulación de Impulsos Codificados (PCM). Durante más de 20 años el concepto PCM se consideró como una simple curiosidad científica, pues los componentes electrónicos existentes para la época no eran apropiados para la codificación digital de señales, y fueron los dispositivos de estado sólido los que iniciaron el gigantesco desarrollo que estamos presenciando.

Los tres tipos de modulación de impulsos vistos en las secciones anteriores han sido representaciones analógicas del mensaje, pero la modulación de impulsos codificados es completamente diferente en concepto. En efecto, en la modulación PCM cada muestra del mensaje se representa o codifica en una secuencia de impulsos, generalmente binarios. Las muestras del mensaje se presentan en forma de una señal PAM que se aplica a un codificador binario o convertidor cuya salida son secuencias de impulsos binarios que representan la amplitud de los impulsos PAM.

El sistema PCM es el sistema de modulación de impulsos más utilizado por las muchas ventajas que ofrece. Algunas de estas ventajas son:

- Los circuitos y componentes digitales utilizados son muy baratos y fáciles de adquirir.
- Las señales PCM derivadas de todos los tipos de fuentes analógicas (audio, video, señales de control industrial, etc.) se pueden mezclar con señales de datos (por ejemplo, las señales de salida de los computadores digitales) y transmitirse por un canal de alta velocidad. Esta técnica se denomina “multiplicidad o multicanalización por división de tiempo, (TDM)”, que veremos posteriormente.
- En transmisión a larga distancia las señales PCM contaminadas con ruido se pueden regenerar y retransmitir sin mucha pérdida de calidad.
- En relación con el ruido, los sistemas PCM tienen un comportamiento superior al de un sistema analógico. Además, la probabilidad de error en el destino se puede reducir mediante la aplicación de técnicas de codificación apropiadas.

La desventaja principal de los sistemas PCM es que su ancho de banda es superior al de un sistema analógico similar.

Cuantificación y Codificación

Aunque en la práctica no suele usarse, para comprender el mecanismo de la modulación PCM, se le puede descomponer en una secuencia de tres operaciones distintas: Muestreo (formación de la señal PAM), Cuantificación y Codificación, como se muestra en las Figs. 5.33 y 5.34.

De la expresión (4.22), para impulsos binarios, la relación entre el número de muestras de entrada N y el número de impulsos n de la muestra codificada es $N = 2^n$; por lo tanto, el número de muestras de entrada al convertidor debe ser un número finito. Pero como el número de amplitudes de los impulsos PAM es teóricamente infinito, es necesario efectuar previamente un proceso de “redondeamiento” de los valores de amplitud para generar un conjunto finito de valores fijos o niveles, de tal manera que el número de niveles sea N . Este proceso se denomina “cuantificación” y es similar al redondeamiento de los últimos dígitos en un proceso numérico. En la Fig. 5.34 se muestra este proceso. (Nótese que se utiliza la letra “ m ” para indicar el orden de la muestra, a fin de no confundirla con “ n ”, el número de impulsos de la muestra codificada).

En la Fig. 5.34(a) se muestra la característica de transferencia de un cuantificador uniforme, y en (b) la operación de redondeamiento efectuada. Obsérvese que los valores instantáneos de amplitud $x(mT_s)$ se redondean al valor más cercano $x_q(mT_s)$ de un conjunto de N niveles fijos de amplitud. Estos valores fijos se denominan “niveles de cuantificación” y la diferencia ΔQ entre dos niveles, “paso de cuantificación”. Cuando el paso de cuantificación es constante, se dice que la cuantificación es uniforme, a diferencia de algunos sistemas en los cuales el paso de cuantificación es variable.

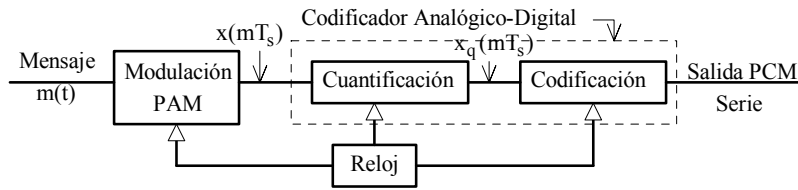


Fig. 5.33. Mecanismo de Generación de Señales

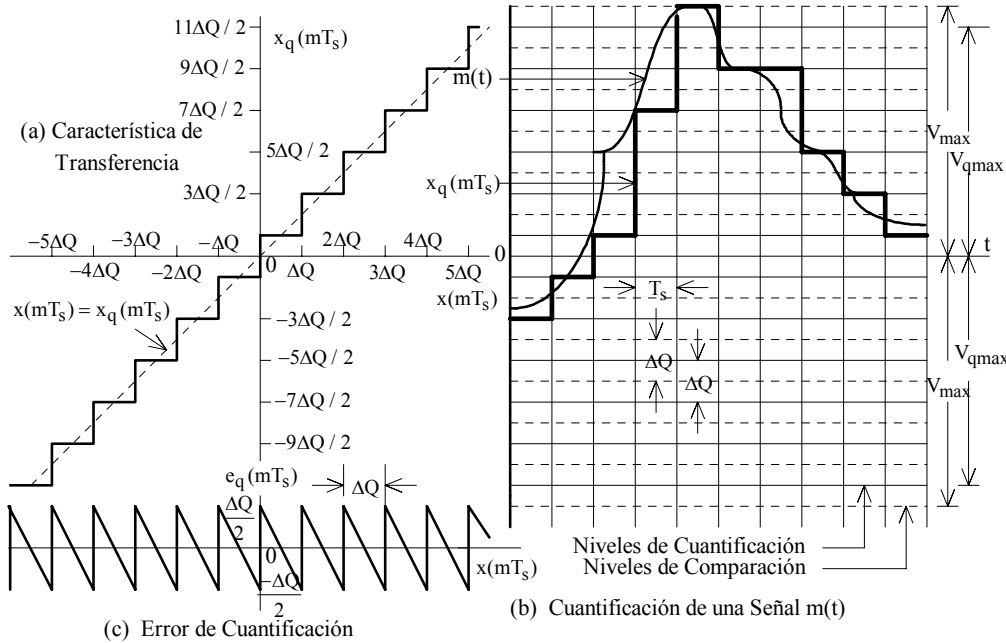


Fig. 5.34. Principio de la Cuantificación de Señales en Modulación PCM.

Consideremos el proceso de cuantificación uniforme bipolar mostrado en la Fig. 5.34(b), donde $V_{qmax} = |x_q(mT_s)|_{max}$ y $V_{max} = |x(mT_s)|_{max}$ son los valores máximos o pico de la señal cuantificada y de la señal muestreada PAM, respectivamente. ΔQ es el paso de cuantificación, $N = 2^n$ el número de niveles de cuantificación y n el número de impulsos de las secuencias codificadas. V_{qmax} y n generalmente son los datos o parámetros del cuantificador.

La señal cuantificada $x_q(mT_s)$ está acotada por

$$|x_q(mT_s)| \leq (N - 1) \frac{\Delta Q}{2} = (2^n - 1) \frac{\Delta Q}{2} = V_{qmax} \tag{5.89}$$

y sus valores particulares vendrán dados por

$$x_{qk}(mT_s) = \pm(2k - 1) \frac{\Delta Q}{2} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, \frac{N}{2} \tag{5.90}$$

Los niveles de comparación estarán a $\Delta Q/2$ sobre o bajo $x_{qk}(mT_s)$.

$$\text{También } |x(mT_s)| \leq \frac{N}{2} \Delta Q = 2^{n-1} \Delta Q \tag{5.91}$$

$$\text{Por consiguiente, } V_{\max} = V_{q\max} + \frac{\Delta Q}{2} \quad (5.92)$$

Para que no haya saturación en el cuantificador, debe cumplirse también que

$$|m(t)|_{\max} \leq V_{q\max} + \frac{\Delta Q}{2} = V_{\max}$$

De (5.89) o (5.91), el paso de cuantificación es

$$\Delta Q = \frac{2V_{q\max}}{N-1} = \frac{2V_{\max}}{N} \quad (5.93)$$

En la literatura se suele definir también la “resolución del cuantificador, R_q ”, como el intervalo mínimo que el cuantificador puede discernir, es decir, $\Delta Q/2$; por lo tanto,

$$\text{Resolución } R_q = \frac{\Delta Q}{2} = \frac{V_{q\max}}{N-1} = \frac{V_{\max}}{N} \quad (5.94)$$

$$\text{y en por ciento, } R_q \% = 100 \cdot R_q \quad (5.95)$$

Asimismo, el “error de cuantificación, $e_q(mT_s)$ ”, Fig. 5.34(c), se define en la forma

$$e_q(mT_s) = x_q(mT_s) - x(mT_s) \quad (5.96)$$

Obsérvese que para algunos valores específicos de $m(t)$ el error es cero, pero el error máximo es, de la Fig. 5.34(c),

$$e_{\max} = |e_q(mT_s)|_{\max} = \frac{\Delta Q}{2} = \frac{V_{q\max}}{N-1} = \frac{V_{\max}}{N} \quad (5.97a)$$

$$\text{y en por ciento, } e_{\max} \% = 100 \cdot e_{\max} \quad (5.97b)$$

Nótese que la resolución es la medida del error máximo en el cuantificador.

Algunas veces se prefiere normalizar los parámetros. En este caso se supone que el rango normalizado de la señal cuantificada es $-1 \leq x_q(mT_s) \leq 1$, para lo cual debe verificarse que $|x_q(mT_s)|_{\max} = V_{q\max} = 1$. Los parámetros normalizados serán:

$$\text{Paso de cuantificación normalizado: } \Delta Q_n = \frac{2}{N-1} \quad (5.98)$$

$$\text{Resolución normalizada: } R_{qn} = \frac{1}{N-1} \quad (5.99)$$

$$\text{Resolución normalizada porcentual: } R_{qn} \% = \frac{100}{N-1} \quad (5.100)$$

En general, la cuantificación transforma un conjunto infinito de amplitudes en un conjunto finito de N amplitudes; como consecuencia, después de la conversión la señal $m(t)$ nunca podrá ser recuperada en su forma original (aún en el caso de que el ruido de transmisión sea nulo) debido al denominado “ruido de cuantificación”. En efecto, el proceso de cuantificación introduce una cantidad inicial de distorsión, la cual es inherente al sistema pero que podemos controlar y hacer tan pequeña como queramos, dependiendo del número de niveles de cuantificación elegidos. Esto significa que la señal original puede aproximarse mediante una señal que se construye a partir de un conjunto disponible de amplitudes discretas elegidas sobre una base de error mínimo. La existencia

de un número finito de niveles de amplitud discreta es una condición básica en PCM. Lógicamente, si se asigna niveles de amplitud discreta con un espaciamiento lo suficientemente pequeño, se puede lograr que la señal cuantificada prácticamente no se distinga de la señal original.

La codificación binaria natural es el proceso de transformación de la amplitud de la muestra PAM cuantificada en secuencias de n impulsos binarios conocidas como “grupos de codificación”. A cada nivel de cuantificación se asigna un grupo de codificación diferente, es decir, habrá $N = 2^n$ grupos de codificación, palabras o secuencias binarias de n impulsos (llamados también “dígitos binarios” y más impropriadamente “bits”) cada una, como se muestra en la Fig. 5.35(a).

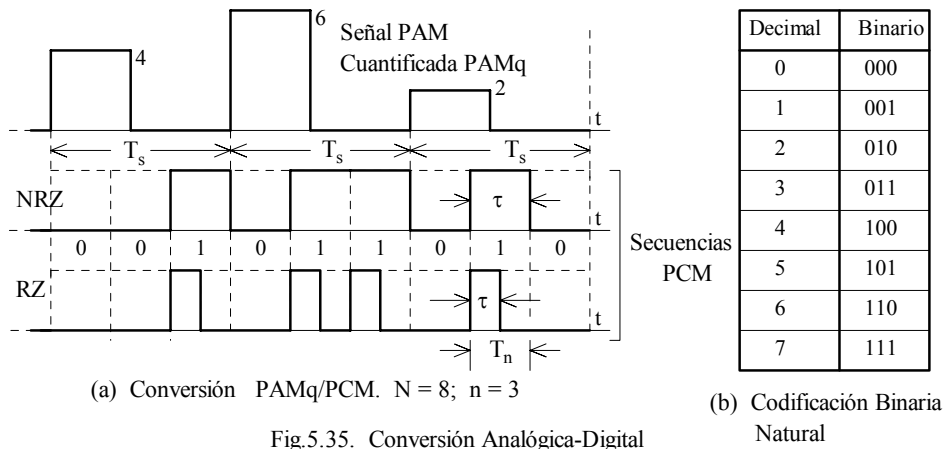


Fig.5.35. Conversión Analógica-Digital

En la Fig. 5.35(a) se tiene unas muestras PAM cuantificadas y sus correspondientes formas codificadas en PCM (NRZ y RZ). Nótese que en este caso se han empleado 8 niveles (2^3) para cuantificar las muestras; por lo tanto, un código de tres dígitos será suficiente para codificación completa; nótese también que el bit de menor peso se transmite de primero. En la Tabla, Fig. 5.35(b), se muestra la codificación empleada. En general, los fabricantes de los codificadores o convertidores especifican el correspondiente código de salida (binario natural, BCD, OFF-SET, etc.).

La codificación binaria, en sus distintas variedades, es la más utilizada debido a su simplicidad de generación, regeneración y detección, y por su gran inmunidad al ruido de transmisión. Esta inmunidad se debe a que: (a) solamente una parte de la información total es afectada por la pérdida o distorsión de uno o más impulsos de un grupo de codificación, y (b) que se puede tolerar grandes cantidades de ruido y distorsión en la detección de los impulsos individuales porque la selección o decisión se efectúa solamente entre dos estados: el estado “CERO” o el estado “UNO”.

Demodulación de Señales PCM

El mecanismo de recepción de señales PCM se muestra en la Fig. 5.36.

La señal de banda de base que llega al receptor está contaminada con ruido blanco $n(t)$. En el detector/regenerador se determina si llegaron o no impulsos, se regeneran y se encuadran en los correspondientes grupos de codificación incluyendo los errores producidos por el ruido $n(t)$. Esta secuencia de grupos se aplica al descodificador que los convierte en las muestras de una señal PAM cuantificada (incluyendo los errores debido al ruido). Esta señal se filtra en un filtro pasabajo de ancho de banda $B = f_m$ para extraer el mensaje $m(t)$. Nótese que la señal de salida $\tilde{m}(t)$ del

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

receptor no es idéntica a $m(t)$ debido a los efectos del ruido aditivo $n(t)$ y del ruido de cuantificación; en otras palabras, en el sistema PCM la reconstrucción perfecta de una señal de variación continua es imposible aún cuando el ruido $n(t)$ sea despreciable.

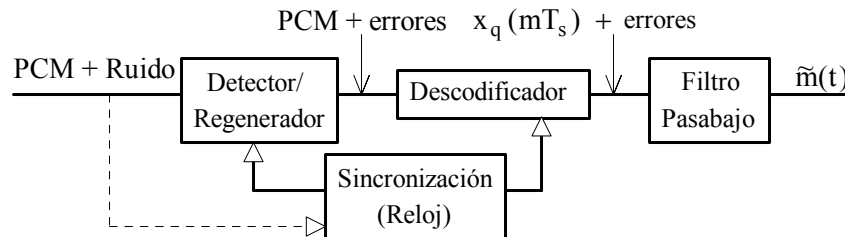


Fig. 5.36. Recepción de Señales PCM.

El empleo cada vez mayor de las señales digitales en las telecomunicaciones se basa mucho en la facilidad mediante la cual las señales digitales (impulsos discretos) se pueden regenerar y acondicionar. En efecto, todos los canales de comunicación en mayor o menor grado atenúan y distorsionan las señales. En el caso de señales digitales en transmisión en banda de base, se utiliza estaciones repetidoras para regenerar los impulsos deformados por el ruido y por las características físicas del canal; estas repetidoras están situadas a distancias apropiadas a lo largo de la trayectoria de transmisión. El número de repetidoras y el espaciado entre ellas depende de una cantidad de factores tales como el medio de transmisión (conductores metálicos, fibras ópticas, radio, etc.), de su atenuación y distorsión de fase por unidad de longitud, de la longitud total del enlace, de la frecuencia de portadora, etc. El tema de las repetidoras, aunque interesante, está fuera de los objetivos de este texto.

En la práctica, el proceso de cuantificación y codificación es efectuado por un solo dispositivo denominado “convertidor analógico-digital, (CAD)”. La operación inversa en el receptor, es decir, la conversión de la señal PCM en una señal analógica PAM, se efectúa con un “convertidor digital-analógico, (CDA)”. Estos dos convertidores son fácilmente disponibles a costos moderados como circuitos de mediana y gran escala de integración (MSI y VLSI), en todas las tecnologías (TTL, MOS, etc.), para cualquier valor de n y para diferentes velocidades de conversión y códigos de salida.

Hay que señalar que en los convertidores analógico-digitales prácticos la salida se presenta en forma paralela, pero como la señal PCM de banda de base es una secuencia serie, es necesario efectuar una transformación paralelo/serie utilizando comúnmente registros de desplazamiento (“shift-registers”), como se muestra en la Fig. 5.37(a). Para la demodulación el proceso es contrario: la señal PCM es procesada en el detector regenerador, en el registro se transforma en PCM paralela, se aplica luego al convertidor digital-analógico y por último se pasa por un filtro pasabajo, como se muestra en la Fig. 5.37(b). Sin embargo, en el comercio se encuentran tres tipos de circuitos integrados que producen salidas serie normalizadas: el transmisor/receptor asincrónico universal (UART), el transmisor/receptor síncronico universal (USRT) y el transmisor/receptor síncronico/asincrónico universal (USART). La operación y descripción de estos circuitos se puede hallar en cualquier catálogo de componentes (Motorola, Nacional Semiconductor, RCA, etc.).

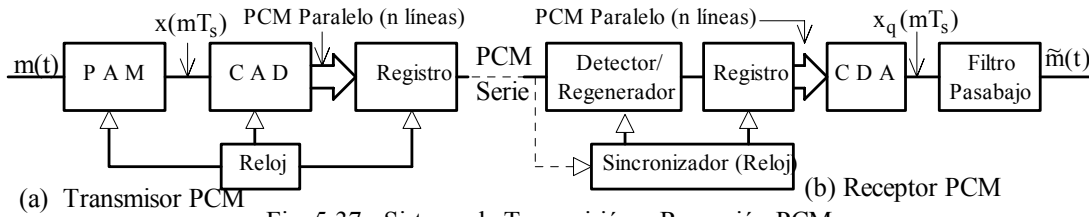


Fig. 5.37. Sistema de Transmisión y Recepción PCM

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas PCM

Los impulsos transmitidos en PCM fluyen generalmente a una frecuencia constante, es decir, el espaciado entre impulsos es uniforme a fin de ocupar el mínimo ancho de banda. A este respecto, hay que considerar si las secuencias PCM son sin o con retorno a cero (NRZ o RZ), como se muestra en la Fig. 5.35(a).

Cada muestra ha sido codificada en secuencias de n impulsos; en consecuencia, para $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ se tiene:

$$\text{Secuencias NRZ: } \begin{cases} T_s = n\tau; & B_{PCM} \geq \frac{1}{\tau} = 2nf_m = 2f_m \log_2 N \\ \frac{B_{PCM}}{f_m} = \beta_m \geq 2n = 2 \log_2 N \end{cases} \quad (5.101)$$

$$\text{Secuencias RZ: } T_s = nT_n; \quad R_T = \frac{\tau}{T_n}; \quad B_{PCM} \geq \frac{1}{\tau} = \frac{2nf_m}{R_T} = \frac{2f_m}{R_T} \log_2 N \quad (5.102)$$

$$\text{y } \beta_m = \frac{2}{R_T} \log_2 N$$

donde R_T es el ciclo de trabajo, f_m la frecuencia máxima de la señal mensaje $m(t)$, $N = 2^n$ el número de niveles de cuantificación y β_m la relación de expansión del ancho de banda.

La importancia de estos resultados es que la relación de expansión del ancho de banda en PCM es proporcional al número de impulsos por grupo de codificación, y, como tal, está relacionada con la exactitud con la cual se puede recobrar la señal. Puesto que $\beta_m \gg 2$, vemos también que el sistema PCM es un sistema de banda ancha en el cual se puede intercambiar ancho de banda por relación señal-ruido.

Como ejemplo de los requerimientos de ancho de banda en PCM, consideremos la transmisión digital de la voz en sistemas telefónicos. Aunque la voz contiene frecuencias superiores a los 10 kHz, la mayor parte de su energía está concentrada en la gama de 100 a 600 Hz y un ancho de banda de 3 kHz es suficiente para una buena inteligibilidad. Como norma en los sistemas telefónicos, la señal de voz se filtra primero en un filtro pasabajo de 3,2 kHz y luego se muestrea a una frecuencia de 8000 muestras por segundo. Las muestras se cuantifican en grupos de 8 dígitos (256 niveles) y el ancho de banda de la señal PCM será, de acuerdo con (5.101), de 64 kHz, el cual es mucho mayor que el ancho de banda nominal de 4 kHz del canal de voz. Esta es la razón por la cual no se puede transmitir voz digitalizada en PCM por los canales telefónicos.

En cuanto al ruido, en los sistemas PCM hay dos tipos de ruido, ya mencionados, que son de interés: uno es el ruido de transmisión, y el otro el ruido de cuantificación. El ruido de transmisión se puede introducir en cualquiera parte entre el transmisor y el receptor, mientras que el ruido de cuantificación se genera únicamente en el transmisor y es llevado hasta la salida del receptor. Como ya lo hemos señalado, el ruido de transmisión, denominado también “ruido de descodificación”, puede causar errores de decisión en el detector, con el resultado que éste emite la correspondiente secuencia de impulsos regenerados pero erróneos. Estos grupos erróneos son interpretados en el descodificador como amplitudes falsas que, por supuesto, distorsionan la señal $m(t)$ recuperada. Aparte de estos errores ocasionales, generalmente el ruido de transmisión no aparece a la salida, esto es, no hay un camino continuo de transmisión para el ruido como lo hay en los sistemas de modulación analógica ya vistos.

Como en el caso de los sistemas PAM, PDM y PPM, en PCM existe también una región umbral bajo la cual el comportamiento del sistema disminuye rápidamente debido a los errores producidos por el ruido de transmisión. Sobre la región umbral, sin embargo, el efecto del ruido de transmisión es despreciable y la calidad del proceso de detección mejora rápidamente a medida que la potencia de la señal aumenta sobre la región umbral, y normalmente el ruido de transmisión no se toma en cuenta en el diseño original del sistema. Cuando se opera con relaciones S/N de entrada muy por encima de la región umbral, la relación S/N a la salida está limitada únicamente por el ruido de cuantificación. Asimismo, si consideramos que la señal es regenerada en cada estación repetidora, el ruido de transmisión se hará muy pequeño en comparación con el ruido de cuantificación (caso de alta relación S/N).

Se ha demostrado [Gregg, 1977] que las potencias promedio de la señal PCM y del ruido de cuantificación a la salida del descodificador, en PCM binario, son, respectivamente,

$$\langle s_o^2(t) \rangle = S_o = \frac{(\Delta Q)^2}{12} (2^{2n} - 1) \quad (5.103)$$

$$y \quad \langle n_q^2(t) \rangle = N_o = \frac{(\Delta Q)^2}{12} \quad (5.104)$$

La relación S/N de postdetección será entonces

$$\frac{S_o}{N_o} = 2^{2n} - 1 = N^2 - 1 \quad (5.105)$$

Para altas relaciones S_i / N_i en el canal (10 dB o más), la expresión (5.105) es válida. Sin embargo, para relaciones S_i / N_i menores, se puede caer dentro de la región umbral y los resultados de dicha expresión ya no serían válidos, como veremos más adelante.

Cuando $n \geq 4$, entonces $2^{2n} \gg 1$ y

$$\frac{S_o}{N_o} = 2^{2n} = N^2 \quad \text{para } n \geq 4 \quad (5.106)$$

Consideremos secuencias PCM NRZ. De (5.101), $n = \frac{B}{2f_m} = \frac{\beta_m}{2}$; $\beta_m = 2n$, de donde

$$\frac{S_o}{N_o} = 2^{\beta_m} = N^2 \quad \text{en PCM NRZ} \quad (5.107)$$

$$\text{y en dB, } \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{dB}} = 3,01 \cdot \beta_m = 20 \cdot \log_{10} N = 6,02 \cdot n \quad \text{en PCM NRZ} \quad (5.108)$$

La relación señal/ruido de cuantificación crece exponencialmente en función de la relación de expansión del ancho de banda. Cuando se compara PCM con PAM, PDM o PPM, se observa que el intercambio “ancho de banda-relación S/N” es mucho más favorable en PCM que en los otros sistemas. El sistema PCM es, pues, un sistema de banda ancha.

Si el ruido de descodificación no puede ser despreciado, la potencia total de ruido a la salida será entonces

$$N_o = \langle n_q^2(t) \rangle + \langle n_d^2(t) \rangle \quad (5.109)$$

donde $\langle n_d^2(t) \rangle$ es la potencia del ruido de descodificación y $\langle n_q^2(t) \rangle$ viene dada por (5.104).

El cálculo de la potencia del ruido de descodificación es complicado por el hecho de que el número de errores por grupo de codificación es aleatorio y la severidad de un error depende de si él ocurre o no en los dígitos más significativos del grupo de codificación. La probabilidad P_e de que el detector produzca un estado “1” cuando un estado “0” fué transmitido (o viceversa) es un parámetro necesario en el cálculo de la potencia del ruido de descodificación.

Se demuestra [Shanmugan, 1979], que la potencia promedio del ruido de descodificación es

$$\langle n_d^2(t) \rangle = \frac{(\Delta Q)^2}{3} 2^{2n} \cdot P_e \quad (5.110)$$

donde P_e , la probabilidad de error, depende del tipo de modulación utilizado y de la relación de predetección S_i / N_i a la entrada del receptor. (En la referencia citada más arriba [Shanmugan, 1979], se calcula la probabilidad de error P_e para diferentes esquemas de modulación PCM; véase también [Schwartz, Bennet y Stein, 1966; Benedetto, Biglieri y Castellani, 1987; etc.]).

La relación de postdetección S_o / N_o en PCM, cuando se toma en cuenta el ruido de descodificación es, de (5.103), (5.104) y (5.110),

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{2^{2n} - 1}{1 + 2^{2(n+1)} \cdot P_e} \approx \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2(n+1)} \cdot P_e} \quad \text{en PCM} \quad (5.111)$$

$$\text{y en dB } \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{dB}} = 6,02 \cdot n - 10 \log_{10} [1 + 2^{2(n+1)} \cdot P_e] \quad \text{en PCM} \quad (5.112)$$

En la Fig. 5.38(a) se grafica la relación S_o / N_o en dB para diferentes valores de n .

Puede observarse el efecto del umbral para valores altos de P_e (baja relación S_i / N_i); para valores bajos de P_e (alta relación S_i / N_i), la relación S_o / N_o es prácticamente constante.

El umbral se define arbitrariamente [Shanmugan, 1979] como “el valor de la probabilidad de error P_e para el cual la relación $[S_o/N_o]_{dB}$ cae en 1 dB respecto a su valor máximo constante”. Este valor de P_e corresponderá a la mínima potencia transmitida (o recibida) y se puede considerar como el valor óptimo de la probabilidad de error, pues aumentos en la relación de predetección S_i/N_i no se traducen en aumentos en la relación de postdetección S_o/N_o .

Se puede definir entonces la “probabilidad de error óptima, P_{eopt} ” a partir de la expresión (5.112). En efecto, de la definición de umbral se obtiene

$$P_{eopt} = \frac{6,473 \times 10^{-2}}{2^{2n}} \quad \text{para } n \text{ entero} \quad (5.113)$$

En la Fig. 5.38(b) se grafica P_{eopt} vs n .

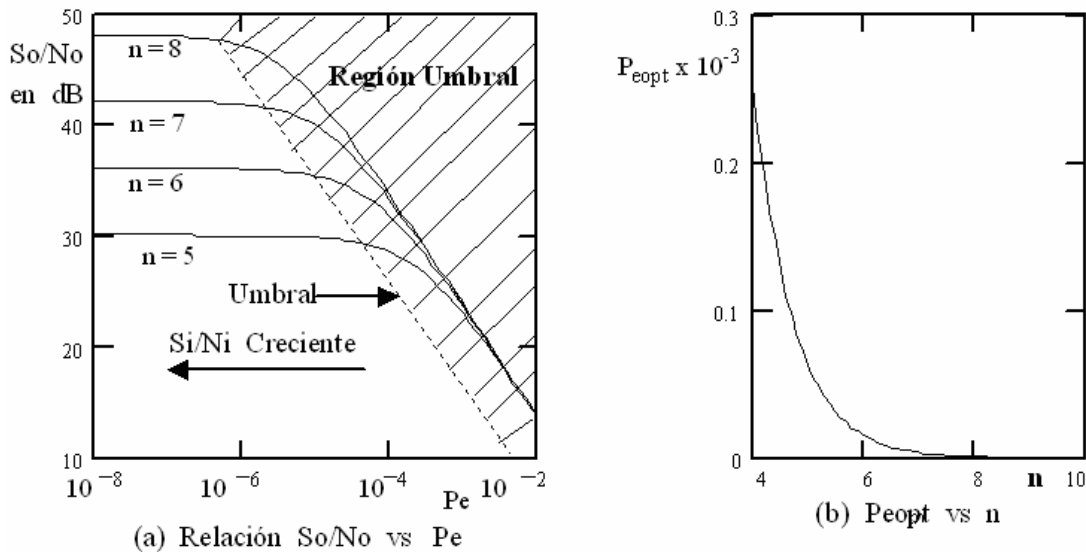


Fig. 5.38.

La expresión (5.113) permite determinar rápidamente la probabilidad de error correspondiente a la mínima potencia transmitida (o recibida) para un valor dado de n y máxima relación S_o/N_o .

Puesto que la probabilidad de error P_e depende del esquema de modulación empleado y de la relación de predetección a la entrada del receptor, y por cuanto P_{eopt} corresponde a la mínima relación S_i/N_i , entonces esta relación S_i/N_i mínima se puede deducir a partir de la expresión (5.113). En efecto, si la probabilidad de error es una función de S_i/N_i , es decir,

Si $P_e = g\left(\frac{S_i}{N_i}\right)$, entonces $P_{eopt} = f\left(\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min}\right)$ y de la expresión (5.113),

$$P_{eopt} = f\left(\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min}\right) = \frac{6,473 \times 10^{-2}}{2^{2n}} \quad \text{para } n \text{ entero, que es la misma expresión (5.113)}$$

La expresión (5.113) permite determinar la relación de predetección mínima S_i / N_i para un valor determinado de n .

La función $g(\cdot)$ depende del esquema de modulación utilizado. Algunas de estas funciones $g(\cdot)$ las veremos más adelante, en la Sección 5.7.4, al estudiar algunos esquemas de modulación de impulsos mediante portadora modulada.

En resumen, cuando se aumenta la potencia de la señal de entrada, la relación de postdetección S_o / N_o alcanza el valor de 6,02n dB, que es independiente de la relación de predetección S_i / N_i . En consecuencia, sobre el umbral, aumentos en la relación de predetección no se traducen en aumentos en la relación S/N de postdetección. El valor máximo de la relación S/N de postdetección será de 6,02n dB, mientras que el correspondiente valor mínimo de la relación S/N de predetección se puede determinar a partir de la expresión (5.114). El valor límite de S_o / N_o dependerá solamente del número n de impulsos de las secuencias PCM. Más adelante volveremos sobre este tema.

♣ Ejemplo 5.8

Se quiere transmitir en PCM NRZ una señal $m(t)$ cuya frecuencia máxima es de 5 kHz y cuya amplitud varía entre -10 V y +15 V. Se desea que la resolución o error máximo esté dentro del $\pm 5\%$ del valor pico de la señal mensaje. Vamos a calcular todos los parámetros asociados.

$$\text{De acuerdo con los datos, } V_{\max} = |m(t)|_{\max} = 15 \text{ V}; \quad T_s = \frac{1}{2f_m}$$

Se quiere que $e_{\max} = \frac{\Delta Q}{2} = 0,05 \cdot V_{\max} = 0,05 \frac{2^n}{2} \Delta Q$, de donde $2^n = 20 \rightarrow n = 5$, pues n es un número entero. También, $N = 2^n = 32$ niveles.

$$\text{De (5.93), } \Delta Q = \frac{2V_{\max}}{N} = \frac{30}{32} = 0,938 \text{ V}$$

$$\text{De (5.89), } V_{q\max} = (N-1) \frac{\Delta Q}{2} = 14,531 \text{ V}$$

de donde, $-14,531 \text{ V} \leq x_q(mT_s) \leq 14,531 \text{ V}$; el cuantificador tendrá 32 niveles con una separación de 0,938 V entre niveles. De acuerdo con la expresión (5.90), el valor mínimo de $m(t)$, ($m(t) = -10 \text{ V}$), está entre -9,844 V ($k = 11$) y -10,781 V ($k = 12$), siendo el nivel de comparación igual a -10,313; por lo tanto, la salida cuantificada correspondiente a una entrada de -10 V tiene el valor -9,844 V.

Cálculo de otros parámetros:

$$\text{Ancho de banda de la banda de base: } B = 2nf_m = 2 \times 5 \times 5 \times 10^3 = 50 \text{ kHz}; \quad \beta_m = 10$$

$$\text{Relación S/N de postdetección: } \frac{S_o}{N_o} = N^2 = 1024 = 30,1 \text{ dB}$$

$$\text{Probabilidad de error óptima: } P_{\text{eopt}} = 6,32 \times 10^{-5}$$

De (4.18), la velocidad de información es $V_i = \frac{\log_2 N}{T_s} = 50 \text{ kbps}$. Como el sistema es binario y no se especifica impulsos redundantes, la velocidad de modulación es de 50 kbaudios. ♣

♣ Ejemplo 5.9

Sea una señal $m(t)$ como la mostrada en la Fig. 5.39(a), la cual queremos codificar en PCM NRZ. Vamos a determinar todos los parámetros asociados y las formas de las secuencias PAM_q RZ y PCM NRZ.

La amplitud de $m(t)$ varía entre 0 V y 7 V con un error máximo tolerable de 0,5 V. La frecuencia máxima de la señal es de 500 Hz.

Este es un caso de cuantificación uniforme unipolar y las ecuaciones que caracterizan al cuantificador son ligeramente diferentes de las determinadas para cuantificación bipolar, Fig. 5.34.

Para un cuantificador uniforme unipolar, se tiene, a partir de la Fig. 5.39(a),

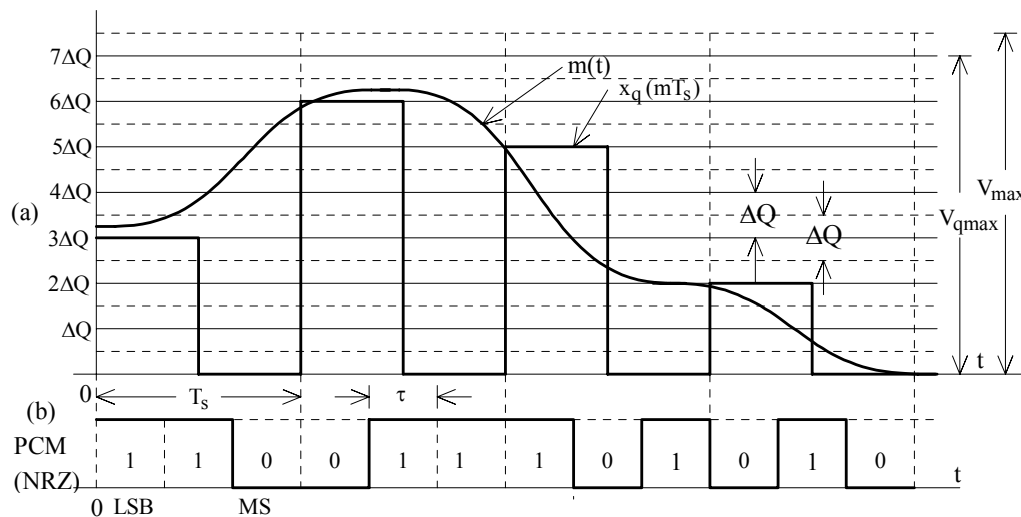


Fig. 5.39.

$$V_{q\max} = (N - 1)\Delta Q = (2^n - 1)\Delta Q; \quad N \text{ y } n \text{ son siempre números enteros}$$

$$V_{\max} = V_{q\max} + \frac{\Delta Q}{2} = (2N - 1) \frac{\Delta Q}{2}; \quad e_{\max} = \frac{\Delta Q}{2} = R_q \quad (5.114)$$

Para que el cuantificador no se sature o recorte la señal, $0 \leq m(t) \leq V_{\max}$.

Se tiene entonces,

$$V_{q\max} = \text{valor máximo de la señal PAM cuantificada } x_q(mT_s)$$

$$V_{\max} = \text{valor máximo de la señal PAM muestreada } x(mT_s)$$

$$\Delta Q = \text{paso de cuantificación}; \quad e_{\max} = \frac{\Delta Q}{2} = \text{error máximo o resolución}$$

$$\text{En el presente ejemplo, } e_{\max} = \frac{\Delta Q}{2} = 0,5 \cdot V \quad \therefore \Delta Q = 1 \text{ V}$$

$$|m(t)|_{\max} = 7 = V_{\max} = (2N-1) \frac{\Delta Q}{2} \quad \therefore N = 8 \text{ y } n = 3$$

$$\text{Tambi3n, } f_s = 2f_m = 1 \text{ kHz; } T_s = 1 \text{ ms; } \tau = \frac{T_s}{3}; \quad B = \frac{1}{\tau} = 3 \text{ kHz}$$

$$P_{\text{eopt}} = 1,01 \times 10^{-3}; \quad V_i = \frac{n}{T_s} = 3 \text{ kbps}$$

De la Fig. 5.39(a), los valores de la se1al PAM cuantificada $x_q(mT_s)$ en los instantes $0, T_s, 2T_s$ y $3T_s$ son, respectivamente, 3 V, 6 V, 5 V y 2 V, que corresponden a las secuencias binarias (de tres d3gitos cada una) 011, 110, 101 y 010, respectivamente. En la Fig. 5.39(b) se muestra la forma de la se1al PCM NRZ, en la cual, siguiendo la pr1ctica usual, el bit de menor peso (LSB) se transmite de primero, mientras que el bit de mayor peso (MSB) se transmite de 3ltimo.



5.4.3. Modulaci3n Diferencial de Impulsos Codificados (DPCM)

Cuando una se1al de voz, m3sica o video se muestrea a frecuencias ligeramente superiores a la frecuencia de Nyquist, se observa que la variaci3n de amplitud entre muestras adyacentes presenta una alta correlaci3n, es decir, que en promedio la se1al no var3a demasiado entre una muestra y la siguiente. Cuando estas muestras son codificadas en PCM convencional, las muestras codificadas contienen informaci3n redundante que no es absolutamente esencial para la transmisi3n de la informaci3n. La eliminaci3n de esta redundancia permite aumentar el rendimiento del sistema, esto es, su velocidad de informaci3n. El mecanismo para disminuir la redundancia es el siguiente: en vez de codificar y transmitir cada muestra por separado, se codifica y transmite la diferencia entre dos muestras adyacentes. La informaci3n est1 contenida en esta diferencia, pero, comparado con el sistema PCM convencional, el n3mero de d3gitos de los grupos de codificaci3n ser1 menor. Este esquema de modulaci3n de impulsos se denomina ‘‘Modulaci3n Diferencial de Impulsos Codificados, DPCM’’.

En la Fig. 5.40 se muestra el diagrama de bloques funcional de un sistema (transmisor y receptor) DPCM.

En el transmisor, Fig. 5.40(a), la se1al de entrada al cuantificador es

$$x(mT_s) = m(mT_s) - \check{m}(mT_s) \quad (5.115)$$

siendo su salida

$$x_q(mT_s) = [m(mT_s) - \check{m}(mT_s)]_q = x(mT_s) + e_q(mT_s) \quad (5.116)$$

donde $e_q(mT_s)$ es el error de cuantificaci3n.

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

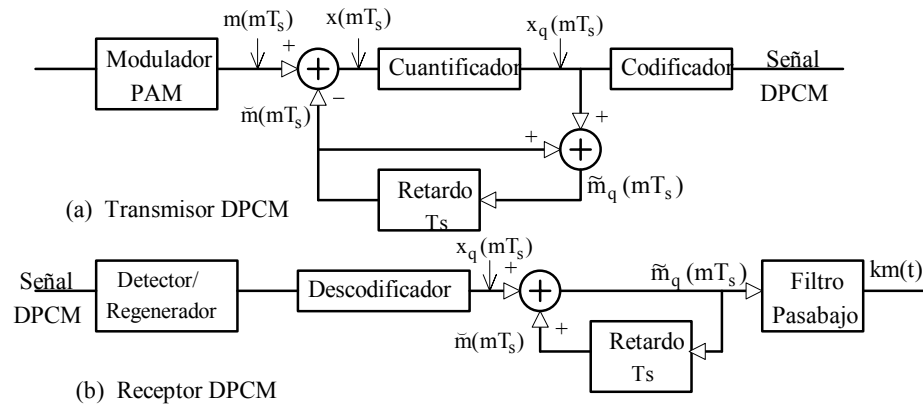


Fig. 5.40. Sistema de Modulación DPCM.

A la entrada de la red de retardo T_s la señal es

$$\tilde{m}_q(mT_s) = \tilde{m}(mT_s) + x_q(mT_s) = \tilde{m}(mT_s) + x(mT_s) + e_q(mT_s)$$

Reemplazando $x(mT_s)$ dado por (5.115),

$$\tilde{m}_q(mT_s) = m(mT_s) + e_q(mT_s) \quad (5.117)$$

La señal $\tilde{m}_q(mT_s)$ es entonces la versión cuantificada de la señal de entrada muestreada $m(mT_s)$, y como $\tilde{m}(mT_s) = \tilde{m}_q[(m-1)T_s]$, entonces $\tilde{m}(mT_s)$ representa la versión cuantificada de $m(t)$ en el intervalo T_s anterior. La señal $x(mT_s)$ dada por (5.115) es la diferencia entre dos muestras consecutivas que una vez cuantificada y codificada dará origen a la señal DPCM.

La señal cuantificada será, de (5.116), $x_q(mT_s) = \left\{ m(mT_s) - \tilde{m}_q[(m-1)T_s] \right\}_q$ y tendrá valores discretos en el intervalo $\frac{\Delta Q}{2} \leq |x_q(mT_s)| \leq (N-1) \frac{\Delta Q}{2}$.

Puede verse que si $N > 2$, la instrumentación en DPCM es tan compleja como en PCM convencional, pero en retorno el ancho de banda de la banda de base se reduce pues la diferencia $[m(mT_s) - \tilde{m}(mT_s)]$ se puede representar con pocos niveles de cuantificación si $m(t)$ no experimenta cambios drásticos de una muestra a la siguiente. Por ejemplo, un sistema DPCM con $N = 8 = 2^3$ (código de 3 dígitos) es aceptable para transmitir una señal de video, mientras que en PCM convencional se necesitaría, por lo menos, $N = 256 = 2^8$ (código de 8 dígitos) para tener una calidad comparable. En este caso particular, el ancho de banda de la banda de base se reduce en 3/8.

