

# CAPITULO III

## VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

### 3.1. INTRODUCCION

En el presente texto se estudian varios tipos de señal, tanto periódicas como no periódicas, cuyos valores son conocidos en todo instante ya sea en forma gráfica ya sea en forma analítica. Estos tipos de señal se denominan señales determinísticas. Pero también hay otras clases de señales como, por ejemplo, el ruido, acerca de las cuales sólo conocemos algunos parámetros, por cuanto ellas varían en forma muy compleja; éstas son las señales aleatorias. El comportamiento de estas señales solamente se puede predecir en forma aproximada porque en los mecanismos aleatorios que las producen hay un elemento de ignorancia o de incertidumbre sobre el cual no se tiene ningún control.

En la Teoría de la Comunicación las señales y procesos aleatorios desempeñan un papel muy importante; en efecto, en cada canal de comunicación siempre habrá señales de ruido que contaminan las señales mensaje portadoras de información. En la Teoría Estadística de la Comunicación tanto las señales mensaje como el ruido se tratan como variables aleatorias, cuyo comportamiento se puede predecir a partir de algunas de sus propiedades probabilísticas o estadísticas.

En este Capítulo se presentarán las ideas y conceptos básicos y esenciales de las variables y procesos aleatorios que complementarán el enfoque determinístico que hemos empleado hasta ahora. Como es normal en un texto introductorio de comunicaciones, no se profundizará demasiado en consideraciones teóricas avanzadas, pero sí se mostrarán aquellos aspectos de aplicación inmediata en el análisis y diseño de sistemas de comunicación prácticos. De la Teoría de la Probabilidad y de las Variables y Procesos Aleatorios hay una inmensa bibliografía que el lector interesado puede consultar.

### 3.2. NOCIONES DE LA PROBABILIDAD

#### 3.2.1. Definiciones de la Probabilidad

La teoría de la probabilidad es una rama de las matemáticas aplicadas que trata de los efectos de la suerte o de la casualidad. El resultado de un experimento cualquiera, por ejemplo, cuando lanzamos un dado o una moneda, depende de la combinación de muchos factores completamente impredecibles. Sin embargo, es posible predecir en cierta manera el comportamiento promedio de un número grande de experimentos. En consecuencia, la idea de “suerte” está ligada con la de “probabilidad” o “posibilidad”. Por ejemplo, cuando lanzamos una moneda podemos decir que las probabilidades de que caiga cara o sello son “igualmente posibles” o “igualmente probables”.

#### **Definición Empírica de la Probabilidad**

En un experimento repetido  $N$  veces, si el suceso  $A$  ocurre  $m$  veces, entonces  $P(A)$ , la probabilidad de que el suceso  $A$  ocurra, se define en la forma

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N} \tag{3.1}$$

Esta definición de la probabilidad se conoce con el nombre de “definición empírica de la probabilidad”. Se conoce también como “la definición de la frecuencia relativa”, por cuanto define la probabilidad como la frecuencia relativa de ocurrencia del suceso. Nótese que al definir  $P(A)$  como en (3.1), se supone implícitamente que el límite  $N \rightarrow \infty$  existe. Es evidente también, de la definición, que la probabilidad es siempre una magnitud positiva y menor o igual que la unidad, es decir,

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (3.2)$$

### Sucesos Mutuamente Excluyentes o Disjuntos

Se dice que en un conjunto de sucesos los sucesos son mutuamente excluyentes, disjuntos o incompatibles, si la ocurrencia de cualquier suceso impide la ocurrencia simultánea de cualquier otro suceso del conjunto. Por ejemplo, consideremos dos sucesos  $A$  y  $B$ , y un suceso que puede considerarse como resultado de uno cualquiera de los sucesos  $A$  y  $B$ . Este suceso será la unión de los sucesos  $A$  y  $B$ , es decir,  $(A + B)$ . Cuando el suceso  $(A + B)$  ocurre, es porque el suceso  $A$  o el suceso  $B$  o ambos han ocurrido. Si el experimento se lleva a cabo  $N$  veces, y si  $m_1$  y  $m_2$  son los resultados favorables a  $A$  y  $B$ , respectivamente, entonces la probabilidad del suceso  $(A + B)$  cuando  $A$  y  $B$  son disjuntos es

$$P(A + B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_1 + m_2}{N} = P(A) + P(B) \quad (3.3)$$

Si  $A$  y  $B$  no son disjuntos, entonces

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (3.4)$$

donde  $P(AB)$  es la probabilidad conjunta de la ocurrencia simultánea de los sucesos  $A$  y  $B$ .

Estos resultados se pueden extender para un número cualquiera de sucesos; en efecto, si  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  son sucesos disjuntos, entonces

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) \quad (3.5)$$

Si un experimento tiene  $N$  resultados  $A_1, A_2, \dots, A_n$  solamente, entonces esos  $N$  elementos se denominan “sucesos exhaustivos”. Se sigue entonces que si  $N$  sucesos  $A_n$  son disjuntos y exhaustivos, entonces

$$\sum_{n=1}^N P(A_n) = 1 \quad (3.6)$$

Puesto que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son disjuntos y exhaustivos, entonces el suceso  $\{A_1 + A_2 + \dots + A_n\}$  es el suceso cierto, que simbolizaremos con  $S$ ; por lo tanto,

$$P(S) = P(\text{suceso cierto}) = 1 \quad (3.7)$$

### Definición Axiomática de la Probabilidad

La definición de frecuencia relativa tiene la ventaja de ser muy intuitiva pero no es suficiente desde el punto de vista matemático. La probabilidad se puede definir desde un punto de vista axiomático, pero los axiomas que se postulan deben estar de acuerdo con el punto de vista de la frecuencia relativa, es decir, con aquellas relaciones que se observan en el mundo físico. El punto de vista axiomático de la probabilidad se puede resumir en la forma siguiente.

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

La probabilidad  $P(A)$  de un suceso  $A$  es un número que se asigna a dicho suceso. La única restricción que se impone sobre la función de probabilidad es que obedezca los siguientes postulados o axiomas:

$$\text{AXIOMA I: } P(A) \geq 0 \quad (3.8)$$

$$\text{AXIOMA II: } P(S) = 1 \quad (3.9)$$

donde  $S$  es el suceso cierto formado por todos los sucesos disjuntos y exhaustivos.

$$\text{AXIOMA III: } P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (3.10)$$

La extensión para un número infinito de sucesos no se sigue de (3.10) sino que es un nuevo axioma:

$$\text{AXIOMA IIIa: } P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots \quad (3.11)$$

si  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  son disjuntos.

### 3.2.2. Probabilidad Conjunta. Probabilidad Condicional. Independencia

#### Probabilidad Conjunta

Si en un experimento hay dos conjuntos de sucesos o resultados, entonces la probabilidad de observar un resultado particular  $A$  de un conjunto y un resultado  $B$  de otro conjunto, se denomina la “probabilidad conjunta del suceso  $AB$ ”, donde  $AB \neq \emptyset$  es la intersección de los sucesos  $A$  y  $B$ .

Si un experimento se repite  $N$  veces, y si  $N_{AB}$  es el número de veces que  $A$  y  $B$  ocurren simultáneamente, entonces la probabilidad del suceso  $AB$  se define en la forma

$$P(AB) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{AB}}{N} \quad (3.12)$$

#### Probabilidad Condicional

A menudo se presenta la situación donde la probabilidad de un suceso es influenciada por otro suceso, es decir, la probabilidad de un suceso  $A$  depende de si el suceso  $B$  ha o no ocurrido. Esta es la probabilidad condicional, la cual vamos a definir en la forma siguiente:

Sea un suceso  $B$  tal que  $P(B) \neq 0$ . Por definición, la “probabilidad del suceso  $A$  suponiendo el suceso  $B$ ” es

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (3.13)$$

$$\text{O también, si } P(A) \neq 0, \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (3.14)$$

donde  $P(AB)$  es la probabilidad conjunta de los sucesos  $A$  y  $B$ .

$$\text{Combinando (3.13) y (3.14), } P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A) \quad \text{si } P(B) \neq 0 \quad (3.15a)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} P(A|B) \quad \text{si } P(A) \neq 0 \quad (3.15b)$$

Las expresiones (3.15a) y (3.15b) son conocidas con el nombre de “Ecuaciones de Bayes” o “Regla de Bayes”.

### ♣ Ejemplo 3.1

Una caja contiene 5 resistencias de 100  $\Omega$  y 7 resistencias de 50  $\Omega$ . De la caja se extrae una resistencia y después otra sin reponer la primera. Vamos a determinar las siguientes probabilidades.

- (a) La probabilidad de que las dos resistencias sean de 100  $\Omega$
- (b) La probabilidad de que la primera fue de 100  $\Omega$  y la segunda de 50  $\Omega$
- (c) La probabilidad de que las dos resistencias son de 50  $\Omega$

Sean los sucesos  $A = \{\text{sacar una resistencia de } 100 \Omega\}$

$B = \{\text{sacar una resistencia de } 50 \Omega\}$

$A|A = \{\text{sacar una de } 100 \Omega \text{ habiendo sacado previamente una de } 100 \Omega\}$

$B|B = \{\text{sacar una de } 50 \Omega \text{ habiendo sacado previamente una de } 50 \Omega\}$

$$(a) P\{\text{sacar primero de } 100, \text{ segunda de } 100\} = P(A)P(A|A) = \frac{5}{12} \frac{4}{11} = 0,15$$

$$(b) P\{\text{sacar primero de } 100, \text{ segunda de } 50\} = P(A)P(B|A) = \frac{5}{12} \frac{7}{11} = 0,27$$

$$(c) P\{\text{sacar primero de } 50, \text{ segunda de } 50\} = P(B)P(B|B) = \frac{7}{12} \frac{6}{11} = 0,32$$

♣

### Independencia Estadística

El concepto de independencia es básico. Pudiera decirse que es debido a este concepto que la Teoría de la Probabilidad se ha desarrollado como una disciplina anexa y no ser considerada como un tópico más en la Teoría de las Medidas.

#### Definición

Se dice que dos sucesos A y B son estadísticamente independientes si y sólo si

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (3.16)$$

Esto quiere decir que si A y B son independientes, entonces la ocurrencia del suceso A no influencia en absoluto la ocurrencia del suceso B, y viceversa. Si esto es cierto, entonces la probabilidad condicional  $P(A|B)$  es simplemente la probabilidad  $P(A)$ ; esto es, si A y B son independientes, entonces

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B|A) = P(B) \quad (3.17)$$

Nótese que si A y B son independientes y disjuntos, entonces, por definición,

$$P(AB) = 0 \quad \text{para } A \text{ y } B \text{ independientes y disjuntos} \quad (3.18)$$

La noción de independencia se puede extender a más de dos sucesos. En efecto, si los sucesos A, B, C, D,..... son estadísticamente independientes, la probabilidad de ocurrencia conjunta es

$$P(ABCD.....) = P(A) P(B) P(C) P(D) \dots\dots\dots \quad (3.19)$$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

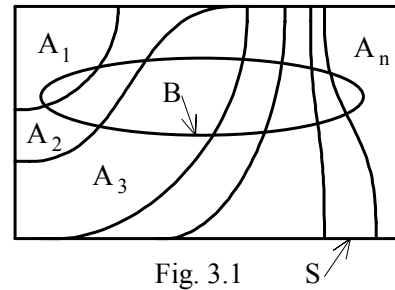
Nótese que si los sucesos son independientes por pares, es decir, si

$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$  para todo  $j, i$  y con  $j \neq i$ , no se sigue que los sucesos sean todos independientes.

**Probabilidad Total**

Vamos ahora a obtener una expresión conocida con el nombre de “Teorema de la Probabilidad Total”, el cual se utiliza para evaluar la probabilidad  $P(B)$  en términos de la probabilidad condicional  $P(B|A_i)$  y de la probabilidad  $P(A_i)$ , donde  $A_i$  será definida a continuación.

Se tiene un conjunto de  $n$  sucesos disjuntos y exhaustivos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  cuya suma es igual al suceso cierto  $S$ , Fig. 3.1, y sea  $B$  un suceso cualquiera contenido en  $S$ , es decir,  $B \subset S$ . Entonces, de la Fig. 3.1,



$$B = BS = B(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

De donde  $B = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$

Como estos elementos son todos disjuntos,

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + \dots + P(BA_n) \tag{3.20}$$

Pero de la probabilidad condicional, expresiones (3.13) o (3.14),

$$P(BA_i) = P(B|A_i)P(A_i) \tag{3.21}$$

Entonces,  $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i) \tag{3.22}$$

Este es el teorema sobre la probabilidad total. Hay que hacer notar que este teorema es válido aún cuando los  $n$  sucesos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  no sean exhaustivos, pero sí debe cumplirse que  $B \subset \{A_1 + A_2 + \dots + A_n\}$

**Teorema de Bayes**

El teorema de Bayes nos permite evaluar las llamadas “probabilidades a posteriori  $P(A_i|B)$ ” de los sucesos  $A_i$  en términos de las “probabilidades a priori  $P(A_i)$ ” y de la probabilidad condicional  $P(B|A_i)$ . En efecto, de las expresiones (3.13) y (3.14), se tiene

$$P(A_i|B) = P(A_i|B)P(B) = P(B|A_i)P(A_i), \text{ de donde}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)}{P(B)} P(B|A_i) \tag{3.23}$$

Reemplazando  $P(B)$  de (3.22), se obtiene

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)} \tag{5.24}$$

Este es el llamado “Teorema de Bayes”.

**Modelo Probabilístico de un Canal de Comunicaciones**

Consideremos el modelo probabilístico de un canal discreto de comunicaciones con  $M$  posibles mensajes de entrada  $\{m_i\}$ , con  $0 \leq i \leq M-1$ , y  $J$  posibles símbolos de salida  $\{r_j\}$ ,  $0 \leq j \leq J-1$ . En lo que concierne a este ejemplo, el modelo del canal se puede describir completamente [Wozencraft y Jacobs, 1967] mediante un conjunto de  $MJ$  probabilidades condicionales  $P(r_j|m_i)$  que especifica la probabilidad de recibir cada salida  $j$  condicionada a cada entrada  $i$ . Para valores pequeños de  $MJ$  es conveniente hacer un diagrama de estas probabilidades, a menudo llamadas “probabilidades de transición”, como se muestra en la Fig. 3.2(a). Este modelo describe un sistema de comunicación como el mostrado en la Fig. 3.2(b); sin embargo, hay que hacer notar que en un sistema de comunicación real generalmente no se conocen las probabilidades de transición.