La red de retardo en el lazo de retroalimentación del transmisor se puede reemplazar por un filtro predictor, pues si se conoce el comportamiento anterior de una señal hasta un cierto punto en el tiempo, es posible hacer una cierta inferencia acerca de sus valores futuros. La señal $\tilde{m}(mT_s)$ es entonces una “predicción de $m(mT_s)$ ”, y la señal $x(mT_s)$ es el “error de predicción”, ya que es la cantidad mediante la cual el filtro de predicción falla en la predicción exacta de la entrada. En este caso el sistema se denomina “Modulación Diferencial Adaptativa de Impulsos Codificados, ADPCM”. En la Recomendación G.722 de la UIT-T se establece una frecuencia de muestreo de 16

kHz con 14 dígitos binarios por muestra. Esto permite, utilizando ADPCM, lograr aumentar el ancho de banda de la banda de base hasta 7 kHz para transmisión de voz de alta calidad.

El cálculo del ancho de banda de la banda de base y de la relación S/N de cuantificación es similar al del PCM convencional y no lo discutiremos aquí.

5.4.4. Modulación Delta Lineal (DM)

En el esquema de modulación DPCM la diferencia de amplitud entre dos muestras adyacentes, cuando se muestrea a frecuencias normales ($f_s \geq 2f_m$), puede ser importante y corresponder a un gran número de niveles de cuantificación. Si se aumenta la frecuencia de muestreo hasta que se esté seguro de que la diferencia de amplitud entre una muestra y la siguiente no sea mayor que un cierto paso de cuantificación, la información a transmitir de cada muestra se puede representar en forma binaria como el sentido de la variación respecto a la muestra precedente, es decir, la diferencia de amplitud entre dos muestras adyacentes se cuantifica en dos niveles $+\Delta$ ó $-\Delta$, y la salida del cuantificador se representa entonces mediante un simple dígito binario que indica el signo (positivo o negativo) de la diferencia entre las muestras. El cuantificador es, pues, un “operador signo” mucho más sencillo de instrumentar que un cuantificador multiniveles convencional. Este esquema de codificación se conoce con el nombre de “Modulación Delta Lineal” y puede considerarse como un caso especial del sistema DPCM con $N = 2$.

El diagrama de bloques funcional de un sistema de modulación delta lineal es idéntico al del sistema DPCM mostrado en la Fig. 5.40, con el cuantificador reemplazado por un operador signo, comúnmente denominado “limitador estricto (hard limiter)”. El elemento de retardo y el sumador en el lazo de retroalimentación se pueden reemplazar por un integrador cuya entrada es una secuencia de impulsos bipolares de período T_s , duración τ y amplitud $\pm A$, y cuya salida es una señal en escalera que representa una versión cuantificada de la señal de entrada. Asimismo, el sumador y el operador signo se pueden instrumentar mediante un comparador; como el paso de cuantificación es constante y de valor Δ , se dice entonces que éste es un sistema de modulación delta lineal. Como consecuencia, se tiene el sistema de modulación delta lineal mostrado en la Fig. 5.41. Nótese la simplicidad en la instrumentación.

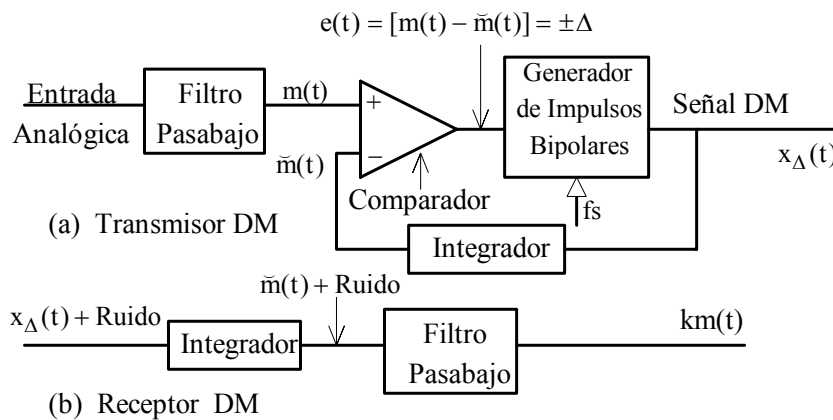


Fig. 5.41. Sistema de Modulación Delta Lineal.

En el transmisor, Fig. 5.41(a), la señal $m(t)$ se compara con una aproximación en escalera de ella misma, $\tilde{m}(t)$. La salida del comparador serán niveles de amplitud $\pm \Delta$, dependiendo del

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

signo de $e(t)$. Si $e(t)$ es positiva en un instante de muestreo dado, se produce un impulso de amplitud A a la salida; cuando este impulso se integra, $\tilde{m}(t)$ se incrementa en un escalón de amplitud Δ ; esta nueva $\tilde{m}(t)$ se vuelve a comparar con el $m(t)$ actual. Si $e(t)$ no se ha vuelto negativa, la salida será de nuevo un impulso positivo y el integrador incrementará otro escalón. En algún instante $\tilde{m}(t)$ se hará mayor que $m(t)$, lo que ocasionará que $e(t)$ sea negativa y en el instante de muestreo siguiente se producirá un impulso de salida negativo resultando en un decremento de $\tilde{m}(t)$ en un escalón. Esta estructura en retroalimentación minimiza la diferencia, que constituye la señal de error, variando la polaridad de los impulsos de salida.

Nótese que cuando la pendiente de $m(t)$ es positiva, se generan más impulsos positivos que negativos. La situación se invierte cuando la pendiente es negativa. En aquellos puntos de $m(t)$ en los cuales la pendiente es muy pequeña, hay aproximadamente igual número de impulsos positivos y negativos, de modo que el valor promedio de la señal $x_{\Delta}(t)$ es cero. En general, si se cumple ciertas condiciones que veremos más adelante, $\tilde{m}(t)$ tiende en promedio a $m(t)$ y el valor promedio de $x_{\Delta}(t)$ será cero.

La señal modulada en delta, $x_{\Delta}(t)$, tendrá entonces la forma

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot \text{sgn}[m(nT_s) - \tilde{m}(nT_s)] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{\tau}\right) \quad (5.118)$$

Esta es una secuencia binaria aleatoria bipolar de amplitud $\pm A$, período T_s y duración τ . La información va contenida en la operación signo.

El receptor DM, Fig. 5.41(b), es bastante sencillo y consta de un integrador y de un filtro pasabajo.

En la Fig. 5.42 se muestran todas las formas de onda en modulación delta lineal en operación normal.

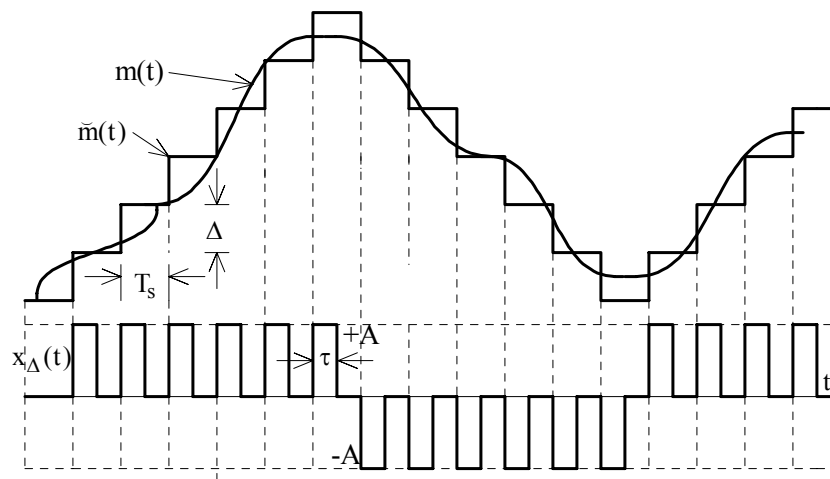


Fig. 5.42. Formas de Onda en Modulación Delta Lineal. Operación Normal.

Algunos de los problemas que ocurren cuando se utiliza la modulación delta lineal para la transmisión de señales analógicas se pueden observar en la Fig. 5.43.

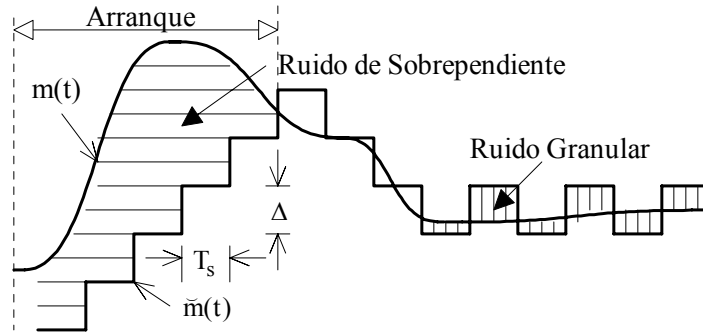


Fig. 5. 43. Ruido Granular y de Sobrependiente en Modulación Delta Lineal.

Supongamos que inicialmente $\tilde{m}(t) < m(t)$, de manera que el primer impulso de salida sea positivo. Cuando este impulso se retroalimenta a través del integrador, se produce un incremento Δ en $\tilde{m}(t)$. Este proceso continúa durante el “intervalo de arranque” hasta que $\tilde{m}(t)$ excede a $m(t)$ y se produce un impulso negativo. Si $m(t)$ permanece constante, $\tilde{m}(t)$ exhibe un comportamiento de rastreo sobre $m(t)$ lo que da origen al “error o ruido granular”, como se muestra en la Fig. 5.43.

El error o ruido granular se puede reducir aumentando la frecuencia de muestreo y/o disminuyendo la amplitud del paso de cuantificación Δ . Cuando $m(t)$ cambia, $\tilde{m}(t)$ la sigue en forma escalonada mientras las muestras sucesivas de $m(t)$ no sean mayores que Δ . Cuando la diferencia es mayor que Δ , $\tilde{m}(t)$ ya no puede seguir a $m(t)$ produciéndose el fenómeno de “sobrecarga o sobrependiente”, como se muestra en la Fig. 5.43. Este tipo de sobrecarga no está determinado por la amplitud de $m(t)$ sino más bien por su pendiente, de ahí el nombre de “sobrependiente”.

El fenómeno de sobrependiente es una limitación básica en la modulación delta lineal, y se produce cuando la pendiente de $m(t)$ es superior a la pendiente máxima de $\tilde{m}(t)$. Vamos a determinar las condiciones necesarias para prevenir la sobrependiente.

Supongamos que $m(t)$ es sinusoidal de la forma $m(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$. La pendiente máxima de $m(t)$ será

$$\left[\frac{d}{dt} m(t) \right]_{\max} = 2\pi f_m A_m \quad (5.119)$$

La pendiente máxima de $\tilde{m}(t)$ es Δ / T_s , de modo que una condición suficiente para evitar la sobrependiente es que

$$2\pi f_m A_m \leq \frac{\Delta}{T_s} = \Delta \cdot f_s \quad (5.120)$$

La amplitud máxima de $m(t)$ a partir de la cual se produce sobrependiente será, de (5.120),

$$A_m = \frac{\Delta}{2\pi} \left(\frac{f_s}{f_m} \right) \quad (5.121)$$

Cuando la variación de $m(t)$ es menor que Δ , $\tilde{m}(t)$ será una señal periódica rectangular de amplitud pico a pico igual a Δ , y permanecerá en este estado mientras la variación de la señal de entrada no sobrepase el valor Δ . Aunque en este caso la distorsión de salida es muy severa, se puede establecer un límite superior del rango de amplitudes tomando precisamente este valor como el de la mínima entrada reconocible por el codificador.

Sea entonces $A_{\min} = \Delta$; el rango dinámico de amplitud se puede definir en la forma

$$R_A = \frac{A_m}{A_{\min}} = \frac{A_m}{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{f_s}{f_m} \right) \quad (5.122)$$

El rango dinámico R_A puede considerarse como el número de escalones de amplitud Δ necesarios para alcanzar la amplitud A_m .

La frecuencia de muestreo f_s debe ser mucho mayor que la frecuencia máxima de la señal mensaje si se quiere un rango de amplitud razonable; pero por otro lado, el rango de amplitud no puede ser muy alto porque ello implicaría altos anchos de banda de la banda de base.

El problema de la sobrependiente se puede reducir entonces disminuyendo f_m mediante filtrado de $m(t)$, o aumentando el valor del paso de cuantificación Δ o la frecuencia de muestreo f_s . Si se disminuye f_m o se aumenta Δ , la resolución de la señal será muy pobre y la distorsión aumentará; asimismo, si se aumenta la frecuencia de muestreo se aumentan los requerimientos de ancho de banda de la banda de base.

El mejor método para evitar la sobrependiente es la de detectar la condición de sobrecarga y ajustar el valor de Δ haciéndolo más grande mediante un control de ganancia en el lazo de retroalimentación del modulador. Los métodos de control de ganancia han dado origen a diferentes técnicas de la modulación delta. Por ejemplo, en la Modulación Delta de Pendiente Continuasmente Variable (CVSD) el valor de la ganancia se ajusta sobre un rango continuo; en la Modulación Delta de Pendiente Variable (VSD) la ganancia se ajusta sobre una base discreta; en la Modulación Delta Controlada Digitalmente (DCD) se utiliza un comparador digital que, operando sobre una secuencia de error, controla la ganancia. Estas tres son formas de la Modulación Delta Adaptativa, denominación adoptada para distinguirla de la Modulación Delta Lineal. Para más información sobre las técnicas adaptativas, ver la bibliografía.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas de Modulación Delta Lineal

Como la señal de banda de base en modulación delta básicamente es una secuencia de impulsos de período T_s y duración τ , Fig. 5.42, su ancho de banda será

$$B_{DM} \geq \frac{1}{\tau}; \text{ si definimos } \frac{\tau}{T_s} = \frac{1}{2}, \text{ entonces } B_{DM} \geq 2f_s \quad (5.123)$$

El ancho de banda de la banda de base es bastante grande; por ejemplo, en la transmisión de voz en PCM con $f_s = 8000$ y $n = 8$, el ancho de banda es del orden de 64 kHz, mientras que en la modulación delta, para una calidad comparable, el ancho de banda es mayor, como veremos más adelante.

Veamos ahora la influencia del ruido en modulación delta lineal. La salida del demodulador difiere de la entrada del modulador debido a la presencia del ruido de cuantificación (granular) $n_q(t)$ y del ruido de sobrependiente $n_s(t)$, esto es

$$y(t) = s_o(t) + n_q(t) + n_s(t) \quad (5.124)$$

La relación S/N de postdetección será entonces

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\langle s_o^2(t) \rangle}{\langle n_q^2(t) \rangle + \langle n_s^2(t) \rangle} = \frac{S_o}{N_{oq} + N_{os}} \quad (5.125)$$

Para simplificar el cálculo de la potencia promedio de la señal, consideremos el peor caso en la modulación delta lineal donde toda la potencia está concentrada en la parte superior de la banda de base, es decir, que $s_o(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$ cuya potencia promedio es

$$S_o = \langle s_o^2(t) \rangle = \frac{A_m^2}{2} \quad (5.126)$$

En cuanto a las potencias de ruido, se demuestra [Schwartz, 1990], que

$$N_{oq} = \langle n_q^2(t) \rangle = \frac{\Delta^2}{3} \quad (5.127a)$$

$$y \quad N_{os} = \langle n_s^2(t) \rangle = \frac{A_m^2}{2} 1,8 \cdot \left[1 - \frac{\Delta \cdot f_s}{2\pi f_m A_m} \right]^{5/2} \quad (5.127b)$$

Generalmente se define el “Escalón o Paso Relativo, Δ_r ” y la “Frecuencia de Muestreo Normalizada, F_s ” en la forma

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{A_m} = \frac{\Delta}{|m(t)|_{\max}} \quad y \quad F_s = \frac{f_s}{f_m} \quad (5.128)$$

Nótese que, de (5.122), Δ_r es el inverso del rango dinámico R_A .

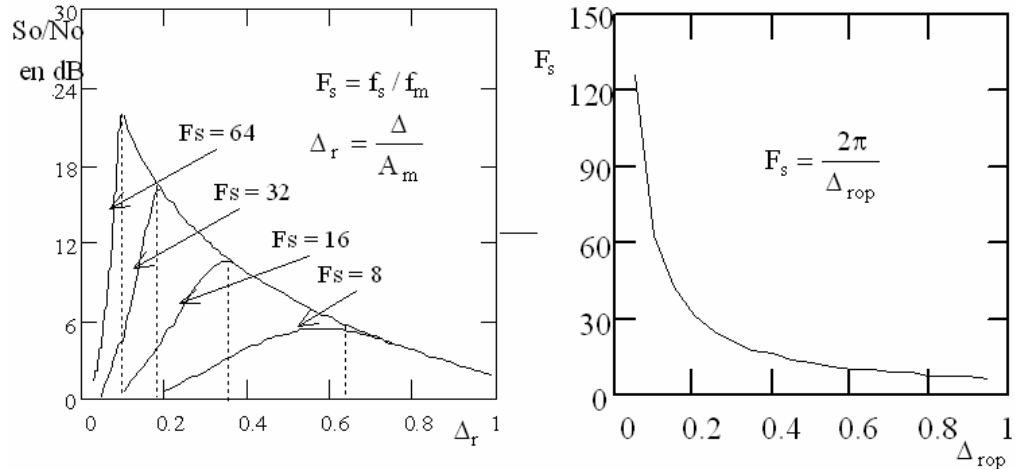
La relación de postdetección S_o/N_o se puede expresar en términos de Δ_r y F_s . En efecto,

$$\frac{S_o}{N_o} = \begin{cases} \frac{1}{1,8 \cdot \left[1 - \frac{\Delta_r \cdot F_s}{2\pi} \right]^{5/2} + \frac{2}{3} \Delta_r^2} & \text{para } \Delta_r \cdot F_s \leq 2\pi \\ \frac{3}{2\Delta_r^2} & \text{para } \Delta_r \cdot F_s > 2\pi \end{cases} \quad (5.129)$$

En la Fig. 5.44(a) se grafica la relación de postdetección S_o/N_o , en dB, en función del escalón relativo Δ_r para diferentes valores de la frecuencia de muestreo normalizada F_s . Nótese que la relación S_o/N_o es máxima cuando $\Delta_{rop} \cdot F_s = 2\pi$, donde Δ_{rop} es el “escalón relativo óptimo” correspondiente. El valor máximo de la relación S_o/N_o será entonces

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\max} = \frac{3}{2\Delta_{\text{rop}}^2} \quad (5.130)$$

En la Fig. 5.44(b) se relacionan los parámetros F_s y Δ_{rop} de tal manera que, conocido un parámetro, se puede estimar rápidamente, a partir de la gráfica, el valor del otro para máxima relación de postdetección S_o/N_o .



(a) Relación S_o/N_o vs Δ_r (b) Relación F_s vs Δ_{rop} para S_o/N_o máxima.

Fig. 5.44.

En la Fig. 5.44(a) se puede notar el angosto rango de valores del escalón relativo en el cual la relación de postdetección es máxima. Para valores pequeños del escalón Δ_r , el ruido de cuantificación se reduce pero el ruido de sobrependiente aumenta rápidamente. Para valores altos, el ruido de sobrependiente desaparece pero el ruido de cuantificación o granular aumenta. Los valores óptimos del escalón relativo Δ_r corresponden a los picos de las curvas (indicados por las líneas a trazos): a la derecha de los valores óptimos domina el ruido granular, mientras que a la izquierda domina el ruido de sobrependiente. Nótese que la relación S_o/N_o mejora aumentando la frecuencia de muestreo f_s (para f_m constante), puesto que si se aumenta f_s se reduce el paso o escalón Δ requerido para mantener un nivel específico de ruido de sobrependiente. Esto, a su vez, reduce el ruido de cuantificación. Si el ancho de banda del canal lo permite, el mejor compromiso en modulación delta lineal es entonces el de aumentar la frecuencia de muestreo f_s (o F_s).

Se puede comparar el comportamiento de los sistemas PCM y DM en términos de la señal y de la complejidad de instrumentación. Para asegurar que la comparación se efectúa en idénticas condiciones, vamos a suponer que ambos sistemas utilizan aproximadamente el mismo ancho de banda para transmitir una señal analógica cuya frecuencia máxima es f_m . Esto implica, de (5.128) y (5.101), que $2f_s = 2nf_m$ o $F_s = n$, donde F_s es la frecuencia de muestreo normalizada en modulación delta y n el número de dígitos por grupo de codificación en modulación PCM. Por ejemplo, si consideramos un sistema PCM de 8 dígitos binarios ($n = 8$) para transmitir una señal de $f_m = 4$ kHz de ancho de banda, la frecuencia de muestreo normalizada en DM es $F_s = 8$. La comparación se puede efectuar observando la curva para $n = 8$ de la Fig. 5.38(a) en PCM y la curva para $F_s = 8$ de la Fig. 5.44(a) en DM. Nótese que, sobre el umbral, el sistema PCM está por encima del valor óptimo del sistema DM en más de 43 dB. Por consiguiente, para un mismo ancho de banda de la banda de base, el comportamiento en PCM es superior al de DM.

El comportamiento del sistema DM se puede mejorar considerablemente utilizando las técnicas de la Modulación Delta Adaptativa. Por ejemplo, en transmisión de voz el sistema CVSD, ya mencionado, necesita un ancho de banda de 32 kHz que es la mitad de lo requerido en PCM.

En cuanto a la complejidad del equipo, el sistema de modulación delta es mucho más sencillo que en PCM, y aún más ahora que se consiguen circuitos integrados para la modulación delta adaptativa, como, por ejemplo, el C.I. MC3418 que es un modulador/demodulador delta de pendiente continuamente variable que permite operar entre 9600 bps y 64 kbps, y cuya relación S/N de postdetección es del mismo orden que en PCM. Esta simplicidad, combinada con una buena calidad de voz, ha generado un considerable interés en el uso de las técnicas de la modulación delta en sistemas de telefonía comercial, de comunicaciones militares, industriales y espaciales, así como para otros distintos usos en muchas áreas afines.

♣ Ejemplo 5.10

Se desea transmitir en DM una señal de audio de la forma $m(t) = 4 \cos(8 \times 10^3 \pi t)$. Vamos a determinar los parámetros necesarios para su transmisión con una relación de postdetección superior a los 15 dB.

En primer lugar hay que determinar la frecuencia de muestreo normalizada F_s y el escalón relativo Δ_{rop} óptimo correspondiente. De la forma de $m(t)$, $A_m = |m(t)|_{\text{max}} = 4$ y $f_m = 4$ kHz.

De la Fig. 5.44(a), para una relación S/N de 15 o más dB, se puede tomar $F_s = 32$, de donde $f_s = 32f_m = 128$ kHz. La relación de postdetección S_o/N_o es máxima cuando $F_s = 2\pi / \Delta_{\text{rop}}$; entonces,

$$\Delta_{\text{rop}} = \frac{2\pi}{F_s} = \frac{\Delta}{|m(t)|_{\text{max}}} = 0,196 \quad \text{y} \quad \Delta = \frac{2\pi|m(t)|_{\text{max}}}{F_s} = 0,785 \approx 0,8V$$

La amplitud $|m(t)|_{\text{max}} = 4$ se cubrirá con 5 escalones de amplitud $\Delta \approx 0,8V$.

El valor máximo de la relación de postdetección se puede calcular a partir de (5.130). En efecto,

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{max}} = \frac{3}{2\Delta_{\text{rop}}^2} = 38,907 = 15,9 \text{ dB}$$

De (5.123), el ancho de banda de la banda de base es $B = 2f_s = 256$ kHz.

En resumen, los parámetros para transmisión en DM son:

Frecuencia de muestreo: $f_s = 128$ kHz

Amplitud del escalón: $\Delta = 0,8$ V

Relación S/N de postdetección: $\frac{S_o}{N_o} = 15,9$ dB

Ancho de banda de la banda de base: $B = 256$ kHz

Nótese que si la transmisión fuera en PCM, los correspondientes parámetros serían:

Frecuencia de muestreo: $f_s = 2f_m = 8$ kHz

Número de impulsos por grupo: $n = 8$ (típico)

Relación S/N de postdetección: $\frac{S_o}{N_o} = 2^{2n} = 65536 = 48,165 \text{ dB}$

Ancho de banda de la banda de base: $B = 2nf_m = 64 \text{ kHz}$

Para este caso particular, la relación S_o/N_o en PCM es 32,3 dB superior a la de DM.



5.5. TRANSMISION DE IMPULSOS EN BANDA DE BASE

5.5.1. Introducción

En general, un sistema digital de banda de base es aquel que transmite información digital generalmente a bajas frecuencias y por canales pasabajo; la información digital (secuencias de impulsos) se transmite tal como se genera, sin ningún otro tipo de procesamiento o codificación que no sea digital. La señal de banda de base será, en general, una secuencia de impulsos PCM (RZ o NRZ) que se transmite por conductores metálicos u ópticos, que son los que pueden transmitir señales desde CC en adelante.

Para generalizar el enfoque, consideremos el modelo de un sistema de transmisión binario en banda de base mostrado en la Fig. 5. 45.

La salida del modulador es una secuencia de impulsos binarios de duración τ que se aplica a un filtro lineal que modifica el perfil de los impulsos de acuerdo con las características del canal. El canal está modelado mediante un sistema lineal invariante en el tiempo de función de transferencia $H_c(f)$ y una fuente de ruido aditivo $n(t)$ que podemos suponer gaussiano, de valor promedio cero, de densidad espectral $S_n(f)$ e independiente de la señal $v(t)$.

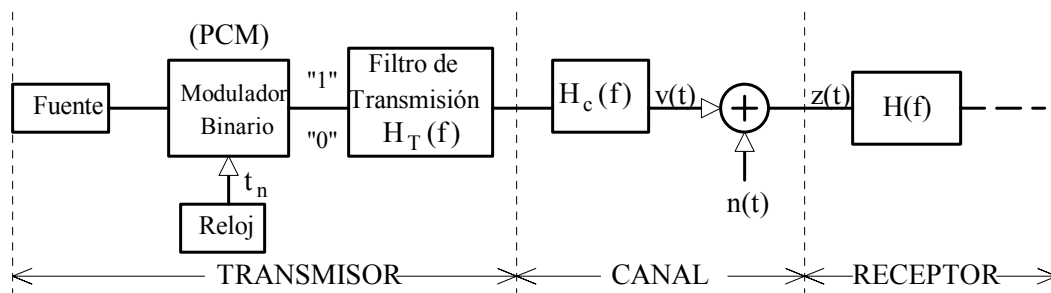


Fig. 5.45. Transmisión Binaria en Banda de Base.

La señal $z(t)$ recibida puede estar degradada debido a (1) el efecto combinado de las características de los sistemas $H_T(f)$ y $H_c(f)$, efecto conocido con el nombre de “interferencia intersímbolo”, y (2) la degradación producida por el ruido $n(t)$.

Hay otros factores que intervienen también en menor grado en la degradación de la señal, entre otros la interferencia intercanal, la fluctuación de fase (“jitter”) y el desvanecimiento selectivo, pero solamente consideraremos la interferencia intersímbolo y el efecto del ruido. El filtro $H(f)$ de entrada al receptor debe ser diseñado entonces tomando en cuenta todos esos factores. Esto lo haremos más adelante.

5.5.2. Técnicas de Multicanalización o Multiplicidad

En las secciones anteriores se han discutido varias de las técnicas de modulación de impulsos en términos de su habilidad para transportar información generada por una sola fuente. Pero en la práctica es necesario enviar simultáneamente una gran cantidad de mensajes diferentes por un medio de transmisión dado. El proceso de operación multicanal permite, mediante las técnicas llamadas de “multiplicidad”, “multiplex” o “multiplaje”, combinar en el transmisor los mensajes de varias fuentes de información, transmitirlos como un solo bloque y luego separarlos en el receptor. Como solamente se necesita un transmisor y un receptor, aunque mucho más complicados, una ventaja de la operación multicanal es la disminución de equipo y, por supuesto, costo. La banda de frecuencias o intervalo de tiempo asignado a cada mensaje individual se denomina comúnmente “canal”.

Hay dos formas de multicanalización que son de interés:

1. La “Multiplicidad por División de Tiempo (Time-Division Multiplex, TDM)”
2. La “Multiplicidad por División de Frecuencia (Frequency-Division Multiplex, FDM)”

El sistema FDM, el cual es directamente aplicable a señales continuas, en esencia consiste en colocar lado a lado, mediante modulación y sin solapamiento, los espectros de las señales mensaje individuales y formar así un espectro compuesto o señal de banda de base compuesta que se transmite; las señales se transmiten simultáneamente pero ellas se reparten el ancho de banda disponible del canal de transmisión. Este tipo de multicanalización lo estudiaremos con más detalle en el Capítulo VI.

El sistema TDM combina, en el tiempo y sin solapamiento, los valores de muestra, codificados o no, de los mensajes individuales; el tiempo es compartido por las señales individuales, las cuales disponen para su transmisión de todo el ancho de banda del canal. La separación de las señales individuales en el receptor se efectúa mediante circuitos de sincronización apropiados.

Técnicas de Multiplicidad por División de Tiempo (TDM)

En el teorema del muestreo se demuestra que es posible transmitir la información contenida en una señal mensaje continua de banda limitada mediante la transmisión de sus muestras tomadas a intervalos regulares. La transmisión de cada muestra ocupa todo el ancho de banda del canal pero sólo una parte del tiempo, pudiéndose aprovechar el intervalo entre muestras para transmitir las muestras de otras señales mensaje. Esto se efectúa muestreando todas las señales y entrelazándolas, como se muestra en la Fig. 5.46 para cuatro señales diferentes. En esta sección haremos énfasis en la transmisión en banda de base.

Consideremos el transmisor, Fig. 5.46(a). Cuatro señales diferentes, limitadas a una banda f_m por los filtros pasabajo (FPB) de entrada, se muestrean en forma secuencial mediante un interruptor rotatorio o “conmutador”. El conmutador efectúa f_s revoluciones por segundo y extrae una muestra de cada entrada durante una revolución. La salida del conmutador es una señal compuesta PAM/TDM que contiene las muestras de cada una de las señales de entrada entrelazadas periódicamente en el tiempo, como se muestra en la Fig. 5.46(c). Esta señal PAM/TDM puede ahora modularse en cualquiera de los sistemas de modulación de impulsos vistos en las secciones anteriores. La forma más común es la modulación PCM, en cuyo caso se tendrá un sistema PCM/TDM. La señal PCM/TDM tendrá una configuración como la mostrada en la Fig. 5.35(a), con la diferencia de que cada grupo de codificación corresponde a un mensaje diferente.

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

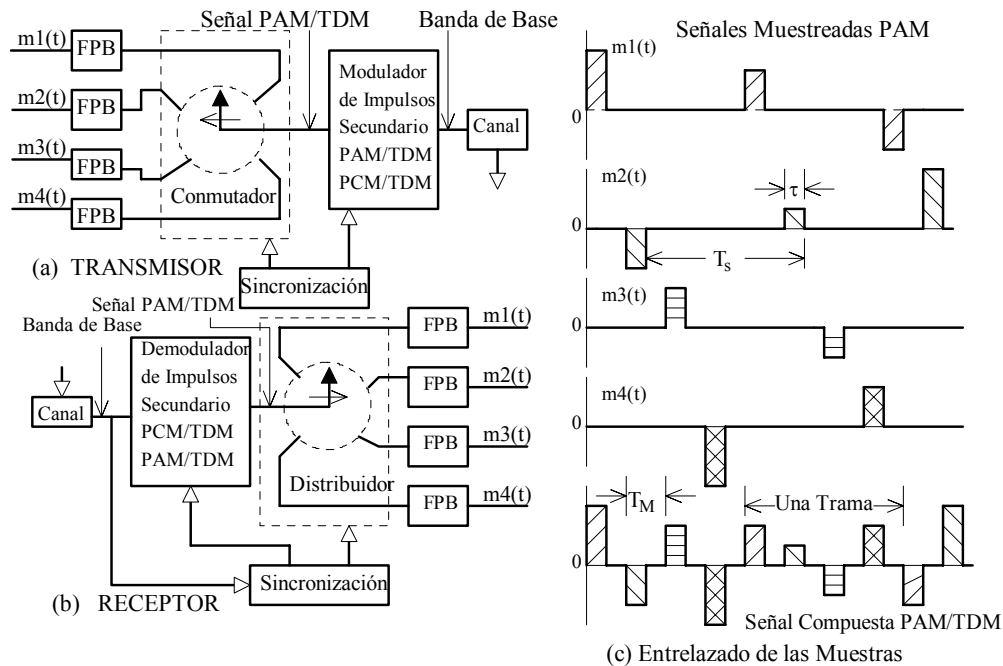


Fig. 5.46. Sistema Multiplex por División de Tiempo (TDM).

En el receptor, Fig. 5.46(b), el proceso es inverso: la señal PCM/TDM es demodulada y convertida en una señal PAM/TDM y mediante el “distribuidor” se separa cada una de las señales mensaje las cuales se envían a sus respectivos canales. El sincronismo entre el transmisor y el receptor debe ser exacto a fin de que no se produzca distorsión cruzada (“cross-talk”) entre los diferentes canales. Para lograr esta sincronización, en algunos sistemas se transmite impulsos especiales de sincronización, incluidos en la misma señal de banda de base o por canales separados, lo cual permite un control exacto de la sincronización. También puede lograrse la sincronización mediante métodos que veremos más adelante. En la Fig. 5.47 se muestra el entrelazamiento de M canales en PCM/TDM y PAM/TDM, y los parámetros de interés.

El período de base T_s corresponde al intervalo de Shannon y el conjunto de impulsos en él incluidos se denomina “trama”. Cada canal está asignado a un intervalo o ranura de tiempo de duración $T_M = T_s / M$ que contiene en PCM NRZ los n impulsos de duración τ por muestra, y en PAM un impulso de duración τ y un “intervalo de guarda” de duración τ_g para prevenir la interferencia mutua o solapamiento entre impulsos de canales adyacentes. Entonces, de la Fig.

$$5.47, \quad T_M = \frac{T_s}{M} = \frac{1}{2Mf_m} = \tau + \tau_g$$

$$\text{y en PCM / TDM,} \quad \tau = \frac{T_M}{n} = \frac{T_s}{nM} = \frac{1}{2nMf_m}$$

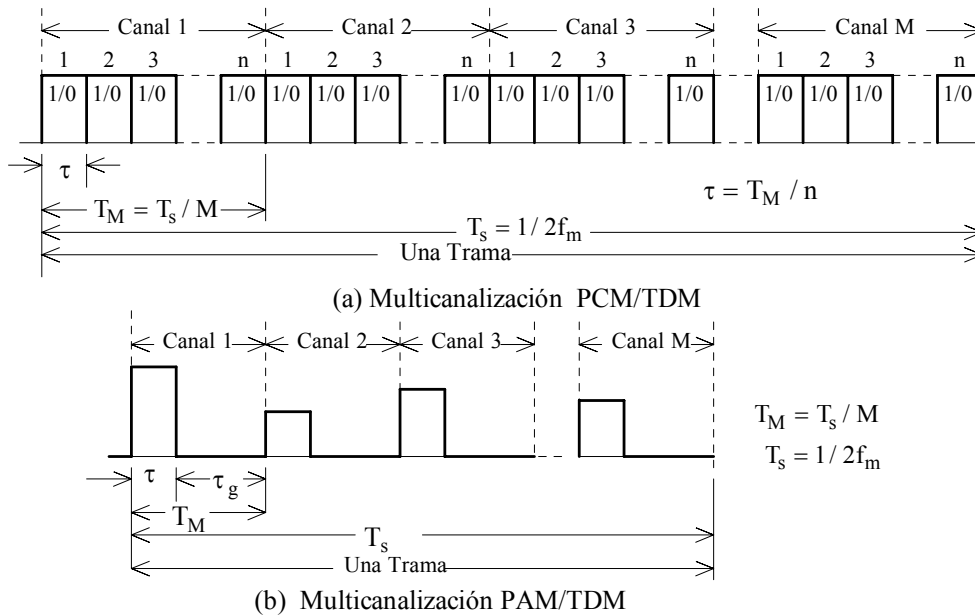


Fig. 5.47. Entrelazamiento de las Muestras en Multicanalización TDM

La frecuencia f_m es la frecuencia máxima de las señales de entrada; esta frecuencia está limitada por los filtros pasabajo de entrada. Sin embargo, si las frecuencias máximas de las señales de entrada fueran diferentes, la frecuencia de muestreo f_s dependerá de la mayor frecuencia presente. Por ejemplo, si f_{MAX} es la frecuencia más alta del conjunto de señales de entrada, entonces el intervalo de muestreo $T_s = 1 / 2f_{MAX}$. Las señales cuyas frecuencias máximas son menores que f_{MAX} resultarán sobremuestreadas, pero este sobremuestreo no representa ningún problema. En los Ejemplos 5.11 y 5.12, veremos algunas aplicaciones de estos conceptos.

5.5.3. Interferencia Intersímbolo

Un aspecto de considerable importancia en la transmisión de impulsos en banda de base es el ancho de banda requerido para el canal de transmisión, especialmente en transmisión de señales PCM/TDM NRZ. Si B es el ancho de banda del canal y τ la duración de los impulsos a transmitir, se suelen aplicar dos criterios para la selección del ancho de banda B:

1. El producto $B\tau = 1$, es decir, $B = \frac{1}{\tau}$ (5.131a)

2. A expensas de una pérdida de resolución entre impulsos adyacentes se puede disminuir el ancho de banda para tener el producto $B\tau = 1/2$, es decir,

$B = \frac{1}{2\tau}$ (5.131b)

Si $B\tau > 1$, generalmente no hay problemas en la transmisión de impulsos en banda de base.

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

La cuestión de si el ancho de banda debe ser calculado de acuerdo con (5.131a) o (5.131b) o en cualquiera otra forma, dependerá de la dispersión permisible de un impulso sobre los impulsos adyacentes. Esta dispersión se denomina “interferencia intersímbolo” y es de particular importancia en sistemas PCM/TDM NRZ, pues resulta en distorsión cruzada o de intermodulación. La cantidad de interferencia depende del ancho de banda del canal; en efecto, si el ancho de banda del canal es demasiado pequeño, los impulsos que pueden estar bien separados en el punto de origen, presentarán una gran dispersión cuando llegan al receptor y se solaparán con los impulsos adyacentes; a esto hay que agregar otros factores como el perfil del impulso y el método de detección en el receptor.

Supongamos que en el receptor se muestrea la señal recibida mediante muestreo instantáneo y que el impulso recibido tiene su valor máximo en el instante de muestreo y se hace cero en los instantes de muestreo adyacentes, como se muestra en la Fig. 5.48(a) o (b) para una secuencia binaria NRZ 1 1 0 1 1.

En estos casos no se produce interferencia intersímbolo, aunque las colas de los impulsos, algunas veces llamadas “ecos”, persistan durante varios intervalos. Esto resulta así cuando los impulsos recibidos tienen la forma $a_n \text{sinc}[(t - n\tau)/\tau]$, donde $a_n = 0$ ó 1 , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y τ es la duración de los impulsos. Este perfil, mostrado en la Fig. 5.48(a), se obtiene utilizando impulsos unitarios en el transmisor y considerando el canal como un filtro pasabajo de ancho de banda $B = 1/2\tau$, en cuyo caso se tiene la relación duración-ancho de banda dada por (5.131b). Nótese lo cercanos que están los impulsos en la Fig. 5.48(a); pero más importante es el efecto de la amplitud de las colas, efecto que puede introducir una cierta incertidumbre respecto al instante de muestreo y producir distorsión a pesar de no existir interferencia intersímbolo. No obstante, la expresión (5.131b) marca el límite teórico del ancho de banda y está de acuerdo con la frecuencia de Nyquist. Esto significa que si se dispone de un ancho de banda B , se puede transmitir teóricamente $2B$ símbolos por segundo.

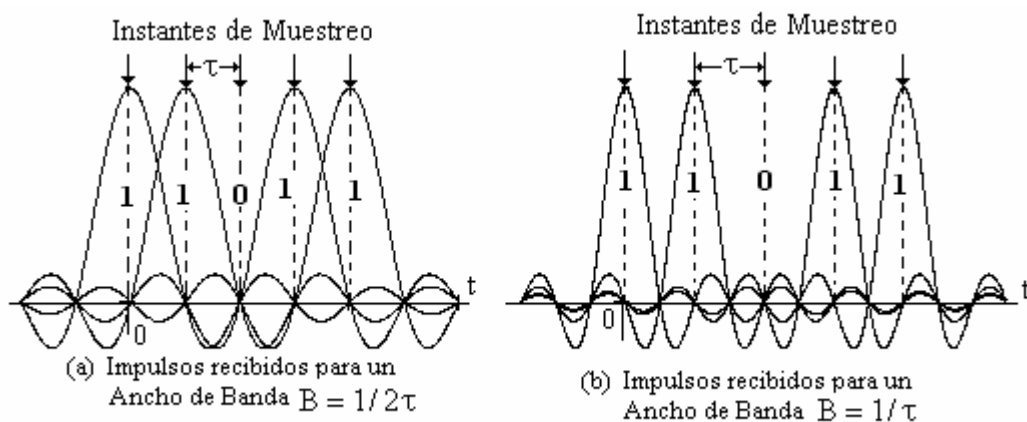


Fig. 5.48. Secuencias recibidas sin Interferencia Intersímbolo.

En la práctica hay que utilizar anchos de banda más grandes porque la característica pasabajo ideal es imposible de realizar y también porque la inexactitud en los instantes de muestreo producida por fluctuaciones de fase, resultaría en distorsión de intermodulación. Cuando el ancho de banda aumenta al doble, es decir, $B = 1/\tau$, los impulsos recibidos tendrán la forma mostrada en la Fig. 5.48(b); en este caso la situación ha mejorado pero ésta seguiría siendo la salida de un filtro pasabajo ideal que, como sabemos, no es físicamente realizable. Los filtros reales deben aproximarse a esta característica ideal pero deben poseer las siguientes propiedades, establecidas por Nyquist, para que no se produzca interferencia intersímbolo: (a) que los ceros del impulso

recibido pasen por los instantes de muestreo adyacentes, (b) que la amplitud de las colas o lóbulos laterales sea muy pequeña, y (c) que el ancho de banda máximo del impulso sea $B \leq 1/\tau$, donde τ es su duración. Un sistema que cumple con estas características es el Filtro de Nyquist, cuyas características, determinadas en el Ejemplo 2.20, son: para la primera forma del Filtro de Nyquist,

$$H(f) = \frac{1}{2B} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi f}{B}\right) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \Leftrightarrow h(t) = \frac{\text{sinc}(2Bt)}{1 - (2Bt)^2}$$

En la Fig. 2.29(a), Capítulo II, se muestra la forma de $H(f)$, donde $H(f) = 0$ para $|f| > B$, y si $B = 1/\tau$, el primer cero de $h(t)$ estará en $t = 1/B$ y la amplitud de las colas prácticamente es despreciable. Igual razonamiento se aplica para la segunda forma del Filtro de Nyquist.

En la Fig. 5.49 se muestra la secuencia de impulsos NRZ 1 1 0 1 1 recibida cuando se aplica el criterio de Nyquist, donde $B = 1/\tau$, que corresponde a la expresión (5.131a). La incertidumbre respecto a los instantes de muestreo es menor y no se produce interferencia intersímbolo. Nótese que la forma de la salida del filtro de Nyquist tiene características similares a las de la salida ideal mostrada en la Fig. 5.48(a), pero sin las indeseables colas de los impulsos. Esto es así porque las colas en el filtro de Nyquist decrecen con $1/t^3$, mientras que las colas de la Fig. 5.48(a) o (b) decrecen solamente con $1/t$.