Supongamos que conocemos el conjunto de las  $M$  probabilidades  $\{P(m_i)\}$  con las cuales ocurren los mensajes  $\{m_i\}$ . Estas probabilidades son las probabilidades “a priori” de los mensajes, es decir, las probabilidades antes de la recepción. Nuestro problema es especificar un receptor que, de acuerdo con el símbolo  $r_j$  recibido, formule una decisión óptima en relación a qué mensaje  $m_i$  fue transmitido. Cuando decimos “óptimo”, queremos decir que la probabilidad de una decisión correcta  $P(\mathcal{C})$  es máxima.

En una larga secuencia de mensajes independientes puede esperarse que el receptor óptimo decida correctamente más a menudo que un receptor no óptimo; por ejemplo, el filtro acoplado que se verá en el Capítulo V es un receptor óptimo.

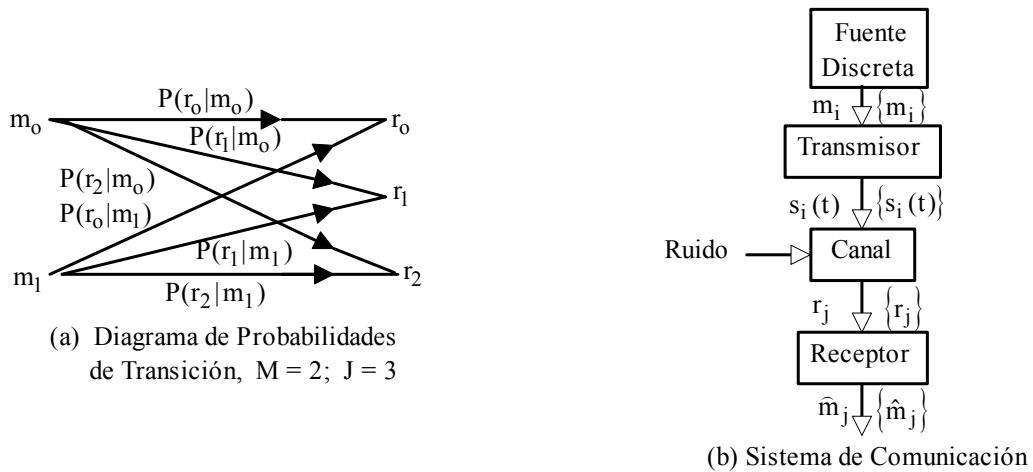


Fig. 3. 2

La operación del canal se puede describir como un conjunto  $S$  que comprende  $MJ$  elementos o puntos cada uno identificado mediante la dupla  $(m_i, r_j)$  y cuyas probabilidades son, de la expresión (3.13),

$$P(m_i, r_j) = P(m_i)P(r_j|m_i) \tag{3.25}$$

También, 
$$P(m_i|r_j) = \frac{P(m_i, r_j)}{P(r_j)} \tag{3.26}$$

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

En la Fig. 3.3 se muestra la distribución de las probabilidades en un sistema típico con  $M = 2$  y  $J = 3$ . La probabilidad de cada par  $(m_i, r_j)$  está representada por su correspondiente área. La suma de todas estas áreas es la unidad

Antes de la transmisión, la probabilidad “a priori” de que un mensaje  $m_i$  sea transmitido es  $P(m_i)$ . Después de la transmisión, para un  $r_j$  dado recibido, la probabilidad de que  $m_i$  fue transmitido es  $P(m_i|r_j)$ , la cual es la probabi-

lidad “a posteriori”, una probabilidad condicional. El efecto de la transmisión sobre el canal es entonces el de alterar la probabilidad de cada mensaje de entrada de su valor “a priori” a su valor “a posteriori”.

La especificación de un receptor es simplemente la especificación de una transformación desde el conjunto o espacio de salida del canal  $\{r_j\}$ , es decir, cada símbolo recibido  $r_j$  debe ser atribuido a una y sólo una de las posibles entradas  $m_i$ . Sea  $\hat{m}(j)$  una entrada dada en el conjunto  $\{m_i\}$  a la cual el receptor atribuye el símbolo recibido  $r_j$ . Entonces la probabilidad condicional  $P(\mathcal{C}|r_j)$  de una decisión correcta para un  $r_j$  recibido, es justamente la probabilidad de que el mensaje  $\hat{m}(j)$  fue en efecto transmitido.

Podemos escribir entonces

$$P(\mathcal{C}|r_j) = P(\hat{m}(j)|r_j) \quad (3.27)$$

Es evidente que  $P(\mathcal{C}|r_j)$  puede ser maximizada si se elige el elemento  $\hat{m}(j)$  de  $\{m_i\}$  con la probabilidad “a posteriori” más alta. Esta “regla o algoritmo de decisión”, es decir, la elección de la máxima probabilidad “a posteriori”, aplicada independientemente a cada símbolo recibido  $r_j$ , determina el receptor óptimo. Si varios  $m_i$  tienen la misma (máxima) probabilidad “a posteriori”, entonces  $r_j$  puede ser asignado a cualquiera de los  $m_i$  correspondientes sin pérdida de optimalidad.

Del teorema de la probabilidad total, expresión (3.22), la probabilidad incondicional de una decisión correcta  $P(\mathcal{C})$  para un  $r_j$  recibido dado es

$$P(\mathcal{C}) = \sum_{j=0}^{J-1} P(\mathcal{C}|r_j)P(r_j) \quad (3.28)$$

Las cantidades positivas  $P(r_j)$  son independientes de la regla de asignación; por lo tanto, la suma sobre  $j$  es maximizada sólo y solamente si cada uno de los términos  $P(\mathcal{C}|r_j)$  es máximo, y por lo tanto la regla de decisión es la óptima.

No es necesario calcular la probabilidad  $P(r_j)$  a fin de determinar la transformación óptima  $\{\hat{m}(j)\}$  y la probabilidad de error resultante. En efecto, de la expresión (3.26), sea  $m_k$  el mensaje cuya probabilidad “a posteriori” es la máxima; entonces,

$$P(m_k|r_j) \geq P(m_i|r_j) \quad \text{para todo } i \neq k \quad (3.29)$$

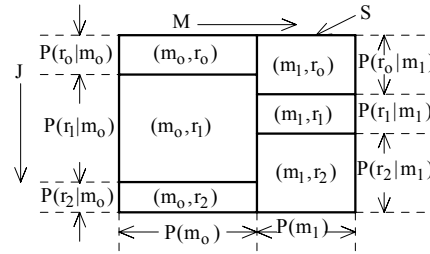


Fig. 3.3

de donde  $\hat{m}(j) = m_k$  si y solamente si

$$P(m_k)P(r_j|m_k) \geq P(m_i)P(r_j|m_i) \quad \text{para todo } i \neq k \quad (3.30)$$

Una vez que el conjunto  $\{\hat{m}(j)\}$ , con  $j = 0, 1, 2, \dots, J-1$ , se ha determinado a partir de la expresión (3.30), la probabilidad de una decisión correcta  $P(\mathcal{C})$  se puede calcular a partir de las expresiones (3.26), (3.27) y (3.28), es decir,

$$P(\mathcal{C}) = \sum_{j=0}^{J-1} P(\hat{m}(j), r_j) \quad (3.31)$$

donde  $P(\hat{m}(j), r_j)$  representa la probabilidad de que  $\hat{m}(j)$  fue transmitido y  $r_j$  recibido. Finalmente, la probabilidad de error, es decir, la probabilidad de una decisión falsa es

$$P(\mathcal{E}) = 1 - P(\mathcal{C}) \quad (3.32)$$

### ♣ Ejemplo 3.2

Consideremos un canal binario con dos símbolos de entrada  $\{a, b\}$  y dos símbolos de salida  $\{0, 1\}$ , como se muestra en la Fig. 3.4.