En resumen, si en el transmisor se procesan los impulsos de salida de tal manera que sus espectros sean en coseno elevado (o equivalente) con un ancho de banda $B \leq 1/\tau$, y si el canal tiene un ancho de banda B , entonces los impulsos recibidos tendrán la forma mostrada en la Fig. 5.49 y no se producirá interferencia intersímbolo. El costo que hay que pagar es que se podrá transmitir solamente B símbolos por segundo. Nótese, sin embargo, que en la práctica las características de los canales son muy variadas y por lo general no pueden ser modificadas; por ejemplo, las troncales telefónicas pueden tener diferentes características de fase y amplitud y pueden producir interferencia intersímbolo en la transmisión en banda de base de señales digitales. En este caso es necesario colocar redes ecualizadoras en los dos extremos del canal. Esto significa, en relación con la Fig. 5.45, que los sistemas $H_T(f)$, $H_c(f)$ y $H(f)$ deben ser diseñados conjuntamente de acuerdo con el esquema de modulación utilizado y las normas técnicas aplicables.

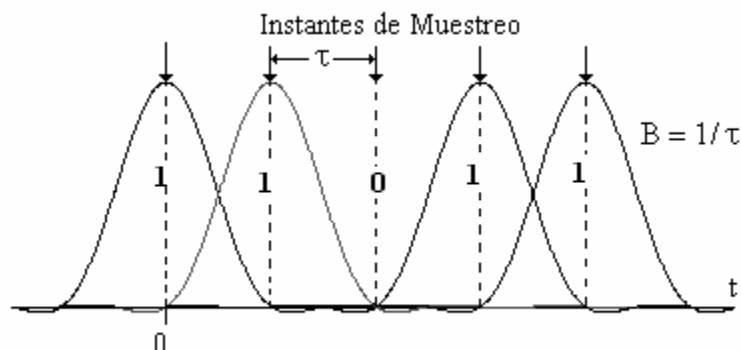


Fig. 5.49. Impulsos recibidos mediante el Filtro de Nyquist, $B = 1/\tau$

5.5.4. Códigos de Línea

Hasta ahora hemos supuesto que las señales PCM transmitidas estaban codificadas en binario natural con o sin retorno a cero. Mientras algunos sistemas pueden transmitir directamente en binario natural, otros convierten las secuencias binarias originales en nuevas secuencias binarias, denominadas “Códigos de Línea”. Estas formas tienen algunas ventajas en términos de facilidad de procesamiento y sincronización, requerimientos de ancho de banda, y otros factores.

En general, los códigos de línea deben cumplir, entre otras, con las siguientes condiciones:

1. Que la amplitud de la componente continua sea lo más pequeña posible. La componente continua, además de demandar potencia adicional, produce “derivadas” en la línea de base de la señal. Por otro lado, la presencia de componentes continuas produce impulsos unitarios periódicos en el espectro, los cuales complican los circuitos de control automático de ganancia en el receptor.
2. Que las señales de temporización puedan ser fácilmente extraídas de la señal recibida. La señal codificada debe poseer muchas transiciones o cruces por cero, aunque la señal original contenga largas secuencias de UNOS o CEROS.
3. Que el contenido espectral sea el más adecuado según las características del medio de transmisión. El espectro deberá estar contenido dentro de una banda restringida, es decir, deberá ser cero en los bordes de la banda y máximo en el centro de la misma. En el Capítulo III, Sección 3.9.2, se determina la densidad espectral de algunos códigos de línea.
4. Que la señal codificada pueda ser descodificada unívocamente para permitir la recuperación fiel de la secuencia original. Para ello, el código de línea debe satisfacer la “condición del prefijo”, esto es, ninguna “palabra” del “alfabeto” utilizado debe ser la primera parte de otra palabra. También es deseable que la descodificación pueda realizarse inmediatamente luego de recibida la secuencia.
5. El código debe ser eficiente para aprovechar al máximo la capacidad del canal y ser inmune a las interferencias y ruido, lo cual produce una elevada tasa de errores.
6. Además de los aspectos puramente técnicos, hay que tomar en cuenta el aspecto económico. Es deseable que el código sea fácil de generar y detectar a fin de reducir la complejidad y costo del sistema. De esta manera se asegura una mayor confiabilidad.

Es muy difícil que un solo código pueda satisfacer todas las condiciones anteriores, y la selección de un determinado código va a depender de su aplicación. En la Fig. 5.50 se muestra algunos de los códigos de línea utilizados en la práctica. En el Capítulo III, Sección 3.9.2, se calculan las densidades espectrales de potencia de algunos de estos códigos.

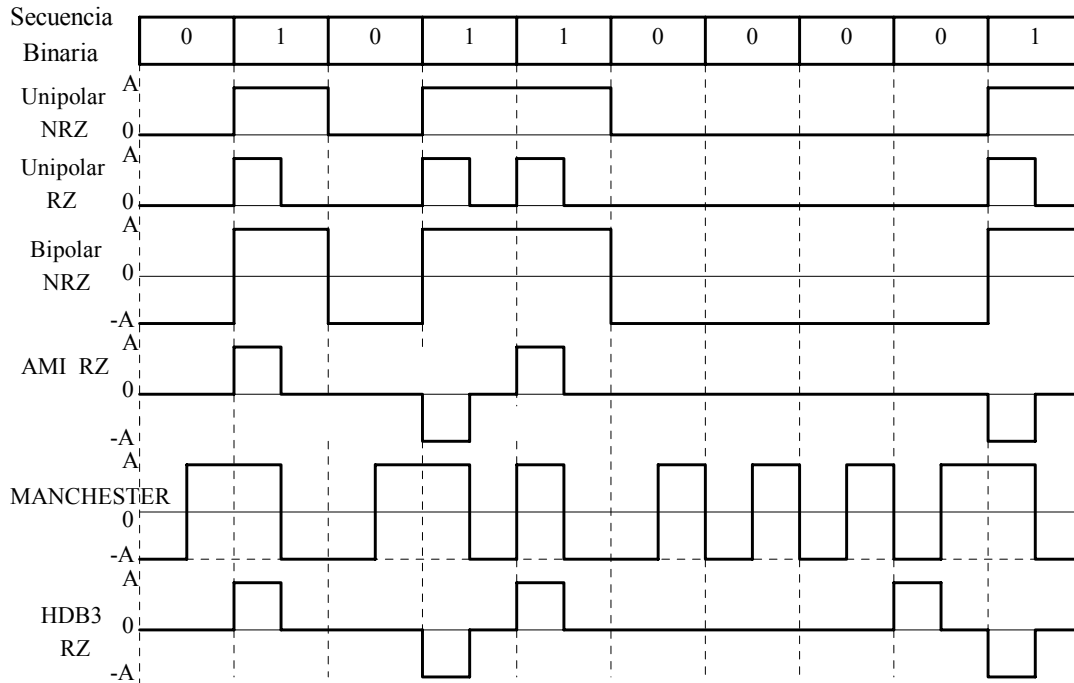


Fig. 5.50. Códigos de Línea.

♣ Ejemplo 5.11. Jerarquías en los Sistemas de Transmisión de Datos

Una Jerarquía Digital, llamada también Jerarquía PCM, es una secuencia ordenada de velocidades de información (en bps) que constituye cada una un nivel jerárquico dado. Los equipos jerárquicos de multiplex combinan un número definido de señales digitales del nivel (n-1) en una señal digital con velocidad del nivel n. Los bancos de canales PCM, los CODECs de banda ancha y los equipos de línea y multicanalización, deben operar únicamente a una velocidad igual o múltiplo de las velocidades jerárquicas. En la Fig. 5.51 se muestran las tres jerarquías actualmente en uso. Las dos primeras jerarquías han sido aprobadas por la UIT-T.

Estas jerarquías se utilizan exclusivamente para la transmisión de datos, pero la tendencia actual es la de establecer una sola red por la cual se pueda transmitir voz, datos e imágenes. A este efecto, la UIT-T ha promovido la creación de la llamada “Red Digital de Servicios Integrados (Integrated Service Digital Network, ISDN)”. La Red ISDN permitirá la integración de servicios de datos, voz y video en una sola red, sobre una sola línea, bajo el mismo número y a nivel mundial.

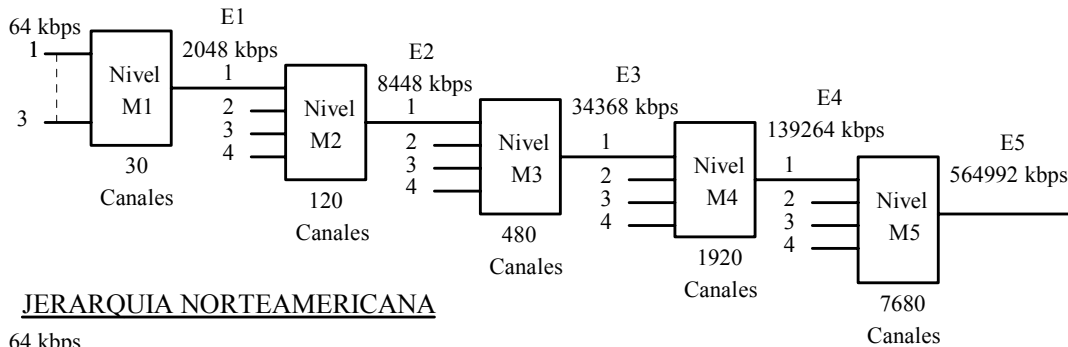
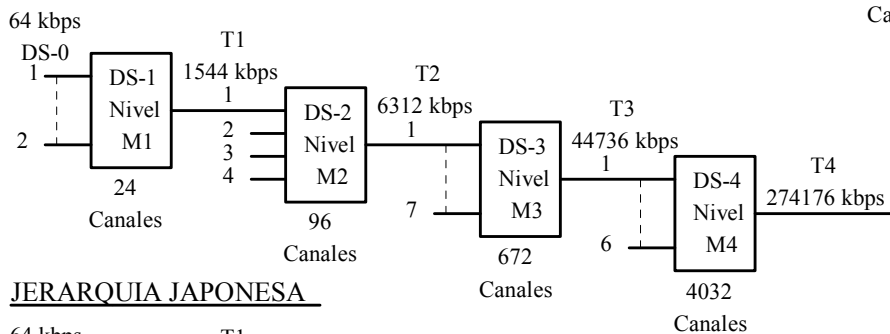
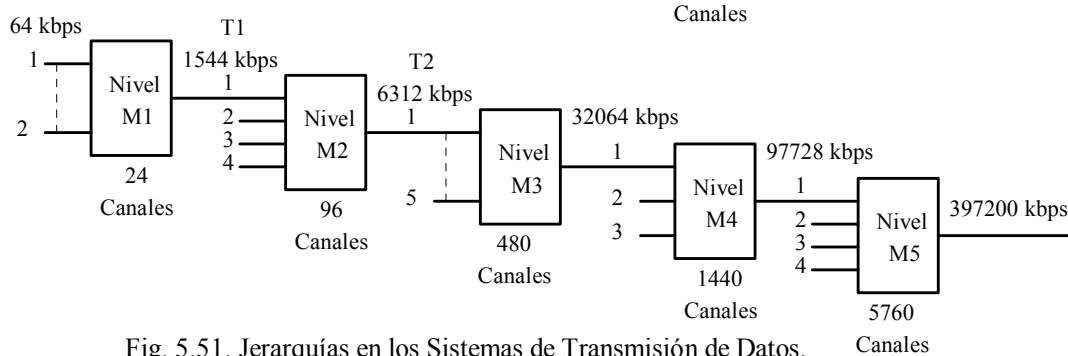
JERARQUIA EUROPEAJERARQUIA NORTEAMERICANAJERARQUIA JAPONESA

Fig. 5.51. Jerarquías en los Sistemas de Transmisión de Datos.

**Ejemplo 5.12. Los Sistemas Troncales T1 y E1****El Sistema Troncal T1**

Un ejemplo muy interesante de la aplicación de los sistemas PCM/TDM es el sistema de transmisión de voz y datos T1, desarrollado por la Compañía Bell de los Estados Unidos a principios de los años 60 para interconectar centrales telefónicas separadas hasta 80 km. Conviene señalar aquí que, en general, los “datos” son señales digitales generadas por máquinas: terminales, computadoras, teletipo, telex, etc., y cuyas velocidades de información van desde unos pocos bps hasta los Gigabps. Sin embargo, fundamentalmente no hay ninguna diferencia, por ejemplo, entre una señal de voz digitalizada en PCM y una señal digital producida por un terminal de datos.

El Sistema Bell T1 fue inicialmente diseñado para que fuera compatible con los sistemas de comunicación analógicos existentes. Estos equipos habían sido diseñados principalmente para los enlaces telefónicos intercentrales, pero pronto emergieron las técnicas PCM que ofrecían una mejor

inmunidad al ruido y a medida que avanzaba la tecnología de los circuitos integrados, los costos de los equipos digitales se hicieron cada vez más bajos que los analógicos. Además, la transmisión de la información de señalización requerida para el control de las operaciones de conmutación telefónica era más fácil y económica en forma digital que en analógica.

En el Sistema T1 básico se multiplexan 24 señales de voz que forman la llamada Trama T1, de acuerdo con la Recomendación G.733 de la UIT-T. Estas señales se muestrean a 8000 muestras por segundo y las muestras resultantes se codifican en 8 dígitos binarios o “bits” con el código de línea AMI RZ formando una trama de 192 dígitos a los cuales se les agrega un dígito adicional para sincronización de trama. La trama contiene entonces 193 dígitos y la frecuencia de señalización es de 1544 kHz, aunque en la práctica se dice 1544 kbps. La duración de la trama es de 125 μ seg y la de cada dígito de 0,6477 μ seg. La sincronización por canal se incorpora en la Trama T1 reemplazando el octavo dígito binario (el menos significativo en cada uno de los 24 canales) por un dígito de señalización cada seis tramas. La velocidad de señalización para cada uno de los 24 canales será entonces de 1333 bps. La señal de banda de base en T1 es una secuencia AMI RZ de valores $\pm 3V$ sobre una resistencia de 100 Ohm. En consecuencia, la señal T1 no contiene una componente continua y su espectro tiene la forma mostrada en la Fig. 3.24(b); el primer cero del espectro está a una frecuencia de 1544 kHz y el valor máximo está a 772 kHz. En el Sistema T1 se agrupan las tramas para formar multitramas de 12 tramas cada una; la duración de la multitrama es de 1,5 mseg. El dígito de sincronización de trama en la multitrama tiene la forma 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 y se repite en la multitrama siguiente.

En la Fig. 5.52(A) se muestra la configuración de la Trama T1.

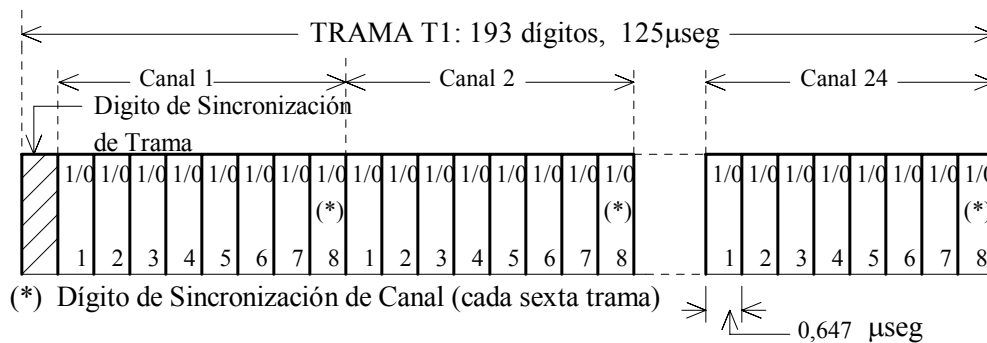


Fig. 5.52(A). Formato de la TRAMA T1

El Sistema Troncal E1

El sistema E1, denominado también CEPT-1 PCM-30 (es el Nivel 1 de la Jerarquía Europea, Fig. 5.52(B)), está formado por 32 canales, con 8 dígitos por canal para un total de 256 dígitos por trama; se utiliza el Código de Línea HDB3 RZ. Como la frecuencia de muestreo es de 8000 muestras por segundo, la velocidad de la trama E1 es de 2048 kbps. La duración de cada trama es de 125 microsegundos, el período de cada ranura es de 3906 nanosegundos, siendo 488 nanosegundos la duración de cada dígito. La trama contiene 32 ranuras de tiempo RT de las cuales dos son para señalización y alineación, y treinta para los canales de Voz/Datos; la multitrama, formada por 16 tramas, tiene una duración de 2 ms.

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

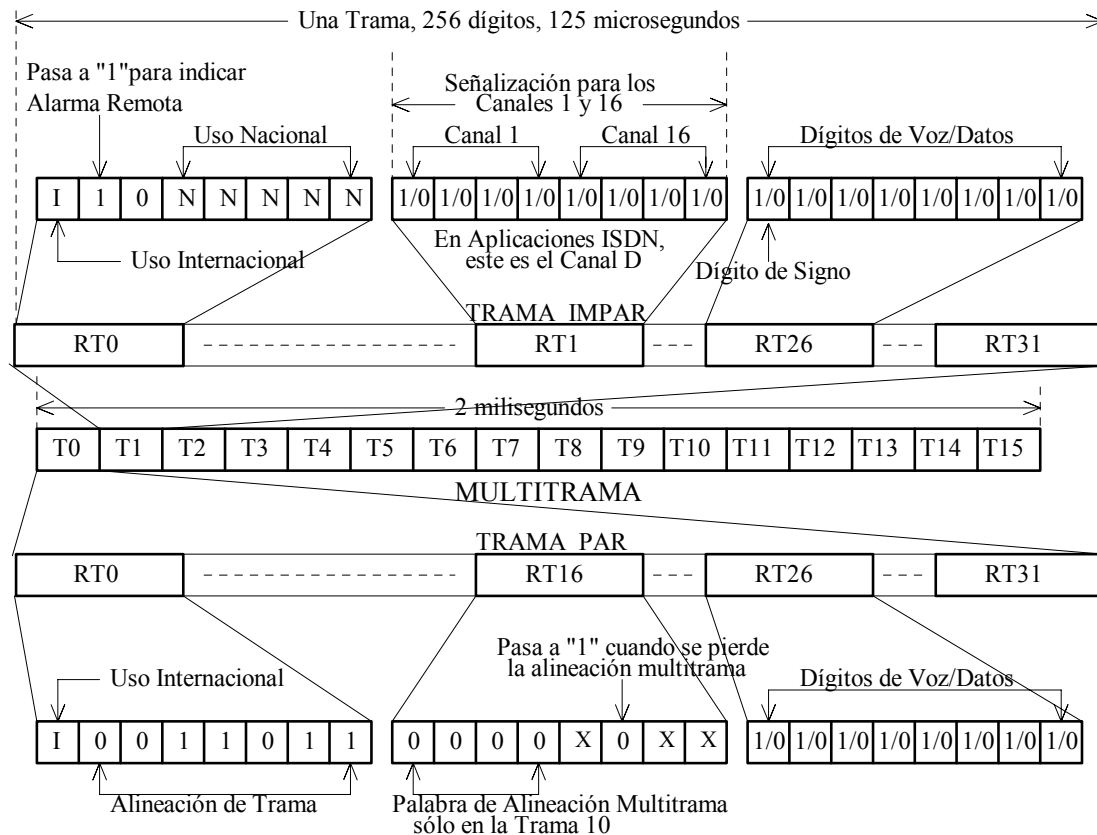


Fig. 5.52(B). Formato de la TRAMA E1.

En el formato CEPT-1, las informaciones de alineación y de señalización van en las dos primeras tramas, en las ranuras RT0 y RT1. La palabra de alineación de trama tiene la forma 0011011 y va en la ranura de tiempo RT0 de las tramas pares. Esta señal se utiliza para permitir que cada trama sea reconocida en el receptor. Un dígito de la misma ranura contiene el Dígito Internacional I. Las tramas impares llevan información de Señalización Nacional e Internacional, además de una indicación de alarma. La señalización para los canales 1 y 16 va en la ranura RT16 de la trama T1. Las tramas siguientes T2, T3, ..., T15, llevan en la correspondiente ranura la información de señalización de los canales 2 y 17, 3 y 18, 4 y 19, ..., 15 y 30, respectivamente.

Las Recomendaciones G.711, G.712 y G.732 de la UIT-T establecen todos los requerimientos para un comportamiento satisfactorio del sistema. El equipo E1 debe efectuar el multiplexaje TDM de los 30 canales de voz o datos agregando los sistemas de supervisión y alineamiento para transmitir la señal compuesta por una línea de transmisión de 4 conductores y a una velocidad de 2048 kbps. Cuando los dígitos I y N no se utilizan, se suele ponerlos a UNO; sin embargo, algunas veces se pueden utilizar para transmitir información adicional; en este caso las velocidades de transmisión son de 1,5 kbps y 28 kbps con los dígitos I y N, respectivamente.

5.6. RECEPCION DE IMPULSOS EN BANDA DE BASE

5.6.1. Introducción

Las características de la señal recibida dependen tanto del perfil de la señal transmitida como de las características físicas del canal. El impulso transmitido puede ser en coseno elevado y el canal un filtro pasabajo; alternativamente, el canal puede ser en coseno elevado (o equivalente) y el impulso transmitido puede tener un espectro determinado dentro de la banda de paso del canal. En realidad, la verdadera situación es mucho más complicada, pues el canal contribuye no solamente a modificar el perfil de la señal recibida, sino que aporta también una cantidad de ruido aditivo de densidad espectral $S_n(f)$. En relación con los efectos del ruido, un buen diseño de los filtros es esencial.

El mecanismo de recepción en un receptor binario consiste fundamentalmente en procesar en alguna forma la señal recibida y decidir, en los instantes de muestreo t_n , si se ha recibido el estado "CERO" o el estado "UNO", que corresponden a los dos estados de la señal binaria $v(t)$. El mecanismo de detección debe tomar en cuenta también los efectos del ruido aditivo que se agrega a la señal a su paso por el canal. En la Fig. 5.53 se muestra el modelo de un receptor binario en banda de base.

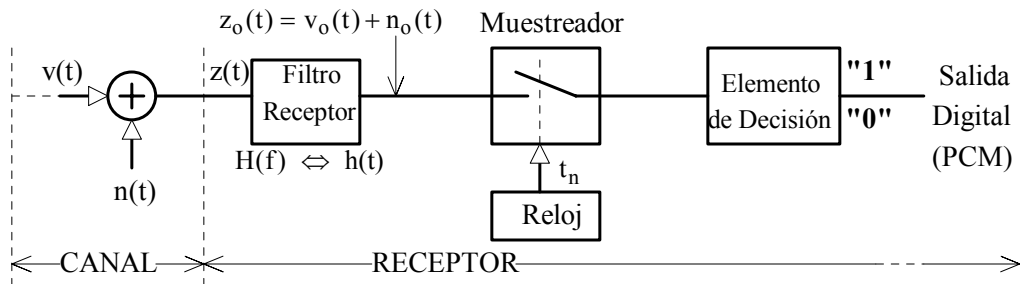


Fig. 5.53. Receptor Binario en Banda de Base.

El receptor digital consta básicamente de un filtro lineal o filtro receptor, un muestreador de retención y un elemento de decisión o detector que decide, muestra a muestra y de acuerdo con algún algoritmo preestablecido, qué estado fue transmitido.

En general, la operación de detección consiste esencialmente en una toma de decisión en los instantes de muestreo t_n , relativa al estado ("CERO" o "UNO") del impulso binario recibido en esos instantes. Esta decisión se basa en un criterio más o menos elaborado, como veremos en su oportunidad. Para la generación de los instantes de muestreo t_n en el receptor, se necesita una señal de reloj que esté sincronizada con la señal de reloj en el transmisor. Este problema de sincronización de temporización lo trataremos más adelante.

La influencia del ruido introduce errores en las decisiones tomadas, pero en vez de definirse una relación S/N que tenga en cuenta la influencia de los errores sobre la señal transmitida, se prefiere más bien definir la probabilidad de errores en la decisión, probabilidad que caracterizará en mayor o menor grado la calidad de la señal. Sin embargo, el procesamiento previo al muestreo debe ser tal que el valor muestreado sea el más probable de producir una decisión correcta y esto implica disminuir los efectos indeseables del ruido aditivo o, lo que es lo mismo, aumentar la relación S/N a la salida del filtro receptor.

La demodulación binaria ya no es entonces el reconocimiento de una “forma” (amplitud, posición o duración del impulso) más o menos alterada por el ruido, sino más bien el reconocimiento de una “presencia”: el estado “CERO” o el estado “UNO”. Este reconocimiento puede efectuarse con gran precisión, pues para relaciones S/N de entrada razonables, la probabilidad de error es muy pequeña.

5.6.2. El Filtro Acoplado

El filtro acoplado es una técnica para el procesamiento de una señal digital en presencia de ruido. Una propiedad muy importante del filtro acoplado es que maximiza la relación S/N a su salida. En efecto, Fig. 5.53, cuando la señal de entrada $z(t)$ al filtro receptor es la suma de una señal $v(t)$ más un ruido aditivo $n(t)$, la salida $z_o(t)$ en un instante $t = t_o$ constará de dos términos: el primer término es $v_o(t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)H(f) \exp(j2\pi f t_o) df$, donde $V(f)$ es la transformada de Fourier de $v(t)$ y $H(f)$ la función de transferencia del filtro receptor; el segundo término es el ruido $n_o(t_o)$ cuya potencia es $\langle n_o^2(t_o) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2 df$, donde $S_n(f)$ es su densidad espectral de potencia.

Si a la salida del filtro la relación S/N en el instante $t = t_o$ se define en la forma

$$\rho = \frac{|v_o(t_o)|^2}{\langle n_o^2(t_o) \rangle} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} V(f)H(f) \exp(j2\pi f t_o) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2 df} \quad (5.132)$$

la función de transferencia $H(f)$ del filtro receptor se seleccionará de tal manera que se maximice la relación ρ . En este caso el filtro receptor pasará a denominarse “filtro acoplado”. Nótese que la señal $v(t)$ es un impulso de cualquier perfil y de duración τ , que forma un tren de impulsos de período τ .

Para maximizar ρ , se aplica la “desigualdad de Schwartz”, la cual establece que si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones complejas, entonces

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \cdot \int |g(x)|^2 dx \quad (5.133)$$

verificándose la igualdad si y solamente si $f(x) = k \cdot g^*(x)$ (5.134)

donde k es una constante cualquiera y $g^*(x)$ es el conjugado de $g(x)$. Una demostración muy sencilla de la desigualdad de Schwartz se encuentra en [Roden M. S., 1988].

Para maximizar ρ , el numerador de la expresión (5.132) se puede escribir en la forma

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} V(f)H(f) \exp(j2\pi f t_o) df \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[H(f) \cdot \sqrt{S_n(f)} \right] \cdot \left[\frac{V(f) \exp(j2\pi f t_o)}{\sqrt{S_n(f)}} \right] df \right|^2$$

Esta representación es posible porque $S_n(f)$ es par y positiva para todo f . Reemplazando esta expresión en (5.132) y con ayuda de la desigualdad de Schwartz, se obtiene

$$\rho \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_n(f) df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(f)|^2}{S_n(f)} df}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_n(f) df} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(f)|^2}{S_n(f)} df \quad (5.135)$$

Si el ruido es blanco de densidad espectral $\eta/2$, y con la ayuda del Teorema de Raleigh,

$$\rho \leq \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df = \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{2}{\eta} E_b \quad (5.136)$$

donde E_b es la energía del impulso $v(t)$. Nótese que (5.136) es válida únicamente si el ruido es blanco.

El valor máximo de ρ será entonces

$$\rho_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(f)|^2}{S_n(f)} df \quad (5.137)$$

$$\rho_{\max} = \frac{2}{\eta} E_b \quad \text{si el ruido es blanco} \quad (5.138)$$

Este valor máximo se obtiene a partir de la condición (5.134), es decir, cuando

$$H(f)\sqrt{S_n(f)} = k \cdot \left[\frac{V(f)\exp(j2\pi t_0 f)}{\sqrt{S_n(f)}} \right]^* = k \cdot \frac{V(-f)\exp(-j2\pi t_0 f)}{\sqrt{S_n(-f)}}$$

Puesto que $S_n(f)$ es una función par de f , se tiene

$$H(f) = k \cdot \frac{V(-f)\exp(-j2\pi t_0 f)}{S_n(f)} \quad (5.139)$$

Esta es la función de transferencia del filtro acoplado. Si suponemos que el ruido es blanco de densidad espectral $\eta/2$,

$$H(f) = \frac{2k}{\eta} V(-f)\exp(-j2\pi t_0 f) \quad (5.140)$$

Nótese que esta función de transferencia puede no ser físicamente realizable.

El lector puede verificar fácilmente que la respuesta impulsional del filtro acoplado es $h(t) = (2k/\eta)v(t_0 - t)$, pero como $v(t)$ es un impulso de duración τ , se toma este valor para t_0 ; entonces

$$h(t) = \frac{2k}{\eta} v(\tau - t) \Leftrightarrow H(f) = \frac{2k}{\eta} V(-f)\exp(-j2\pi\tau f) \quad (5.141a)$$

Para simplificar (5.141a) se puede hacer $(2k/\eta) = 1$, es decir, $k = \eta/2$. Por consiguiente,

$$h(t) = v(\tau - t) \Leftrightarrow H(f) = V(-f)\exp(-j2\pi\tau f) \quad (5.141b)$$

En esta forma, tanto $v(t)$ como $h(t)$ tendrán una duración de τ segundos. En consecuencia, $v_o(t)$, que es la convolución de $v(t)$ y $h(t)$, tendrá una duración de 2τ segundos, con un valor máximo

en $t = \tau$ y simétrica respecto a $t = \tau$. Si se trata de un tren de impulsos, la salida del impulso anterior termina y es cero cuando $t = \tau$. En forma similar, el impulso de salida siguiente se inicia y tiene un valor cero en $t = \tau$. Por lo tanto, en los instantes de muestreo t_n no ocurre interferencia intersímbolo.

El filtro acoplado se puede considerar también como una forma de correlador. En efecto, la salida total del filtro acoplado se puede determinar mediante convolución, es decir,

$$z_o(t) = v_o(t) + n_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [v(t') + n(t')] \cdot h(t - t') dt'$$

pero $h(t - t') = v[\tau - (t - t')] = v(t' + \tau - t)$, de donde

$$z_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [v(t') + n(t')] \cdot v(t' + \tau - t) dt'$$

Puesto que $t = \tau$ en el instante de decisión, entonces

$$z_o(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [v(t') + n(t')] \cdot v(t') dt'$$

La suma $[v(t) + n(t)]$ se inicia en $t = 0$, y $v(t) = 0$ para $t > \tau$, entonces la salida del filtro acoplado en el instante $t = \tau$ es

$$z_o(\tau) = \int_0^{\tau} [v(t) + n(t)] \cdot v(t) dt \quad (5.142a)$$

pero como $v(t)$ y $n(t)$ no están correlacionados, entonces $\int_0^{\tau} v(t)n(t) dt = 0$; de donde

$$z_o(\tau) = \int_0^{\tau} v^2(t) dt = E_b \quad (5.142b)$$

expresión que está de acuerdo con (5.136).

Demostramos en esta forma que en los instantes de decisión la salida $z_o(t)$ del filtro acoplado es máxima e igual a la energía del impulso $v(t)$; este hecho es de particular importancia pues la amplitud máxima de $z_o(t)$ no depende de la forma de $v(t)$ sino solamente de su energía. La probabilidad de una decisión correcta es entonces la óptima y por esta razón a los filtros acoplados se les denomina también “filtros óptimos”. Los filtros óptimos son de gran aplicación en sistemas de radar y en la detección de señales digitales tanto en banda de base como en portadora modulada, que veremos más adelante.

La expresión (5.142a) se puede instrumentar entonces en la forma mostrada en la Fig. 5.54, que es equivalente a la Fig. 5.53.

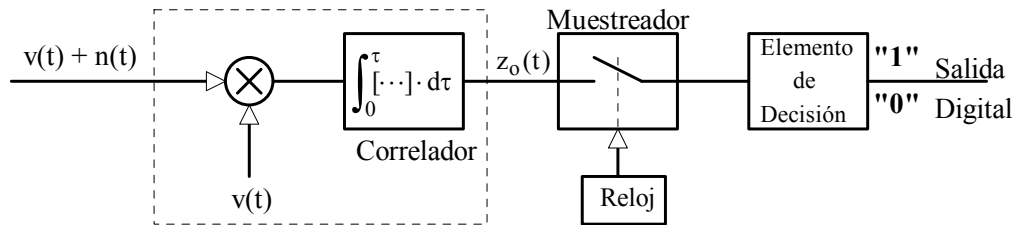


Fig. 5.54. Receptor Digital Correlador.

El comportamiento de los sistemas de modulación digital en presencia de ruido dependerá del método de detección empleado, y para caracterizar este comportamiento normalmente se utiliza las relaciones Probabilidad de Error (P_e) vs Ganancia de Predetección (S_i / N_i) que dependen de la forma de detección utilizada. El comportamiento del receptor se mide entonces en términos de la probabilidad de error y se dice que el receptor es óptimo cuando la probabilidad de error a su salida es la mínima. Esto, a su vez, está asociado con la presencia de un filtro acoplado colocado antes del elemento de decisión.

♣ Ejemplo 5.13

El impulso de entrada a un filtro óptimo tiene la forma $v(t) = A\Pi\left(\frac{t - \tau/2}{\tau}\right)$, como se muestra en la Fig. 5.55(a); se supone que $k = \eta/2$. De acuerdo con (5.141b), la respuesta impulsional del filtro óptimo es $h(t) = v(\tau - t) = A\Pi\left(\frac{\tau - t - \tau/2}{\tau}\right) = A\Pi\left(\frac{t - \tau/2}{\tau}\right)$ cuya función de transferencia es $H(f) = A\tau \text{sinc}(\tau f) \exp(-j\pi\tau f)$.

La respuesta impulsional $h(t)$ se muestra en la Fig. 5.55(b). Nótese que en este caso en particular, $v(t)$ y $h(t)$ tienen el mismo perfil.

La señal de salida del filtro será $v_o(t) = h(t) * v(t) = A^2\tau\Lambda\left(\frac{t - \tau/2}{\tau}\right)$, la cual se muestra en la Fig. 5.55(c). Nótese que $v_o(t)$ es máxima para $t = \tau$.

La relación S/N máxima a la salida del filtro acoplado será, de (5.136),

$$\rho_{\max} = \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{2}{\eta} \int_0^{\tau} A^2 dt = \frac{2A^2\tau}{\eta}$$

La forma de $v_o(t)$ nos permite deducir fácilmente la salida de un filtro acoplado cuando a su entrada se aplica una secuencia de impulsos. Por ejemplo, para la secuencia de entrada AMI NRZ 1011, mostrada en la Fig. 5.55(d), la salida del filtro tendrá la forma mostrada en la Fig. 5.55(e), en la que se indica también los instantes de muestreo de la señal.

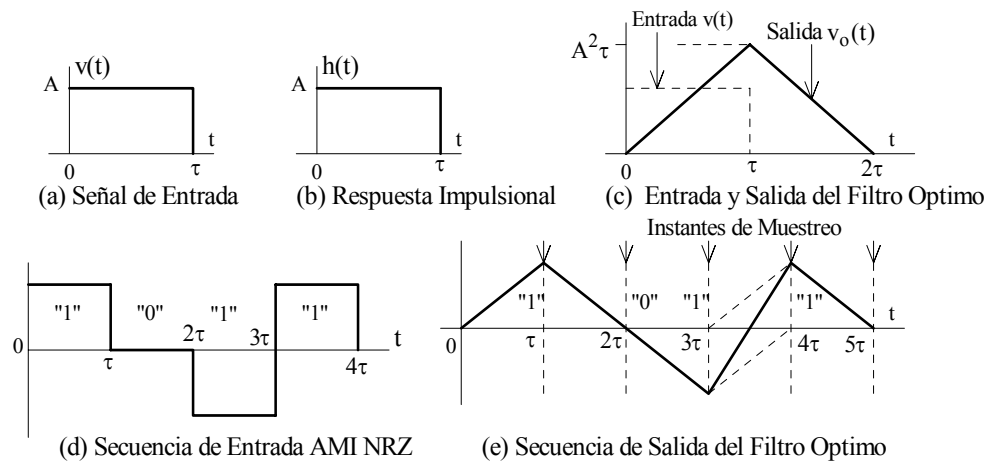


Fig. 5.55.

5.7. TRANSMISION Y RECEPCION DE SEÑALES BINARIAS MEDIANTE PORTADORA MODULADA

5.7.1. Introducción

Los impulsos digitales producidos por los diferentes sistemas vistos en este capítulo, así como las señales de datos de terminales digitales y dispositivos afines, generalmente no se transmiten a gran distancia en la forma de señal de banda de base, sino en forma de una señal modulada en forma analógica; en efecto, los impulsos modulan una portadora sinusoidal cuya frecuencia es compatible con el medio de transmisión utilizado; este tipo de transmisión se denomina “transmisión binaria mediante portadora modulada”. Por ejemplo, en un enlace de HF la frecuencia de portadora puede ser de unos cuantos Megahertz, pero en un enlace de microondas la frecuencia de portadora puede alcanzar la gama de los Gigahertz. Si la transmisión se efectúa por un canal telefónico de 4 kHz de ancho de banda, la frecuencia de portadora está entre 1 y 2 kHz.

La modulación digital se realiza con un dispositivo denominado “**MODEM**” (de las palabras **MOD**ulador y **DEM**odulador) en el cual los impulsos PCM modulan la amplitud, la frecuencia o la fase de una señal sinusoidal, la portadora. Como la señal PCM es una secuencia de impulsos binarios (2 estados), las magnitudes moduladas tomarán también dos valores, de ahí que a estos procesos se les denomina también “técnicas de modulación binaria”.

En la Fig. 5.56 se muestra los modelos para la transmisión y recepción de señales binarias mediante portadora modulada y en la Fig. 5.57 la forma de las señales binarias moduladas.

El “canal” puede ser un canal telefónico, conductores metálicos (cable coaxial o par trenzado), fibras ópticas, un canal de radio (HF, microondas, etc.), rayos infrarrojos o láser. Los filtros $H_T(f)$ y el filtro receptor están incorporados en el Modem y su diseño está integrado al mismo de acuerdo con la aplicación y normas correspondientes.

Las formas básicas de la modulación binaria mediante portadora modulada son:

1. La Modulación Binaria de Amplitud (Amplitude-Shift Keying, ASK)
2. La Modulación Binaria de Frecuencia (Frequency-Shift Keying, FSK)
3. La Modulación Binaria de Fase (Phase-Shift Keying, PSK)
4. La Modulación Binaria Diferencial de Fase (Differential PSK, DPSK)

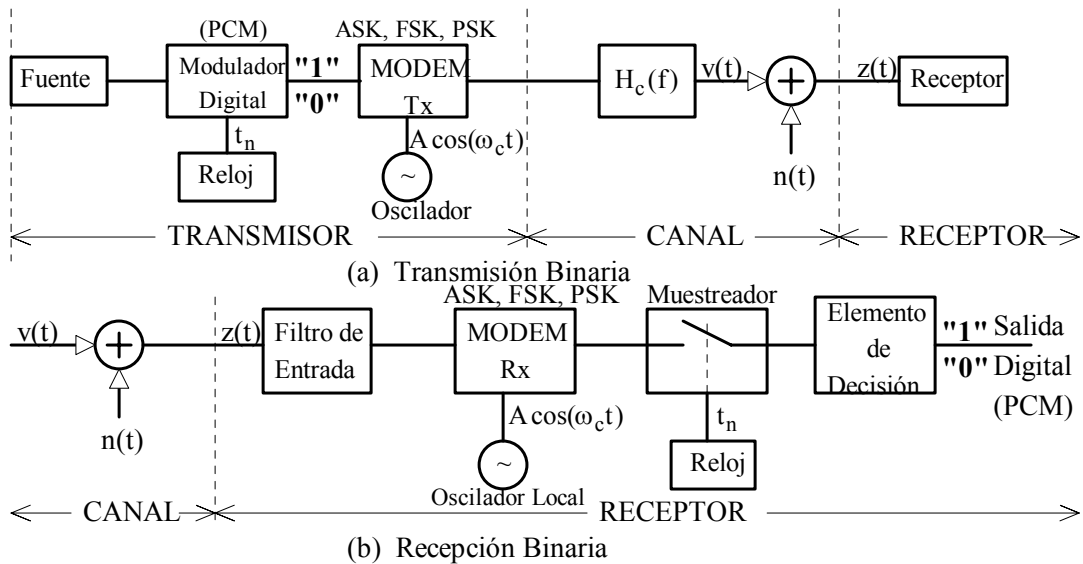


Fig. 5.56. Transmisión y Recepción Binaria mediante Portadora Modulada

En la Fig. 5.57 se muestra la forma de las señales moduladas ASK, FSK y PSK para la secuencia binaria dada. La forma de la señal DPSK básicamente es idéntica a la de PSK. Hay otros métodos más avanzados de modulación pero no los trataremos aquí.

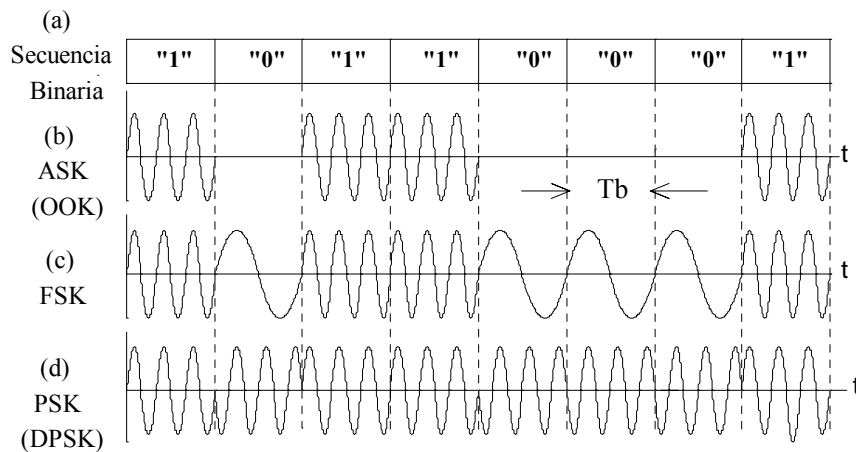


Fig. 5.57. Señales Binarias Moduladas ASK, FSK y PSK (DPSK).

Como la señal digital se convierte en una señal analógica (por efecto de la multiplicación por una señal sinusoidal), la modulación digital no es un proceso ni puramente digital ni puramente analógico, sino que posee atributos comunes a ambas áreas. Sin embargo, estas señales digitales pueden ser tratadas con los métodos teóricos desarrollados en el Capítulo II aplicables a las señales moduladas y particularmente a la demodulación o extracción de la señal mensaje portadora de información.

5.7.2. Demodulación y Sincronización de Señales Binarias Moduladas

Métodos de Demodulación

Como mencionamos brevemente en el Capítulo II, hay esencialmente dos métodos comunes de demodulación o detección de señales moduladas con portadora sinusoidal:

1. La “Demodulación Sincrónica o Coherente”
2. La “Detección de Envolvente”

La demodulación o detección sincrónica o coherente consiste simplemente en multiplicar la señal modulada recibida por la portadora, generada localmente, y mediante filtrado pasabajo se obtiene la señal original portadora de información. Este proceso se muestra en la Fig. 5.58(a) y ya lo aplicamos en el Capítulo II, Problema de Aplicación 2.28.

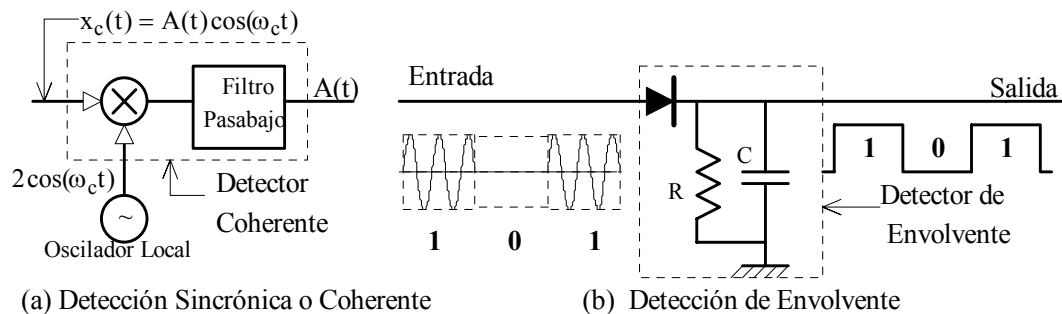


Fig. 3.58 . Métodos de Demodulación o Detección de Señales Moduladas

Sea, por ejemplo, $\cos(2\pi f_c t + \phi)$ la portadora transmitida; si la portadora generada localmente fuera de la forma $2\cos[2\pi(f_c + \Delta f)t + \phi_o]$, el lector puede demostrar fácilmente que la salida del detector estará multiplicada por el factor $\cos[2\pi\Delta f t + (\phi_o - \phi)]$ que afectará seriamente la amplitud de la salida. Para evitar esta atenuación de la señal, la frecuencia y la fase de la portadora local deben ser idénticas a las de la portadora de transmisión, es decir, que $\Delta f = 0$ y $\phi_o = \phi$. Los dispositivos de sincronización en el receptor deben lograr la coherencia entre las dos portadoras.

Hay que hacer notar que con osciladores de gran precisión puede mantenerse la igualdad entre las frecuencias, pero el sincronismo de fase es más difícil de alcanzar, particularmente en transmisión a grandes distancias. La información de fase se puede obtener a partir de una portadora piloto superpuesta a la señal modulada que, una vez recuperada mediante filtrado, puede utilizarse para sincronizar el oscilador local. Como veremos más adelante, puede utilizarse circuitos especiales para lograr la sincronización a partir de la señal recibida. Esta situación encarece y complica el sistema; sin embargo, la demodulación sincrónica o coherente se utiliza pues es

superior, en presencia de ruido, a la detección no coherente o de envolvente, como veremos posteriormente.

La demodulación por detección de envolvente se efectúa con el sencillo circuito mostrado en la Fig. 5.58(b). Con la detección de envolvente se evitan los problemas de sincronización de fase y de frecuencia de la detección coherente; sin embargo, la detección de envolvente no se puede aplicar en sistemas de modulación de fase, porque el proceso de detección de envolvente elimina la fase de la señal. Como su nombre lo indica, la salida del detector representa la envolvente positiva (o negativa, según la polaridad del diodo). La constante de tiempo RC debe ser lo suficientemente grande para seguir los picos de la señal modulada de entrada, pero lo suficientemente pequeña comparada con un período T_b de la señal binaria.

Los métodos de demodulación coherente y por detección de envolvente los utilizaremos también en los sistemas de modulación de ondas continuas, que veremos en el Capítulo VI.

Sincronización de Portadora y de Temporización

La demodulación coherente de las señales ASK, FSK y PSK requiere el conocimiento de la frecuencia y la fase exactas de la portadora. La frecuencia puede aproximarse tanto como se quiera pues con osciladores a cristal de gran precisión se puede mantener la frecuencia con una gran estabilidad; en cambio, el desfase entre los osciladores del transmisor y del receptor puede ser grande, sobre todo cuando los modems inician una transmisión. En estos casos los modems están desfasados y necesitan un período inicial, antes de transmitir información, para sincronizar sus osciladores. Este período se conoce con el nombre de “tiempo o fase de adquisición”. Al finalizar la fase de adquisición los osciladores quedan “enganchados” en fase y en frecuencia, y la transmisión de información puede comenzar. Durante la transmisión es necesario mantener el desfase entre los osciladores dentro de ciertos límites específicos; esta operación se conoce como la “fase de seguimiento o de rastreo”.

El receptor debe poseer entonces dispositivos de sincronización tanto de portadora como de temporización. En efecto, hay que tener en cuenta que los instantes de decisión t_n también necesitan sincronización para poder detectar la presencia o ausencia de los impulsos recibidos ya demodulados. En consecuencia, en el receptor no sólo se efectúa la sincronización de fase y de frecuencia, sino también la sincronización de señalización o temporización.

En un sistema de transmisión digital a menudo se necesita diferentes niveles de sincronización. Como ejemplo, consideremos un sistema PCM/TDM/PSK; en este caso son necesarios cuatro niveles de sincronización: sincronización de trama, sincronización de canal, sincronización de dígito y sincronización de portadora, los cuales se muestran en la Fig. 5.59(a). La localización típica de los sincronizadores de portadora y temporización en un receptor se muestra en la Fig. 5.59(b).

La mayoría de los sistemas de modulación digital suprimen la portadora y los diferentes códigos de línea utilizados no contienen líneas espectrales a las frecuencias de reloj para la extracción de la temporización. Por lo tanto, los circuitos de sincronización de portadora y de temporización estarán constituidos por dos partes conceptualmente distintas: (1) un circuito no lineal que regenera la portadora y/o el reloj a partir de la señal recibida, y (2) un dispositivo sintonizado de banda angosta (típicamente un filtro sintonizado o un enganchador de fase (phase-locked loop, PLL)) que filtra y regenera las señales de portadora y/o reloj.

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

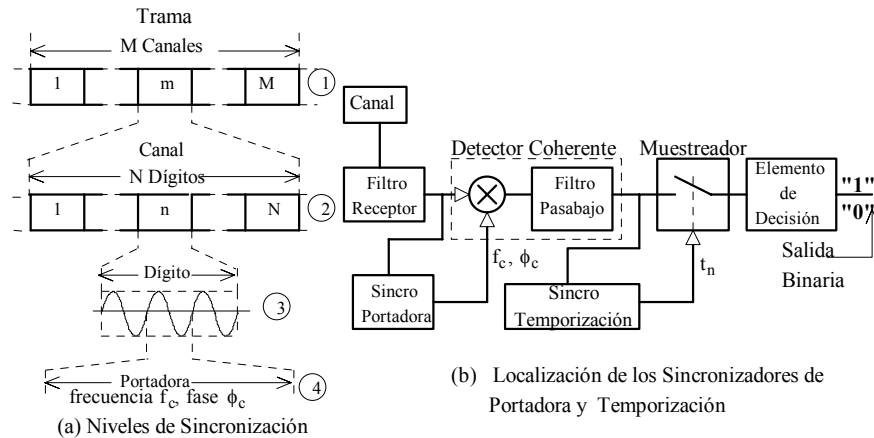


Fig. 5.59. Sincronización de Portadora y Temporización.

En la Fig. 5.60 se muestran dos circuitos de sincronización de portadora muy utilizados en la práctica: el sincronizador cuadrático y el denominado Lazo de Costas.

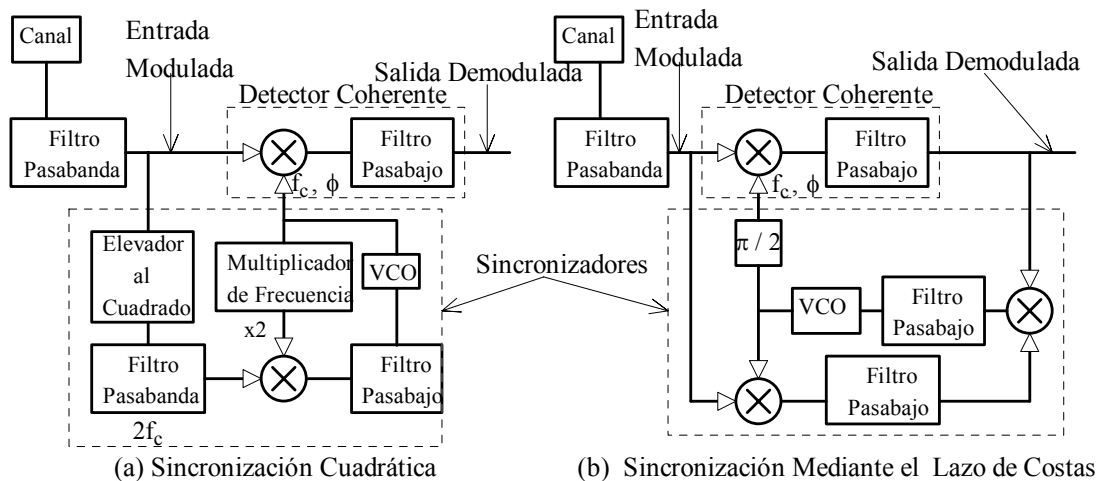


Fig. 5.60. Circuitos de Sincronización de Portadora.

Estos circuitos de sintonización de portadora no solamente se utilizan en los sistemas digitales sino también en los sistemas de modulación de ondas continuas, que veremos en el Capítulo VI.

En cuanto a la temporización, el proceso de extracción de la temporización se efectúa operando sobre la señal demodulada. La salida del sincronizador de temporización será una señal periódica (señal de reloj) de período τ y con una fase tal que indique los instantes de muestreo dentro de cada intervalo de duración τ . En general, la señal de reloj está afectada por fluctuación de fase (jitter), llamada también “auto-ruido”, causada por interferencia intersímbolo y ruido en el sistema. En muchas aplicaciones esta componente de auto-ruido es mucho más pronunciada que el

mismo ruido gaussiano; el diseño óptimo de los circuitos de sincronización es, por lo tanto, muy importante para el desempeño global del sistema.

En la Fig. 5.61 se muestra un circuito de sincronización de temporización.

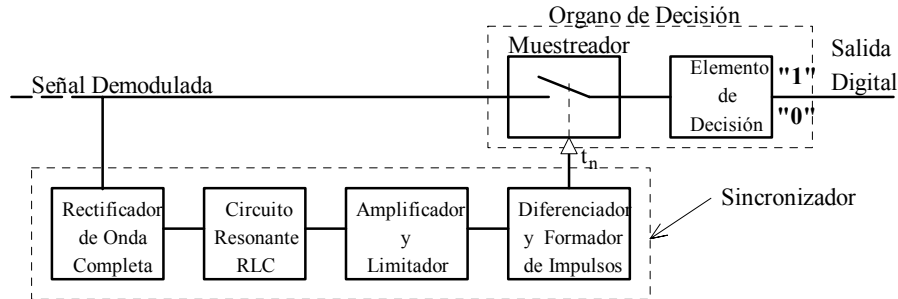


Fig. 5.61. Sincronización de Temporización.

El análisis detallado de los circuitos de sincronización anteriores, incluidos los PLL, se puede hallar en cualquier texto de electrónica [Miller, 1993; Gardner y Lindsey, 1980].

5.7.3. Modulación Binaria de Amplitud (ASK)

En la modulación binaria de amplitud ASK, la amplitud de la portadora sinusoidal se conmuta entre dos valores en respuesta al código PCM. Por ejemplo, el estado "0" se puede transmitir como una amplitud de cero volts, mientras que el estado "1" se transmite como una señal sinusoidal de amplitud fija A volts. La señal ASK resultante consiste en impulsos modulados, llamados "Marcas", que representan el estado "1", y "Espacios" que representan el estado "0", como se muestra en la Fig. 5.57(b) para la secuencia binaria dada. Este tipo de modulación se conoce también con el nombre de "modulación OOK (On-Off Keying)".

La señal ASK tiene entonces la forma

$$x_{\text{ASK}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_i \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi_c) \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \quad (5.143)$$

donde $b_i = \begin{cases} 1 & \text{si se transmite un "1"} \\ 0 & \text{si se transmite un "0"} \end{cases}$

A y f_c son la amplitud y frecuencia de la portadora, respectivamente; T_b es el intervalo de señalización y ϕ_c un desfase inicial constante. En general, se verifica que $f_c \gg f_b = \frac{1}{T_b}$, donde f_b es la frecuencia de señalización, la cual es igual a la velocidad de modulación V_b .

La operación de demodulación consiste esencialmente en una toma de decisiones en los instantes de muestreo t_n en relación con el valor o estado ("1" ó "0") transmitido. Esta decisión reposa sobre un criterio más o menos elaborado, como veremos más adelante.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas ASK

La señal ASK se puede escribir en la forma (haciendo $\phi_c = 0$),

$$x_{ASK}(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad (5.144)$$

$$\text{donde } A(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_i \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \quad (5.145)$$

es una secuencia aleatoria binaria unipolar NRZ de amplitud A.

En el Capítulo III, Sección 3.9.2, expresiones (3.170) y (3.171), demostramos que la función de autocorrelación y la densidad espectral de una secuencia aleatoria binaria unipolar NRZ de amplitud A eran, respectivamente,

$$R_A(\tau) = \frac{A^2}{4} \left[1 + \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b}\right)\right] \Leftrightarrow S_A(f) = \frac{A^2}{4} \left[\delta(f) + T_b \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_b}\right)\right]$$

De la expresión (1.113), la potencia promedio de la señal $x_{ASK}(t)$ es

$$\langle x_{ASK}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle A^2(t) \rangle. \text{ Pero como } \langle A^2(t) \rangle = R_A(\tau)|_{\tau=0} = \frac{A^2}{2}, \text{ entonces}$$

$$\langle x_{ASK}^2(t) \rangle = \frac{A^2}{4}$$

La potencia promedio de entrada o “potencia de portadora” de una señal ASK a la entrada del detector será

$$S_i = \frac{A^2}{4} \quad (5.146)$$

Para calcular la potencia de ruido es necesario conocer las características espectrales de la señal ASK.

De acuerdo con el teorema de la modulación para señales de potencia, la densidad espectral $S_{ASK}(f)$ de $x_{ASK}(t)$ será

$$S_{ASK}(f) = \frac{1}{4} [S_A(f + f_c) + S_A(f - f_c)]$$

$$S_{ASK}(f) = \frac{A^2}{16} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{A^2 T_b}{16} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{f_b}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{f_b}\right) \right] \quad (5.147)$$

y tendrá la forma mostrada en la Fig. 5.62 (frecuencias positivas solamente).

En cuanto al ancho de banda en ASK, sea B el ancho de banda que comprende el lóbulo principal de $S_{ASK}(f)$, Fig. 5.62. Por consiguiente,

$$B = 2f_b = \frac{2}{T_b} \quad (5.148)$$

Este será entonces el ancho de banda del filtro pasabanda a la entrada del receptor y, por supuesto, el ancho de banda mínimo del canal de transmisión. Este valor de B será utilizado en los cálculos de la Relación Señal/Ruido (S/N).

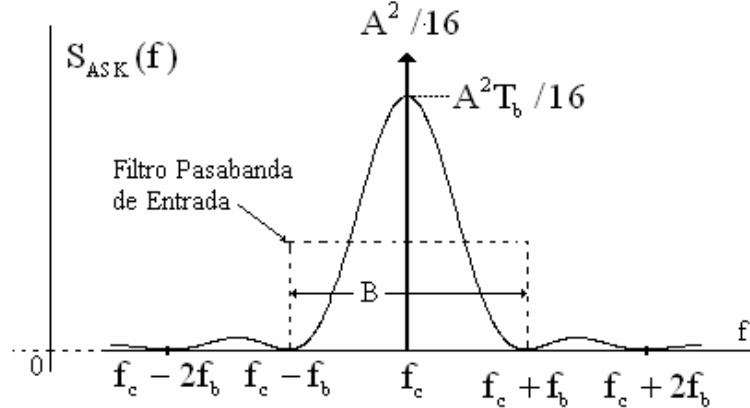


Fig. 5.62. Densidad Espectral de Potencia de Señales ASK.

Se puede demostrar, ver Problema de Aplicación 5.41, que la potencia contenida dentro del ancho de banda B es el 95% de la potencia total de la señal ASK, y que la mitad de la potencia de la señal ASK se consume en la transmisión de la portadora. Los sistemas ASK son sistemas de doble banda lateral y por lo tanto no son muy eficientes en cuanto a ancho de banda y consumo de potencia.

Si el ruido en el canal es blanco de densidad espectral $\eta/2$, la potencia promedio de ruido a la entrada del detector será, de (2.146),

$$N_i = B\eta = \frac{2\eta}{T_b} = 2\eta f_b \quad (5.149)$$

y la relación S/N de predetección

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{A^2}{4B\eta} = \frac{A^2 T_b}{8\eta} \quad \text{en ASK} \quad (5.150)$$

Algunas veces el ancho de banda se define en la forma $B = 3f_b$, en cuyo caso la relación de predetección es $(S_i / N_i) = (A^2 T_b / 12\eta)$. Esto puede prestarse a confusión; por eso el lector debe verificar cómo se ha definido el ancho de banda al hablar de relación S/N a la entrada. En general, dependiendo del perfil de los impulsos, el ancho de banda efectivo de una señal ASK estará entre $2f_b$ y $3f_b$; nosotros utilizaremos siempre $2f_b$.

Rendimiento de Transmisión

Desde un punto de vista más general, la relación S/N en un sistema se puede definir a partir de parámetros comunes para cualquier sistema de modulación. En efecto, en un sistema binario la velocidad de información es $V_i = 1/T_b = f_b$ bps, donde f_b es la frecuencia de señalización. Si E_b es la energía requerida para transmitir un dígito binario, entonces la potencia promedio de la señal se puede expresar en la forma $S = E_b / T_b = E_b V_i$. Nótese que E_b es diferente para cada esquema de modulación. Por otro lado, si B es el ancho de banda del sistema y $\eta/2$ la densidad espectral de ruido, la potencia promedio de ruido será $N = \eta B$. En la literatura se suele hacer $\eta = N_o$, pero

este valor N_o lo usaremos muy poco para no confundirlo con una potencia de ruido N_o . La relación S_i/N_i de entrada o de predetección se puede escribir entonces en la forma

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{E_b V_i}{\eta B} = \frac{V_i}{B} \cdot \frac{E_b}{N_o} = \eta_B \frac{E_b}{N_o} = \eta_B \frac{E_b}{\eta} = \eta_B \frac{S_i}{\eta f_b} \quad (5.151)$$

Esta expresión muestra que la relación señal/ruido es el producto de dos cantidades muy significativas. Específicamente, la relación E_b/η es la “energía por dígito binario dividida por la densidad espectral” y es una medida del consumo de potencia del sistema. Como veremos más adelante, E_b depende del tipo de modulación empleado. La relación $\eta_B = V_i/B$ es el rendimiento de transmisión del canal respecto al ancho de banda B , expresión (4.42), y es una medida del ancho de banda requerido para una velocidad de información dada. Estos conceptos los utilizaremos posteriormente.

Con el fin de comparar el comportamiento de los diferentes sistemas de modulación binaria sobre una referencia común, se define la “Relación Señal/Ruido Normalizada, γ ” [Schwartz y otros, 1966] en la forma

$$\gamma = \frac{A^2 T_b}{2\eta} = \frac{A^2}{2\eta f_b} \quad (5.152)$$

donde A , f_b y η son parámetros comunes a todos los sistemas en consideración. Este valor de γ lo utilizaremos como referencia para comparar las probabilidades de error de los diferentes sistemas de modulación binaria.

La relación S/N en ASK se puede escribir entonces en la forma

$$\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{ASK}} = \frac{\gamma}{4} \quad (5.153a)$$

$$\text{y en dB, } [\gamma]_{\text{ASK(dB)}} = 6,02 \text{ dB} + \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{ASK(dB)}} \quad (5.153b)$$

Demodulación Coherente de Señales ASK

La razón principal de la modulación digital ASK es su simplicidad, pero la demodulación coherente es poco utilizada debido a los problemas de sincronización de portadora y del ajuste de umbral. Sin embargo, vamos a investigar el comportamiento de la demodulación coherente más que todo para propósitos de comparación y fijación de conceptos.

En la Fig. 5.63 se muestra el diagrama de bloques de un receptor ASK con demodulación coherente.

A la entrada del detector coherente se tiene la señal ASK más ruido blanco pasabanda de banda angosta y densidad espectral $\eta/2$, es decir,

$$x_{\text{ASK}}(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$$

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_c) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t + \phi_c)$$

donde ϕ_c es un desfase constante.

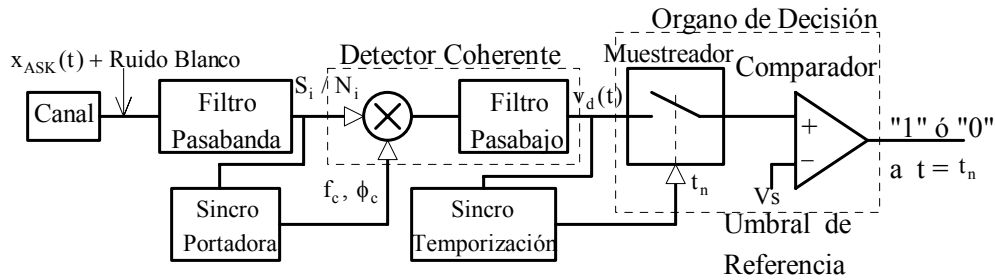


Fig. 5.63. Recepción Coherente en ASK.

Estas dos señales estarán presentes durante los intervalos en que un “1” ha sido transmitido. Si un “0” ha sido transmitido, solamente estará presente el ruido $n(t)$.

En relación con la Fig. 5.63, el lector puede demostrar fácilmente que

$$v_d(t) = \begin{cases} \frac{k}{2} [A(t) + n_c(t)] & \text{si un "1" ha sido transmitido} \\ \frac{k}{2} n_c(t) & \text{si un "0" ha sido transmitido} \end{cases}$$

donde k es una constante que depende de las características de los filtros.

En los instantes de decisión t_n se compara $v_d(t)$ respecto a un umbral de referencia V_s . El criterio de decisión será:

$$\text{Si en el instante } t = t_n, \begin{cases} v_d(t_n) \geq V_s & \implies \text{Un "1" ha sido transmitido} \\ v_d(t_n) < V_s & \implies \text{Un "0" ha sido transmitido} \end{cases}$$

Como $n_c(t)$ es un ruido blanco pasabajo cuya amplitud puede tomar cualquier valor con una probabilidad no nula, se puede presentar errores en la decisión tomada. Estos errores aparecerán si

$$v_d(t_n) < V_s \quad \text{cuando un "1" fue transmitido: Error sobre los "1"}$$

$$v_d(t_n) \geq V_s \quad \text{cuando un "0" fue transmitido: Error sobre los "0"}$$

Se ha demostrado [Schwartz y otros, 1966] que la probabilidad de error en sistemas ASK con umbral de referencia optimizado es

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2 T_b}{8\eta}} \right) \quad (5.154)$$

donde $\operatorname{erfc}(\cdot)$ es la “función error complementaria” definida en el Apéndice D.4.

$$\text{Asimismo, el umbral óptimo normalizado será} \quad b_{on} = \sqrt{\frac{A^2 T_b}{4\eta}} \quad (5.155)$$

De (5.152), la probabilidad de error será ahora

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{4}}\right) \quad (5.156)$$

y el umbral optimizado,
$$b_{on} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \quad (5.157)$$

En la Fig. 5.64 se muestra el efecto del umbral sobre la probabilidad de error; para cada valor de γ hay un nivel de umbral normalizado b_{on} que produce la mínima probabilidad de error. Cuanto mayor es γ , mayor es el umbral. Si el umbral se mantiene constante, la probabilidad de error decrecerá en función de γ hasta un cierto valor y se mantendrá constante no importa cuánto se aumente γ . Esta es una de las principales desventajas de los sistemas ASK, pues implica circuitos de ajuste del umbral en función de la relación S/N a la entrada (circuitos de control automático de ganancia).

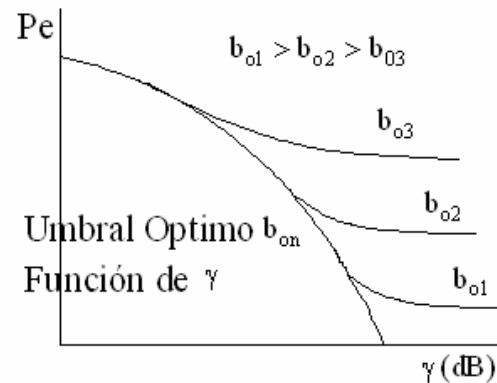


Fig. 5.64. Efecto del Umbral en ASK.

Nótese que en el umbral óptimo los errores ocurren predominantemente no porque la suma [señal + ruido] excede el umbral, sino porque el ruido excede él solo el umbral.

El lector puede demostrar fácilmente que, siendo la potencia promedio en ASK igual a $A^2/4$, su energía será $E_b = A^2 T_b/4$; entonces $\gamma = 2E_b/N_o$ y

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_o}}\right) \quad (5.158)$$

donde E_b es la energía requerida para transmitir un dígito binario y $N_o = \eta$. En la literatura se suele expresar la probabilidad de error con la expresión (3.158), pero la igualdad $N_o = \eta$ la utilizaremos muy poco para no confundir este N_o , que es una densidad espectral, con el N_o que representa una potencia de ruido de salida.

En la Fig. 5.78 se muestra la probabilidad de error P_e con el umbral óptimo normalizado, junto con las correspondientes a los otros sistemas de modulación binaria para efectos de comparación.

Nótese que no hay que confundir γ con la relación S_i/N_i de predetección, pues esta última relación depende del ancho de banda, de la densidad espectral de ruido y de la potencia de la portadora, como ya lo hemos demostrado. Entonces, de la expresión (5.150), para $B = 2/T_b$,

$$\gamma = 4 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{ASK} \quad (5.159a)$$

y en dB,
$$[\gamma]_{dB} = 6,02 \text{ dB} + \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{ASK(dB)} \quad (3.159b)$$

Esta última expresión nos permite leer directamente en la Fig. 5.78 la relación $[S_i / N_i]_{ASK(dB)}$ conociendo $[\gamma]_{dB}$ y viceversa, para una probabilidad de error P_e dada. Las expresiones (5.159a) y (5.15b) se aplican también en ASK no coherente.

Demodulación no Coherente de Señales ASK

En la Fig. 5.65 se muestra el diagrama de bloques de un receptor ASK no coherente.

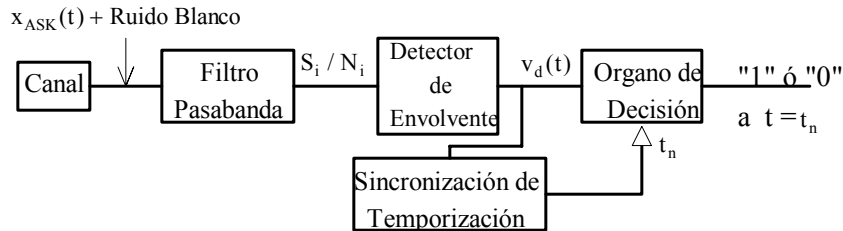


Fig. 5.65. Recepción no Coherente de Señales ASK.

En la detección no coherente de señales ASK no se requiere circuitos para sincronización de portadora, aunque sí de temporización. El detector de envolverte se muestra en la Fig. 5.58(b).

El criterio de decisión es similar al caso de detección coherente.

En cuanto a la probabilidad de error, se demuestra [Schwartz y otros, 1966] que

$$P_e \approx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\gamma} - \frac{b_{on}}{\sqrt{2}} \right) + \exp \left(-\frac{b_{on}^2}{2} \right) \right]$$

Para $\gamma > 2$ y con el umbral óptimo normalizado b_{on} , donde

$$b_{on} = \sqrt{2 + \frac{\gamma}{2}} \quad (5.160)$$

la expresión (5.160) se reduce a
$$P_e \approx \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\gamma}{4} \right) = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E_b}{4N_o} \right) \quad (5.161)$$

El gráfico de P_e vs γ tiene la misma forma general de la Fig. 5.64 con las mismas desventajas debidas al ajuste del umbral. En la Fig. 5.78 se grafica (5.161).

♣ Ejemplo 5.14

Por un canal telefónico cuyo ancho de banda útil es de 3 kHz se transmite datos binarios. La relación S/N de predetección es de 6,02 dB y la densidad espectral de ruido blanco es de 10^{-11} W/Hz. Vamos a determinar en ASK coherente y no coherente: (a) la máxima frecuencia de señalización, las potencias individuales de portadora y de ruido, y la probabilidad de error; (b) repetir si la velocidad de información es de 300 bps.

Recuérdese que en un sistema binario la velocidad de información (bps), la frecuencia de señalización (Hz) y la velocidad de modulación (baudios) son iguales numéricamente.

(a) El ancho de banda útil del canal es $B = 3$ kHz, entonces

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

$$B = 3000 = 2f_b; \quad f_b = 1500 \text{ Hz}; \quad T_b = \frac{1}{1500}; \quad V_i = 1500 \text{ bps}; \quad V_b = 1500 \text{ baudios}$$

La frecuencia máxima de señalización es de 1500 Hz y se puede transmitir información a una velocidad máxima de 1500 bps.

$$\frac{S_i}{N_i} = 6,02 \text{ dB} = 4; \quad \text{y de (3.158a), } \gamma = 4 \frac{S_i}{N_i} = 16$$

$$\text{De (5.150), } \frac{S_i}{N_i} = 4 = \frac{A^2}{8 \times 1500 \times 2 \times 10^{-11}}; \quad A^2 = 9,6 \times 10^{-7}; \quad A = 9,8 \times 10^{-4}$$

$$S_i = \frac{A^2}{4} = 2,4 \times 10^{-7} \text{ W} = -36,2 \text{ dBm}$$

$$N_i = B\eta = 3000 \times 2 \times 10^{-11} = 6 \times 10^{-8} \text{ W} = -42,22 \text{ dBm}$$

$$\text{En ASK coherente: } P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(2) = 2,372 \times 10^{-3}$$

$$\text{En ASK no coherente: } P_e = \frac{1}{2} \exp(-4) = 9,158 \times 10^{-3}$$

(b) Si la velocidad de información es de 300 bps, entonces $f_b = 300 \text{ Hz}$,

$$T_b = \frac{1}{300} \quad \text{y} \quad B = 2f_b = 600 \text{ Hz}$$

$$\gamma = \frac{A^2 T_b}{2\eta} = \frac{9,6 \times 10^{-7}}{2 \times 300 \times 2 \times 10^{-11}} = 80; \quad \frac{S_i}{N_i} = \frac{\gamma}{4} = 20 = 13 \text{ dB}$$

$$S_i = \frac{A^2}{4} = 2,4 \times 10^{-7} \text{ W} = -36,2 \text{ dBm}; \quad N_i = B\eta = 600 \times 2 \times 10^{-11} = 1,2 \times 10^{-8} \text{ W} = -49,21 \text{ dBm}$$

$$\text{En ASK coherente: } P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(4,472) = 1,27 \times 10^{-10}$$

$$\text{En ASK no coherente: } P_e = \frac{1}{2} \exp(-20) = 1,03 \times 10^{-9}$$



Para las mismas amplitud de portadora y densidad espectral de ruido, el comportamiento en ASK coherente es superior al de ASK no coherente; sin embargo, el receptor no coherente es mucho más simple y por eso este tipo de demodulación fue en su época el más utilizado.

Para obtener el comportamiento óptimo, el valor del umbral debe ser ajustado para cada valor de γ de acuerdo con las expresiones (5.157) y (5.160). Por otra parte, los filtros utilizados en el receptor deben ser descargados, mediante circuitos auxiliares, al final de cada intervalo de señalización a fin de reducir la interferencia intersímbolo. Aunque el circuito resultante ya no es un filtro lineal invariante en el tiempo, él actúa como tal entre los intervalos de descarga. Si la rapidez de descarga es grande, el ancho de banda del filtro ya no es tan crítico respecto a la interferencia intersímbolo. En general, estos filtros son filtros óptimos y pueden utilizarse también en FSK y PSK/DPSK.

5.7.4. Modulación Binaria de Frecuencia (FSK)

En la modulación binaria FSK la frecuencia instantánea de la portadora se conmuta entre dos valores en respuesta al código PCM. En la Fig. 5.57(c) se muestra la forma de una señal FSK.

El sistema de modulación binaria FSK se basó originalmente en el simple concepto de utilizar una señal telegráfica para modular la frecuencia de una portadora sinusoidal a fin de aumentar la relación S/N en el sistema. El sistema FSK más sencillo es aquel con modulación rectangular de frecuencia, amplitud constante y fase continua ("fase continua" significa que en la señal modulada no se producen discontinuidades cuando cambia la frecuencia).

Si $2f_d$ es la separación entre las dos frecuencias de transmisión, entonces la frecuencia instantánea en un intervalo T_b será $f_1 = f_c - f_d$ o $f_0 = f_c + f_d$, donde f_c es la frecuencia de la portadora sin modular, f_d la desviación de frecuencia respecto a f_c , f_1 y f_0 las frecuencias de transmisión de un "1" o un "0", respectivamente. La señal FSK se puede representar entonces en la forma

$$x_{\text{FSK}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi(f_c + b_i \cdot f_d)t] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \quad (5.162)$$

donde $b_i = \begin{cases} -1 & \text{si se ha transmitido un "1"} \\ +1 & \text{si se ha transmitido un "0"} \end{cases}$

Nótese que la asignación de valores para f_d y f_c es, en general, arbitraria. Por ejemplo, la UIT-T establece que para transmisión de datos sobre un canal telefónico a una velocidad de modulación de 300 baudios utilizando un Módem V.21, las frecuencias utilizadas son $f_1 = 980$ Hz y $f_0 = 1180$ Hz ($f_c = 1080$ Hz y $f_d = 100$ Hz). Sin embargo, en el Módem Bell 103A para la misma velocidad de modulación, las frecuencias de operación son $f_0 = 1070$ Hz y $f_1 = 1270$ Hz ($f_c = 1170$ Hz y $f_d = 100$ Hz). Evidentemente, los Módems normalizados UIT-T V.21 y Bell 103A son equivalentes pero no son compatibles.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas FSK

La determinación exacta del ancho de banda de las señales FSK es bastante complicada [Lucky y otros, 1968; Benedetto y otros, 1987] y no trataremos de reproducirla aquí. Sin embargo, podemos simplificar el problema si consideramos que la señal FSK está formada fundamentalmente por dos señales ASK de frecuencias f_0 y f_1 , respectivamente, y cuyos espectros ya conocemos, Fig. 5.62. En este caso, el espectro de la señal FSK es esencialmente la superposición de los dos espectros ASK: uno centrado en f_1 y el otro centrado en f_0 . Este enfoque permite considerar al receptor FSK como la combinación de dos receptores ASK, como se muestra en las Figs. 5.67 y 5.68. En la Fig. 5.66 se muestran las densidades espectrales correspondientes (frecuencias positivas solamente) y se define algunos parámetros. Nótese que los espectros para los UNOS y para los CEROS no ocurren simultáneamente.

El ancho de banda mínimo total B_c de la señal FSK se puede estimar a partir de la Fig. 5.66; en efecto, podemos definir $|f_0 - f_1| = \Delta f = 2f_d$. Entonces,

$$f_c = f_1 + f_d = f_0 - f_d \quad \text{y} \quad B_c = \Delta f + 2f_b = 2(f_d + f_b)$$

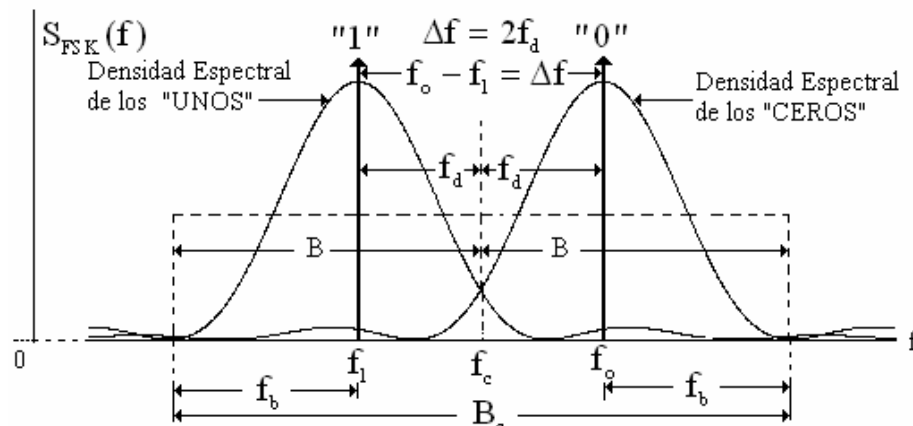


Fig. 5.66. Relaciones Espectrales en FSK.

Sea $k = \frac{f_d}{f_b}$ y consideremos la Fig. 5.66. Si $k \ll 1$, entonces los dos espectros se acercan de tal manera que se produciría una gran interferencia mutua entre un canal y el otro. En este caso el ancho de banda de la señal FSK se puede calcular solamente con el método de Lucky. Si $\frac{1}{3} \leq k < 1$ [Shanmugam, 1979], la separación entre los dos espectros aumenta y la interferencia mutua entre canales disminuye; el ancho de banda de cada canal se puede tomar como $B = (f_b + f_d)$. Si $k \geq 1$, los espectros estarán lo suficientemente separados, la interferencia mutua entre canales será mínima y el ancho de banda de los canales "0" ó "1" será $B = 2f_b$.

En resumen, para disminuir la distorsión de intermodulación producida por las colas de un espectro sobre la gama del otro espectro, se puede tomar $k \geq 1/3$, aunque más adelante demostraremos que es preferible tomar $k \geq \frac{1}{2}$.

Principio de Ortogonalidad en Señales FSK

Se dice que dos funciones reales $s_1(t)$ y $s_0(t)$ son ortogonales, si dentro de un intervalo $(0, T_b)$ se verifica la integral $\int_0^{T_b} s_1(t)s_0(t)dt = 0$ para $s_1(t) \neq s_0(t)$.

En el caso binario, $s_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ y $s_0(t) = A \cos(2\pi f_0 t) = A \cos[2\pi(f_1 + \Delta f)t]$

Entonces, de la propiedad de ortogonalidad,

$$A^2 \int_0^{T_b} \cos(2\pi f_1 t) \cos[2\pi(f_1 + \Delta f)t] dt = 0$$

$$\frac{A^2}{2} \int_0^{T_b} \cos[2\pi(2f_1 + \Delta f)t] dt + \frac{A^2}{2} \int_0^{T_b} \cos(2\pi \Delta f \cdot t) dt = 0$$

Para que esta expresión se cumpla, las integrales deben ser cero en el intervalo $[0, T_b]$, es decir, debe verificarse, como se muestra en la Fig. 5.67, que el área neta de cada integral en un intervalo T_b cualquiera debe ser cero.

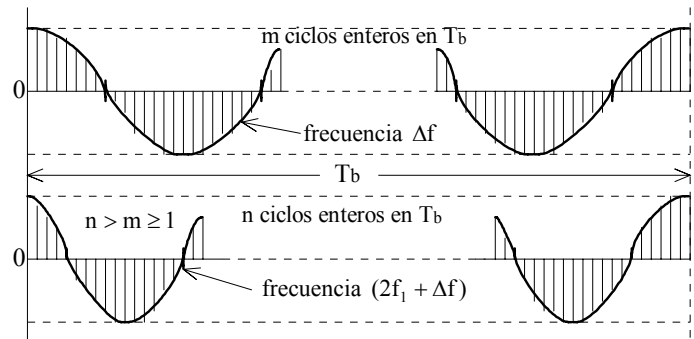


Fig. 5.67. Condiciones de Ortogonalidad en FSK.

Puede observarse, Fig. 5.67, que $\Delta f = \frac{m}{T_b}$ y $2f_1 + \Delta f = \frac{n}{T_b}$, donde m y n son enteros distintos de cero y $n > m$. Como $\Delta f = 2f_d$, entonces $f_d = m \frac{f_b}{2}$; asimismo, $2f_1 + 2f_d = \frac{n}{T_b} = n f_b$ y como $f_c = f_1 + f_d$, entonces $f_c = n \frac{f_b}{2}$. En la misma forma podemos demostrar que $f_1 = (n - m) \frac{f_b}{2}$ y $f_0 = (n + m) \frac{f_b}{2}$.

Para una velocidad de transmisión V_b bps o frecuencia de señalización f_b Hz, el principio de ortogonalidad en FSK binario establece entonces que:

Para dos enteros n y m tal que $n > m \geq 1$, se tiene

$$f_d = m \frac{f_b}{2}; \quad f_c = n \frac{f_b}{2}; \quad f_1 = (n - m) \frac{f_b}{2}; \quad f_0 = (n + m) \frac{f_b}{2}$$

En este caso se dice que la separación entre las frecuencias es ortogonal. Asimismo, el ancho de banda B_c del canal será $B_c = 2f_b + m f_b = (m + 2)f_b$. Nótese que n permite ajustar la frecuencia de portadora para colocarla en el centro del ancho de banda de transmisión.

En condiciones de ortogonalidad, la mínima separación entre las frecuencias se verifica para $m = 1$. En este caso el ancho de banda mínimo del canal será $B_c = 3f_b$. Esto también se puede interpretar diciendo que, bajo las condiciones de ortogonalidad, la máxima frecuencia de señalización en un canal de ancho de banda B_c es $f_b = \frac{B_c}{3}$ y la frecuencia de portadora correspondiente será $f_c = n \frac{f_b}{2} = n \frac{B_c}{6}$. Como ya lo observamos, el valor de f_c (o de n) se elige de tal manera que f_c quede centrada en el ancho de banda de transmisión y que n sea un número entero $> m \geq 1$.

La ortogonalidad permite estimar la máxima velocidad de transmisión por un canal de un ancho de banda dado sin efectos interferentes entre las señales.

♣ Ejemplo 5.15

Las frecuencias de los módems prácticos pocas veces cumplen con las condiciones de ortogonalidad. Por ejemplo, en el MODEM UIT-T V.23 se tiene

$f_b = 600$ Hz; $f_d = 200$ Hz; $f_c = 1500$; $f_1 = 1300$ Hz; $f_0 = 1700$ Hz. De donde,

$$m = \frac{2f_d}{f_b} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3} \neq \text{entero}; \quad n = \frac{2f_c}{f_b} = \frac{3000}{600} = 5 \text{ entero. Generalmente } n \gg m$$

Como m no es entero, las señales $s_1(t)$ y $s_0(t)$ del MODEM V.23 no son perfectamente ortogonales. Por ejemplo, si hacemos $m = 1$ y dejamos $n = 5$ con la misma frecuencia de señalización $f_b = 600$ Hz, las frecuencias que satisfacen las condiciones de ortogonalidad son:

$f_c = 1500$ Hz; $f_d = 300$ Hz; $f_1 = 1200$ Hz y $f_0 = 1800$ Hz

♣

Puesto que $k = \frac{f_d}{f_b}$ y $m = \frac{2f_d}{f_b}$, entonces $k = \frac{m}{2}$

Esto quiere decir que, en condiciones de ortogonalidad, k tendrá los valores fijos $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \frac{m}{2}$. En el caso general (sin ortogonalidad) k tendrá cualquier valor $\geq \frac{1}{2}$.