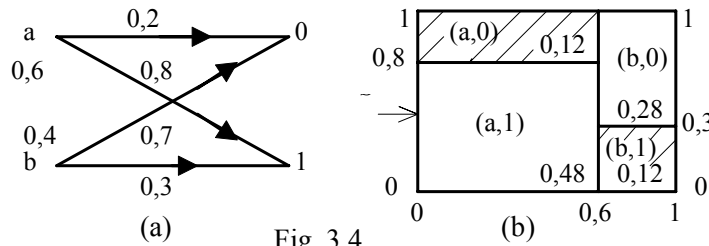


Fig. 3.4

Las probabilidades de entrada o probabilidades “a priori” son:  $P(a) = 0,6$  y  $P(b) = 0,4$

Las probabilidades de transición del canal son:

$$P(0 | a) = 0,2; \quad P(1 | a) = 0,8; \quad P(0 | b) = 0,7; \quad P(1 | b) = 0,3$$

Entonces,

$$P(a,0) = P(a) P(0 | a) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$$

$$P(a,1) = P(a) P(1 | a) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$$

$$P(b,0) = P(b) P(0 | b) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$$

$$P(b,1) = P(b) P(1 | b) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

Vemos que  $P(b,0) > P(a,0)$  y  $P(a,1) > P(b,1)$

Por consiguiente,  $\hat{m}(0) = b$  y  $\hat{m}(1) = a$ ; y de la expresión (3.31),

$$P(\mathcal{C}) = P(b,0) + P(a,1) = 0,28 + 0,48 = 0,76$$

$$P(\mathcal{E}) = 1 - P(\mathcal{C}) = 1 - 0,76 = 0,24$$

Los puntos o áreas correspondientes al error se muestran marcados en la Fig. 3.4.

♣



### 3.3. VARIABLES ALEATORIAS. FUNCIONES DE PROBABILIDAD

#### 3.3.1. Variables Aleatorias Discretas

Un experimento dado puede tener un cierto número de resultados, y cada uno de ellos se puede considerar como un elemento de un conjunto o espacio. Por ejemplo, en el ejemplo del lanzamiento de un dado, el espacio consiste de seis elementos: las seis caras del dado. El conjunto de elementos que consiste de todos los resultados posibles y distintos de un experimento se denomina entonces “espacio de las muestras” del experimento. En este caso la palabra “espacio” se usa como sinónimo de la palabra “conjunto”. Los elementos individuales o puntos del espacio de las muestras se denominan “puntos de muestra”. Por consiguiente, cada punto de muestra corresponde a un resultado distinto del experimento. En un experimento dado la elección del espacio de las muestras no es unívoca sino que dependerá primordialmente de lo que consideremos como resultados del experimento.

En general, se asigna un número real a cada resultado o punto de muestra del experimento. Si hay  $n$  resultados, se asigna los números reales  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  a estos resultados, uno a cada uno. El resultado de un experimento aleatorio es, entonces, una “variable aleatoria  $X$ ”, la cual puede tomar cualquiera de los  $n$  valores discretos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (Nota: la variable aleatoria (VA) se representará con letras mayúsculas, y los valores particulares que dicha variable tome se representarán con letras minúsculas). En realidad, una VA es una función en el sentido convencional; por ejemplo, una función  $f(t)$  asigna valores a  $t$  de acuerdo con una cierta regla; similarmente, una VA  $X$  asigna valores numéricos (números reales) a cada punto de muestra. En otras palabras,  $X$  es la representación general de los valores observados, mientras que  $x_i$  representa los valores posibles asignados.

Se asigna también una probabilidad a cada valor de la VA  $X$ . Por lo tanto,  $P_X(x_i)$  es la probabilidad del resultado o suceso al cual fue asignado el valor  $x_i$ . En esta notación el subíndice se refiere a la VA  $X$  y el argumento es el valor particular de la VA. El subíndice es esencial para indicar la asociación de las funciones de probabilidad con una VA dada. Esto es muy importante, sobre todo cuando se trabaja con varias VA; en este caso, cada subíndice identifica la función o VA dada. Nótese que si en el experimento hay un total de  $n$  resultados  $x_i$  disjuntos y exhaustivos, entonces, de acuerdo con la expresión (5.6), se verifica que

$$\sum_{i=1}^n P_X(x_i) = 1 \quad (3.33)$$

Una VA discreta se puede describir entonces mediante la llamada “función de frecuencia”

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) \quad (3.34)$$

donde  $x_i$  son los valores que  $X$  puede tomar y  $P(X = x_i)$  su probabilidad correspondiente.

A menudo es conveniente describir en forma gráfica las probabilidades asignadas en relación con los valores de la VA asignados. Esto nos lleva al concepto de “función de distribución de probabilidad de  $X$ ”. En efecto, la “función de distribución acumulativa de una VA  $X$ ”, se define en la forma

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (3.35)$$

Nótese que la función de distribución  $F_X(x)$  depende tanto de la VA  $X$  como del valor del argumento. La función  $F_X(x)$  es simplemente la probabilidad de que un valor observado sea igual o menor que cierta cantidad  $x$ , y se aplica tanto en procesos discretos como en procesos continuos.

Como  $F_X(x)$  está basada directamente en el concepto de probabilidad, ella tiene las siguientes propiedades, que daremos sin demostrarlas:

$$1. 0 \leq F_X(x) \leq 1 \tag{3.36}$$

$$2. F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \text{ si } x_1 < x_2 \tag{3.37}$$

$$3. F_X(-\infty) = 0 \tag{3.38}$$

$$4. F_X(+\infty) = 1 \tag{3.39}$$

Para una VA  $X$  discreta con probabilidades  $P_X(x_i)$ , la función  $F_X(x)$  se puede expresar en la forma

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^n P_X(x_i) \cdot u(x - x_i) \tag{3.40}$$

La función de distribución  $F_X(x)$  de una VA  $X$  discreta consta entonces de una serie de discontinuidades en los puntos  $x = x_i$ ; es una función en escalera donde la altura de cada escalón es  $P_X(x_i)$ . Entre discontinuidades el valor de  $F_X(x)$  es constante, y en los puntos de discontinuidad se supone continuidad hacia la derecha.

La “función de frecuencia” de una VA  $X$  discreta, que en adelante se denominará “densidad de probabilidad”, vendrá dada entonces por

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \sum_{i=1}^n P_X(x_i) \delta(x - x_i) \tag{3.41}$$

♣ **Ejemplo 3.3**

El experimento es el tiro de un dado, pero para efectos del presente ejemplo vamos a suponer que las probabilidades  $P_X(x_i)$  asignadas a cada cara  $x_i$  son diferentes. En la Fig. 3.5 se dan los datos del experimento y se grafican las funciones de probabilidad  $p_X(x)$  y  $F_X(x)$ .