En el caso especial para el cual $k = 1/2$ (para $m = 1$), la separación entre las frecuencias es la mínima ortogonal; en este caso la separación mínima entre las frecuencias de transmisión es igual a la velocidad de señalización, es decir, $\Delta f = f_b = 2f_d$; la separación ortogonal es muy utilizada en transmisión FSK m -aria. En transmisión a altas frecuencias, por ejemplo, en microondas, $k > 1$, $m > 2$ y $B = 2f_b$.

Ancho de Banda en FSK

El ancho de banda mínimo total de la señal FSK será, en el caso general,

$$B_c = 2(f_b + f_d) = 2(k+1)f_b \quad \text{para } k = \frac{f_d}{f_b} \geq \frac{1}{2} \quad (5.163a)$$

y en condiciones de ortogonalidad

$$B_c = 2(f_b + f_d) = (2+m)f_b \quad \text{para } m \text{ entero } \geq 1 \quad (5.163b)$$

B_c es el ancho de banda mínimo del canal de transmisión y, por supuesto, del filtro de línea de entrada al receptor. Este filtro deberá estar centrado en la frecuencia $f_c = \frac{f_0 + f_1}{2}$.

Asimismo, el ancho de banda B de los canales individuales “1” ó “0” será, en el caso general,

$$B = \begin{cases} (k+1)f_b & \text{para } k < 1 \\ 2f_b & \text{para } k \geq 1 \end{cases} \quad (5.164a)$$

y si hay ortogonalidad,

$$B = \begin{cases} \frac{3}{2}f_b & \text{cuando } m = 1 \\ 2f_b & \text{cuando } m > 1 \end{cases} \quad (5.164b)$$

Estos anchos de banda B son los utilizados para el cálculo de la relación S/N.

Relaciones S/N en FSK

Consideremos ahora la relación S/N en FSK. Como una señal FSK se puede considerar como la superposición de dos sistemas ASK en donde la amplitud de las portadoras es A, entonces la potencia promedio de la señal FSK será de dos veces la potencia promedio de la señal ASK, es decir, $\langle x_{\text{FSK}}^2(t) \rangle = 2 \langle x_{\text{ASK}}^2(t) \rangle = A^2 / 2$. Nótese que la potencia recibida en FSK es 3 dB mayor que en ASK; esta es una ventaja muy significativa a favor del sistema FSK.

Procediendo como en el caso ASK, obtenemos la relación S/N de predetección:

$$\text{Cuando } k < 1, \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{FSK}} = \frac{A^2}{2(k+1)f_b\eta} = \frac{\gamma}{k+1} \quad (5.165)$$

$$\text{Cuando } k \geq 1, \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{FSK}} = \frac{A^2}{2(2f_b)\eta} = \frac{A^2}{4\eta f_b} = \frac{\gamma}{2} \quad (5.166)$$

Si hay ortogonalidad,

$$\text{Para } m = 1, \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{FSK}} = \frac{A^2}{3f_b\eta} = \frac{2}{3}\gamma \quad (5.167a)$$

$$\text{Para } m > 1, \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{FSK}} = \frac{A^2}{4\eta f_b} = \frac{A^2 T_b}{4\eta} = \frac{\gamma}{2} \quad (5.167b)$$

Nótese que para $k \geq 1$ o $m > 1$,

$$\gamma = 2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{FSK}} \quad \text{o también} \quad [\gamma]_{(\text{dB})} = 3,01 \text{ dB} + \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{FSK}(\text{dB})} \quad (5.167c)$$

En lo posible, para un mejor comportamiento del sistema, se debe mantener la ortogonalidad.

Demodulación Coherente de Señales FSK

En la Fig. 5.68 se muestra el diagrama de bloques de un receptor FSK coherente.

El criterio de detección es el siguiente:

$$\text{Si en el instante } t = t_n, \quad \begin{cases} v_{d1}(t_n) \geq v_{d0}(t_n) & \implies \text{un "1" ha sido transmitido} \\ v_{d1}(t_n) < v_{d0}(t_n) & \implies \text{un "0" ha sido transmitido} \end{cases}$$

Habrà error en caso contrario.

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

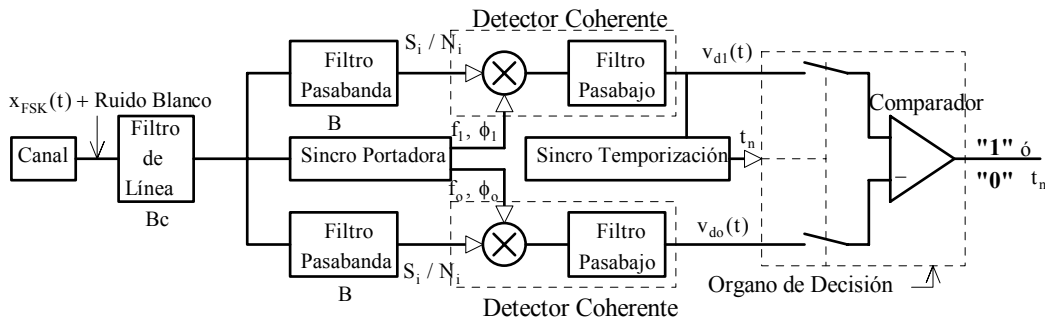


Fig. 5.68. Recepción Coherente en FSK.

Se demuestra [Schwartz y otros, 1966] que la probabilidad de error es

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) \quad (5.168)$$

Si se compara este resultado con el correspondiente en ASK coherente, vemos que si las condiciones de amplitud de portadora, ancho de banda y densidad espectral de ruido son las mismas, entonces la relación $[S_i / N_i]_{\text{FSK}}$ es 3 dB mayor que la relación $[S_i / N_i]_{\text{ASK}}$, pero las probabilidades de error son muy distintas. Sin embargo, si las probabilidades de error son las mismas en ambos sistemas, resulta que las relaciones $[S_i / N_i]$ en ASK coherente y en FSK coherente son iguales, pero en FSK no se necesita un umbral de detección. Esta ya es otra ventaja del sistema FSK sobre el sistema ASK. El lector puede verificar fácilmente estos resultados (Ver Problemas de Aplicación 5.44 y 5.50).

En general, la demodulación coherente de señales FSK casi no se emplea y el estudio somero que hemos presentado aquí es más que todo para reafirmar conceptos y para efectos de comparación.

Demodulación no Coherente de Señales FSK

En la Fig. 5.69 se muestra el diagrama de bloques de un receptor FSK no coherente.

El criterio de decisión es el mismo que en el caso de detección coherente. Por ejemplo, si se ha transmitido un "1", la decisión será correcta si $v_{d1}(t_n) \geq v_{d0}(t_n)$. Si esta desigualdad se invierte, entonces se producirá un error. Nótese que $v_{d1}(t)$ y $v_{d0}(t)$ son las envolventes de las señales filtradas y como tales serán afectadas por el ruido aditivo. El lógico suponer entonces que cuanto mayor sea la relación S/N a la entrada de los detectores de envolvente, más confiable será la decisión. Esto se logra cuando los filtros pasabanda de los canales "0" ó "1" son filtros óptimos.

En cuanto a la probabilidad de error, se demuestra [Schwartz y otros, 1966], que

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right) \quad (5.169)$$

Nótese que si se compara este valor con el correspondiente en ASK no coherente, expresión (5.161), se ve que para la misma probabilidad de error en ambos sistemas las relaciones $[S_i / N_i]_{\text{ASK}}$ y $[S_i / N_i]_{\text{FSK}}$ son iguales. La desventaja más significativa del sistema ASK no

coherente es la necesidad de optimizar el umbral de detección para cada valor de la relación $[S_i / N_i]_{ASK}$, mientras que este problema no existe en FSK. La expresión (5.169) se grafica en la Fig. 5.78

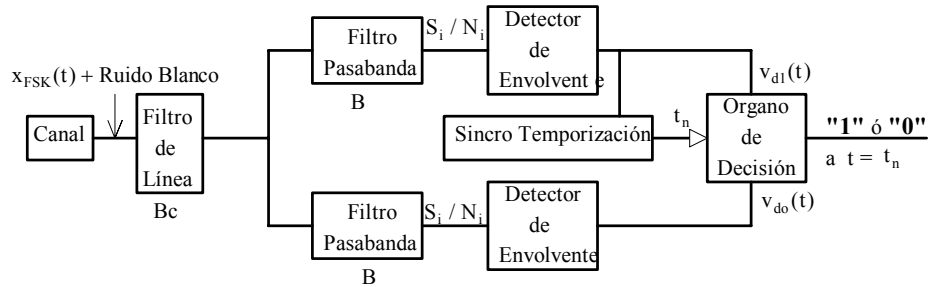


Fig. 5.69. Recepción no Coherente en FSK.

♣ Ejemplo 5.16

Sobre un canal telefónico se transmite datos binarios en FSK. El ancho de banda útil del canal es de 3 kHz; las frecuencias de transmisión son $f_1 = 1500$ Hz y $f_0 = 2100$ Hz, como se muestra en la Fig. 5.70. Se utiliza un módem que trabaja a una velocidad de modulación de 300 baudios. La relación S/N en el canal es de 6,021 dB y la densidad espectral de potencia de ruido es igual a 10^{-8} W/Hz.

Vamos a determinar la desviación de frecuencia, la frecuencia de portadora, el ancho de banda del filtro de entrada, el ancho de banda de los filtros de canal, la potencia de entrada y la probabilidad de error tanto en coherente como en no coherente. Verificar también si la separación entre las frecuencias cumple con las condiciones de ortogonalidad.

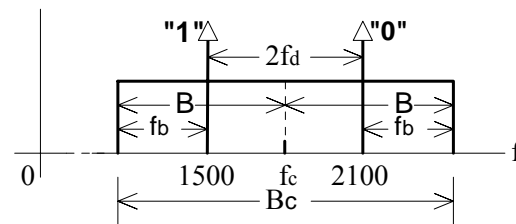


Fig. 5.70

Solución:

$$B_c = 3 \text{ kHz}; \quad f_1 = 1500 \text{ Hz}; \quad f_0 = 2100 \text{ Hz};$$

$$f_b = 300 \text{ Hz}; \quad \frac{S_i}{N_i} = 6,021 \text{ dB} = 4; \quad \eta = 2 \times 10^{-8} \text{ W/Hz}$$

$$\text{De la Fig. 5.70, } f_d = (2100 - 1500) / 2 = 300 \text{ Hz}$$

$$f_c = 1500 + 300 = 1800 \text{ Hz}$$

$$\text{Filtro de entrada, } B_c = 2(f_b + f_d) = 1200 \text{ Hz.}$$

$$\text{Filtro de canal, } B = 2f_b = 2 \times 300 = 600 \text{ Hz}$$

$$\text{En FSK, } \gamma = 2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{FSK} = 8$$

$$\gamma = \frac{A^2}{2\eta f_b} \therefore A = \sqrt{2\eta f_b \gamma} = \sqrt{2 \times 2 \times 10^{-8} \times 300 \times 8} = 9,8 \text{ mV}$$

La potencia de entrada será $\langle x_{\text{FSK}}^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} = \frac{(9,8 \times 10^{-3})^2}{2} = 0,048 \text{ mW}$

Probabilidad de error: En Coherente, $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) = 2,339 \times 10^{-3}$

En No Coherente, $P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = 9,158 \times 10^{-3}$

Veamos si cumple con las condiciones de ortogonalidad.

$$m = \frac{2f_d}{f_b} = \frac{2 \times 300}{300} = 2 \text{ entero}; \quad n = \frac{2f_c}{f_b} = \frac{2 \times 1800}{300} = 12 \text{ entero}$$

Como m y n son enteros y $n > m$, este módem cumple con las condiciones de ortogonalidad.

♣

♣ Ejemplo 5.17

Sea el mismo canal telefónico del ejemplo anterior, donde $B_c = 3\text{kHz}$, $S_i/N_i = 4$
 $\eta = 2 \times 10^{-8} \text{ W/Hz}$

Determine la máxima velocidad de transmisión en condiciones de ortogonalidad, la desviación de frecuencia, la frecuencia de portadora, las frecuencias de los UNOS y los CEROS, el ancho de banda de los filtros de canal, la potencia de entrada y la probabilidad de error tanto en coherente como en no coherente.

Solución:

En condiciones de ortogonalidad, la máxima velocidad de transmisión por un canal de ancho de banda B_c se tiene cuando $m = 1$ y $k = 1/2$, es decir, cuando $B_c = 3f_b$. Entonces,

$$f_b = \frac{B_c}{3} = 1000 \text{ Hz}; \quad V_b = 1000 \text{ bps}; \quad f_d = \frac{f_b}{2} = 500 \text{ Hz}$$

La frecuencia de portadora f_c debe quedar centrada en el canal. Puesto que $f_c = n \frac{f_b}{2}$, la frecuencia de portadora quedará centrada en el canal cuando $n = 3$. En este caso,

$$f_c = \frac{3}{2} f_b = 1500 \text{ Hz}.$$

$$f_1 = f_c - f_d = 1000 \text{ Hz}; \quad f_0 = f_c + f_d = 2000 \text{ Hz}$$

$$\text{Filtros de canal, } B = (k+1)f_b = \frac{3}{2} f_b = 1500 \text{ Hz}$$

$$\text{En FSK, } \gamma = 2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{FSK}} = 8$$

$$\gamma = \frac{A^2}{2\eta f_b} \therefore A = \sqrt{2\eta f_b \gamma} = \sqrt{2 \times 2 \times 10^{-8} \times 1000 \times 8} = 17,9 \text{ mV}$$

La potencia de entrada será $\langle x_{\text{FSK}}^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} = \frac{(17,9 \times 10^{-3})^2}{2} = 0,16 \text{ mW}$

Probabilidad de error: En Coherente, $P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) = 2,339 \times 10^{-3}$

En No Coherente, $P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = 9,158 \times 10^{-3}$

En este caso se ha hecho un uso más eficiente del canal: la velocidad de transmisión y la potencia de entrada han aumentado 3,33 veces. Nótese que las probabilidades de error no han variado. ♣

♣ Ejemplo 5.18. Transmisión de Datos con Módems UIT-T

Sobre un canal telefónico, cuyo ancho de banda útil es de 3,2 kHz, se desea transmitir datos binarios utilizando los Módems UIT-T FSK V.23 y V.21. La amplitud de la portadora en el Módem V.23 es de 1 mV y se reduce a la mitad en el Módem V.21. La densidad espectral de ruido en el sistema es de 10^{-11} W/Hz. Vamos a determinar todos los parámetros asociados tanto en FSK coherente como en FSK no coherente.

(a) Transmisión con el Módem UIT-T V.23

El Módem V.23 transmite y recibe a las frecuencias $f_1 = 1300 \text{ Hz}$ y $f_0 = 2100 \text{ Hz}$, con una velocidad de modulación de 1200 baudios. En este caso,

$$f_b = 1200 \text{ Hz}; T_b = \frac{1}{1200}; \Delta f = 2100 - 1300 = 800 \text{ Hz}; f_d = 400 \text{ y } k = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$$

El ancho de banda mínimo del canal de transmisión es, de (5.163a),

$$B_c = 2\left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdot 1200 = 3200 \text{ Hz}$$

Se puede efectuar la transmisión, pues el ancho de banda de transmisión necesario es igual al ancho de banda útil del canal disponible.

Puesto que $k < 1$, de (5.164b) el ancho de banda de los canales "1" ó "0" es $B = f_b + f_d = 1200 + 400 = 1600 \text{ Hz}$. Con $A^2 = 10^{-6} \text{ V}$; $\eta/2 = 10^{-11} \text{ W/Hz}$, se tiene

$$S_i = \frac{A^2}{2} = 5 \times 10^{-7} \text{ W} = -33,01 \text{ dBm}$$

$$N_i = B\eta = 1600 \times 2 \times 10^{-11} = 3,2 \times 10^{-8} \text{ W} = -44,95 \text{ dBm}$$

de donde $\frac{S_i}{N_i} = \frac{5 \times 10^{-7}}{3,2 \times 10^{-8}} = 15,625 = 11,938 \text{ dB}$

De (5.152), $\gamma = \frac{A^2 T_b}{2\eta} = \frac{10^{-6}}{2 \times 1200 \times 2 \times 10^{-11}} = 20,833$

En FSK coherente: $P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\gamma/2}\right) = 2,505 \times 10^{-6}$

En FSK no coherente: $P_e = \frac{1}{2} \exp(-\gamma/2) = 1,496 \times 10^{-5}$

(b) Transmisión con el Módem UIT-T V.21

El Módem UIT-T V.21 tiene dos bandas: por una recibe y por la otra transmite. En la banda inferior las frecuencias de portadora son $f_1 = 980$ Hz y $f_0 = 1180$ Hz, mientras que en la banda superior $f_1 = 1650$ Hz y $f_0 = 1850$ Hz. La velocidad de modulación es de 300 baudios. Entonces,

$$f_b = 300 \text{ Hz}; \quad T_b = \frac{1}{300}; \quad \Delta f = 200 \text{ Hz}; \quad f_d = 100 \text{ Hz}; \quad k = \frac{1}{3}$$

En el presente ejemplo no vamos a utilizar fórmulas para determinar el ancho de banda de los filtros y canales, sino que distribuiremos uniformemente los diferentes anchos de banda de acuerdo con las frecuencias de portadora del Módem V.21. Se obtiene así una configuración como la mostrada en la Fig. 5.71 El lector puede tomar el ancho de banda de los filtros de canal en forma diferente.

De la Fig. 5.71, se tiene los siguientes anchos de banda:

Para los filtros de canal: $B_{I1} = B_{I0} = B_{S1} = B_{S0} = 335$ Hz, que estarán centrados en las frecuencias $f_{I1} = 912,5$ Hz; $f_{I0} = 1248$ Hz; $f_{S1} = 1583$ Hz; $f_{S0} = 1918$ Hz.

Para los filtros de banda: $B_{BI} = B_{BS} = 670$ Hz, que estarán centrados en las frecuencias $f_{BI} = 1080$ Hz; $f_{BS} = 1750$ Hz.

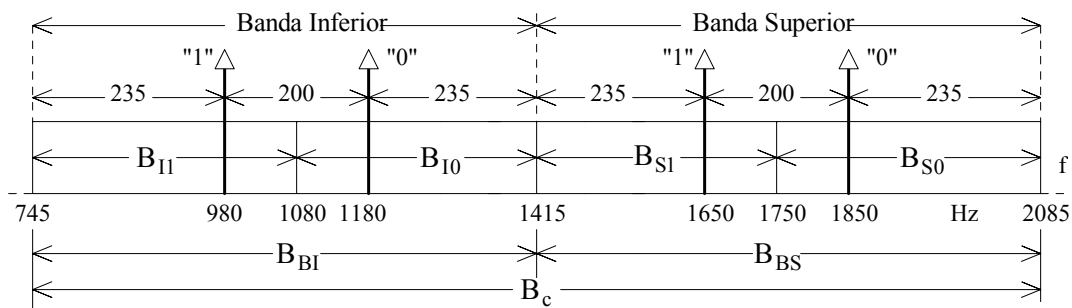


Fig. 5.71. Distribución de Anchos de Banda en el Módem UIT-T V.21.

Para el filtro de línea o ancho de banda total: $B_c = 1340$ Hz, que estará centrado en la frecuencia $f_c = 1415$ Hz.

El ancho de banda para el cálculo de la potencia de ruido es el ancho de banda de los filtros de canal, es decir, $B = 335$ Hz. Entonces,

$$A = \frac{10^{-3}}{2} \text{ V}; \quad \gamma = \frac{A^2}{2\eta f_b} = \frac{10^{-6}}{4 \times 2 \times 300 \times 2 \times 10^{-11}} = 20,833$$

$$S_i = \frac{A^2}{2} = 1,25 \times 10^{-7} \text{ W} = -39,03 \text{ dBm}$$

$$N_i = B\eta = 335 \times 2 \times 10^{-11} = 6,7 \times 10^{-9} \text{ W} = -51,74 \text{ dBm}; \quad \frac{S_i}{N_i} = 18,66 = 12,71 \text{ dB}$$

Las probabilidades de error son las mismas que en el caso (a).

El Módem V.21 es un módem que puede simultáneamente transmitir por una banda y recibir por la otra. Puesto que por cada banda se puede transmitir datos a 300 bps, el intercambio neto de datos en el Módem V.21 es realmente de 600 bps.

5.7.5. Modulación Binaria de Fase (PSK)

En la modulación binaria PSK, la fase de la portadora sinusoidal se conmuta entre dos valores de acuerdo con el código PCM. Un desfase de 180° es una selección muy conveniente porque simplifica los circuitos de modulación y demodulación, por lo tanto es el más utilizado.

Existen dos tipos principales de modulación binaria de fase que dependen de si la demodulación es o no coherente. El primer tipo es la modulación binaria de fase propiamente dicha (PSK), mientras que el segundo tipo es la "Modulación Binaria Diferencial de Fase (DPSK)". Nótese que cuando se dice que la demodulación DPSK no es coherente, esto no quiere decir que la demodulación pueda efectuarse con detección de envolvente, pues el detector de envolvente elimina toda la información de fase, que en DPSK es justamente el soporte de la información.

La señal PSK tiene la forma

$$x_{\text{PSK}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t - \phi_i) \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \quad (5.170)$$

donde $\phi_i = \begin{cases} 0 & \text{si se ha transmitido un "1"} \\ \pi & \text{si se ha transmitido un "0"} \end{cases}$

En la Fig. 5.57(d) se muestra la forma de las señales PSK. Las inversiones de fase pueden producir transientes indeseables pero, en general, las discontinuidades son alisadas por los filtros utilizados.

Demodulación de Señales PSK

La demodulación de señales PSK es esencialmente coherente. En la Fig. 5.72 se muestra el diagrama de bloques de un receptor PSK. Nótese la semejanza con el receptor coherente ASK, Fig. 5.63, pero en el receptor PSK el elemento de decisión es mucho más sencillo pues se trata de determinar la polaridad (positiva o negativa) de $v_d(t)$ en el instante de decisión.

El criterio de decisión adoptado es el siguiente:

$$\text{Si en el instante } t = t_n, \begin{cases} v_d(t_n) \geq 0 & \implies \text{Un "1" ha sido transmitido} \\ v_d(t_n) < 0 & \implies \text{Un "0" ha sido transmitido} \end{cases}$$

Habrà error en el caso contrario.

La probabilidad de error es [Schwartz y otros, 1966]

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (5.171)$$

Esta expresión se grafica en la Fig. 5.78.

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

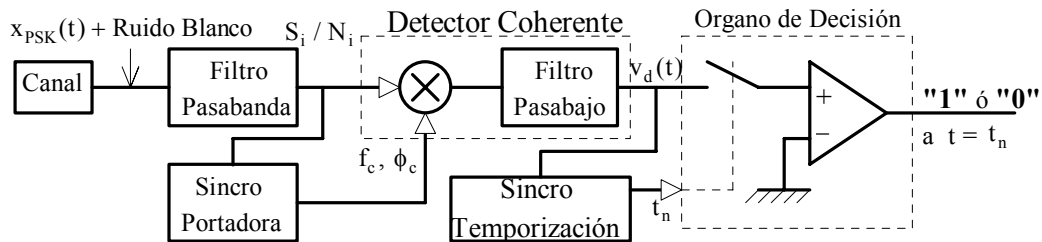


Fig. 5.72. Recepción Coherente en PSK.

Comparando estos valores respecto a ASK coherente, vemos que para la misma probabilidad de error, la relación $[S_i / N_i]_{PSK}$ es 3 dB menor que la relación $[S_i / N_i]_{ASK}$, o lo que es lo mismo, la potencia necesaria para transmitir una señal ASK coherente es el doble que la necesaria para transmitir la misma información en PSK. Esto es de particular importancia en sistemas en donde la potencia es el factor limitativo como, por ejemplo, en transmisión por microondas, en estaciones remotas o en satélites de telecomunicación.

Modulación Binaria Diferencial de Fase (DPSK)

En los sistemas de modulación binaria de fase, la referencia de fase para la demodulación se deriva a partir de la fase de la portadora en el intervalo de señalización anterior, y el receptor descodifica la información digital basada en esa diferencia de fase. Si las perturbaciones en el canal y otros factores como la estabilidad de los osciladores son lo suficientemente estables y no afectan la fase entre intervalos adyacentes, entonces la fase se puede codificar, no con respecto a un valor absoluto, por ejemplo, 0° para un "1" y 180° para un "0", sino más bien por codificación diferencial en términos del cambio de fase entre intervalos sucesivos. Por ejemplo, 0° de desfase desde el intervalo anterior puede designar un "1", mientras que un desfase de 180° puede designar un "0". En la Fig. 5.73 se muestra el diagrama de bloques de un modulador DPSK, el cual es la combinación de un codificador diferencial y un modulador PSK.

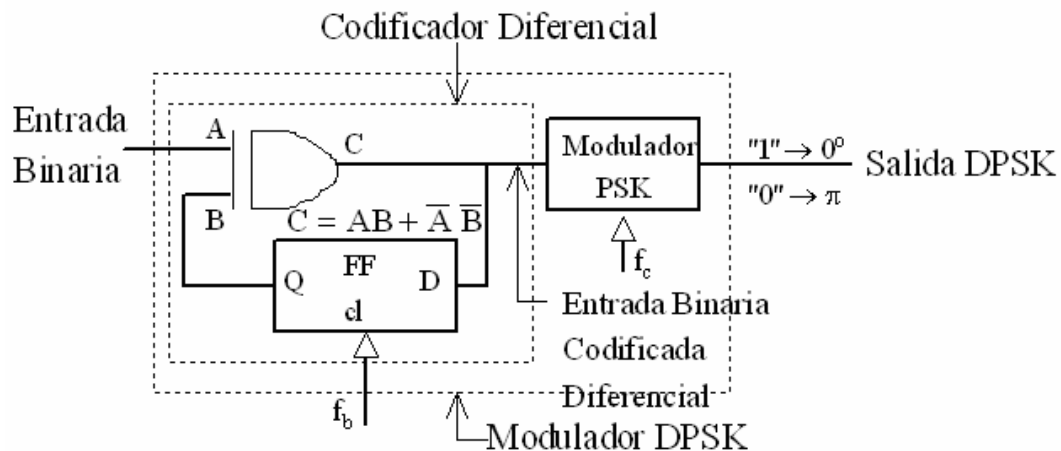


Fig. 5.73. Modulación DPSK.

En la Fig. 5.74 se muestra las formas de onda de las señales moduladas PSK y DPSK para la secuencia de entrada dada.

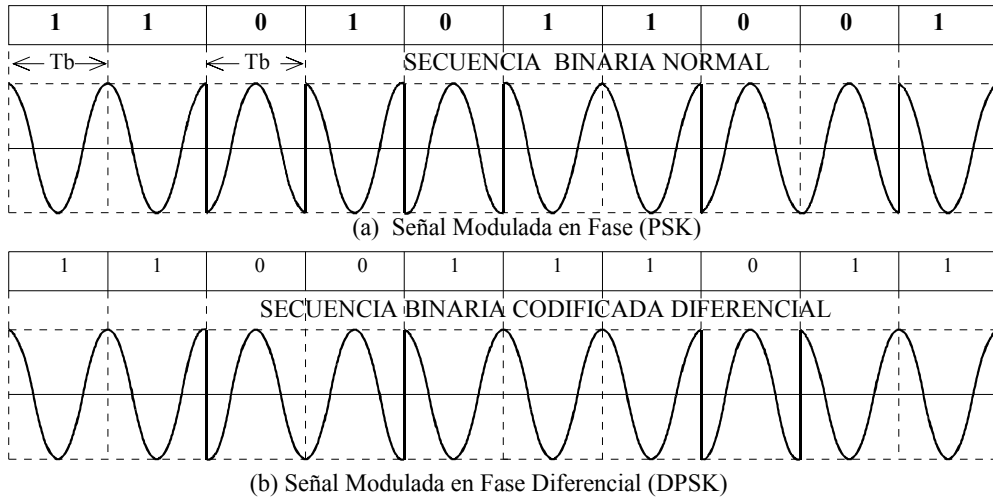


Fig. 5.74. Formas de las Señales Moduladas PSK y DPSK

Nótese que el número de transiciones en DPSK ha disminuido en relación con el número de transiciones en PSK; en efecto, en la corta secuencia de 10 dígitos binarios la señal PSK tiene 6 transiciones y al codificarla diferencialmente el número de transiciones disminuye a cuatro. Como ya lo hemos señalado, las transiciones producen transientes indeseables que pueden perjudicar la sincronización de temporización y su disminución es muy deseable. Esta es otra ventaja del sistema DPSK sobre el sistema PSK. Para facilitar el dibujo de las formas de onda, en la Fig. 5.74 suponemos que la frecuencia de portadora es igual a la frecuencia de señalización, es decir, $f_c = f_b$.

En la siguiente Tabla se muestra el mecanismo de codificación y decodificación diferencial tanto en el transmisor como en el receptor.

Nótese que la codificación diferencial, en sí misma, se puede utilizar en cualquier sistema digital y no es privativa del sistema DPSK.

Tabla de Codificación y Descodificación DPSK

Transmisor	Secuencia Binaria de Entrada	1 1 0 1 0 1 1 0 0 1
	Mensaje Cofificado Diferencial	1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1
	Fase Transmitida ϕ_n	0° 0° 0° π π 0° 0° 0° π 0° 0°
Receptor	Fase Recibida y Retardada ϕ_{n-1}	0° 0° 0° 0° π π 0° 0° 0° π 0°
	$\Delta\phi = \phi_n - \phi_{n-1} $	0° 0° 0° π 0° π 0° 0° π π 0°
	Secuencia Binaria de Salida	1 1 0 1 0 1 1 0 0 1

○ Valores Arbitrarios

Mecanismo de Codificación y Descodificación Diferencial en Modulación DPSK.

Un ejemplo de la instrumentación de un receptor DPSK se muestra en la Fig. 5.75. Esta técnica se denomina “detección por retardo” y no necesita sincronización de portadora pero sí de temporización.

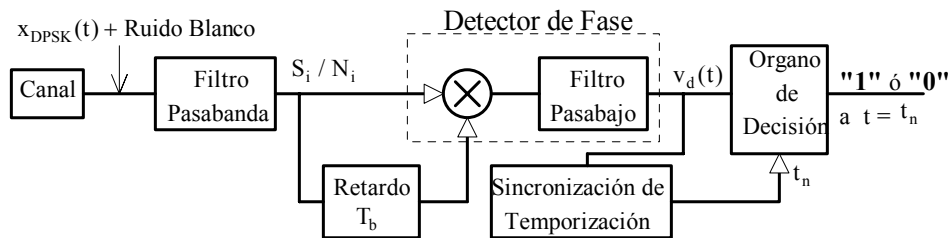


Fig. 5.75. Receptor DPSK con Detección por Retardo.

La señal DPSK recibida tiene la misma forma de la señal PSK; en efecto,

$$x_{DPSK}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \cos(2\pi f_c t - \phi_i) \tag{5.172}$$

donde $\phi_i = 0^\circ$ ó π

Consideremos un intervalo T_b de orden n , donde $t = t_n$. En ese intervalo, de (5.172),

$$x_{DPSK}(t_n) = A \cos(2\pi f_c t_n - \phi_n)$$

Como el retardo es igual a T_b , a la salida de la red de retardo estará presente la señal DPSK correspondiente al intervalo anterior ($n-1$); por lo tanto,

$$x_{DPSK}(t_{n-1}) = A \cos(2\pi f_c t_{n-1} - \phi_{n-1})$$

El lector puede verificar fácilmente que a la salida del filtro pasabanda, Fig. 5.75,

$$v_d(t_n) = \frac{A^2}{2} \cos(\phi_n - \phi_{n-1}) = \frac{A^2}{2} \cos(\Delta\phi) \quad (5.173)$$

Como $|\Delta\phi| = 0^\circ$ o π , es suficiente verificar el signo de $v_d(t)$; el criterio de decisión será entonces igual al del caso PSK.

La probabilidad de error en modulación DPSK es [Schwartz y otros, 1966],

$$P_e = \frac{1}{2} \exp(-\gamma) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_o}\right) \quad (5.174)$$

Esta expresión se grafica en la Fig. 5.78.

Si se compara DPSK con PSK, se observa que el sistema DPSK requiere un poco más de potencia que el sistema PSK; sin embargo, esta desventaja se compensa con creces por el hecho de que DPSK no requiere detección coherente. Por otra parte, debido al retardo fijo T_b en el receptor, el sistema DPSK está “enganchado” a una frecuencia de señalización específica, lo que impide la transmisión de datos en forma asincrónica. Otro problema menor en DPSK es que los errores tienden a propagarse, por lo menos a los intervalos adyacentes, debido a la correlación entre las señales de temporización y el ruido sobre dichos intervalos.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas PSK y DPSK

Para efectos del cálculo de la densidad espectral y de la potencia, la modulación PSK (y DPSK) se puede considerar como una modulación ASK donde la secuencia binaria de entrada es una señal aleatoria bipolar NRZ. En este caso la señal PSK se puede escribir en la forma

$$x_{\text{PSK}}(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (5.175)$$

donde $A(t)$ es una secuencia aleatoria binaria bipolar NRZ de amplitud $\pm A$, con un período de repetición T_b .

En el Capítulo III, expresión (3.175), calculamos la función de autocorrelación y la densidad espectral para este tipo de señal:

$$R_A(\tau) = A^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b}\right) \Leftrightarrow S_A(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_b}\right)$$

y del teorema de la modulación para señales de potencia,

$$S_{\text{PSK}}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{f+f_c}{f_b}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f-f_c}{f_b}\right) \right] \quad (5.176)$$

En la Fig. 5.76 se muestra esta densidad espectral (frecuencias positivas solamente).

Nótese que la densidad espectral de potencia de la señal PSK (y DPSK) tiene la misma forma que la correspondiente en ASK, Fig. 5.62, con la diferencia de que la densidad espectral PSK no contiene un impulso a la frecuencia de portadora. Los requerimientos de ancho de banda son los mismos que en ASK, es decir, $B = 2f_b = 2/T_b$. Sin embargo, no hay que confundir similitud con igualdad: el sistema ASK es un esquema de modulación lineal, mientras que el sistema PSK, en el caso general, es un esquema de modulación no lineal, como veremos en el Capítulo VI.

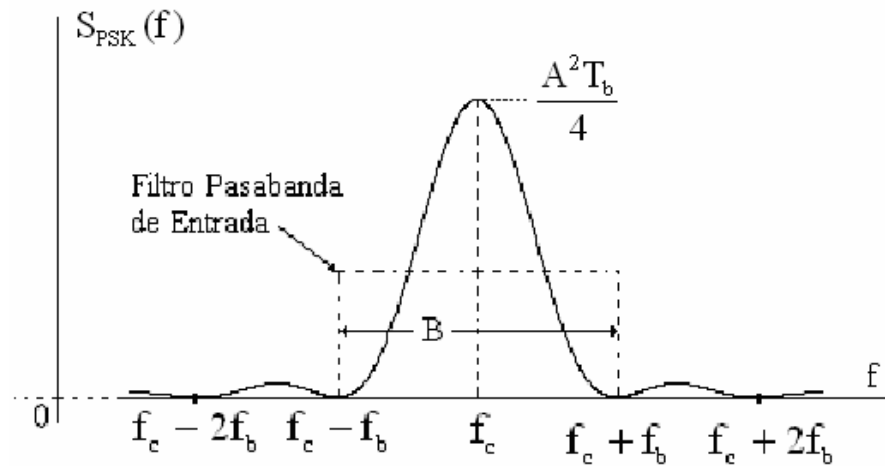


Fig. 5.76. Densidad Espectral de Potencia de Señales PSK.

La potencia de la señal PSK se puede calcular en la misma forma que en el caso ASK. En efecto, de (5.175), $\langle x_{\text{PSK}}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle A^2(t) \rangle$; pero como $\langle A^2(t) \rangle = R_A(0) = A^2$, entonces,

$$\langle x_{\text{PSK}}^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} \quad (5.177)$$

Esta es la potencia de portadora en PSK, y como entre una señal PSK y una DPSK no hay diferencia desde el punto de vista espectral, la potencia en DPSK es la misma que la de PSK. La potencia dada por (5.177) es toda potencia útil, a diferencia de ASK en la cual la mitad de la potencia se pierde en la transmisión de la portadora (impulso en f_c).

Como $B = 2f_b = 2/T_b$ y la potencia de portadora es $A^2/2$, la relación S/N de predetección es igual que en el caso FSK, es decir,

$$\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{PSK}} = \frac{A^2}{2B\eta} = \frac{A^2 T_b}{4\eta} = \frac{\gamma}{2} \quad (5.178a)$$

$$\text{y en dB, } [\gamma]_{\text{dB}} = 3,01 \text{ dB} + \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{PSK(dB)}} \quad (5.178b)$$

Estas expresiones son válidas también en DPSK.

Consideremos ahora las relaciones S/N de postdetección. En la Sección 5.4.1 determinamos la relación S_o/N_o vs P_e en un sistema PCM, expresión (5.111). Utilizando esos resultados y los de la presente sección, vamos a determinar las relaciones $[S_o/N_o]$ vs $[S_i/N_i]$ tanto en PSK como en DPSK. En efecto, de (5.111) y (5.178a),

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2(n+1)} P_e} \quad \text{y} \quad \gamma = 2 \frac{S_i}{N_i}$$

donde, en PSK, de (5.171), $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2 \frac{S_i}{N_i}}\right)$

y en DPSK, de (5.174), $P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-2 \frac{S_i}{N_i}\right)$

Las relaciones S/N de postdetección correspondientes serán

$$\text{En PSK, } \frac{S_o}{N_o} = \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2 \frac{S_i}{N_i}}\right)} \quad (5.179a)$$

$$\text{y en dB, } \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{\text{dB}} = 6,02 \cdot n - 10 \cdot \log_{10}\left[1 + 2^{2n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2 \frac{S_i}{N_i}}\right)\right] \quad \text{dB} \quad (5.179b)$$

$$\text{En DPSK, } \frac{S_o}{N_o} = \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2n+1} \exp\left(-2 \frac{S_i}{N_i}\right)} \quad (5.180a)$$

$$\text{y en dB, } \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{\text{dB}} = 6,02 \cdot n - 10 \cdot \log_{10}\left[1 + 2^{2n+1} \exp\left(-2 \frac{S_i}{N_i}\right)\right] \quad \text{dB} \quad (5.180b)$$

En la Fig. 5.77 se grafican estas expresiones, en dB, para diferentes valores de n.

Nótese, en la Fig. 5.77, el efecto del umbral tanto en PSK como en DPSK. Un examen más atento de las figuras muestra que el umbral en PSK está por debajo del umbral en DPSK en aproximadamente 1 dB; por lo tanto, la relación $[S_i / N_i]_{\min}$ en PSK es aproximadamente 1 dB menor que la relación $[S_i / N_i]_{\min}$ en DPSK, lo cual nos permite aproximar el valor de la relación $[S_i / N_i]_{\min}$ en PSK conocida la correspondiente en DPSK, que es mucho más fácil de calcular. En efecto, el valor de $[S_i / N_i]_{\min}$ en DPSK se puede obtener a partir de la expresión (5.113):

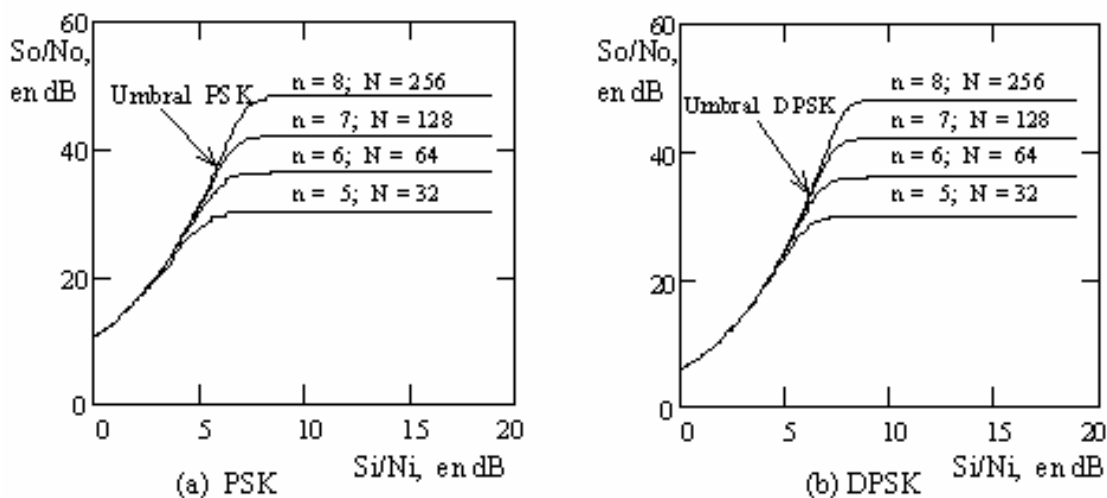
$$f\left(\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-2 \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min}\right) = \frac{6,473 \times 10^{-2}}{2^{2n}} \quad \text{para n entero}$$

Resolviendo esta ecuación, el valor de $[S_i / N_i]_{\min}$ será

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min} = 1,022 + 0,693 \cdot n \quad \text{en DPSK} \quad (5.181)$$

Debe verificarse que $\left[\frac{S_i}{N_i}\right] \geq \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min}$ para no caer dentro de la región umbral.

El valor de la probabilidad de error óptima viene dada por (5.113).

Fig. 5.77. Relaciones $[S_o/N_o]$ vs $[S_i/N_i]$ en PSK y DPSK.

♣ Ejemplo 5.19

Por un canal de microondas cuyo ancho de banda es de 3 MHz se transmite datos binarios a una velocidad de 1 Mbps. Las palabras binarias contienen 8 dígitos binarios, la densidad espectral de potencia del ruido es de 10^{-10} W/Hz y la amplitud de la portadora es de 10 milivolts. Vamos a determinar, en DPSK y en PSK, las relaciones S/N de pre y postdetección y constatar si el sistema está trabajando sobre o bajo el umbral.

$$B_c = 3 \text{ MHz}; f_b = 10^6 \text{ Hz}; T_b = 10^{-6}; \eta = 2 \times 10^{-12} \text{ W/Hz}; n = 8; A = 0,01 \text{ V}$$

El ancho de banda para el cálculo de la potencia de ruido es $B = 2f_b = 2 \text{ MHz}$.

(a) En DPSK

$$\gamma = \frac{A^2 T_b}{2\eta} = 25; \quad S_i = \frac{A^2}{2} = 5 \times 10^{-5} \text{ W} = -13,01 \text{ dBm}$$

$$N_i = B\eta = 4 \times 10^{-6} \text{ W} = -23,98 \text{ dBm}$$

$$\text{La relación S/N de predetección será } \frac{S_i}{N_i} = 12,5 = 10,97 \text{ dB}$$

Como $n = 8$, entonces la relación S/N mínima de predetección es, de (5.181),

$$\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\min} = 6,567 = 8,174 \text{ dB}$$

La relación S/N de postdetección es, para $n = 8$,

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right] = \frac{2^{16}}{1 + 2^{17} \exp(-2 \frac{S_i}{N_i})} = 6,554 \times 10^4 = 48,165 \text{ dB}$$

y la relación S_o/N_o mínima,

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\min} = \frac{2^{16}}{1 + 2^{17} \exp(-2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\min})} = 5,203 \times 10^4 = 47,162 \text{ dB}$$

Nótese que esta relación está a 1 dB por debajo de S_o/N_o .

Puesto que $[S_o/N_o] > [S_o/N_o]_{\min}$, el sistema está trabajando sobre el umbral.

$$\text{La probabilidad de error es } P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{S_i}{N_i}\right) = 6,944 \times 10^{-12}$$

(b) En PSK

Las relaciones S_i/N_i , γ y n , son las mismas que en el caso (a).

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right] = \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2n+1} \left[\text{erfc}\left(\sqrt{2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]}\right) \right]} = 6,554 \times 10^4 = 48,165 \text{ dB}$$

Dando valores a $[S_i/N_i]_{\min}$ para que la relación $[S_o/N_o]_{\min}$ quede a 1 dB por debajo de su valor $[S_o/N_o]$, obtenemos

$$\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\min} = 7,5231 \text{ dB} = 5,653. \text{ De donde,}$$

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\min} = \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2n+1} \left[\text{erfc}\left(\sqrt{2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\min}}\right) \right]} = 47,158 \text{ dB}$$

Puesto que $[S_o/N_o] > [S_o/N_o]_{\min}$, el sistema está trabajando sobre el umbral.

$$\text{La probabilidad de error es } P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]}\right) = 7,687 \times 10^{-13} \quad \clubsuit$$

5.7.6. Comparación entre los Sistemas de Modulación Binaria

En cualquier sistema de modulación digital la meta de un buen diseño es la de lograr el mejor compromiso entre la probabilidad de error P_e , el rendimiento de transmisión η_B , la relación S/N normalizada γ y la complejidad del equipo. Sin embargo, en la práctica la selección de un esquema de modulación depende más bien de la aplicación correspondiente, de los equipos existentes, y de los requerimientos de potencia. Nosotros vamos a comparar los sistemas en base a la potencia; a este efecto, vamos a suponer que la frecuencia de señalización f_b , la probabilidad de error P_e y las condiciones de ruido son las mismas.

Para hacer una comparación respecto a la potencia requerida, se puede utilizar las fórmulas dadas para el cálculo de la probabilidad de error P_e y la Fig 5.78 en la cual se muestra P_e vs γ , donde $\gamma = A^2 T_b / 2\eta$ es la relación S/N normalizada. El eje de las abscisas debe entenderse entonces como una función de la potencia pico recibida (o transmitida) A^2 , siendo el valor pico A^2 es el mismo para todos los sistemas. Recuérdese que la potencia promedio en ASK es $A^2/4$,

mientras que es $A^2/2$ en FSK, PSK y DPSK, donde A es la amplitud de la portadora a la entrada del receptor.

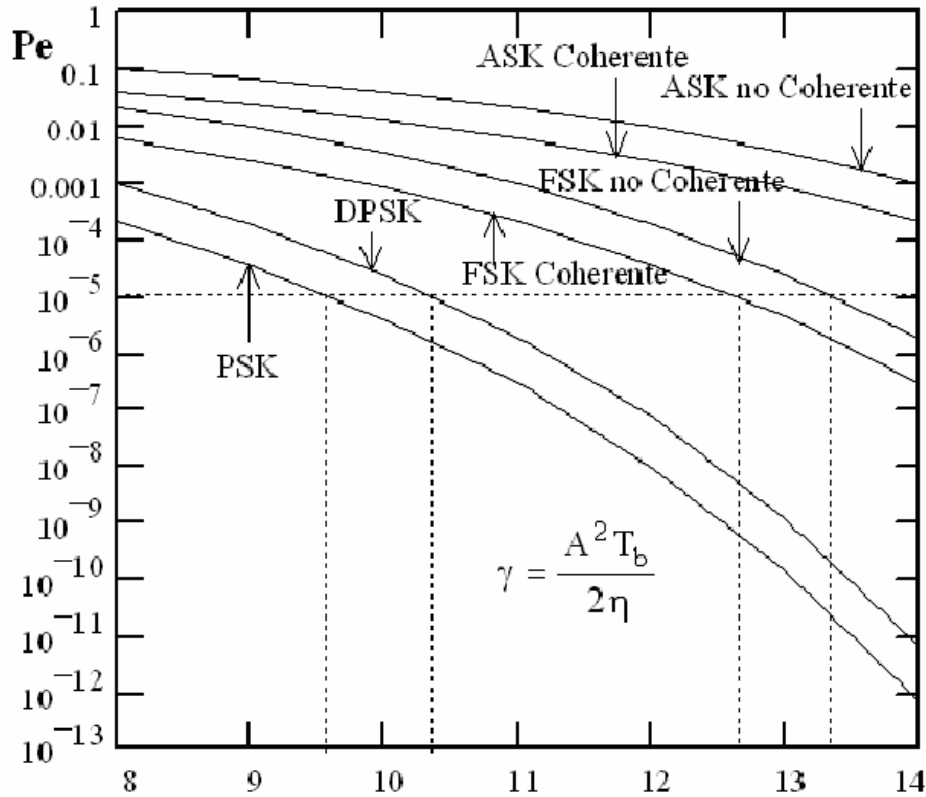


Fig. 5.78. Relación S/N Normalizada, γ , en dB

Las curvas de la Fig. 5.78 muestran, para un P_e dado, que el sistema PSK es el que requiere menor potencia, seguido de DPSK, FSK coherente, FSK no coherente, ASK coherente y ASK no coherente.

Si la comparación se hace en términos de la potencia promedio, entonces ASK y FSK tendrían las mismas características para un mismo P_e , pero como el diseño, y por supuesto el costo, de los equipos de transmisión y recepción dependen más bien de la potencia pico que de la potencia promedio, la comparación se hace respecto a la potencia pico requerida y es lo que se ilustra en la Fig. 5.78. Con este criterio, el sistema ASK casi no se emplea por la alta potencia pico que demanda y por los problemas de ajuste del umbral; el sistema FSK coherente tampoco se emplea debido más que todo a los problemas de sincronización de las portadoras utilizadas.

En la práctica, los sistemas más utilizados son entonces el PSK, el DPSK y el FSK no coherente. Tomando como referencia el sistema PSK, el sistema DPSK está a aproximadamente 1 dB por encima, mientras que el sistema FSK coherente lo está a aproximadamente 4 dB. Los modems comerciales a menudo trabajan con los tres tipos de modulación.

En cuanto a la instrumentación práctica de estos sistemas, los sistemas PSK, DPSK, FSK y ASK difieren muy poco en lo que se refiere al transmisor, pero en el receptor la complejidad dependerá de si se utiliza detección coherente o no coherente, pues la detección coherente es, sin duda, más complicada. Entre los sistemas no coherentes, el DPSK es menos complicado que el FSK no coherente. Por otro lado, si en el canal se produce “desvanecimiento (fading)” de la señal,

entonces hay que utilizar sistemas no coherentes debido a la gran dificultad para establecer la sincronización local en el receptor cuando hay perturbaciones en el canal. Sin embargo, si el transmisor tiene limitaciones severas en cuanto a la potencia disponible (caso de satélites, estaciones remotas y comunicaciones espaciales), deben utilizarse los sistemas coherentes ya que ellos demandan menor potencia que los no coherentes para una velocidad de señalización y probabilidad de error dadas. En un caso práctico, el diseñador del sistema debe ponderar cada situación y seleccionar un sistema de acuerdo con las especificaciones que se establezcan para el proyecto. Sin embargo, podemos establecer algunos criterios o guías para simplificar el procedimiento de selección. Estas guías son las siguientes:

- (a) Si el ancho de banda es el parámetro más importante, los sistemas DPSK y el PSK coherente son los más apropiados.
- (b) Si el consumo de potencia es lo más importante, los sistemas más apropiados son el PSK coherente y el DPSK.
- (c) Si la complejidad del equipo es un factor limitativo y las condiciones del canal lo permite, los sistemas no coherentes son preferibles a los coherentes.

Una fuente muy importante de información sobre los sistemas de modulación digital prácticos son los catálogos de los fabricantes de los equipos.

5.8. MODULACION DIGITAL M-aria MEDIANTE PORTADORA MODULADA

5.8.1. Introducción

La mayoría de los sistemas de transmisión de datos a baja velocidad opera bajo el principio de la codificación binaria. En tales casos, la frecuencia de señalización está limitada a un valor del orden del ancho de banda del canal de transmisión. Sin embargo, si el nivel de ruido o cualquiera otra distorsión de la señal lo permite, se puede transmitir M valores de amplitud, frecuencia o fase de una portadora sinusoidal. En esta forma, cada baudio puede transportar más de un bit de información, es decir, el rendimiento del canal aumenta. Las técnicas M-arias en ASK y PSK no aumentan el ancho de banda requerido, mientras que en FSK M-aria el ancho de banda requerido es mayor para un mismo incremento en el “empaquetamiento” de bits. Utilizando las técnicas M-arias se puede transmitir información, sobre un canal telefónico, hasta 14400 bps con una velocidad de modulación máxima de 2400 baudios. Velocidades de información superiores a 14400 se pueden lograr pero solamente mediante compresión de datos. Por ejemplo, el Módem UIT-T V.32 permite la transmisión, sobre un canal telefónico, a una velocidad de 9600 bps y con una velocidad de modulación máxima de 2400 baudios, pero con técnicas de compresión de datos puede llegar a 38400 bps y a 56 kbps con el Módem V.90. En los enlaces de microondas usualmente se utiliza PSK 4-ario y 8-ario; por ejemplo, se utiliza PSK 4-ario en el sistema SPADE para la transmisión de señales PCM mediante el satélite INTELSAT, con una velocidad de transmisión de 64 kbps y un ancho de banda de 38 kHz.

En la práctica pocas veces se encuentra un canal que tenga el ancho de banda exacto para transmitir una señal mediante técnicas binarias. Cuando el ancho de banda del canal es un factor limitativo, se utilizan las técnicas M-arias para transmitir la información sobre el canal pasabanda. Aún cuando el canal tenga un ancho de banda mayor que el requerido en modulación binaria, las técnicas M-arias se utilizan para mejorar la inmunidad al ruido aunque se aumente la demanda de potencia. En efecto, las técnicas PSK y DPSK M-arias conservan el ancho de banda aunque se aumenta el requerimiento de potencia, mientras que las técnicas FSK M-arias consumen menor potencia pero aumentan el ancho de banda requerido. Los sistemas más utilizados en la práctica son el PSK M-ario, el DPSK M-ario y el FSK M-ario de Banda Ancha.

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

En los sistemas binarios, hemos visto, el modulador procesa cada dígito binario de duración T_b asignándole una cualquiera de dos señales diferentes, siendo la velocidad de transmisión $V_i = 1/T_b$ bps. En los sistemas M-arios el mecanismo de modulación es similar. En efecto, el modulador M-ario procesa, en el mismo tiempo T_b , bloques de L dígitos binarios asignándole a cada bloque distinto una cualquiera de M señales diferentes posibles, de acuerdo con la relación $M = 2^L$. La velocidad de transmisión ha aumentado L veces, es decir, ahora es $V_{is} = L \cdot V_i$ bps, pero se habrá introducido algunas restricciones sobre la potencia y el ancho de banda de la señal transmitida, factores que dependerán del esquema de modulación utilizado, como veremos a continuación.

5.8.2. Modulación PSK M-aria

En la modulación PSK M-aria el modulador asigna a cada bloque distinto de L dígitos y duración T_s una señal sinusoidal de amplitud A , frecuencia f_c pero con un ángulo o desfase $\phi_m = 2\pi m/M$, para $m = 0, 1, 2, \dots, (M-1)$, donde $M = 2^L$. La duración de cada muestra de señal es también T_s y las M posibles formas de la señal sinusoidal son

$$s_m(t) = A \cos(2\pi f_c t - 2\pi m/M) \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots, (M-1) \quad (5.182a)$$

Como el ángulo ϕ_m se mantiene constante durante cada intervalo T_s , la señal $s_m(t)$ se puede escribir en la forma siguiente:

$$s_m(t) = X_m \cos(2\pi f_c t) + Y_m \sin(2\pi f_c t) \quad (5.182b)$$

$$\text{y en forma polar, } s_m(t) = \sqrt{X_m^2 + Y_m^2} \cos(2\pi f_c t - \arctg \frac{Y_m}{X_m}) \quad (5.182c)$$

donde $X_m = A \cos(\phi_m)$ y $Y_m = A \sin(\phi_m)$

Estas expresiones nos permiten expresar la señal $s_m(t)$ en forma fasorial, como se muestra en la Fig. 5.79(a). Si A es constante, el extremo del fasor ocupará M posiciones equidistantes en un círculo de radio A y a cada posición angular corresponderá un bloque de L dígitos, como se muestra en la Fig 5.80 para algunos valores de M y L .

La expresión (5.182b) tiene una forma canónica que nos permite utilizar un esquema de generación de señales M-PSK de la forma mostrada en la Fig. 5.79(b). El convertidor Serie/Paralelo forma bloques de L dígitos los cuales son aplicados a un codificador cuyas salidas son X_m y Y_m . Las salidas X_m y Y_m son variables analógicas cuyos valores dependen del valor del ángulo ϕ_m asignado, el cual, a su vez, depende de la secuencia particular de L dígitos a transmitir.

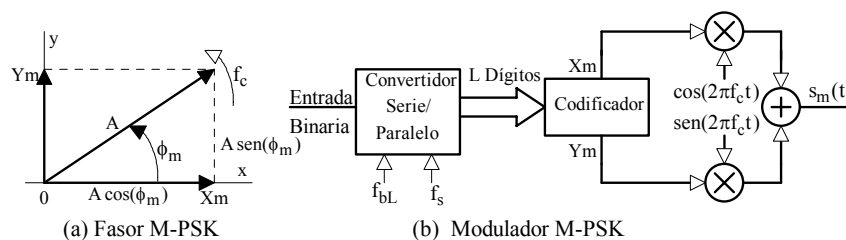


Fig. 5.79. Modulación M-PSK

Cuando $M > 8$, los ángulos ϕ_m se tornan muy pequeños lo que induce a errores en la recepción. En estos casos, se puede asignar bloques de L dígitos a combinaciones de amplitud y fase, es decir, dos fasores distintos pueden tener el mismo ángulo ϕ_m pero las amplitudes son diferentes. Este tipo de esquema, denominado modulación M-QAM, es muy utilizado en la práctica.

En la Fig. 5.80 se muestra el mecanismo de modulación M-aria, y en la Fig. 5.81 unas asignaciones de L dígitos a las M fases de señales sinusoidales representadas en forma fasorial. Estos tipos de diagrama se denominan “diagramas de Fresnel”, “patrones de fase” o “constelaciones”. La asignación mostrada es arbitraria, pero en la UIT-T estos patrones de fase han sido normalizados; por ejemplo, el patrón de fase del Módem UIT-T V.32 tiene la forma mostrada en la Fig. 5.81(d).

La señal PSK M-aria tendrá entonces la forma

$$x_{\text{PSKM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos(2\pi f_c t - \phi_m) \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) \quad (5.183)$$

La información va en la secuencia de fases aleatorias $\{\phi_m\}$. También,

$$T_s = LT_{\text{bL}} \text{ o } f_s = f_{\text{bL}} / L \text{ pues los bloques tienen } L \text{ dígitos de duración } T_{\text{bL}} \text{ cada uno.}$$

Desarrollando (5.183),

$$x_{\text{PSKM}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\cos(\phi_m) \cos(2\pi f_c t) + \text{sen}(\phi_m) \text{sen}(2\pi f_c t)] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

Dentro de un intervalo T_s , esta expresión se puede escribir en la misma forma que (5.182b), es decir,

$$x_{T_s}(t) = A [\cos(\phi_m) \cos(2\pi f_c t) + \text{sen}(\phi_m) \text{sen}(2\pi f_c t)]$$

El espectro de esta expresión puede determinarse pues ϕ_m es una constante en dicho intervalo. En este caso podemos demostrar que la densidad espectral de $x_{T_s}(t)$ es

$$S_{T_s}(f) = \frac{A^2}{4f_s} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{f_s}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{f_s}\right) \right] \quad (5.184)$$

La expresión (5.184) tiene la misma forma que la (5.176) calculada para PSK binario y es válida para $f_c \geq 2f_s$, lo cual se verifica en la mayoría de los casos prácticos. De acuerdo con los criterios ya aplicados en relación con el ancho de banda, el ancho de banda de la señal PSK M-aria es del orden de $2f_s$ a $3f_s$. Como $f_s = f_{\text{bL}} / L$, entonces la señal PSK M-aria permite una reducción del ancho de banda en un factor L , y aumentar L veces la velocidad de información por el mismo canal en el caso binario. Nótese que f_{bL} es la frecuencia de señalización a la entrada del modulador y f_s la correspondiente a la salida; sin embargo, cualquiera que sea el valor de L , el canal “verá” siempre la misma velocidad de modulación compatible con su ancho de banda, es decir, el canal “verá” siempre una señal sinusoidal de frecuencia f_c con cambios de fase cada T_s segundos. Esto equivale a decir que la velocidad de modulación en el canal es siempre la misma.

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

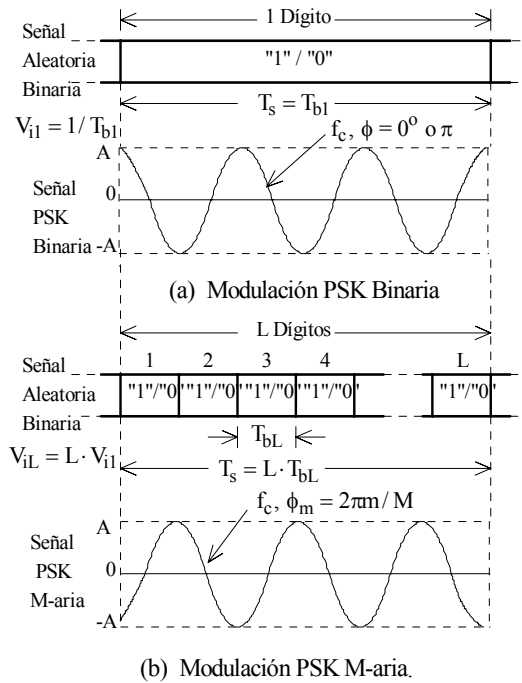


Fig. 5.80. Mecanismo de la Modulación PSK Binaria y M-aria.

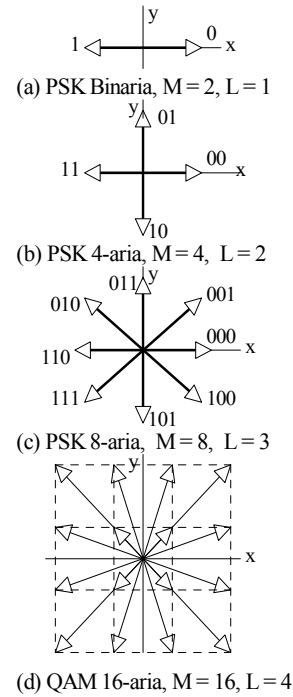


Fig. 5.81. Asignación de Fases en PSK M-aria

Puesto que $f_{bL} = Lf_s$, se puede definir la “relación S/N normalizada M-aria, γ_s ” en la forma

$$\gamma_s = \frac{A^2 T_s}{2\eta} = 2 \cdot \gamma \tag{5.185}$$

donde γ ya se definió en (5.152).

En general, para un sistema PSK M-ario la probabilidad de error P_e [Shanmugam, 1979] es

$$P_e = \text{erfc} \left[\sqrt{\gamma_s \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} \right] \tag{5.186}$$

Sería de interés comparar el sistema PSK M-ario con el sistema PSK binario para una misma probabilidad de error. En efecto, si B_B, P_B, B_M y P_M son los anchos de banda y potencias en binario y M-ario, respectivamente, podemos demostrar (Problema de Aplicación 5.54) que para una probabilidad de error de 10^{-4} ,

$$B_M = \frac{B_B}{L} \tag{5.187}$$

$$P_M = \frac{1,094}{L \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} \cdot P_B$$

En la Fig. 5.82 se grafica la probabilidad de error

P_e vs γ_s para algunos valores de M.

En la Fig. 5.83 se muestran las relaciones entre los anchos de banda y la potencia en PSK M-ario y PSK binario para una probabilidad de error de 10^{-4} .

Evidentemente, la mejor selección es aquella para $M = 4$, pues el ancho de banda se reduce a la mitad con un aumento de sólo el

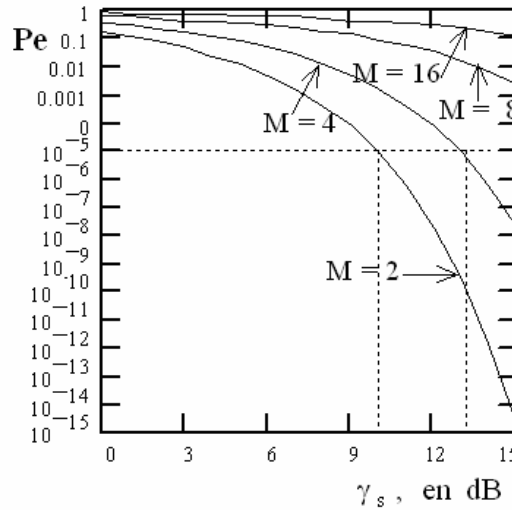


Fig. 5.82. Probabilidad de Error P_e vs γ_s en PSK M-ario.

9,4% (0,39 dB) en la potencia. Por esta razón el sistema PSK 4-ario, denominado también QPSK (“Q” de “quadrature” u ortogonal), se utiliza bastante en la práctica.

Para $M > 8$, los requerimientos de potencia se hacen excesivos y la modulación PSK M-aria no se emplea. En este caso se utiliza el esquema M-QAM, que es un esquema de modulación compuesta Amplitud-Fase; por ejemplo, en la Fig. 5.81(d) se muestra el diagrama de Fresnel del Modem UIT-T QAM V.32, que transmite a 9600 bps por un canal telefónico.

M	B_M	P_M	PM / PB en dB
4	$B_B / 2$	1,094 PB	0,39 dB
8	$B_B / 3$	2,49 PB	3,96 dB
16	$B_B / 4$	7,186 PB	8,57 dB
32	$B_B / 5$	22,78 PB	13,57 dB

Fig. 5.83. Comparación entre PSK M-ario y PSK Binario para $P_e = 10^{-4}$

Los sistemas PSK M-arios requieren una instrumentación mucho más compleja que los sistemas PSK binarios y por lo tanto su costo es mucho mayor. La selección final queda a juicio del diseñador del sistema y según la aplicación deseada.

5.8.3. Modulación DPSK M-aria

Los sistemas DPSK M-arios son muy similares a los estudiados en la Sección 5.8.2 y pueden ser representados con las mismas expresiones y gráficos, pues la diferencia básica entre PSK y DPSK es que este último ha experimentado un proceso previo de codificación diferencial.

En cuanto a la probabilidad de error, se ha demostrado [Lucky y otros, 1968] que en el sistema DPSK M-ario

$$P_e = \text{erfc}\left(\sqrt{2\gamma_s \sin^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)}\right) \tag{5.188}$$

En la Fig. 5.84 se grafica esta probabilidad en función de γ_s para algunos valores de M.

Cuando se compara la probabilidad de error en DPSK con la de PSK, se verifica que para altos valores de M el sistema DPSK M-ario requiere un aumento de potencia de aproximadamente 3 dB.

Específicamente, para $M = 4$ (QDPSK) este aumento es de 2,32 dB, un aumento del 71% solamente (Ver Problema de Aplicación 5.55), pero este aumento es compensado con la simplicidad de instrumentación del sistema QDPSK. Sin embargo, en la práctica se utilizan ambos sistemas de modulación, PSK y DPSK; por ejemplo, algunos módems comerciales transmiten a 2400 bps en QPSK (UIT-T V.22bis), a 1200 bps en QDPSK (UIT-T V.22) y poseen además un canal en FSK binario para trabajar a 300 bps (UIT-T V.21).

Las Figs. 5.79 a 5.81 se aplican también en DPSK M-aria.

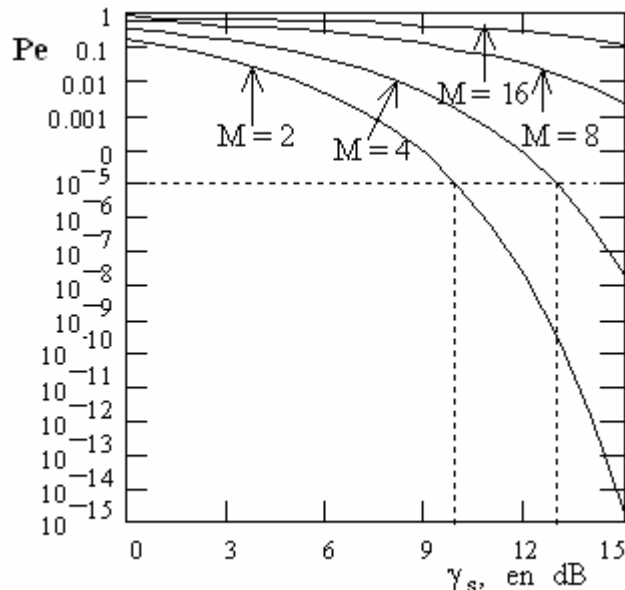
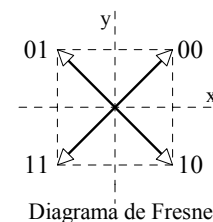


Fig. 5.84. Probabilidad de Error vs γ_s en DPSK M-ario.

♣ **Ejemplo 5.20**

Un sistema DPSK 4-ario está caracterizado por el diagrama de Fresnel de la figura.

La secuencia binaria de entrada al modulador tiene una velocidad de transmisión de 2400 bps. El ancho de banda del canal es de 3 kHz; la amplitud de la portadora es de 1 mV y la densidad espectral de ruido es de 10^{-11} W/Hz.



- (a) Calcule la relación S_i/N_i en el canal y la probabilidad de error
 - (b) Si la amplitud de la portadora se aumenta al doble, ¿Cuál será la nueva probabilidad de error y en cuantos dB aumenta la relación S_i/N_i ?
 - (c) Dibuje la señal modulada DPSK de salida correspondiente a la entrada **1 0 1 1 0 1 0 0** (el dígito de la izquierda es el LSB, el cual se transmite de primero)
- Suponga que $f_c = 1800$ Hz.

Solución:

(a) $V_i = 2400$ bps; $B_c = 3$ kHz; $A = 10^{-3}$ V; $M = 4$; $L = 2$; $\eta = 2 \times 10^{-11}$ W/Hz

En DPSK M-ario, $P_e = \text{erfc}\left(\sqrt{2\gamma_s \sin^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)}\right)$, donde $\gamma_s = \frac{A^2 T_s}{2\eta}$

$S_i = \frac{A^2}{2} = \frac{10^{-6}}{2}$ W; $N_i = \eta B_c = 3 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-11} = 6 \times 10^{-8}$ W

$\frac{S_i}{N_i} = 8,3333 = 9,208$ dB

$f_b = 2400$ Hz; $f_s = f_b/L = 2400/2 = 1200$ Hz ó 1200 bauds. La velocidad de modulación en el canal es también de 1200 baudios.

$$\gamma_s = \frac{10^{-6}}{2 \times 2 \times 10^{-11} \times 1200} = 20,8333; \quad \sqrt{2\gamma_s \sin^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)} = \sqrt{2 \times 20,8333 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 2.47$$

$$P_e = \text{erfc}(2.47) = 4,77 \times 10^{-4}$$

$$(b) A = 2 \times 10^{-3}; \quad \gamma_s = \frac{4 \times 10^{-6}}{2 \times 2 \times 10^{-11} \times 1200} = 83,33;$$

$$P_e = \text{erfc}\left(\sqrt{2 \times 83,3333 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right) = 2,812 \times 10^{-12}$$

El aumento en la relación Si/Ni es de $15,23 - 9,208 = 6,02$ dB. Esto equivale a un aumento de potencia de 4 veces.

$$(c) f_s = 1200 \text{ Hz}; \quad T_s = 8,333 \times 10^{-4} \text{ seg}; \quad f_c = 1800 \text{ Hz}$$

$$T_c = 5,556 \times 10^{-4} \text{ seg}; \quad T_s = 1,5 T_c$$

La señal M-DPSK tiene la forma $s_m(t) = a \cos(2\pi f_c t - \phi_m)$, y se supone que la señal de entrada **1 0 1 1 0 1 0 0** está ya codificada diferencialmente. Para su codificación DPSK y como $L = 2$, los dígitos o bits se toman de dos en dos.

De acuerdo con el diagrama de Fresnel, la codificación para la señal modulada de salida será:

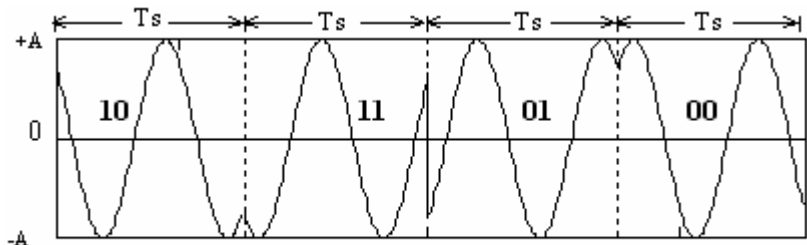
$$\text{Para la dupla (dibit): } 10 \rightarrow \phi_1 = -45^\circ; \quad s_1(t) = A \cos(\omega_c t + 45^\circ)$$

$$\text{“ “ “ (dibit): } 11 \rightarrow \phi_2 = -135^\circ; \quad s_2(t) = A \cos(\omega_c t + 135^\circ)$$

$$\text{“ “ “ (dibit): } 01 \rightarrow \phi_3 = +135^\circ; \quad s_3(t) = A \cos(\omega_c t - 135^\circ)$$

$$\text{“ “ “ (dibit): } 00 \rightarrow \phi_4 = +45^\circ; \quad s_4(t) = A \cos(\omega_c t - 45^\circ)$$

La señal modulada DPSK 4-aria tendrá la forma siguiente



Señal Modulada DPSK 4-aria

5.8.4. Modulación FSK M-aria de Banda Ancha

En la modulación FSK M-aria, a cada bloque diferente de L dígitos binarios y duración T_s se le asigna una señal sinusoidal de la forma $s_i(t) = A \cos(2\pi f_i t)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, M$, con $M = 2^L$. La duración de cada muestra de señal $s_i(t)$ es también de T_s segundos, donde $f_s = 1/T_s = f_b / L$ es la frecuencia de señalización a la salida del modulador, siendo f_b la frecuencia de señalización a la entrada del modulador. Si $2f_d$ es la separación entre dos frecuencias adyacentes, entonces la frecuencia instantánea en un intervalo T_s es $f_i = f_c + (2i - 1 - M)f_d$, donde f_c es la frecuencia de la portadora sin modular [Benedetto y otros, 1987].

En la Fig. 5.85 se muestra el mecanismo de modulación FSK M-aria y en la Fig. 5.86 la distribución o asignación de las frecuencias de portadora para algunos valores de M y L .

La señal FSK M-aria tendrá entonces la forma

$$x_{\text{FSKM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos\{2\pi[f_c + (2i - 1 - M)f_d]t\} \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) \quad (5.189)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, M$

El ancho de banda mínimo de la señal $x_{\text{FSKM}}(t)$ se puede estimar en la forma

$$B_{\min} = (f_M + f_d) - (f_1 - f_d) = 2Mf_d \quad (5.190)$$

donde f_M y f_1 son las frecuencias máxima y mínima, respectivamente, de la señal FSK M-aria.

Si la separación mínima entre dos frecuencias adyacentes se hace igual a la frecuencia de señalización en el canal, es decir, si $2f_d = f_s$ (separación ortogonal), entonces el ancho de banda mínimo en el canal será

$$B_{\min} = Mf_s = \frac{Mf_b}{L} \quad (5.191)$$

donde f_b es la velocidad de señalización o de modulación a la entrada del modulador FSK M-ario.

La frecuencia mínima f_1 vendrá dada por $f_1 = f_c - (M - 1)f_d = f_c - (M - 1)\frac{f_b}{2L}$ y cualquiera frecuencia de orden j será $f_j = f_1 + (j - 1)\frac{f_b}{L}$, para $j = 2, 3, 4, \dots, M$. La frecuencia mínima f_1 deberá ser igual o mayor que f_s , de modo que se puede tomar

$$f_1 = kf_s = k\frac{f_b}{L} \quad \text{para } k \text{ entero y } k \geq 1 \quad (5.192)$$

En este caso la frecuencia de portadora será

$$f_c = (2k + M - 1)\frac{f_b}{2L} \quad (5.193)$$

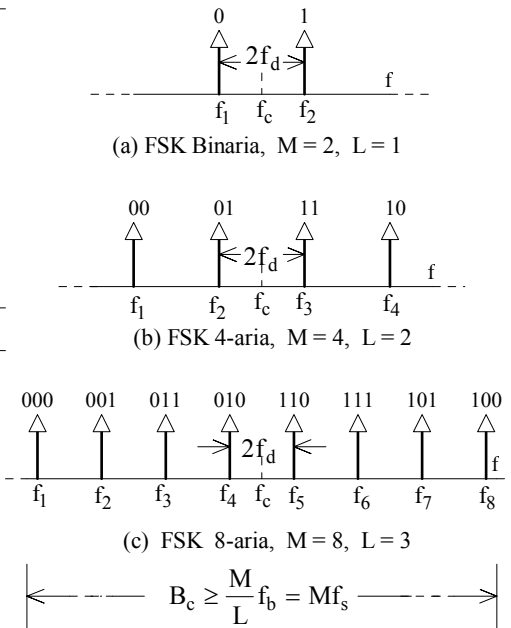
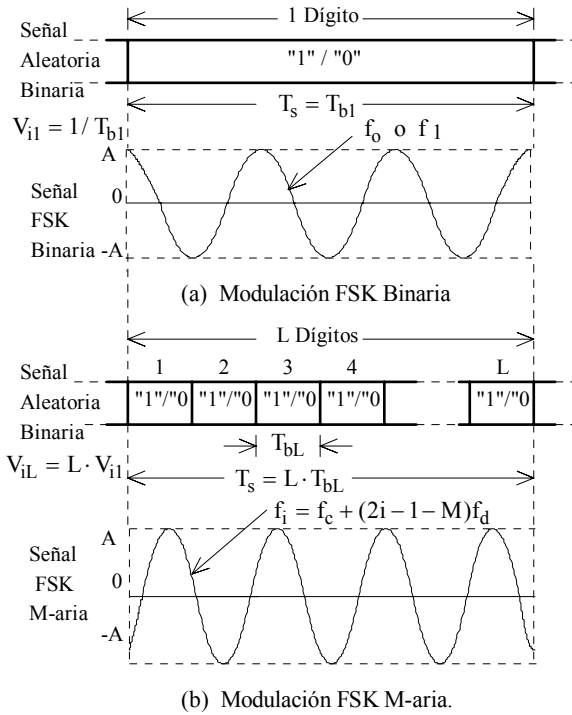


Fig. 5.85. Mecanismo de la Modulación FSK Binaria y M-aria. Fig.5.86. Asignación de Frecuencias en FSK M-aria

Por ejemplo, si $M = 8$, $L = 3$, $f_b = 2400$ bps y $k = 1$,

$$f_d = \frac{f_s}{2} = \frac{f_b}{2L} = \frac{2400}{6} = 400 \text{ Hz}; \quad 2f_d = 800 \text{ Hz}; \quad f_s = \frac{2400}{3} = 800 \text{ Hz}$$

$$f_c = (2 + 8 - 1) \frac{2400}{6} = 3600 \text{ Hz}; \quad f_1 = \frac{2400}{3} = 800 \text{ Hz};$$

$$f_8 = 800 + 7 \frac{2400}{3} = 6400 \text{ Hz}$$

$$B_{\min} = \frac{8 \times 2400}{3} = 6400 \text{ Hz}$$

Ortogonalidad de Señales FSK M-aria

El conjunto de señales $s_i(t)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, M$ es ortogonal, es decir, se verifica que

$$\int_0^{T_s} s_i(t) \cdot s_j(t) \cdot dt = \begin{cases} \frac{A^2 T_s}{2} = E_s & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (5.194)$$

Las señales $s_i(t)$ son ortogonales en el intervalo T_s , tienen duración T_s y todas tienen la misma energía E_s . La ortogonalidad exige también que la separación entre frecuencias adyacentes sea tal que $2f_d = f_s$. Por lo tanto, la separación mínima entre dos frecuencias adyacentes será igual

a $f_s = f_b / L$, condición que hemos tomado para estimar el ancho de banda mínimo de la señal FSK M-aria, expresión (5.191).

La probabilidad de error P_e en FSK M-aria ha sido calculada [Lucky y otros, 1968; Benedetto y otros, 1987], pero la ecuación de P_e es una ecuación integral de muy difícil resolución. En la Fig. 5.87 se muestra la forma aproximada de la Probabilidad de Error vs γ_s para algunos valores de M . Se demuestra [Lucky y otros, 1968] que para grandes valores de γ_s las curvas tienden a juntarse indicando que con solamente un aumento de 3 dB en la potencia se puede aumentar el número de niveles de 2 a 1024. Sin embargo, el precio que hay que pagar es el aumento en el ancho de banda. En efecto, mientras que en un sistema FSK binario el ancho de banda mínimo es $3f_b$, en un sistema FSK M-ario el ancho de banda mínimo es Mf_b / L . Una desventaja adicional es la creciente complejidad de los equipos de transmisión y recepción tanto en recepción coherente como no coherente, aunque la recepción coherente casi no se utiliza.

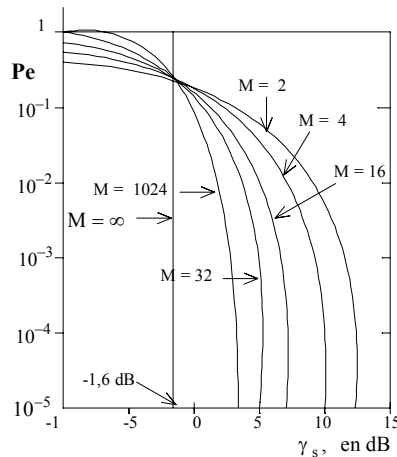


Fig. 5.87. Probabilidad de Error P_e vs γ_s en FSK M-aria.

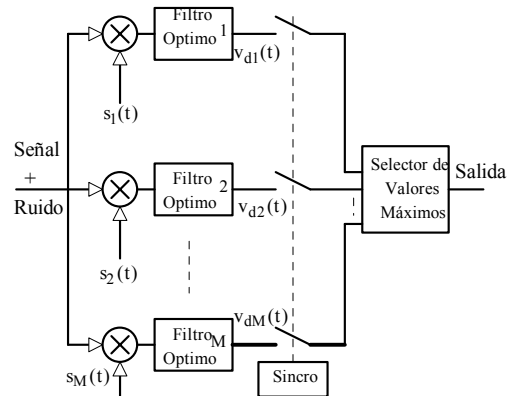


Fig. 5.88. Receptor Óptimo FSK M-ario Coherente.

El receptor óptimo coherente para el conjunto ortogonal de señales consiste en una batería de M filtros óptimos, como se muestra en la Fig. 5.88. En el receptor se muestrea las salidas de los filtros en los instantes nT_s y el elemento de decisión selecciona cual señal $s_j(t)$ estaba presente en la entrada del filtro j en el intervalo de señalización n -ésimo.

En general, la modulación M-aria proporciona los medios para intercambiar ancho de banda por relación S/N , es decir, se puede aumentar la velocidad de transmisión en un factor $L = \log_2 M$ pero pagando un precio adecuado en términos de ancho de banda o de relación S/N . Por ejemplo, en PSK o DPSK M-aria, podemos mantener fijo el ancho de banda de transmisión pero la potencia transmitida aumenta en forma exponencial con L ; asimismo, en FSK M-aria la potencia transmitida es prácticamente independiente de L , pero el ancho de banda aumenta también en forma exponencial con L . En consecuencia, se puede utilizar PSK M-aria o DPSK M-aria cuando el ancho de banda es limitado (como en los canales telefónicos), y FSK M-aria cuando la potencia es el factor limitativo (como en las comunicaciones espaciales o por satélites). Por consiguiente, un aumento en la velocidad de transmisión de la información se puede lograr mediante un compromiso entre el ancho de banda y la relación S/N . Este compromiso, que ya hemos encontrado también en PPM, nos permite disponer de una gran flexibilidad de intercambio entre diferentes parámetros para adecuar una fuente de información dada a un canal determinado.

5.8.5. Acceso Múltiple por División de Tiempo (TDMA)

En algunos sistemas de comunicación muchos usuarios comparten un medio de transmisión común y el acceso a ese medio debe arbitrarse en alguna forma. Esta es una situación que se presenta en los sistemas satelitales en los cuales múltiples estaciones terrenas utilizan un satélite como repetidora y el acceso a ese satélite debe ser muy bien controlado para evitar colisiones e interferencias mutuas. Para acceder al satélite se utilizan tres técnicas denominadas “métodos de acceso múltiple”:

1. Acceso Múltiple por División de Tiempo (Time-Division Multiple Access, TDMA)
2. Acceso Múltiple por División de Código (Code-Division Multiple Access, CDMA)
3. Acceso Múltiple por División de Frecuencia (Frequency-Division Multiple Access, FDMA).

La técnica CDMA la veremos más adelante, Sección 5.9.2, mientras que la técnica FDMA la estudiaremos en detalle en el Capítulo VI.

En el sistema TDMA, basado en los principios TDM, a cada estación terrena se le asigna un intervalo o ranura de tiempo para que ella transmita información; esta asignación la efectúa una estación terrena de referencia que controla la temporización y la sincronización de las estaciones presentes en el sistema. Durante ese intervalo, una estación utiliza todo el ancho de banda del repetidor o “transpondedor” del satélite para enviar una trama que contiene la información a transmitir. En el satélite se recibe una multitrama TDMA que contiene las tramas de todas las estaciones terrenas. Esta multitrama TDMA se regenera en el satélite y se retransmite a una frecuencia de portadora diferente de la frecuencia de la portadora de entrada. En la práctica a estas frecuencias se las denomina “frecuencias de subida” y “frecuencias de bajada”, respectivamente.

Consideremos entonces un sistema satelital formado por un satélite y seis estaciones terrenas A, B, C, D, E y F ; una cualquiera de estas estaciones puede actuar como estación de referencia. La multitrama TDMA tiene la forma mostrada en la Fig. 5.89, parte (a).

En el ejemplo de la Fig. 5.89, la estación C está enviando información a las estaciones A, E y F. La multitrama TDMA, parte (a), que llega al satélite contiene las tramas de todas las estaciones que están transmitiendo. En la parte (b) se muestra la estructura de la trama transmitida por la Estación C. Esta trama consta de dos partes: un preámbulo, y los varios campos que contienen la información para las diferentes estaciones de destino. El preámbulo, parte (c), incluye un intervalo de guarda, un campo que contiene caracteres para activar los circuitos de sincronización de portadora y señalización, y un campo donde va la dirección o identificación de la estación llamante y las direcciones de las estaciones llamadas. Cada estación escucha toda la multitrama pero solamente copia la información a ella dirigida. En este caso se dice que el sistema es radiante o difusor (“broadcast”).

Los sistemas TDMA trabajan generalmente en QPSK y a velocidades hasta 120 Mbps; se emplean en la transmisión de video digital, televisión de alta definición y en la transmisión de cientos de miles de canales de voz de 64 kbps. Las técnicas TDMA se utilizan actualmente en los satélites INTELSAT VI y VSAT, y en telefonía celular.