Cara $x_i$	$P_X(x_i)$	$F_X(x_i)$
1	0,2	0,2
2	0,15	0,35
3	0,15	0,50
4	0,3	0,80
5	0,1	0,90
6	0,1	1,00

(a) Tabla de Valores

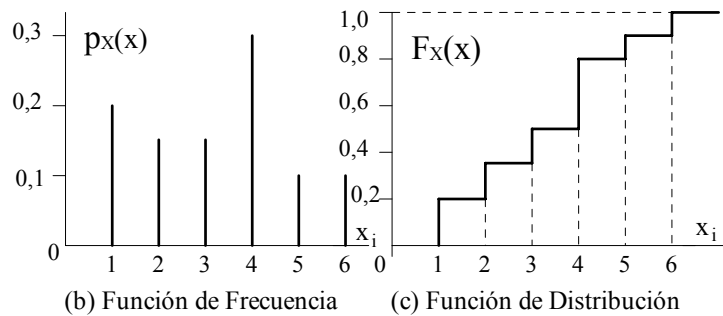


Fig. 3.5



### 3.3.2. Variables Aleatorias Continuas

Hemos visto el caso en que el espacio de las muestras consistía de elementos discretos (puntos de muestra) y como resultado la VA respectiva solamente podía tomar valores discretos. Pero hay muchos casos, sobre todo en el mundo físico, en los cuales el espacio de las muestras es continuo y contiene infinitos (no contables) puntos de muestra y no puede ser representado por un conjunto de puntos discretos. Si el espacio de las muestras es continuo, entonces la respectiva VA, definida en este espacio, será una variable aleatoria continua. Sin embargo, en el caso de un espacio de muestras continuo, el problema de asignación de probabilidades a la correspondiente VA se hace más complicado. Un espacio de muestras continuo contiene infinitos puntos (no contables) y es evidente que la probabilidad de observar un punto dado es cero. Por ejemplo, sea  $T$  la temperatura de una sala; esta temperatura puede tomar cualquier valor dentro de la gama de infinitas temperaturas comprendidas dentro de un intervalo  $(T_1, T_2)$ , y, por lo tanto, la probabilidad de observar una temperatura dada es cero. De otra manera, si se asignara una probabilidad a un punto dado, la suma de todas las probabilidades sería infinita, lo cual estaría en contradicción con la condición (3.6).

Una VA continua puede tomar valores en el intervalo continuo  $(-x_1, x_2)$ . En el caso más general, es evidente que la gama de valores puede extenderse desde  $-\infty$  a  $+\infty$ . Como ya lo hemos observado, la probabilidad de que la VA  $X$  tome un cierto valor es cero, lo cual no tiene significado; pero sí lo tiene cuando nos preguntamos cuál es la probabilidad de que la VA  $X$  tome valores iguales o menores que cierto valor  $x$ . En este caso, el concepto de función de distribución es aún válido, pero es más conveniente definir una función cuya "área" sea la probabilidad de ocurrencia dentro de una gama dada. Como se está igualando una área con probabilidad, la función en cuestión se denomina "función de densidad de probabilidad", y es el equivalente, en el caso continuo, de la función de frecuencia  $P(X = x_i)$  del caso discreto, expresión (3.34).

La "función de densidad de probabilidad,  $p_X(x)$ " de una VA  $X$  se define en la forma

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (3.42)$$

La probabilidad de observar la VA  $X$  en el intervalo  $(x, x + dx)$  es igual a  $p_X(x)\Delta x$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Esta probabilidad es simplemente el área encerrada por la curva  $p_X(x)$  en el respectivo intervalo, como puede observarse en la Fig. 3.6.

Integrando (3.42), se tiene

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x') dx' = P(X \leq x) \quad (3.43)$$

Podemos demostrar también que

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2) &= F_X(x_2) - F_X(x_1) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} p_X(x) dx \quad (3.44) \end{aligned}$$

La probabilidad de observar  $X$  en cualquier intervalo  $(x_1, x_2)$  viene dada por el área bajo dicho intervalo, como se muestra en la Fig. 3.6.

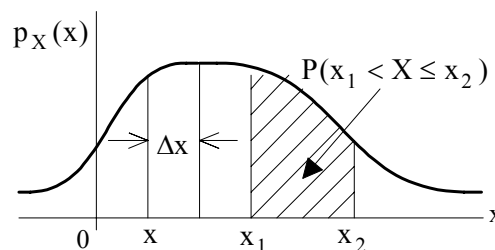


Fig. 3.6. Densidad de Probabilidad

$$\text{Puesto que } F_X(+\infty) = 1, \text{ entonces, } \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1 \quad (3.45)$$

Esta expresión, equivalente a la (3.33) en el caso discreto, es evidente por el hecho de que la integral (3.45) representa la probabilidad de observar  $X$  en el intervalo  $(-\infty, +\infty)$ , lo cual es una certitud. Nótese también que para que una función de  $x$  se pueda considerar como una densidad de probabilidad, ella debe cumplir con la condición (3.45). Como la probabilidad es una magnitud positiva (AXIOMA I), la densidad de probabilidad deberá ser siempre positiva; la función de densidad de probabilidad deberá cumplir entonces con las condiciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1 \quad \text{y} \quad p_X(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \quad (3.46)$$

Nótese que el hecho de que la probabilidad de observar  $X$  a cierto valor  $x$  es cero, no necesariamente significa que la VA  $X$  no tomará jamás ese valor particular. Por ejemplo, la probabilidad de que la temperatura  $T$  de la sala tome un cierto valor  $T_0$  es cero, pero eso no significa que la temperatura de la sala nunca podrá ser  $T_0$ .

#### ♣ Ejemplo 3.4

Sea una VA  $X$  cuya función de distribución es  $F_X(x) = \frac{1}{4}[r(x-2) - r(x-6)]$ , como se muestra en la Fig. 3.7(a).

La correspondiente función de densidad es, de (3.41) y (1.13)

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{4}[u(x-2) - u(x-6)] = \frac{1}{4} \Pi\left(\frac{x-4}{4}\right)$$

Puesto que  $p_X(x)$  es constante en el intervalo  $(2, 6)$ , en este caso se dice que la VA  $X$  está distribuida uniformemente en ese intervalo. En la Fig. 3.7 se muestra  $F_X(x)$  y  $p_X(x)$ .

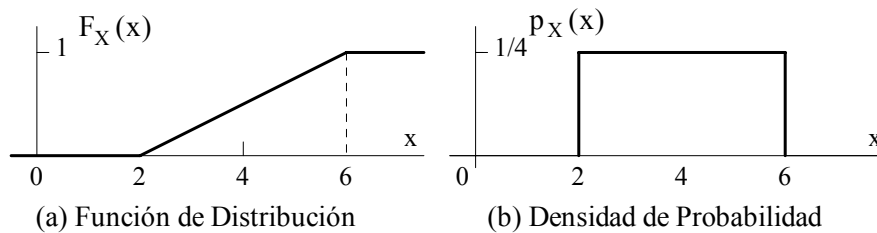


Fig. 3.7.

Por ejemplo, de la Fig. 3.7(b), podemos ver que

$$P(X \leq 3) = \frac{1}{4}; \quad P(3 < X \leq 5) = \frac{1}{2} \quad \clubsuit$$

Se tiene también la situación donde la función de probabilidad es mixta, es decir, que  $p_X(x)$  es continua pero contiene impulsos. Esta situación la podemos considerar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.5.**

Consideremos el caso de una VA  $X$  cuya densidad de probabilidad se muestra en la Fig. 3.8(a). Si esta señal se pasa por un limitador que recorta el voltaje en cierto valor  $+A$ , la nueva densidad de probabilidad aparecerá en la forma mostrada en la Fig. 3.8(b). El impulso que aparece en  $x = A$  tiene un área o intensidad

$$k = \int_A^{\infty} p_X(x) dx = F_X(\infty) - F_X(A) = 1 - F_X(A)$$

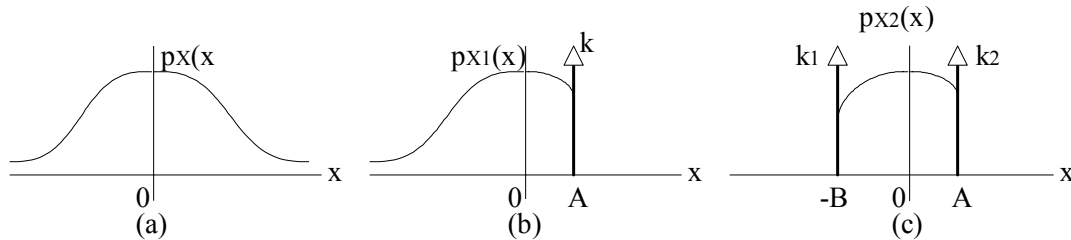


Fig. 3.8

La Fig. 3.8(c) es para el caso cuando el limitador recorta el voltaje dentro de los valores  $-B$  y  $+A$ . El área de los impulsos es

$$k_1 = \int_{-\infty}^{-B} p_X(x) dx = F_X(-B) - F_X(-\infty) = F_X(-B)$$

$$k_2 = \int_A^{\infty} p_X(x) dx = 1 - F_X(A)$$

Como  $p_X(x)$  es una función par de  $x$ , y si  $B = A$ , entonces

$$p_X(A) = p_X(-A) \quad \text{y} \quad F_X(A) = 1 - F_X(-A), \quad \text{de donde}$$

$$F_X(-A) = 1 - F_X(A)$$

Entonces el impulso en  $-B = -A$  tendrá un área  $k_1 = F_X(-A) = 1 - F_X(A) = k_2$

Por consiguiente, el área de los impulsos es la misma.

De lo anterior se desprende que la probabilidad de observar un voltaje dado es cero en la región donde  $p_X(x)$  es continuo. Tal es el caso para los intervalos  $(-\infty, \infty)$  como en la Fig. 3.8(a); en el intervalo  $(-\infty < x < A)$  como en la Fig. 3.8(b), y en el intervalo  $-B < x < A$  como en la Fig. 3.8(c). Sin embargo, en la Fig. 3.8(b) la probabilidad de observar el voltaje de amplitud  $A$  es  $k$ ; y en la Fig. 3.8(c) la probabilidad de observar los voltajes de amplitud  $-B$  y  $A$  es  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente.



### 3.3.3. Distribuciones Conjuntas

Un experimento aleatorio puede tener dos resultados. Los puntos de muestra de tal experimento tienen dos atributos o grados de libertad. Por ejemplo, consideremos el experimento aleatorio del tiro al blanco. La posición de cada disparo es un punto aleatorio que se puede describir mediante dos números en un sistema de coordenadas apropiado. Por lo tanto, cada punto de muestra se puede describir mediante una dupla de números. Podemos asociar entonces dos VA continuas en este espacio y hacer que la VA  $X$  sea la coordenada  $x$ , y que la VA  $Y$  sea la coordenada  $y$  de cada disparo. Cada punto de muestra se describirá entonces mediante la dupla  $(x, y)$ .

La “función de distribución conjunta de dos VA  $X$  e  $Y$ ,  $F_{XY}(x, y)$ ” se define en la forma

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x; Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p_{XY}(x', y') dx' dy' \quad (3.47)$$

La correspondiente “función de densidad de probabilidad conjunta,  $p_{XY}(x, y)$ ”, es

$$p_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) \quad (3.48)$$

El suceso de observar  $X$  en el intervalo  $(-\infty, +\infty)$  y de observar  $Y$  en el mismo intervalo, evidentemente es una certitud, o sea que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx dy = 1 \quad (3.49)$$

El volumen total dentro de la curva de la densidad de probabilidad conjunta  $p_{XY}(x, y)$  debe ser siempre la unidad. Debe cumplirse también que  $p_{XY}(x, y) \geq 0$  para todo  $x$  e  $y$ .

Cuando se trabaja con probabilidades conjuntas de dos VA  $X$  e  $Y$ , las densidades de probabilidad individuales  $p_X(x)$  y  $p_Y(y)$ , llamadas “densidades marginales”, se pueden obtener a partir de  $p_{XY}(x, y)$ . En efecto, se demuestra [Papoulis, 1965] que las densidades marginales son

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dy \quad y \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx \quad (3.50)$$

y si las VA  $X$  e  $Y$  son independientes, entonces

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad y \quad p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad (3.51)$$

y en general, para  $n$  VA independientes,

$$p_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n) \quad (3.52a)$$

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) \quad (3.52b)$$

#### ♣ Ejemplo 3.6

Vamos a definir la función de densidad conjunta de dos VA  $X$  e  $Y$  en la forma

$$p_{XY}(x, y) = K \exp[-(x + y)] \cdot u(x) \cdot u(y)$$

Primero vamos a determinar el valor de  $K$  para que  $p_{XY}(x, y)$  sea verdaderamente una función de densidad de probabilidad conjunta. De (3.49),

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K \exp[-(x+y)]u(x)u(y)dx dy = K \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-x) \exp(-y)dx dy = 1$$

$$K \int_0^{\infty} \exp(-x)dx \cdot \int_0^{\infty} \exp(-y)dy = 1$$

pero cada una de estas integrales es igual a la unidad, de donde

$$K = 1 \quad y \quad p_{XY}(x, y) = \exp[-(x+y)] \cdot u(x) \cdot u(y)$$

La función de distribución conjunta es, de (3.47),

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x \exp[-(x'+y')]u(x')u(y')dx' dy' = \int_0^x \exp(-x')dx' \int_0^y \exp(-y')dy'$$

$$F_{XY}(x, y) = [1 - \exp(-x)]u(x) \cdot [1 - \exp(-y)]u(y)$$

y las densidades de probabilidad marginales, de (3.50),

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x+y)]u(x)u(y)dy = \exp(-x)u(x) \int_0^{\infty} \exp(-y)dy$$

$$p_X(x) = \exp(-x)u(x), \quad y \text{ de la misma forma,}$$

$$p_Y(y) = \exp(-y)u(y)$$

Nótese que se cumple que  $p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ ; por lo tanto las VA X e Y son independientes.

También,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x')dx' = [1 - \exp(-x)]u(x)$  y de la misma forma

$$F_Y(y) = [1 - \exp(-y)]u(y)$$

Se verifica, puesto que las VA X e Y son independientes, que

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

♣

**Distribución Condicional**

El concepto de probabilidad condicional de un suceso A dado un suceso B, expresión (3.13), se puede extender a la función de distribución y densidad de probabilidad [Lathi, 1968].