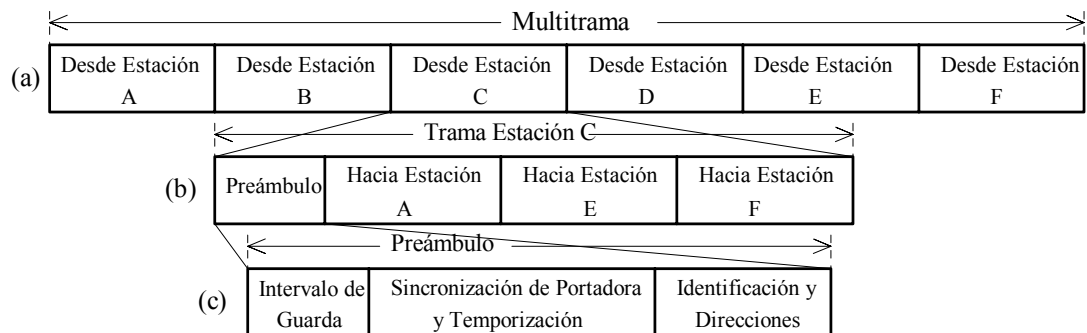


Fig. 5.89. Formato TDMA Típico

5.9. TRANSMISION DE SEÑALES DIGITALES MEDIANTE DISPERSION DEL ESPECTRO (SPREAD SPECTRUM)

5.9.1. Introducción

En los sistemas de comunicación estudiados hasta ahora los criterios de comportamiento se expresaban en función de la utilización eficiente del ancho de banda y de la relación Señal/Ruido en el canal. Sin embargo, en algunas aplicaciones hay que considerar aspectos tales como la capacidad o robustez contra interferencias (espontáneas o maliciosas), capacidad para acceso múltiple a un medio y baja probabilidad de interceptación, aspectos que son de gran importancia en las aplicaciones militares y que ahora se han llevado a aplicaciones en el dominio civil. Estos objetivos se pueden optimizar aplicando las técnicas del espectro disperso (spread spectrum, SS).

Existen varias técnicas de dispersión del espectro. Para ser considerado como un sistema SS, el sistema debe satisfacer los criterios siguientes:

1. Que el ancho de banda de la señal transmitida sea mucho mayor que el ancho de banda de la señal mensaje $m(t)$.
2. Que la dispersión del ancho de banda de la señal transmitida sea producida por una señal $s(t)$, denominada "señal dispersora", independiente de $m(t)$, y que la señal $s(t)$ se pueda reproducir en el receptor a fin de extraer la señal mensaje $m(t)$ de la señal transmitida.

Una señal dispersora que permite cumplir con estos dos criterios es justamente la señal pseudoaleatoria o secuencia PN, cuyos principios y mecanismo de generación se dieron en el Capítulo III, Sección 3.9.3.

Los sistemas SS de más aplicación en la práctica son:

1. Sistemas SS de Secuencia Directa (Direct Sequence Spread Spectrum, DSSS).
2. Sistemas SS mediante Conmutación de Frecuencias (Frequency Hopping Spread Spectrum, FHSS).

Existen también otras técnicas híbridas que incluyen tanto DS como FH, pero no las trataremos aquí.

5.9.2. Sistemas SS de Secuencia Directa

En los sistemas de espectro disperso de secuencia directa (DSSS), el espectro de la señal mensaje original PCM $m(t)$ se dispersa mediante la utilización de una secuencia PN $s(t)$. La señal dispersada modula en PSK a una portadora de frecuencia f_c y luego se transmite. En el extremo receptor se llevan a cabo las operaciones inversas correspondientes para la recuperación de la señal mensaje $m(t)$.

Consideremos entonces el modelo de un sistema PSK/DSSS mostrado en la Fig. 5.90.

La señal $m(t)$ es una secuencia PCM en banda de base que suponemos bipolar, NRZ y de amplitudes $\pm A$, de la forma mostrada en la Fig. 3.23 y cuya densidad espectral viene dada por (3.175); la señal $s(t)$ es una secuencia pseudoaleatoria de la forma mostrada en la Fig. 3.27 y cuya densidad espectral viene dada por (3.183).

De la Fig. 5.90, $x_{sp}(t) = m(t) \cdot s(t)$

donde, de (3.175) con $A^2 T_b = 1$, $m(t) \Rightarrow S_m(f) = \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_b}\right)$ (5.195)

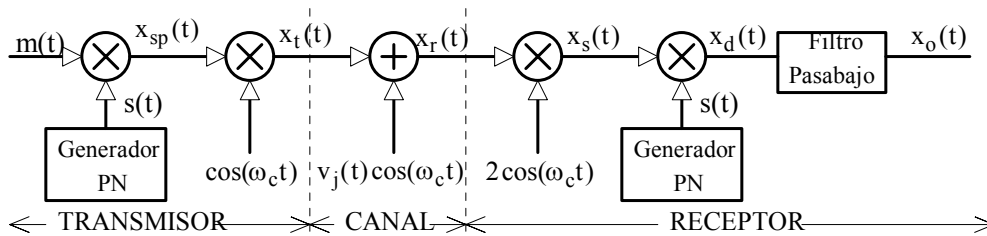


Fig. 5.90. Modelo de un Sistema de Espectro Disperso en Secuencia Directa (DSSS)

La señal dispersa $x_{sp}(t)$ tiene la forma de una secuencia aleatoria bipolar NRZ que contiene la información, cuya densidad espectral se muestra en la Fig. 3.31 y cuyo ancho de banda es $B \approx N f_b$. Si la señal $x_{sp}(t)$ se multiplica por $\cos(\omega_c t)$, la señal resultante $x_t(t)$, que se transmite, será una señal PSK de frecuencia de portadora f_c .

Durante la transmisión por el canal, la señal transmitida PSK/DSSS es perturbada por una señal interferente $v_j(t)$ centrada en la frecuencia de portadora. Vamos a suponer que esta interferencia es intencional (jamming) y en el caso más desfavorable cuando su ancho de banda es igual al ancho de banda de la señal útil $m(t)$. Supondremos también que la potencia de ruido en el canal es despreciable en relación con la potencia de la señal interferente. Entonces,

$$x_t(t) = m(t) \cdot s(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

La señal recibida en el receptor será

$$x_r(t) = m(t) \cdot s(t) \cdot \cos(\omega_c t) + v_j(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

La señal $x_r(t)$ es demodulada mediante multiplicación por $2 \cos(\omega_c t)$; por lo tanto,

$$x_s(t) = x_r(t) 2 \cos(\omega_c t) = 2m(t) \cdot s(t) \cdot \cos^2(\omega_c t) + 2v_j(t) \cdot \cos^2(\omega_c t)$$

A esta señal se le aplica la operación de dispersión, resultando en

$$x_d(t) = x_s(t) \cdot s(t) = 2m(t) \cdot s^2(t) \cdot \cos^2(\omega_c t) + 2v_j(t) \cdot s(t) \cdot \cos^2(\omega_c t)$$

pero como $s^2(t) = (\pm 1)^2 = 1$, entonces

$$x_d(t) = m(t) + s(t) \cdot v_j(t) + [m(t) + v_j(t) \cdot s(t)] \cdot \cos(2\omega_c t)$$

Esta es la señal a la entrada del filtro pasabajo. El término de alta frecuencia centrado en $\pm 2f_c$ es eliminado, así como todas las componentes frecuenciales del producto $s(t) \cdot v_j(t)$ superiores a f_b , que es el ancho de banda del filtro. A la salida del filtro se tendrá entonces

$$x_o(t) = m(t) + [s(t) \cdot v_j(t)]_{oj}$$

donde $[s(t) \cdot v_j(t)]_{oj}$ es la salida del espectro de $s(t) \cdot v_j(t)$ para $|f| \leq f_b$, y que representa la interferencia a la salida.

La densidad espectral de potencia a la salida del filtro pasabajo será

$$S_o(f) = S_m(f) + S_{oj}(f)$$

donde $S_{oj}(f)$ es la densidad espectral de $[s(t) \cdot v_j(t)]_{oj}$.

Para cuantificar el efecto de la interferencia, supongamos que la densidad espectral $S_j(f)$ de la señal interferente es

$$S_j(f) = A_j^2 \Pi\left(\frac{f}{2f_b}\right) = A_j^2 \quad \text{para } |f| \leq f_b \text{ con } A_j \ll 1 \quad (5.195)$$

Definamos entonces, $s(t) \cdot v_j(t) \Rightarrow S_{jd}(f) = S_s(f) * S_j(f)$

De (3.177) y (5.195), este producto de convolución resulta en

$$S_{jd}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' \frac{(N+1)A_j^2}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f - nf_o}{2f_b}\right) + \frac{A_j^2}{N^2} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_b}\right) \quad (5.196)$$

donde $\sum_{n=-\infty}^{\infty} '$ indica que la sumatoria no incluye el valor $n = 0$.

Entonces, $S_{oj}(f) = S_{jd}(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_b}\right)$

De (5.196), podemos demostrar que

$$S_{oj}(f) = A_j^2 \left[\frac{1}{N^2} + \frac{N+1}{\pi^2} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_b}\right) = \frac{\eta_j}{2} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_b}\right) \quad (5.197)$$

donde $\frac{\eta_j}{2} = A_j^2 \left[\frac{1}{N^2} + \frac{N+1}{\pi^2} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \right]$

es la amplitud de la densidad espectral de la señal interferente a la salida.

$$\text{Nótese que para } N \gg 1, \left[\frac{1}{N^2} + \frac{N+1}{\pi^2} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \right] \approx \frac{1}{N} \text{ y } \eta_j = \frac{2A_j^2}{N} \quad (5.198)$$

En la Fig. 5.91 se grafica $S_m(f)$ y $S_{oj}(f)$ para $N = 1000$; $f_b = 9600$ Hz y $A_j = 1$. (La señal $S_{oj}(f)$ ha sido multiplicada por 100 para poderla observar en el gráfico).

Se puede determinar la ganancia “Potencia Util/Potencia Interferente” para demostrar la robustez del sistema DSSS contra las interferencias espontáneas o maliciosas. Dentro de la banda de paso, la Ganancia DS será

$$G_{DS} = \frac{\text{Potencia Util de Salida}}{\text{Potencia Interferente}} = \frac{P_s}{P_j}$$

$$G_{DS} = \frac{P_s}{P_j} = \frac{\int_0^{f_b} S_m(f) df}{\int_0^{f_b} S_{oj}(f) df} = \frac{\int_0^{f_b} A^2 T_b \sin^2\left(\frac{f}{f_b}\right) df}{\int_0^{f_b} A_j^2 \left[\frac{1}{N^2} + \frac{N+1}{\pi^2} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \right] df}$$

$$\text{Cuando } N \gg 1, P_s = 0,90253A^2 \text{ y } P_j = 2A_j^2 \frac{f_b}{N}$$

$$\text{De donde, } G_{DS} = \frac{P_s}{P_j} = 0,4513 \left(\frac{A}{A_j}\right)^2 \frac{N}{f_b}$$

La ganancia es directamente proporcional a N . En la práctica, el factor $[A/A_j]^2$ es muy grande ($>10^4$). Por ejemplo, cuando $N = 1000$, $f_b = 9600$ Hz y $(A/A_j) = 100$, $G_{DS} = 26,72$ dB

Puede observarse que en este caso la señal interferente está a 26,72 dB (470 veces) por debajo de la señal útil. Esto significa que para que la fuente interferente pudiera tener alguna influencia en la recepción, su potencia debería aumentarse por lo menos en 470 veces, lo cual es prácticamente imposible por lo costoso que sería. Esta característica del sistema DSSS ha sido muy utilizada en los sistemas de comunicación militares contra las interferencias maliciosas (jamming).

La probabilidad de error en este sistema es la misma considerada en la modulación binaria de fase, Sección 5.7.4, es decir, la probabilidad de error en el sistema PSK/DSSS viene dada por (5.171). Como hemos supuesto que el ruido interferente es mucho mayor que el ruido en el canal ($\eta_j \gg \eta$), la probabilidad de error será

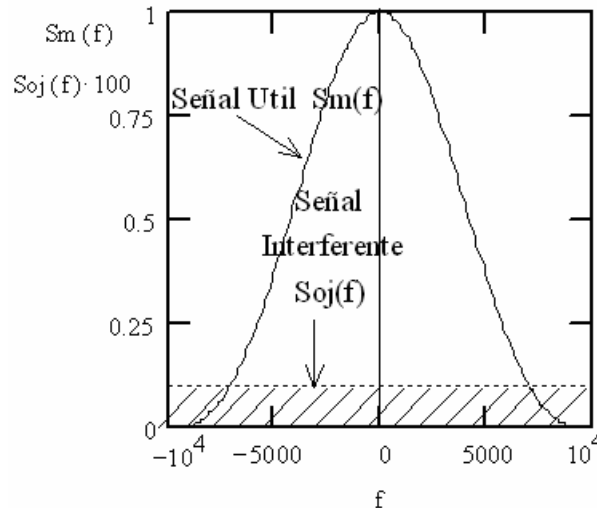


Fig. 5.91. Densidades Espectrales de Salida.

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2}{2\eta_j f_b}} \right) \quad (5.199)$$

Como η_j depende de la ganancia de procesamiento N , vemos que la probabilidad de error dependerá también de N . En efecto, reemplazando (5.198) en (5.199), la probabilidad de error en PSK/DSSS es

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{1}{4} \frac{A^2}{A_j^2 \left[\frac{1}{N^2} + \frac{N+1}{\pi^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{N} \right) \right] f_b}} \right) \quad (5.200)$$

Puesto que $P_s = 0,90253A^2$ y $P_j = 2A_j^2 \frac{f_b}{N} = \frac{P_i}{N}$, donde P_i es la potencia de la fuente interferente, es decir, $P_i = 2f_b A_j^2$, entonces, para $N \gg 1$, la probabilidad de error P_e en PSK/DSSS se puede reducir a la forma más sencilla

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{0,544N}{P_i/P_s}} \right) \quad \text{para } N \gg 1 \quad (5.201)$$

A la relación P_i/P_s generalmente se la conoce con el nombre de “margen de interferencia” y es una medida de la gravedad de la interferencia; en efecto, cuanto más alta es esta relación, más alta es la severidad de la interferencia y más alta la probabilidad de error.

La expresión (5.201) nos permite observar el efecto de la ganancia de procesamiento N sobre la probabilidad de error para diferentes valores del margen de interferencia. En efecto, en la Fig. 5.92 se muestra la variación de la probabilidad P_e vs N para diferentes valores del margen de interferencia.

La expresión (5.201) y la Fig. 5.92 demuestran la efectividad del sistema DSSS en la supresión de interferencias tanto espontáneas como maliciosas.

Es lógico que si la relación P_i/P_s es alta, la probabilidad de error será alta también; pero esta probabilidad de error se puede disminuir aumentando la ganancia de procesamiento N , como se puede observar en la Fig. 5.92. Por ejemplo, para $(P_i/P_s) = 10$, valores de N superiores a 164 mantendrán la probabilidad de error por debajo de 10^{-5} .

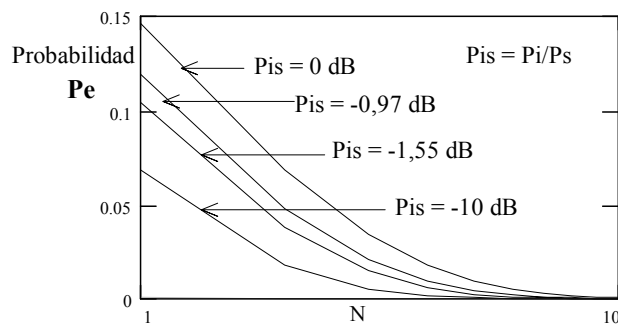


Fig. 5.92. Probabilidad P_e vs N en PSK/DSSS

Acceso Múltiple por División de Código (CDMA)

Una de las principales aplicaciones del sistema DSSS en las comunicaciones, es la posibilidad de utilización de la misma banda de frecuencias para múltiples usuarios que están transmitiendo simultáneamente. Esta es la forma de acceso múltiple denominada “Acceso Múltiple por División de Código (CDMA)” que mencionamos en la Sección 5.8.5.

La idea clave en el sistema CDMA es la de que a cada usuario se le asigna una secuencia PN diferente, y aunque todos los usuarios transmiten simultáneamente por la misma banda de frecuencias, un usuario particular puede extraer de la señal compuesta transmitida la señal a él dirigida utilizando la secuencia PN apropiada.

Supongamos que hay M usuarios que transmiten en un sistema PSK/DSSS/CDMA; cada usuario transmite una señal $m_i(t)$, a una frecuencia de portadora f_c común y con una secuencia PN particular $s_i(t)$ con $i = 1, 2, 3, \dots, M$. La potencia de las señales $m_i(t)$ es la misma para todas. Vamos a suponer también que la potencia de ruido en el canal es despreciable en comparación con la potencia de las señales $m_i(t)$. El esquema de transmisión es el mismo de la Fig. 5.88.

La señal compuesta producida por los M transmisores en la misma banda de frecuencias es

$$x(t) = \sum_{i=1}^M m_i(t) \cdot s_i(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Esta señal llega a los M receptores donde es multiplicada por la portadora $2 \cos(2\pi f_c t)$. La señal $x_r(t)$ de entrada en un receptor dado será la correspondiente a $(M-1)$ transmisores, entonces,

$$x_s(t) = x_r(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) = \sum_{i=1}^{M-1} 2 \cdot m_i(t) \cdot s_i(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t)$$

Esta señal aparece en la entrada del multiplicador de la secuencia PN de todos los receptores. En el receptor k esta señal se multiplica por su secuencia particular $s_k(t)$ y la salida correspondiente será

$$x_{dk}(t) = x_s(t) \cdot s_k(t) = \sum_{i=1}^{M-1} 2 \cdot m_i(t) \cdot s_i(t) \cdot s_k(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t)$$

En el receptor k se verifica que $s_i(t) = s_k(t)$, de modo que

$$x_{dk}(t) = 2 \cdot m_k(t) \cdot s_k^2(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t) + \sum_{i=1}^{M-2} 2 \cdot m_i(t) \cdot s_i(t) \cdot s_k(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t) \quad i \neq k$$

Esta señal se pasa por el filtro pasabajo de salida que elimina los términos en $\pm 2f_c$, y como $s_k^2(t) = (\pm 1)^2 = 1$, entonces a la salida del filtro pasabajo se tiene

$$x_{ok}(t) = m_k(t) + \sum_{i=1}^{M-2} m_i(t) \cdot s_i(t) \cdot s_k(t) \quad i \neq k \quad (5.202)$$

El primer término de $x_{ok}(t)$ es la señal deseada, mientras que el segundo término se puede considerar como ruido. Como suponemos que las secuencias PN están sincronizadas aunque no son las mismas, entonces el producto $s_i(t) \cdot s_k(t)$ es otra secuencia PN, por ejemplo, $s_i(t)$. La potencia del término interferente es simplemente la suma de las potencias interferentes producidas por las otras $(M-2)$ señales transmitidas. Si $P_i = P_s$ es la potencia de cada señal interferente, entonces la potencia total interferente será

$$P_{ij} = (M - 2) \cdot P_j = (M - 2) \cdot \frac{P_i}{N} = (M - 2) \frac{P_s}{N} \quad (5.203)$$

De (5.201), la probabilidad de error en el receptor k es

$$P_{e,k} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{0,554 \frac{P_s}{P_{ij}}} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{0,554 \frac{N}{M-2}} \right] \quad (5.204)$$

La probabilidad de error en CDMA depende entonces del número de usuarios M en el sistema. En efecto, cuanto mayor es el número de usuarios, mayor será la probabilidad de error. Por ejemplo, para una ganancia de procesamiento $N = 1000$, se verifica que para que $P_{e,k} < 10^{-5}$ el número de usuarios debe ser $M < 120$. Se puede aumentar el número de usuarios pero a costas de un aumento en la probabilidad de error, es decir, se produce una degradación en la calidad de la transmisión. Esto se puede observar en la Fig. 5.93, donde se muestra la variación de la probabilidad de error en función de M para $N = 256, 512, 1024$ y 2048 .

En la práctica, el sistema CDMA demanda un estricto control de la potencia de salida de cada transmisor a fin de asegurar que la señal de cada transmisor llegue a la antena receptora aproximadamente con la misma potencia. En efecto, si una o más estaciones transmiten con altas potencias, la calidad de la señal en todas las estaciones se degrada rápidamente. El lector puede verificar este fenómeno haciendo los ajustes necesarios en las expresiones (5.203) y (5.204).

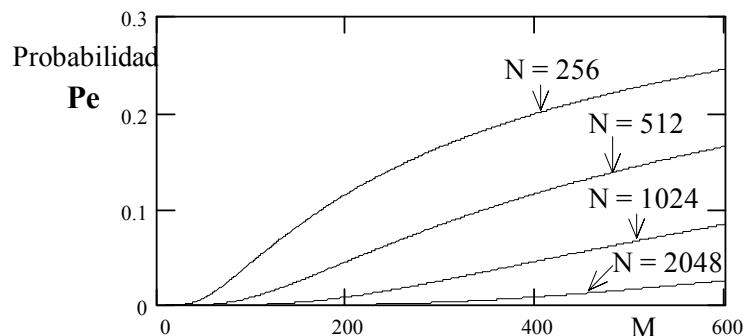


Fig. 5.93. Probabilidad de Error en CDMA

Sería interesante comparar el sistema CDMA en relación con el sistema TDMA, ya estudiado. En el sistema TDMA el número de usuarios está restringido por el número de ranuras disponibles en el sistema. Una vez que todas las ranuras de tiempo han sido asignadas, un aumento en el número de usuarios sólo se puede lograr rediseñando el sistema. En CDMA este problema no se presenta; se puede agregar los usuarios que se quiera, pues el comportamiento del sistema experimentará solamente una degradación de acuerdo con la expresión (5.204).

El sistema CDMA se aplica en telefonía celular, en sistemas móviles por satélite, en sistemas de localización (global positional systems, GPS), en sistemas PCS (Personal Communication Systems) y en redes de área local inalámbricas.

5.9.3 Dispersión del Espectro mediante Conmutación de Frecuencias (FHSS)

En los sistemas FHSS la señal digital a transmitir, generalmente FSK o DPSK, vuelve a modular una portadora cuya frecuencia cambia constantemente de acuerdo con una secuencia PN. La cantidad de frecuencias es igual a $M = 2^k$, donde k es el número de “chips” tomados de la secuencia PN. Por ejemplo, si $k = 8$, habrá 256 frecuencias de portadora diferentes que serán moduladas por la señal FSK o DPSK; esto quiere decir que durante un intervalo de tiempo T se utiliza una de las M frecuencias, y en el intervalo siguiente se cambia o “salta” en forma aleatoria a cualquiera otra de las $M - 1$ frecuencias. Como resultado, la interferencia se reduce, pues en el caso de existir una, ella tendría efecto solamente en uno de los M intervalos de tiempo. Durante los $M - 1$ intervalos de tiempo restantes, la portadora “salta” aleatoriamente a otras de las frecuencias no conocidas por el ente interferente y como consecuencia la interferencia se reduce. Por esta razón, a esta técnica se le suele llamar también “Dispersión de Espectro por Salto de Frecuencias”.

En la Fig 5.94 se muestran los “saltos” aleatorios de frecuencia y en la en la Fig. 5.95 se muestra el modelo de un sistema FSK/FHSS con demodulación no coherente.

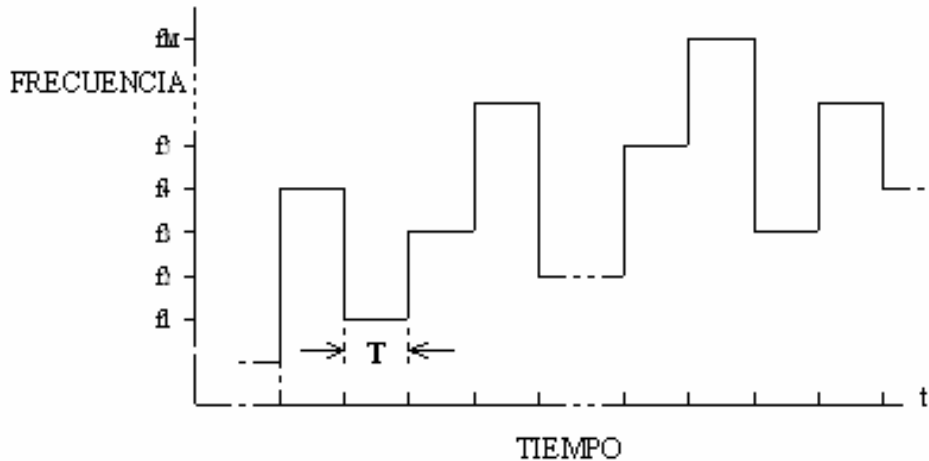


Fig. 5.94. Variaciones (“Saltos”) Aleatorias de la Frecuencia en FHSS

Las frecuencias de portadora se generan en un sintetizador de frecuencia que es controlado por k “chips” tomados de una secuencia PN, como se muestra en la Fig. 5.95; en la práctica el valor de k es igual al número de etapas r del generador de las secuencias PN. Estas frecuencias cambian cada T segundos, de modo que se puede escribir

$$s_h(t, i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \cos(2\pi f_i t) \cdot \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (5.205)$$

Dependiendo de la relación entre T y T_b , los sistemas FHSS se clasifican en sistemas FHSS Lentos cuando $T \geq T_b$, y sistemas FHSS Rápidos cuando $T < T_b$. Para simplificar el análisis, vamos a considerar el caso cuando $T = T_b$, que es una forma de FHSS Lento. Vamos a suponer también que la frecuencia inferior de dispersión es mucho mayor que f_c , es decir, que $f_1 \gg f_c$.

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

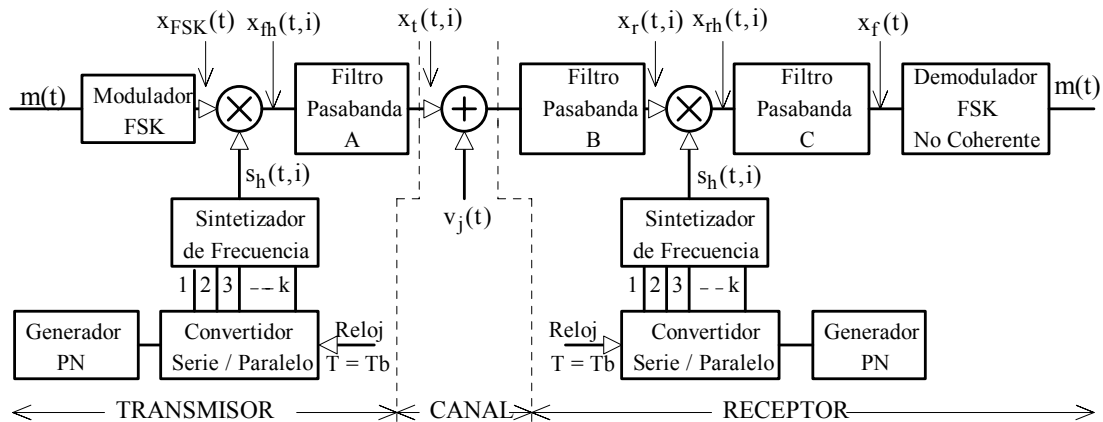


Fig. 5.95. Modelo de un Sistema de Transmisión de Espectro Disperso mediante Conmutación de Frecuencias.

En el canal aparece una señal interferente $v_j(t)$, cuya potencia, igual que en el caso DSSS, suponemos que es mucho mayor que la potencia de ruido ($\eta_j \gg \eta$). Asimismo, analizaremos separadamente los efectos de la señal útil y los de la interferencia.

De la Fig. 5.95, $x_{fh}(t,i) = x_{FSK}(t) \cdot s_h(t,i)$, donde $x_{FSK}(t)$, es, de (5.162),

$$x_{FSK}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos[2\pi(f_c + b_a \cdot f_d)t] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

Entonces, para $T = T_b$,

$$x_{fh}(t,i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2A \cos(2\pi f_i t) \cdot \cos[2\pi(f_c + b_a f_d)t] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

$$x_{fh}(t,i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \left\{ \cos[2\pi(f_c + b_a f_d + f_i)t] + \cos[2\pi(f_c + b_a f_d - f_i)t] \right\} \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

El filtro pasabanda A está centrado en $[f_c + b_a f_d + f_i]$, de modo que su salida es

$$x_t(t,i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos[2\pi(f_c + b_a f_d + f_i)t] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (5.206)$$

Esta es la señal FSK/FHSS que se transmite.

Vamos a estimar ahora el valor aproximado del ancho de banda ocupado. Por razones de ortogonalidad, que ya discutimos anteriormente, Sección 5.7.4., la separación entre dos frecuencias adyacentes debe ser como mínimo igual a f_b , es decir, $f_i - f_{i-1} = f_b$. Por lo tanto, el ancho de banda de la señal FSK/FHSS es $B \approx (M-1) \cdot f_b$; pero como $M = 2^k$ y $N = 2^k - 1$, entonces el ancho de banda es

$$B \approx N \cdot f_b \quad \text{en FSK/FHSS} \quad (5.207)$$

que es el mismo ancho de banda de la señal PSK/DSSS. El ancho espectral ocupado por los espectros de la señal FSK/FHSS es ciertamente un espectro ensanchado y es N veces el ancho de banda de la señal mensaje $m(t)$.

Estrictamente hablando, el espectro de la señal no se ensancha, él siempre permanece fijo y su ancho de banda generalmente es f_b . Lo que pasa es que el mecanismo de modulación hace que este espectro se desplace sobre M frecuencias de portadora ocupando un ancho de banda total $B \approx M \cdot f_b$, o lo que es lo mismo, el espectro de la señal $m(t)$ cambia aleatoriamente de frecuencia de portadora cada T_b segundos sobre un canal de ancho de banda $B = M \cdot f_b$.

La señal $x_t(t, i)$ se transmite y en el receptor pasa por el filtro pasabanda B , el cual tiene las mismas características que el filtro A , de modo que $x_r(t, i) = x_t(t, i)$. Esta señal se multiplica por una réplica idéntica y sincronizada de $s_h(t, i)$ resultando en

$$x_{rh}(t, i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2A \cos[2\pi(f_c + b_a f_d + f_i)t] \cdot \cos(2\pi f_i t) \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

$$x_{rh}(t, i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \left\{ \cos[2\pi(f_c + b_a f_d + 2f_i)t] + \cos[2\pi(f_c + b_a f_d)t] \right\} \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

El filtro pasabanda C deberá estar centrado en $[f_c + b_a f_d]$, de modo que su salida será

$$x_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos[2\pi(f_c + b_a f_d)t] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) = x_{FSK}(t) \quad (5.208)$$

Hemos recuperado la señal FSK, la cual al demodularse producirá la señal mensaje original $m(t)$. Nótese que la demodulación es no coherente para evitar los problemas de sincronización de los sintetizadores de frecuencia. Este mismo análisis se puede efectuar para una señal DPSK.

Consideremos ahora una señal interferente $v_j(t)$ cuya densidad espectral es constante y mucho mayor que la densidad espectral de ruido en el canal. Cuando esta señal pasa por el filtro pasabanda B del receptor, el ruido a la salida del filtro se puede expresar en la forma canónica

$$n_j(t, i) = n_{jc}(t) \cdot \cos[2\pi(f_c + b_a f_d + f_i)t] - n_{js}(t) \cdot \sen[2\pi(f_c + b_a f_d + f_i)t]$$

Esta señal de ruido se multiplica por la señal dispersora $s_h(t, i)$ obteniéndose

$$n_{jh}(t, i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ n_{jc}(t) [\cos[2\pi(f_c + b_a f_d + 2f_i)t] + \cos[2\pi(f_c + b_a f_d)t]] - n_{js}(t) [\sen[2\pi(f_c + b_a f_d + 2f_i)t] + \sen[2\pi(f_c + b_a f_d)t]] \right\} \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

A la salida del filtro pasabanda C , que está centrado en $[f_c + b_a f_d]$, la señal interferente será

$$n_{jf}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ n_{jc}(t) \cdot \cos[2\pi(f_c + b_a f_d)t] - n_{js}(t) \cdot \sen[2\pi(f_c + b_a f_d)t] \right\} \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

Esta es una señal pasabanda de banda angosta cuya densidad espectral de potencia es constante; podemos decir entonces que

$$n_{jr}(t) \Rightarrow S_{nj}(f) = A_j^2 \frac{\eta_j}{2} \text{ para } |f| \leq B_i \text{ con } A_j^2 \ll 1 \quad (5.209)$$

donde B_i es el ancho de banda de un canal individual en FSK, expresión (5.164b).

La probabilidad de error es, de (5.169),

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$$

pero, de (5.152),

$$\gamma = \frac{A^2 T_b}{2\eta_j} = \frac{(A^2/2)}{\eta_j f_b} = \frac{P_s}{P_j} \quad (5.210)$$

La probabilidad de error en el sistema FSK/FHSS será entonces

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{P_s}{P_j}\right) \quad (5.211)$$

donde P_s/P_j es la ganancia de potencia o relación entre la potencia útil y la potencia interferente. Nótese que esta ganancia no depende de N . En la Fig. 5.96 se muestra la variación de la probabilidad de error en función de la relación P_s/P_j .

La relación P_s/P_j es, en general, alta; en este caso en particular, para $P_s/P_j > 13,35$ dB, la probabilidad de error $P_e < 10^{-5}$. Este sistema se utiliza en telefonía celular GSM (Global System for Mobile Communications) de procedencia europea. Para más información sobre estos sistemas, ver [Pickholts y otros, 1982; Proakis, 1989].

5.9.4. Consideraciones Finales

En la discusión de los diferentes tipos de sistemas SS siempre hemos supuesto que la portadora y las secuencias PN son idénticas y sincronizadas tanto en el transmisor como en el receptor. Pero en la práctica la situación es muy diferente, siendo necesario disponer en el receptor de circuitos especiales para la generación de la portadora y de la secuencia PN en perfecta sincronización con el transmisor. En particular, la sincronización de las secuencias PN es mucho más complicada pues requiere circuitos especiales de adquisición y rastreo. La operación de sincronización generalmente se hace a altas velocidades y consta de dos etapas: en la primera etapa se efectúa una sincronización “gruesa” en la cual la secuencia PN del receptor difiere en uno o pocos “chips” de la secuencia PN en el transmisor. A continuación se realiza una sincronización “fina” que sincroniza las dos secuencias. Esto completa la primera etapa. Alcanzada la sincronización, en la segunda etapa el receptor intenta mantener alineada la secuencia PN local lo más cerca posible de la secuencia PN del transmisor; ésta es la denominada operación de “seguimiento o rastreo”, aunque en algunos sistemas el transmisor envía secuencias especiales para mantener la sincronización.

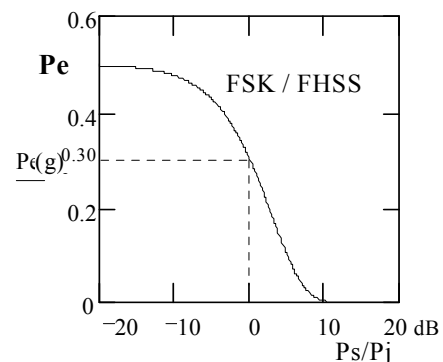


Fig. 5.96. Probabilidad de Error vs P_s/P_j

En general, en los sistemas SS la operación de sincronización de portadora y secuencias PN es muy complicada y para ello en la práctica se ha desarrollado circuitos y técnicas especiales que permiten una sincronización más rápida y eficiente. Para más detalles sobre estos sistemas tanto en DSSS como en FHSS, el lector puede consultar [Ziemer y Peterson, 1985; Dixon, 1984; Cooper y McGillen, 1986] y en particular, la Recomendación SM.1055 del UIT-R.

5.10. RESUMEN

Los sistemas modernos de comunicación se están digitalizando en forma acelerada y en este capítulo se dan los fundamentos de los mecanismos básicos teóricos que permiten conocer el funcionamiento, operación y comportamiento de los sistemas digitales comúnmente utilizados en la práctica. Como primer paso se desarrolla el concepto de muestreo de señales, se explica los diferentes teoremas, se discute las ventajas y problemas de la operación de muestreo y se ilustra su aplicación mediante ejemplos sencillos. La teoría del muestreo es fundamental en los sistemas digitales.

Se han desarrollado los principios básicos de las técnicas más comunes de la modulación analógica y digital de impulsos. Se ha visto, por lo menos teóricamente, que una señal analógica se puede modular y recuperar utilizando las técnicas de modulación analógica PAM, PDM y PPM, y las técnicas de modulación digital PCM, DPCM y DM. Todos estos esquemas de modulación se tratan con cierto detalle y en particular se estudian sus características de ancho de banda y relaciones S/N.

En la transmisión y recepción de impulsos en banda de base se tratan algunos aspectos tales como las técnicas de multiplicidad por división de tiempo (TDM), la interferencia intersímbolo, los códigos de línea y la teoría básica del filtro acoplado, conceptos que se ilustran mediante ejemplos tomados, en su mayoría, de la práctica.

Un aspecto de considerable importancia es la transmisión de señales digitales mediante portadora modulada. Se introduce los métodos de demodulación coherente y no coherente, se discute los problemas de la sincronización de portadora y de temporización, y se presentan algunos circuitos de sincronización ampliamente utilizados en la práctica diaria.

En este capítulo se desarrolla, asimismo, las técnicas básicas de la modulación binaria y m-aria. En particular, se estudia las características de los sistemas binarios ASK, FSK, PSK y DPSK, y los sistemas m-arios PSK M-ario, DPSK M-ario y FSK M-ario de Banda Ancha, con énfasis en sus características espectrales para el cálculo del ancho de banda, de las relaciones S/N y la probabilidad de error correspondientes. En cuanto a las aplicaciones, se hace continuamente referencia a las distintas normas y recomendaciones de la UIT-T y la FCC de los Estados Unidos.

Entre los sistemas de modulación que están en proceso de desarrollo se destaca el sistema de modulación mediante dispersión del espectro (Spread Spectrum, SS) por sus características anti-interferentes y baja probabilidad de interceptación. Esto incluye un estudio de sus dos tipos principales: el sistema SS de secuencia directa (DSSS) y el sistema SS por conmutación de frecuencias (FHSS). Se analizan los correspondientes modelos de transmisor y receptor, y mediante el cálculo de sus propiedades espectrales se obtiene la probabilidad de error, con la cual se caracteriza su comportamiento. Una aplicación muy importante del concepto de espectro disperso es la forma de acceso múltiple CDMA. Este método de acceso permite la utilización de la misma banda de frecuencias para la transmisión de señales de múltiples usuarios que transmiten simultáneamente. Se calcula la probabilidad de error y se demuestra que el sistema CDMA puede atender a muchos usuarios pero a costas de una disminución en la calidad de la transmisión.

Dada la característica introductoria de este capítulo, todos los conceptos teóricos se han presentado sin profundizar demasiado en sus formas más complejas que requieren métodos de análisis mucho más avanzados desde el punto de vista matemático. No obstante, los conocimientos aquí impartidos son suficientes para el estudiante de pregrado y para el ingeniero no especialista que desee una introducción no estadística a la teoría de las comunicaciones.

PROBLEMAS DE APLICACION

- 5.1. La señal $x(t) = 10 \cos(2\pi t) + 4 \cos(5\pi t) + 2 \cos(7\pi t)$ se muestrea en forma instantánea a una frecuencia de 4 Hz. La señal muestreada se pasa por un filtro ideal pasabajo de ganancia unitaria y ancho de banda de 4 Hz.

Demuestre que la salida del filtro es

$$y(t) = 4[2 \cos(\pi t) + 10 \cos(2\pi t) + 4 \cos(3\pi t) + 4 \cos(5\pi t) + 10 \cos(6\pi t) + 2 \cos(7\pi t)]$$

- 5.2. La señal $x(t) = 5 \cos(2\pi \times 10^3 t) \cos(600\pi t)$ se muestrea a una frecuencia de 2100 muestras por segundo. El muestreo se efectúa mediante una señal periódica rectangular de amplitud unitaria y ciclo de trabajo igual 0,5. La señal muestreada se pasa por un filtro ideal pasabajo, de ganancia igual a 2 y ancho de banda de 1600 Hz.

(a) Demuestre que la señal de salida del filtro es

$$y(t) = 5 \cos(600\pi t) \left[\cos(2000\pi t) + \frac{2}{\pi} \cos(2200\pi t) \right]$$

(b) Si la frecuencia de muestreo fuera de 1800 muestras por segundo, demuestre que

$$y(t) = 5 \cos(600\pi t) \left[\cos(200\pi t) + \frac{2}{\pi} \cos(1600\pi t) \right]$$

- 5.3. Sea el sistema de la Fig. 5.97, donde

$$x(t) = \text{sinc}(t); \quad h(t) = \text{sinc}(4t)$$

$$p(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} \cos(2\pi n t)$$

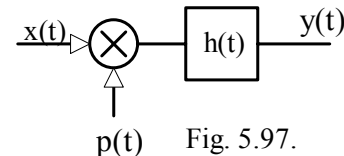


Fig. 5.97.

- (a) Demuestre que $y(t) = \frac{1}{2\pi} \text{sinc}(t) \cos(2\pi t)$. Dibuje su espectro $Y(f)$.
- (b) Determine el diagrama de bloques de un sistema para recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.
- 5.4. La señal $x(t) = 50 \text{sinc}^2(10t)$ se muestrea mediante una señal periódica rectangular, de período igual al intervalo de Nyquist y relación de trabajo igual a 0,2.

Grafique el espectro de la señal muestreada en el intervalo de frecuencias (-10 Hz, 150 Hz). Determine la amplitud máxima del espectro centrado en la frecuencia de 100 Hz.

- 5.5. En la Fig. 5.98 se muestra el espectro de una señal dada. Esta señal se muestrea en forma instantánea y se pasa por un filtro cuya función de transferencia es $H(f) = \Pi(f/2B)$.

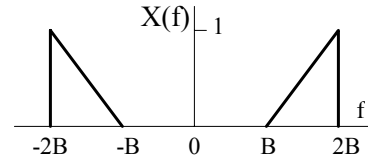


Fig. 5.98.

Demuestre que si el muestreo se ha efectuado a una frecuencia de B muestras por segundo, la salida es $y(t) = 2B^2 \text{sinc}(2Bt)$; pero si el muestreo se ha efectuado a $2B$ muestras por segundo, la salida es $y(t) = 2B^2 \text{sinc}^2(Bt)$.

- 5.6. Demuestre que la frecuencia de muestreo mínima necesaria para muestrear la señal $x(t) = 20 \cos(10^4 \pi t) \cos(3,9 \times 10^5 \pi t)$ es de 20 kHz. Dibuje el espectro de la señal muestreada entre $n = -5$ y $n = 5$.
- 5.7. Se desea muestrear la señal $x(t) = 15 \exp(-10^3 |t|)$. Demuestre que el límite inferior de la frecuencia de muestreo es:
- $f_s = 204,86$ Hz cuando el ancho de banda de la señal es el de 3 dB.
 - $f_s = 500$ Hz cuando el ancho de banda de la señal se calcula según la expresión (1.115).

- 5.8. Sea la señal periódica de la Fig. 5.99. Esta señal se va a emplear para muestrear la señal $x(t) = 2 \times 10^{-3} \text{sinc}^2(500t)$.

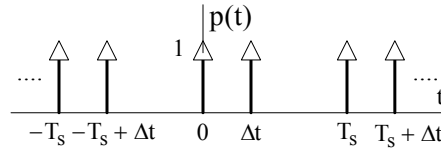


Fig. 5.99.