Sean dos variables aleatorias X e Y. Se puede definir la función de distribución condicional de X dada  $Y \leq y$  en la forma

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{F_{XY}(x, y)}{F_Y(y)} \quad \text{para } F_Y(y) \neq 0 \quad (3.53)$$

Si la condición es que  $Y = y$  en vez de  $Y \leq y$ , se tiene

$$F_{X|Y}(x|Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^x p_{XY}(x', y)dx'}{p_Y(y)} \quad (3.54)$$

Mediante diferenciación de (3.54) respecto a x, se obtiene

$$p_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)} \quad (3.55)$$

y en forma similar, 
$$p_{Y|X}(y|X=x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)} \quad (3.56)$$

Combinando (3.55) y (3.56) obtenemos la Regla de Bayes para señales aleatorias continuas.

$$p_{X|Y}(x|Y=y) \cdot p_Y(y) = p_{Y|X}(y|X=x) \cdot p_X(x) \quad (3.57a)$$

o también 
$$\frac{p_{X|Y}(x|Y=y)}{p_X(x)} = \frac{p_{Y|X}(y|X=x)}{p_Y(y)} \quad (3.57b)$$

### ♣ Ejemplo 3.7

La densidad de probabilidad conjunta de dos VA  $X$  e  $Y$  viene dada por

$$p_{XY}(x,y) = (x+y) \cdot \Pi(x - \frac{1}{2}) \cdot \Pi(y - \frac{1}{2})$$

Vamos a determinar todas las funciones de distribución y densidades de probabilidad asociadas.

De (3.47), 
$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x (x'+y') \Pi(x'-1/2) \Pi(y'-1/2) dx' dy'$$

$$F_{XY}(x,y) = \int_0^y \int_0^x (x'+y') dx' dy' \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$$

Efectuando la integración obtenemos

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2}(x+y) & \text{para } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{para } 1 \leq x; 1 \leq y \\ 0 & \text{para } x < 0; y < 0 \end{cases}$$

$F_{XY}(x,y)$  se puede escribir en una forma más compacta:

$$F_{XY}(x,y) = \frac{xy}{2}(x+y) \cdot \Pi(x - \frac{1}{2}) \cdot \Pi(y - \frac{1}{2}) + u(x-1) \cdot u(y-1)$$

De (3.50), 
$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) \Pi(x-1/2) \Pi(y-1/2) dy$$

$$p_X(x) = \int_0^1 (x+y) dy = \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = (x + \frac{1}{2}) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

$$p_X(x) = (x + \frac{1}{2}) \cdot \Pi(x - \frac{1}{2})$$



y de la misma manera,  $p_Y(y) = (y + \frac{1}{2}) \cdot \Pi(y - \frac{1}{2})$

De (3.55),

$$p_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{x+y}{y+1/2} \cdot \Pi(x - \frac{1}{2}) \cdot \Pi(y - \frac{1}{2})$$

De (3.56),  $p_{Y|X}(y|X=x) = \frac{x+y}{x+1/2} \Pi(x - \frac{1}{2}) \cdot \Pi(y - \frac{1}{2})$

♣

### 3.4. FUNCIONES DE PROBABILIDAD ESPECIALES

En los problemas que se presentan en el análisis de sistemas de comunicación aparecen con frecuencia ciertas funciones de probabilidad que describen situaciones o procesos físicos. Por considerarlo de importancia, vamos a examinar algunas de estas funciones especiales y daremos, sin demostrarlos, algunos de sus parámetros.

#### 3.4.1. Distribución Normal o Gaussiana

Se dice que una VA  $X$  está distribuida normalmente o en forma gaussiana, si su función de densidad de probabilidad es la curva de Gauss [Korn y Korn, 1968], es decir,

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.58)$$

También,  $F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x'^2}{2\sigma^2}\right) dx' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$  (3.59)

donde  $\sigma$  es la desviación de la VA  $X$ . En este caso  $\sigma$  se conoce con el nombre de “desviación normal”, mientras que  $\sigma^2$  en la “varianza” o valor eficaz de la VA  $X$ . La función  $\operatorname{erf}(x)$  se define en el Apéndice D.4. En la Fig. 3.9 se muestran las formas típicas centradas de  $p_X(x)$  y  $F_X(x)$ .

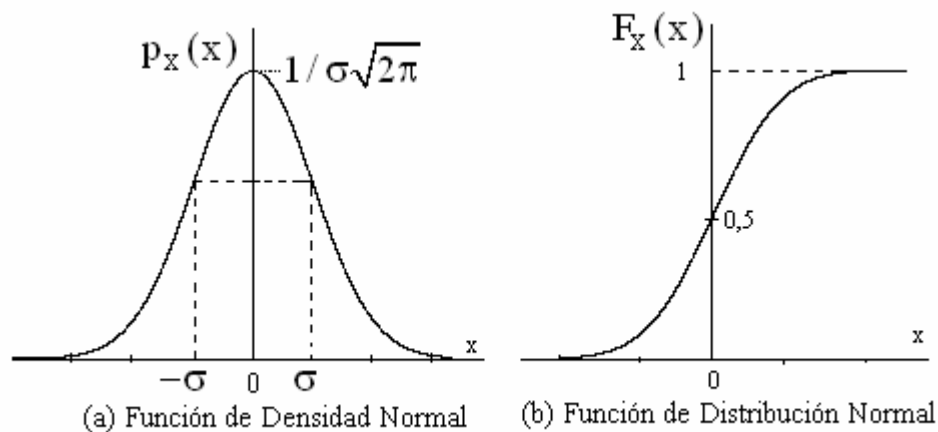


Fig. 3.9. Distribuciones Normales Centradas

En las distribuciones no centradas  $p_X(x)$  y  $F_X(x)$  están desplazadas a lo largo del eje  $x$  en una cantidad  $x_0$ ; en este caso,

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]; F_X(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \quad (3.60)$$

Estas distribuciones no centradas se muestran en la Fig. 3.10.

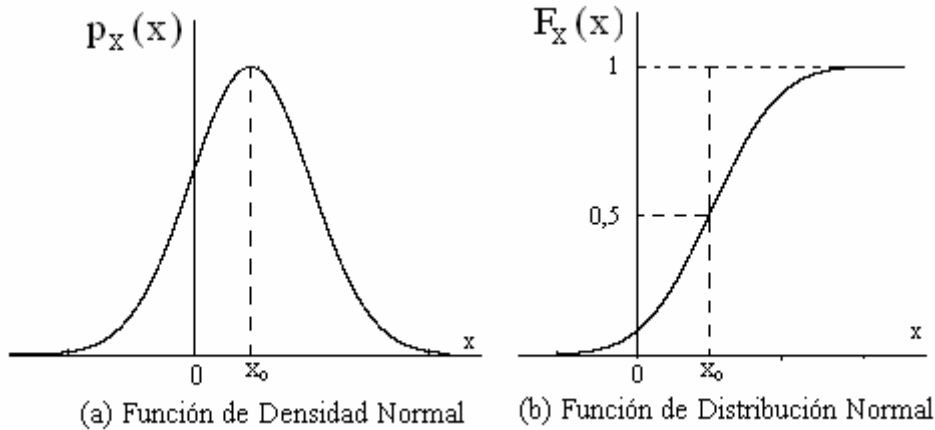


Fig. 3.10. Distribuciones Normales no Centradas

También, por definición,

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x_2 - x_0}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] \quad (3.61)$$

La distribución gaussiana se determina completamente a partir de su valor promedio  $x_0$  y la desviación estándar  $\sigma$ . Se demuestra también que cualquier combinación lineal de variables aleatorias gaussianas es también gaussiana.