- (a) Demuestre que el espectro $P(f)$ de $p(t)$ viene dado por

$$P(f) = 2f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\pi f_s \Delta t) \exp(-jn\pi f_s \Delta t) \delta(f - nf_s)$$

donde $f_s = 1/T_s$. [Sugerencia: utilice la expresión (1.105)].

- 5.9. Se tiene una señal $x(t)$ pasabaja de banda limitada f_m . Esta señal se muestrea y se pasa por un filtro pasabajo RC de tal manera que haya una banda de guarda de ancho B_g entre el valor B del ancho de banda del filtro y la frecuencia inferior del espectro centrado en f_s . El valor B es el ancho de banda del filtro de acuerdo con la expresión (2.79). Suponga que $(1/RC) = 2\pi f_m$.

Demuestre que la frecuencia de muestreo necesaria es $f_s = 3f_m + B_g$. Demuestre también que si el ancho de banda del filtro es el de 3 dB, entonces la frecuencia de muestreo será $f_s = 2f_m + B_g$.

- 5.10. Consideremos la distorsión de solapamiento mostrada en la Fig. 5.15. Vamos a cuantificar la distorsión de solapamiento definiéndola como “la relación entre la energía de los espectros adyacentes reflejada sobre la gama de baja frecuencia y la energía de la señal dentro de esa gama”. De acuerdo con esta definición, demuestre que el Factor de Solapamiento debido a los espectros adyacentes se puede expresar en la forma

$$\text{Factor de Solapamiento, } F_s \% = \frac{\int_{f_s/2}^{3f_s/2} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df}{\int_0^{f_s/2} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df} 100 \quad (5.212)$$

Si la ganancia del filtro es constante en la gama $|f| \leq f_s / 2$, entonces

$$F_s \% = \frac{\int_{f_s/2}^{3f_s/2} |X(f)|^2 df}{\int_0^{f_s/2} |X(f)|^2 df} 100 \quad (5.213)$$

Si $x(t)$ está caracterizada mediante su densidad espectral de potencia $S_x(f)$, entonces $S_x(f)$ reemplaza a $|X(f)|^2$ en las expresiones anteriores.

Utilizando (5.213) demuestre que cuando se muestrea la señal $x(t) = 15 \exp(-10^3 |t|)$, con $f_s = 500$ Hz, el factor de solapamiento es del 7,403%.

- 5.11. En general, las señales de información prácticas no son estrictamente limitadas en banda, de modo que teóricamente cuando ellas se filtran para limitarlas en banda se produce distorsión.

Consideremos el espectro de la Fig. 5.100, donde $X(f)$ es el espectro de la señal de información $x(t)$. El área rayada representa entonces la pérdida de señal producida por la limitación de banda debida al filtro.

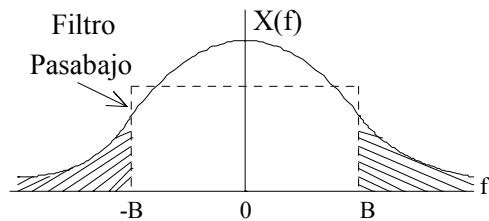


Fig. 5.100.

- (a) Demuestre que el “Factor de Distorsión por Limitación de Banda” viene dado por

$$F_B \% = \frac{\int_{-B}^B |X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df} 100 \quad (5.214)$$

- (b) Si $B = 5$ kHz, determine el factor $F_B \%$ para las siguientes señales:

1. $x(t) = 8 \text{sinc}^2(8 \times 10^3 t)$;
2. $x(t) = 10 \exp(-10^4 |t|)$

5.12. Igualmente que en los dos problemas anteriores, se puede cuantificar la Distorsión de Interpolación. Si se considera solamente la energía de los espectros adyacentes que pasa a la salida, demuestre, a partir de la Fig. 5.16, que el “Factor de Distorsión de Interpolación” se puede expresar en la forma

$$F_I \% = \frac{\int_{f_s - f_m}^{f_s + f_m} |H(f)|^2 |X(f - f_s)|^2 df}{\int_0^{f_m} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df} 100 \tag{5.215}$$

Si $x(t) = 2f_m \text{sinc}(2f_m t)$, donde $f_m = 1/2\pi RC$ y $f_s = 3f_m$, demuestre que el factor de distorsión de interpolación producido por un filtro pasabajo RC es del 27,842%.

5.13. Sea la señal $x(t) = 8\text{sinc}^2\left(\frac{t}{1,25 \times 10^{-4}}\right) \cos(1,94 \times 10^5 \pi t)$.

- (a) Demuestre que la frecuencia mínima de muestreo es de 35 kHz y diga las características del filtro necesario para recobrar la señal.
- (b) Calcule el espectro de la señal muestreada y dibújelo en el intervalo (-140 kHz, 140 kHz)

5.14. Sea el sistema de la Fig. 5.101, donde $x(t)$ es una señal pasabajo de banda limitada f_m .

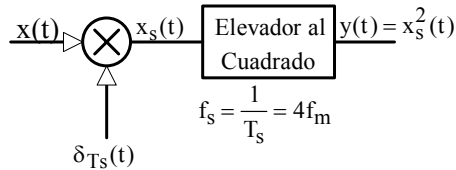


Fig. 5.101.

(a) Demuestre que la salida $y(t)$ es

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

(b) Dibuje el espectro $Y(f)$ cuando $x(t) = 2f_m \text{sinc}(2f_m t)$

5.15. En el muestreo con retención se utiliza un filtro de orden cero dado por (5.25); sin embargo, $h(t)$ puede tener cualquier perfil, por ejemplo,

(a) Si $h(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)$ para $|t| \leq \frac{T_s}{2}$, donde $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{4f_m}$ y $X(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right)$, calcule y dibuje $X_s(f)$ en la forma mostrada en la Fig. 5.11.

(b) Repita cuando $h(t) = \Lambda(2f_m t)$, con $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{3f_m}$

5.16. Sea el sistema mostrado en la Fig. 5.102, donde $x(t)$ es una señal pasabajo de banda limitada f_m . f_s es la frecuencia de Nyquist de $x(t)$.

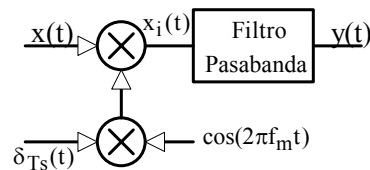


Fig. 5.102.

(a) Demuestre que el espectro $X_i(f)$ de $x_i(t)$ es

$$X_i(f) = 2f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[f - (2n + 1)f_m], \quad \text{donde} \\ f_s = 1/T_s = 2f_m$$

- (b) Si $x(t) = \text{sinc}^2(f_m t)$, grafique el espectro de $x_i(t)$.
- (c) Si la banda de paso del filtro está entre $3f_m$ y $5f_m$, y su ganancia es unitaria, demuestre que $y(t) = 4f_m [2\text{sinc}(2f_m t) - \text{sinc}^2(f_m t)] \cos(8\pi f_m t)$ cuando $x(t) = \text{sinc}^2(f_m t)$.
- 5.17. En un sistema PDM se observa que el ancho de los impulsos viene dado por la expresión

$$\tau(t) = 10^{-3} \left[1 + 0,5 \cos\left(\frac{10^3 \pi t}{3}\right) \right].$$

Demuestre que el ancho de banda mínimo para transmitir la señal PDM es de 2 kHz, y que su período es $T_s = 3$ ms.

- 5.18. La señal $m(t) = 10\text{sinc}(10^4 t)$ se va a modular en PDM en la forma mostrada en la Fig. 5.23. Suponga que $|\min m(t)| = A/2$. Note también que $[\min \text{sinc}(t)] \approx -0,2172$ para $t = 1,425$ seg
- (a) Determine los valores apropiados de los parámetros T_s , A , V_p y V_u .
- (b) Considerando la geometría de la señal $v_d(t)$, Fig. 5.23, demuestre que

$$B_{\text{MIN}} \approx \frac{2f_m V_p}{V_p + A - |\min m(t)| - V_u} = \beta_m f_m; \quad V_p = \frac{\beta_m}{\beta_m - 2} [V_u + |\min m(t)| - A]$$

donde $\beta_m > 2$, es el factor de expansión del ancho de banda.

- 5.19. La señal $m(t) = 10 \cos^2(5 \times 10^3 \pi t)$ se va a modular en PAM, PDM y PPM. La relación de trabajo del tren de impulsos sin modular es de 0,2. Determine las relaciones de expansión del ancho de banda y las ganancias de conversión correspondientes.
- 5.20. En la Sección 5.3.4 se calculó la ganancia de conversión en PPM suponiendo que los impulsos tenían forma trapezoidal, Fig. 5.29 y 5.30, y expresiones (5.69) y (5.70).

Utilizando el mismo procedimiento, demuestre que cuando los impulsos tienen la forma de coseno elevado $\left\{ p(t) = \frac{A}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right] \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\}$, la ganancia de conversión es

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{B}{2f_m} - 1 \right)^3 \quad (5.216)$$

Si $B \gg f_m$, entonces
$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{B}{f_m} \right)^3 = \frac{\pi^2}{24} \beta_m^3 \quad (5.217)$$

Comparando este resultado con (5.70), podemos ver que el comportamiento del sistema PPM que utiliza impulsos en coseno elevado es superior en 8,18 dB al que utiliza impulsos trapezoidales.

- 5.21. (a) Demuestre, a partir de la expresión (5.60), que la amplitud de la componente a la frecuencia de portadora f_s en PPM viene dada por

$$A_s = 2Af_s[1 - m_t m'(t)] \cdot J_0(2\pi f_s m_t) \quad (5.218)$$

Obsérvese que la amplitud A_s varía en el tiempo en función de la derivada de la señal mensaje. Esto quiere decir que si $m'(t) \neq 0$, la información de temporización no puede extraerse de $x_{\text{PPM}}(t)$. Como consecuencia, en el sistema PPM hay que transmitir también la información de temporización.

- (b) Demuestre en la misma forma en PDM que la amplitud de la componente a la frecuencia de portadora f_s es, de (5.53),

$$A_s = \frac{2A}{\pi} J_0(\pi \tau_1 f_s) \text{sen}(\pi \tau_0 f_s) \quad (5.219)$$

Obsérvese que ahora A_s es constante; por lo tanto, la componente a la frecuencia f_s se puede extraer de $x_{\text{PDM}}(t)$. Esto se puede efectuar mediante un filtro pasabanda muy angosto centrado en f_s , o con el circuito de la Fig. 5.61.

- (c) Demuestre que en PAM se cumple que $A_s = \frac{2A}{\pi} \text{sen}(\pi \tau f_s)$ (5.220)

Se aplican las mismas observaciones que en la parte (b).

- 5.22. Una señal de audio tiene una frecuencia máxima de 3,2 kHz. Esta señal se muestrea a 8000 muestras por segundo y los impulsos resultantes se transmiten tanto en PAM como en PCM, ambos NRZ.

- (a) Demuestre que el ancho de banda mínimo del sistema PAM es de 8 kHz.
 (b) En el sistema PCM los impulsos PAM se cuantifican con un cuantificador bipolar de 32 niveles. Demuestre que el ancho de banda del sistema PCM es de 40 kHz. Nótese que el ancho de banda en PCM es 5 veces mayor que el ancho de banda en PAM.
 (c) Repita la parte (b) cuando el cuantificador tiene 256 niveles. Si el voltaje máximo de salida del cuantificador es de $\pm 8V$, demuestre que la resolución del cuantificador es de 31,37 mV y que la relación de postdetección $S_o / N_o = 48,16$ dB.

- 5.23. Una señal analógica tiene una duración de 1 minuto. Su contenido espectral va desde CC hasta 500 Hz. La señal se va a muestrear, convertir en PCM binario y almacenar en la memoria de una computadora.

- (a) Demuestre que el número mínimo de muestras que hay que tomar y almacenar para el caso de una eventual reconstrucción de la señal es de 60000 muestras.
 (b) Si cada muestra se ha codificado en 8 impulsos PCM binarios, demuestre que la capacidad de la memoria para almacenar la señal PCM debe ser, como mínimo, de 60 kbytes.

- 5.24. La señal $m(t) = 5 + 20 \cos^2(10^4 \pi t)$ se quiere modular en PAM (RZ) con una relación de trabajo de 0,2. El muestreo se efectúa al doble de la frecuencia de Nyquist.
- Demuestre que el factor de expansión del ancho de banda es igual a 20. Determine también la ganancia de conversión en el receptor.
 - Dibuje con cuidado la señal PAM entre $0 \leq t \leq 130 \mu\text{seg}$, y determine los valores de $x_{\text{PAM}}(t)$ para $t = T_s$ y $t = 2T_s$.
 - Si la señal PAM se codifica (forma unipolar) en PCM de 32 niveles y resolución 0,5 V, dibuje la señal PCM entre 0 y 75 μseg , y calcule su ancho de banda.
- 5.25. La señal $m(t) = 0,05 \cdot [1 - \cos(10\pi t)]$ se aplica a un modulador Delta cuya frecuencia de muestreo es de 100 Hz, con escalones de 10 mV de amplitud.
- Dibuje cuidadosamente las señales $m(t)$, $\tilde{m}(t)$ y $x_{\Delta}(t)$ en la forma mostrada en la Fig. 5.42, entre $t = 0$ y $t = 100 \text{ ms}$.
 - Demuestre que la relación S_o/N_o máxima es de 21,761 dB, la cual es producida por una frecuencia de muestreo de 314,16 Hz.
- 5.26. A un modulador Delta se le aplica la señal $m(t) = \sin(2\pi \times 10^3 t)$, siendo la frecuencia de muestreo igual a 64 kHz.

Demuestre que el valor óptimo teórico de la amplitud del escalón Δ_r es de 0,09817 y que la correspondiente relación S_o/N_o es de 21,92 dB.

- 5.27. Se desea comparar los anchos de banda de transmisión requeridos en PCM y DM en el caso de modulación sinusoidal. Si la relación Señal / Ruido de Cuantificación es de 30,099 dB en ambos sistemas, demuestre que $B_{\text{PCM}} = 10f_m$ y $B_{\text{DM}} = 328,17f_m$.

Por consiguiente, en las condiciones dadas, el ancho de banda en DM es 32,8 veces el ancho de banda en PCM.

- 5.28. Se quiere comparar los sistemas PCM y DM mediante el factor de expansión del ancho de banda $\beta_m = B/f_m$.

$$\text{Grafique } \left[\frac{S_o}{N_q} \right]_{\text{PCM(dB)}} \text{ y } \left[\frac{S_o}{N_q} \right]_{\text{DM(dB)}} \text{ vs } \beta_m$$

Discuta los resultados.

- 5.29. M señales pasabajo, todas de banda limitada f_m se muestrean instantáneamente y se multiplexan en TDM. La señal multiplexada compuesta se pasa por un filtro pasabajo ideal antes de la transmisión.
- Demuestre que el valor del ancho de banda mínimo del filtro a fin de que las señales individuales puedan recuperarse en el receptor es $B = 2Mf_m$.
 - Repita (a) si las M señales se multiplexan en la forma mostrada en la Fig. 5.47(b), siendo R_T el ciclo de trabajo de la señal PAM/TDM [Resp.: $B = 2Mf_m/R_T$]
 - Haga un diagrama de bloques del receptor para recuperar las M señales individuales.

- (d) La señal PAM/TDM compuesta se codifica en ASCII sin bit de paridad. Demuestre que en este caso la velocidad de modulación es $V_b = 20Mf_m$ baudios.
- 5.30. La señal $m(t) = 10[1 + \cos(10^4 \pi t)]$ se va a codificar en PCM NRZ mediante un convertidor analógico-digital de salida paralela, la cual se transforma en serie mediante un registro de desplazamiento, Fig. 5.37(a). El error máximo tolerable en la codificación es del 0,1957% del valor máximo de $m(t)$. Suponga que el muestreo de $m(t)$ se ha efectuado al doble de la frecuencia de Nyquist.
- (a) Determine las características del convertidor analógico-digital: ΔQ , V_{qmax} , N y n . Sugerencia: utilice los resultados del Ejemplo 5.9.
- (b) En el registro de desplazamiento se agrega un impulso de arranque (siempre a “CERO”) y uno de pare (siempre a “UNO”). El impulso de arranque tiene la misma duración que los impulsos PCM NRZ, mientras que en los impulsos de pare la duración es el doble. En este caso determine la frecuencia de reloj del registro de desplazamiento y el ancho de banda mínimo de la señal transmitida.
- (c) Grafique la forma de las secuencias PCM NRZ correspondientes a $t = 0$ y $t = T_s$.
- 5.31. En la Fig. 5.103 se muestra un sistema TDM básico para cuatro señales.

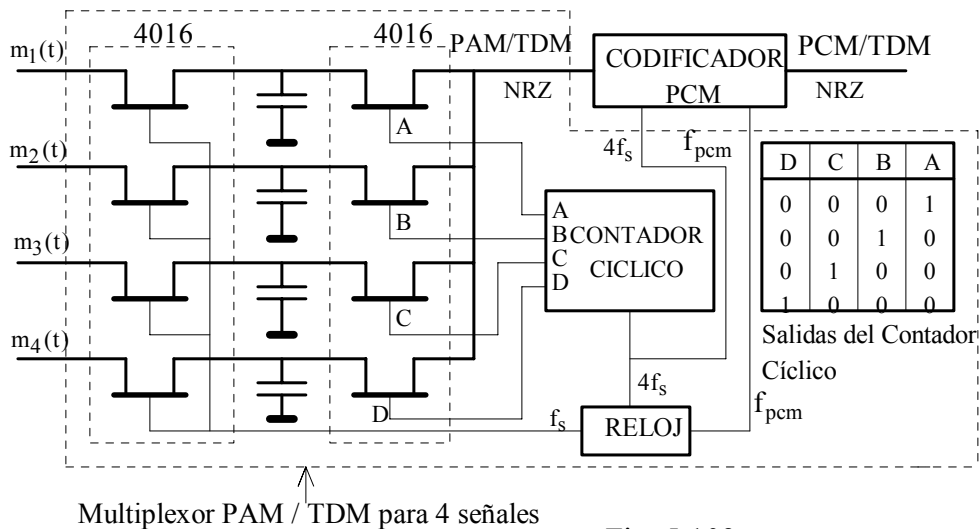


Fig. 5.103.

Este multiplexor se puede instrumentar en la práctica con circuitos integrados 4016. Las compuertas analógicas 4016 conducen cuando son activadas en secuencia mediante un contador cíclico, cuya salida ABCD se muestra en la Tabla inserta. Al multiplexor entran las siguientes señales:

$$m_1(t) = A\Lambda\left(\frac{t-\tau/2}{\tau/2}\right); \quad m_2(t) = A\Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right); \quad m_3(t) = A\left[\Lambda\left(\frac{t-\tau/4}{\tau/4}\right) + \Lambda\left(\frac{t-3\tau/4}{\tau/4}\right)\right];$$

$m_4(t) = \frac{A}{2} [1 + \cos(\frac{2\pi t}{\tau})] \cdot \Pi(\frac{t - \tau/2}{\tau})$. Suponga que $\tau = 0,8$ seg y que la frecuencia f_s es de 10 Hz.

- (a) Describa el funcionamiento del circuito completo.
 - (b) Si $A = 1$, dibuje la forma de la señal PAM / TDM NRZ a la entrada del codificador PCM desde $t = 0$ hasta $t = 4 T_s$.
 - (c) Demuestre que el ancho de banda mínimo del canal para transmitir la señal PAM / TDM NRZ es $B = 10$ Hz
 - (d) Si $A = 15$ V y los parámetros del codificador (unipolar) PCM son $\Delta Q = 1$ V y $N = 16$, dibuje la forma de la señal PCM / TDM NRZ a la salida del codificador PCM desde $t = 0$ hasta $t = 2 T_s$.
 - (e) Calcule el ancho de banda mínimo del canal para transmitir la señal PCM / TDM NRZ.
 - (f) ¿Cuál es el valor de la frecuencia f_{pcm} ?
- 5.32. Las señales $m_1(t) = 5 \cos(10^4 \pi t)$; $m_2(t) = 10 \text{sinc}(10^4 t)$; $m_3(t) = 10 \text{sinc}^2(10^4 t)$ y $m_4(t) = 20 \cos(10^4 \pi t) \cos(2 \times 10^3 \pi t)$, se multiplexan en TDM en la forma mostrada en la Fig. 5.100 del problema anterior, y a continuación la señal PAM / TDM se codifica en PCM, código ASCII sin bit de paridad (Fig.4.14(b)).
- (a) Demuestre que el ancho de banda mínimo del canal para transmitir la señal PCM es de 800 kHz.
 - (b) Demuestre que la cantidad de información que el sistema puede transmitir en 1 minuto es de $3,36 \times 10^7$ bits.
 - (c) Diseñe un sistema de recepción para la recuperación de las diferentes señales.
- 5.33. En un sistema de telemetría PAM / TDM se multiplexan cuatro señales pasabajo $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ y $m_4(t)$. Las señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$ tienen un ancho de banda de 80 Hz, mientras que las señales $m_3(t)$ y $m_4(t)$ tienen un ancho de banda de 1 kHz. La frecuencia de muestreo para $m_3(t)$ y $m_4(t)$ es de 2400 Hz. Suponga que las otras frecuencias de muestreo se pueden obtener mediante división por potencias de 2 a partir de 2400 Hz.
- Diseñe un sistema PAM / TDM que efectúe un multiplexaje preliminar de $m_1(t)$ y $m_2(t)$ en una señal compuesta $m_{12}(t)$, y un multiplexaje final de $m_{12}(t)$, $m_3(t)$ y $m_4(t)$.
- (a) Demuestre que la frecuencia de muestreo para el proceso previo de $m_1(t)$ y $m_2(t)$ es de 300 Hz.
 - (b) Demuestre que el sistema de dos etapas puede procesar hasta 8 señales de 80 Hz sin variar las frecuencias de muestreo.
 - (c) Determine el ancho de banda de la señal resultante PAM / TDM NRZ cuando se transmite las 8 señales de 80 Hz y las dos de 1 kHz. ¿Es diferente del ancho de banda de cuando se transmite sólo 2 señales de 80 Hz más las dos señales de 1 kHz? Explique.

- 5.34. Se desea construir una red lineal que convierta impulsos rectangulares en impulsos coseno elevado, es decir, una red donde la entrada sea $x(t) = A\Pi(\frac{t}{\tau})$ y la salida tenga la forma

$y(t) = \frac{A}{2} [1 + \cos(\frac{2\pi t}{\tau})] \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$. Demuestre que la función de transferencia de esta red es

$$H(f) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \tau^2 f^2} \quad \text{para } |f| < \frac{1}{\tau}$$

- 5.35. La señal de entrada a un filtro acoplado tiene la forma mostrada en la Fig. 5.104. El ruido de entrada tiene una densidad espectral de potencia $S_n(f)$.

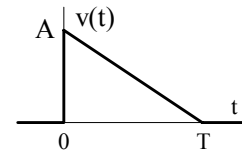


Fig. 5.104.

- (a) Demuestre que la función de transferencia del filtro acoplado es

$$H(f) = \frac{kA}{S_n(f)} \frac{1}{4T(\pi f)^2} [(1 + j2\pi T f) \exp(-j2\pi T f) - 1]$$

donde k es la constante de la expresión (5.134).

- (b) Si $A = 10$; $T = 1$ seg, el ruido es blanco con $\eta = 10^{-6}$ W/Hz y $k = \eta/2$, demuestre que la relación S/N máxima a la salida del filtro acoplado es $z_{\max} = 78,239$ dB.

- 5.36. El impulso coseno elevado de la Fig. 5.105 se aplica a un filtro acoplado. El ruido de entrada es blanco de densidad espectral $\eta/2$ y $k = \eta/2$.

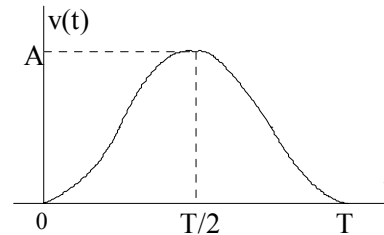


Fig. 5.105.

- (a) Demuestre que la correspondiente función de transferencia del filtro acoplado es

$$H(f) = H_1(f) \cdot \exp(-j\pi T f)$$

$$\text{donde } H_1(f) = \frac{A}{2\pi f} \frac{\text{sen}(\pi T f)}{(1 - T^2 f^2)}$$

- (b) Si $A = 10$; $T = 1$ seg, $\eta = 10^{-6}$ W/Hz, demuestre que la relación S/N máxima a la salida del filtro acoplado es $z_{\max} = 78,751$ dB.

- 5.37. Vamos a comparar el comportamiento entre un filtro pasabajo RC y un filtro acoplado. La señal de entrada es un impulso de la forma $v(t) = A\Pi(\frac{t-T/2}{T})$, el ruido es blanco de densidad espectral $\eta/2$ y $k = \eta/2$.

Para el filtro RC

- (a) Demuestre que la señal a la salida del filtro RC es

$$v_o(t) = A \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right] \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) + A \left[\exp\left(-\frac{t-T}{RC}\right) - 1 \right] u(t-T)$$

V. MODULACION Y TRANSMISION DE IMPULSOS

(b) Demuestre que la potencia de ruido a la salida del filtro es $\langle n_o^2(t) \rangle = \frac{\eta}{4RC}$

(c) Si $T = 1$ seg, $A = 10$, $RC = 10$ y $\eta = 10^{-6}$ W/Hz, demuestre que la relación S/N máxima a la salida del filtro RC es

$$z_{\max} = \frac{|v_o(T)|^2}{\langle n_o^2(t) \rangle} = 75,59 \text{ dB}$$

Para el filtro acoplado

(d) Demuestre que la función de transferencia del filtro acoplado es

$$H(f) = AT \text{sinc}(Tf) \exp(-j\pi Tf)$$

(e) Demuestre que la relación S/N máxima a la salida del filtro acoplado, para los mismos valores de la parte (c), es $z_{\max} = 83,01$ dB.

Nótese la superioridad del filtro acoplado: en las mismas condiciones que el filtro RC, su relación S/N máxima de salida es superior en 7,42 dB.

5.38. Sobre un canal telefónico de 3 kHz de ancho de banda se transmite datos binarios. La relación S/N máxima en el canal es de 6,0206 dB. Se considera ASK Coherente.

(a) Demuestre que la velocidad de información máxima en el canal es de 1500 bps y que la probabilidad de error es de $2,339 \times 10^{-3}$.

(b) Demuestre que si la velocidad de información se reduce a 300 bps, la probabilidad de error será de $1,0306 \times 10^{-10}$.

5.39. Se transmite datos binarios por un canal de RF. El ancho de banda útil del canal es de 10 MHz. La velocidad de información es de 4,8 Mbps y se utiliza modulación ASK. La amplitud de la portadora en la antena del receptor es de 1 mV y la densidad espectral de potencia del ruido es de 10^{-15} W/Hz.

(a) Demuestre que las probabilidades de error son:

$$\text{En ASK Coherente: } P_e = 1,672 \times 10^{-7}$$

$$\text{En ASK no Coherente: } P_e = 1,1068 \times 10^{-6}$$

(b) Demuestre que el valor, en dB, de la relación S/N en la antena es de 10,969 dB.

5.40. En la expresión (5.147) y Fig. 5.62, se da la densidad espectral de potencia de una señal ASK para una secuencia binaria unipolar NRZ.

(a) Demuestre que la potencia contenida dentro del ancho de banda $B = 2f_b$, centrado en f_c , es el 95% de la potencia total de la señal ASK.

Sugerencia: utilice el mismo procedimiento del Ejemplo 1.19.

(b) Demuestre que el 50% de la potencia total de la señal ASK se va en transmitir la componente continua o portadora.

- 5.41. Sobre un canal se transmite datos binarios en FSK. El ancho de banda útil del canal es de 3 kHz. Las frecuencias de transmisión son $f_1 = 1500$ Hz y $f_0 = 2100$ Hz. Se utiliza un modem que trabaja a una velocidad de modulación de 300 baudios. La relación S/N en el canal es de 6,0206 dB.

Demuestre los siguientes resultados:

frecuencia de portadora, $f_c = 1800$ Hz; desviación de frecuencia, $f_d = 300$ Hz

Ancho de banda del filtro de entrada, $B = 1200$ Hz;

Probabilidad de error en FSK Coherente: $P_e = 2,339 \times 10^{-3}$

Probabilidad de error en FSK no Coherente: $P_e = 9,158 \times 10^{-3}$

- 5.42. El Módem Bell 102/113 transmite a 300 bps, igual que el Módem UIT-T V.21, pero sus frecuencias de operación son: en la banda inferior, $f_1 = 1070$ Hz y $f_0 = 1270$ Hz; y en la banda superior, $f_1 = 2025$ Hz y $f_0 = 2225$ Hz. La amplitud de la portadora es 0,5 mV y la densidad espectral de ruido en el sistema es de 10^{-11} W/Hz.

Repita para este Módem Bell los cálculos efectuados en el Ejemplo 5.18, parte (b). Compare los resultados.

- 5.43. Sea los sistemas ASK, FSK y PSK, de amplitud de portadora A y frecuencia de señalización f_b . La potencia de ruido en los tres sistemas es la misma.

(a) Demuestre que para una misma probabilidad de error P_e y en modulación coherente,

$$\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{ASK}} = \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{FSK}} = 2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{PSK}}$$

(b) Si la relación S_i/N_i en el canal es de 10 dB, la velocidad de transmisión de 1200 bps y la densidad espectral de 10^{-10} W/Hz, determine la amplitud de la portadora y la probabilidad de error en ASK, FSK y PSK Coherentes.

- 5.44. Un canal ideal tiene un ancho de banda útil de 3 kHz. La potencia promedio máxima permitida de la señal es de -30 dBm y en el canal la densidad espectral es de 2×10^{-11} W/Hz.

(a) Demuestre que la capacidad teórica máxima del canal es $C = 9667$ bps.

(b) Se utiliza las técnicas FSK y PSK. Demuestre que la velocidad de información máxima que el canal puede soportar es de 1500 bps.

(c) Para la velocidad de información calculada en (b), demuestre que las probabilidades de error son:

En FSK Coherente: $P_e = 2,229 \times 10^{-5}$

En PSK Coherente: $P_e = 3,882 \times 10^{-9}$

5.45. Se dispone de un canal cuya respuesta de frecuencia se muestra en la Fig. 5.106, y por el cual se va a transmitir información binaria a 300 baudios en FSK. La relación S/N en el canal es igual a 3,01 dB y la densidad espectral de potencia del ruido de 2×10^{-10} W/Hz.

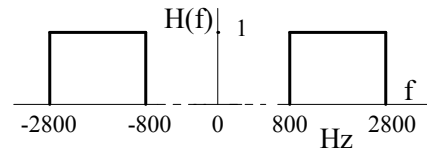


Fig. 5.106.

(a) Demuestre que los valores apropiados de la frecuencia de portadora y de las frecuencias f_0 y f_1 son:

$$f_c = 1800 \text{ Hz}; \quad f_1 = 1100 \text{ Hz}; \quad f_0 = 2500 \text{ Hz}$$

(b) Demuestre que la amplitud de la portadora es de 0,98 mV.

(c) Demuestre que las probabilidades de error en FSK Coherente y no Coherente son:

$$\text{Coherente: } P_e = 2,275 \times 10^{-2}; \quad \text{No Coherente: } P_e = 6,767 \times 10^{-2}$$

(d) Demuestre que la capacidad teórica máxima de este canal es $C = 3170$ bps.

5.46. Al codificador diferencial de la Fig. 5.73 se le aplica una secuencia binaria de la forma 1101000110.

Determine la secuencia de salida (mensaje codificado) del codificador y las fases de la señal modulada DPSK. Suponga que el primer dígito es un "0" y que la fase correspondiente es 0° .

5.47. En la Fig. 5.107 se muestra otra forma de codificador diferencial.

(a) Utilizando los mismos datos del problema anterior, construya una Tabla de valores como la mostrada en la Fig. 5.75.

(b) Repita (a) si el primer dígito es un "1" y la fase es 0° .

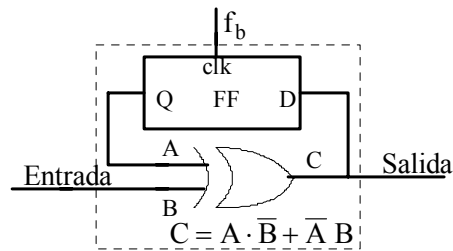


Fig. 5.107.

5.48. En la Fig. 5.108 se muestra el diagrama de bloques de un receptor PSK binario. No se muestra el sincronizador de temporización.

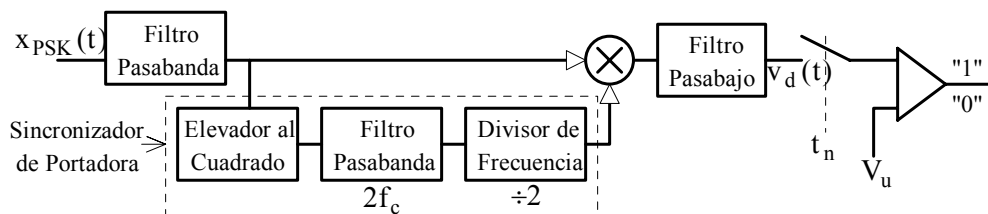


Fig. 5.108.

Suponga que $x_{\text{PSK}}(t) = A \cos(2\pi f_c t - \phi_i)$, donde

$$\left. \begin{array}{l} \phi_i = 0^\circ \text{ si se ha transmitido un "1"} \\ \phi_i = \pi \text{ " " " " " " " " " " "0"} \end{array} \right\} \text{ en un intervalo } T_b \text{ dado}$$

Nota: Este circuito de sincronización se puede utilizar también en la recepción de señales continuas, como veremos en el Capítulo VI.

(a) Demuestre que el voltaje de entrada al comparador, en un intervalo T_b dado, viene dado

$$\text{por } v_d(t) = \frac{A^3}{4} \cos(\phi_i)$$

(b) Establezca un algoritmo de decisión apropiado para el comparador.

5.49. Calcule las potencias pico y promedio de la señal, así como las correspondientes relaciones S/N, en ASK, FSK, PSK, y DPSK, tanto coherente como no coherente, cuando se opera sobre un canal de 3 kHz de ancho de banda, a una velocidad de 1000 bps, con una densidad espectral de ruido de 2×10^{-10} W/Hz y una probabilidad de error de $3,216 \times 10^{-5}$. Tabule y compare los resultados.

5.50. Una señal de voz se va a transmitir en PCM por microondas. La frecuencia de muestreo de la señal es de 8000 muestras por segundo y las palabras codificadas constan de 7 dígitos binarios más un dígito de sincronización, todos de igual duración.

(a) Demuestre que la velocidad de información de las secuencias PCM es de 56 kbps.

(b) Si las secuencias son PCM NRZ demuestre que el ancho de banda de base es de 64 kHz.

(c) Para la transmisión se utiliza modulación PSK binaria. Demuestre que el ancho de banda mínimo del canal es de 128 kHz.

(d) Si la transmisión se hace en FSK binaria con una desviación de frecuencia de 40 kHz y una frecuencia de portadora de 1,5 GHz, Demuestre que las frecuencias de operación y el ancho de banda de transmisión son:

$$f_1 = 1,496 \times 10^9 \text{ Hz}; \quad f_0 = 1,504 \times 10^9 \text{ Hz}; \quad B_c = 208 \text{ kHz}$$

(e) La densidad espectral de ruido en el canal es de 10^{-14} W/Hz. ¿Cuál será la potencia pico de la señal recibida FSK y la relación S/N correspondiente si la probabilidad de error es de $2,038 \times 10^{-8}$? El ancho de banda del canal es el calculado en (d) y la detección es no coherente [Resp.: $A^2 = 7,079 \times 10^{-8}$ W ; $S_i/N_i = 12,309$ dB]

5.51. En la Fig. 5.109 se muestra un receptor FSK. Un receptor de este tipo se denomina "receptor heterodino". En el Capítulo VI estudiaremos este concepto con más detalle.

Los filtros FI 1 y FI 0 son pasabanda, centrados en las frecuencias f_{i1} y f_{i0} , respectivamente, donde $f_{i0} > f_{i1}$. La señal de entrada $v_c(t)$ se puede escribir en la forma $v_c(t) = A_c \cos[2\pi(f_c \pm f_d)t]$, y las frecuencias de transmisión son:

$f_1 = 1300$ Hz, cuando se transmite un "1"

$f_0 = 1700$ Hz, " " " " "0"

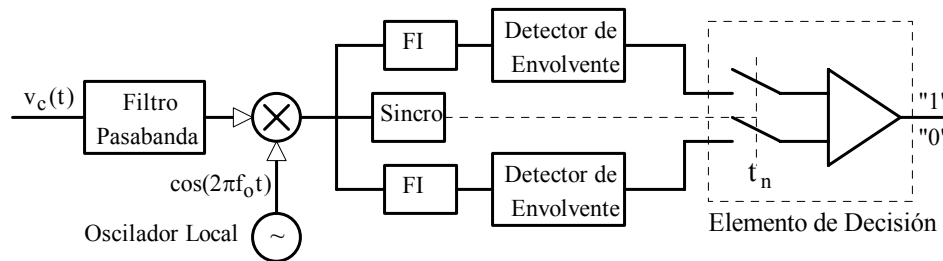


Fig. 5. 109.

Analice el sistema y determine los valores apropiados de las frecuencias f_{I1} , f_{I0} y f_o , sujeto a las condiciones siguientes:

1. Que $\frac{f_{I0} + f_{I1}}{2} = f_c$, donde f_c es la frecuencia de portadora
2. Que $1 \text{ kHz} < (f_{I0} - f_{I1}) < 2 \text{ kHz}$

5.52. Relaciones entre PSK M-ario y PSK Binario.

- (a) Sea B_B el ancho de banda en binario y B_M el correspondiente en M-ario. Demuestre que $B_B = B_M \log_2 M$.
- (b) Sea P_B la potencia de señal en binario y P_M la correspondiente en M-ario.

Demuestre que
$$P_M = \frac{1,094 \cdot P_B}{[\log_2 M] \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$$
 cuando $P_e = 10^{-4}$

Nota: para $\text{erfc}(x_1) = 2 \times 10^{-4} \rightarrow x_1 \approx 2,6297$
 para $\text{erfc}(x_2) = 10^{-4} \rightarrow x_2 \approx 2,751$

5.53. Relaciones entre PSK M-ario y DPSK M-ario.

Sea P_{MPSK} la potencia de señal en PSK M-ario y P_{MDPSK} la correspondiente en DPSK M-ario.

- (a) Para una probabilidad de error P_e cualquiera, demuestre que

$$P_{\text{MDPSK}} = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}^2(\pi/M)}{\text{sen}^2(\pi/2M)} P_{\text{MPSK}}$$

- (b) Verifique que si $M \gg 1$, entonces $P_{\text{MDPSK}} \rightarrow 2 \cdot P_{\text{MPSK}}$; es decir, el sistema DPSK M-ario requiere un aumento de 3 dB de potencia sobre el requerido para PSK M-ario.

- 5.54. La secuencia binaria de entrada a un modulador DPSK 4-ario tiene una velocidad de modulación de 1200 baudios. El modulador toma bloques de $L = \log_2 4 = 2$ dígitos binarios y le asigna a cada dupla de dígitos, ángulos de desfase en la forma siguiente:

$$00 \rightarrow \phi_1 = 0^\circ; \quad 01 \rightarrow \phi_2 = 90^\circ; \quad 11 \rightarrow \phi_3 = 180^\circ; \quad 10 \rightarrow \phi_4 = 270^\circ$$

La frecuencia de portadora es de 1800 Hz, el ancho de banda del canal es de 3 kHz, la amplitud de la portadora de 1 mV y la densidad espectral de ruido de 10^{-11} W/Hz.

- (a) Dibuje el Diagrama de Fresnel correspondiente.
- (b) Demuestre que la relación S/N en el canal es de 9,208 dB y que la probabilidad de error es $P_e = 7,795 \times 10^{-7}$.
- (c) Si la amplitud de la portadora aumenta al doble, demuestre que la nueva probabilidad de error es $P_e = 5,041 \times 10^{-23}$ y que la relación S/N ha aumentado en 6,021 dB.
- (d) Dibuje la señal DPSK 4-aria de salida correspondiente a una secuencia de entrada de la forma **0 0 0 1 1 1 1 0**. Haga el dibujo con cuidado para poder distinguir los cambios de fase.
- 5.55. La velocidad de información de la secuencia binaria de entrada a un modulador PSK 8-ario es de 4800 bps. El modulador toma bloques de $L = \log_2 8 = 3$ dígitos y le asigna a cada tripleta ángulos de desfase en la forma siguiente:

$$000 \rightarrow \phi_1 = 45^\circ; \quad 001 \rightarrow \phi_2 = 0^\circ; \quad 010 \rightarrow \phi_3 = 90^\circ; \quad 011 \rightarrow \phi_4 = 135^\circ$$

$$100 \rightarrow \phi_5 = -90^\circ; \quad 101 \rightarrow \phi_6 = -45^\circ; \quad 110 \rightarrow \phi_7 = -135^\circ; \quad 111 \rightarrow \phi_8 = 180^\circ$$

La frecuencia de portadora es de 1600 Hz, el ancho de banda del canal de 3 kHz, la relación S/N de 13 dB y la densidad espectral de ruido de 10^{-10} W/Hz.

- (a) Dibuje el Diagrama de Fresnel correspondiente.
- (b) Demuestre que la amplitud de la portadora es de 4,893 mV y que la probabilidad de error es $P_e = 9,294 \times 10^{-4}$.
- (b) Dibuje la señal PSK 8-aria de salida cuando la secuencia de entrada al modulador es de la forma 001010111100. Haga el dibujo con cuidado para distinguir los cambios de fase.
- 5.56. Si se considera la señal FSK M-aria como si estuviera formada por M señales de frecuencia f_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, M$, separadas en Δf , demuestre que el ancho de banda de la señal FSK M-aria se puede expresar en la forma $B_c \approx (M-1)\Delta f + 2f_s$, donde $f_s = f_b / \log_2 M$, siendo f_b la frecuencia de señalización a la entrada del modulador.
- 5.57. Por un canal de microondas se quiere transmitir datos binarios a una velocidad de 3 Mbps y se desea utilizar un modulador PSK 4-ario o uno FSK 4-ario. La probabilidad de error debe ser de 10^{-5} . Elija Ud. el sistema que mejor se adapte a la situación en la cual Ud. está trabajando.

Determine las relaciones $\left[\frac{S}{N} \right]_{\text{PSK}}$ y $\left[\frac{S}{N} \right]_{\text{FSK}}$ y los correspondientes anchos de banda. En

PSK hacer $B_c = 2f_s$ y en FSK, $\Delta f = 1,5f_s$; utilice los valores aproximados de la Fig. 5.86.

- 5.58. En un sistema PSK/DSSS la ganancia de procesamiento es de 1000. Se desea que la probabilidad de error esté por debajo de $1,081 \times 10^{-6}$. Utilice la Tabla del Apéndice D.4.

Demuestre que para ser efectiva, la potencia de la señal interferente debe estar, como mínimo, a 19,5 dB por arriba de la potencia de la señal útil. Nótese entonces que para que la interferencia pueda causar algún daño se necesitan grandes potencias de transmisión.

- 5.59. En un sistema CDMA se desea una probabilidad máxima de $1,081 \times 10^{-6}$. Haga una gráfica del número de usuarios M vs N , donde N es la ganancia de procesamiento. En particular, demuestre que con una ganancia de procesamiento de 2048 el sistema puede atender hasta 184 usuarios.