### ♣ Ejemplo 3.8. Probabilidad de Error en un Sistema de Comunicación Binario

Como sabemos, un sistema de comunicación binario es aquel que transmite solamente dos posibles mensajes. La forma más sencilla de modulación binaria es la modulación OOK, que veremos en el Capítulo V, en la cual se transmite una señal de 0 ó A volts (V). Durante la transmisión, la señal se contamina con ruido (que suponemos blanco, gaussiano, de valor promedio cero y densidad espectral  $\eta/2$ ), y el algoritmo de detección establece que si la señal recibida y demodulada es igual o mayor que un cierto umbral  $V_s$ , se supone que un “UNO” (A V) fue transmitido; en caso contrario, se supone que un “CERO” (0 V) fue transmitido. En el receptor, la señal recibida es aleatoria (por su contenido de ruido) con una función de densidad de probabilidad normal de valor promedio A y varianza  $\sigma^2$ . El ancho de banda del canal es B.

Vamos a determinar la probabilidad de error en el receptor, es decir, la probabilidad de que un “UNO” transmitido sea interpretado como un “CERO” en el receptor, o viceversa.

La varianza  $\sigma^2$  es la potencia promedio de ruido que, de acuerdo con la expresión (2.146) es  $\sigma^2 = \eta B$ . Sea X la señal recibida; si el valor promedio de la señal recibida es A, la densidad de probabilidad de la señal recibida será

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\eta B}} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\eta B}\right] \quad (3.62)$$

Suponiendo que toda señal recibida de amplitud mayor o igual que  $V_s = A/2$  es un “UNO”, entonces la probabilidad de que un “UNO” transmitido sea interpretado como un “CERO”

en el receptor es simplemente la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  sea menor que  $A/2$ . La probabilidad de error  $P_e$  será entonces,

$$P_e = P\left\{X < \frac{A}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\eta B}} \int_{-\infty}^{A/2} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\eta B}\right] dx \quad (3.63)$$

Con el cambio de variables  $u = \frac{x-A}{\sqrt{2\eta B}}$  y haciendo  $K = \sqrt{\frac{A^2}{8\eta B}}$ , la integral queda en la forma

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-K} \exp(-u^2) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-u^2) du - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^K \exp(-u^2) du$$

De la definición de  $\text{erf}(x)$  y  $\text{erfc}(x)$  dadas en el Apéndice D.4,

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(K) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2}{8\eta B}}\right) \quad (3.64)$$

Nótese que este enfoque es más realista que el enfoque tratado en el Ejemplo 3.2, en donde se considera conocidas las probabilidades de transición, cosa que en la práctica no es posible. ♣

### Ejemplo 3.9.

Sea una VA  $X$  gaussiana no centrada, con  $x_0 = 1000$  y  $\alpha = 50$ . Determine la probabilidad de que  $X$  esté entre 900 y 1050.

De (3.62), con  $x_2 = 1050$  y  $x_1 = 900$ ,

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[ \text{erf}\left(\frac{1050-1000}{50\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{900-1000}{50\sqrt{2}}\right) \right] = 0,819$$

♣

### 3.4.2. Distribución de Poisson

Si una VA  $X$  es de tipo discreto y toma valores en los puntos  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  con probabilidades

$$P_k(\tau) = \frac{(\alpha\tau)^k}{k!} \exp(-\alpha\tau) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{y } \alpha > 0, \quad (3.65)$$

entonces se dice que la VA  $X$  tiene una “distribución de Poisson”, cuyo parámetro es la constante positiva  $\alpha$ .

La correspondiente densidad de probabilidad es una secuencia de impulsos de la forma

$$p_X(x) = \exp(-\alpha\tau) \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha\tau)^k}{k!} \delta(x-k) \quad (3.66)$$

En la Fig. 3.11 se muestra  $p_X(x)$  y  $F_X(x)$  de la distribución de Poisson.

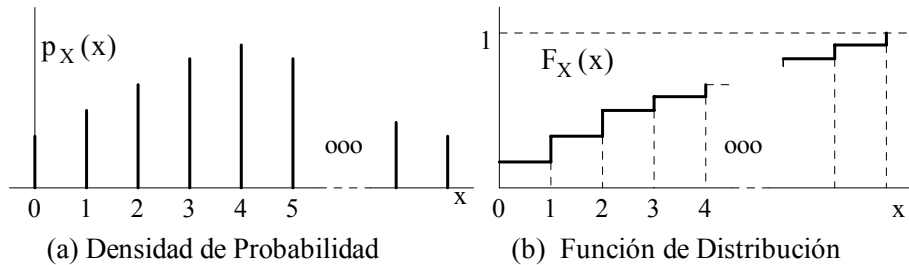


Fig.3.11. Distribución de Poisson

Si  $\alpha\tau < 1$ , entonces  $P_k(\tau)$  es máxima para  $k = 0$ . Si  $\alpha\tau > 1$ , pero no es un número entero, entonces  $P_X(\tau)$  es máxima para  $k = \lfloor \alpha\tau \rfloor$ . Si  $\alpha\tau$  es un número entero, entonces  $P_X(\tau)$  tiene dos puntos máximos para  $k = \alpha\tau$  y  $k = \alpha\tau - 1$ .

**3.4.3. Distribución Binomial**

Si una VA  $X$  es de tipo discreto y toma valores en los puntos  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  con probabilidades definidas mediante la expresión

$$P_k(x_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad (3.67)$$

se dice que tiene una “Distribución Binomial”.

La densidad de probabilidad de la distribución binomial es

$$p_X(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \cdot \delta(x-k) \quad (3.68)$$

donde, por definición, 
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

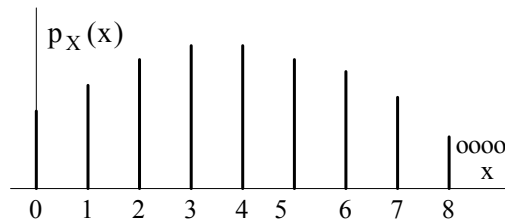


Fig. 3.12. Distribución Binomial

La densidad de probabilidad de la distribución binomial es una secuencia de impulsos, como se muestra en la Fig. 3.12.

**3.4.4. Distribución Uniforme**

Si la densidad de probabilidad de una VA  $X$  es una función rectangular de la forma

$$p_X(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \Pi\left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_1}\right) \quad (3.69)$$

donde  $x_0 = (x_2 + x_1) / 2$ , se dice entonces que la VA  $X$  está distribuida uniformemente en el intervalo  $(x_1, x_2)$  con  $x_2 > x_1$ , Fig. 3.13(a). En este caso la VA  $X$  es de tipo continuo y su función de distribución será una rampa de la forma dada en la Fig. 3.13(b).

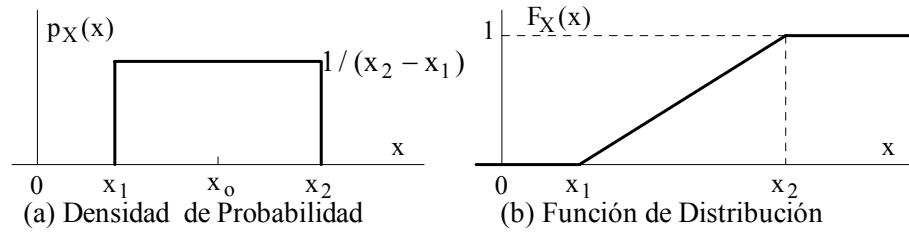


Fig. 3.13. Distribución Uniforme

Por inspección de la Fig. 3.13(b), aplicando la función rampa  $r(x)$ ,

$$F_X(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} [r(x - x_1) - r(x - x_2)] \quad (3.70)$$

### 3.4.5. Distribución de Laplace

La función de densidad de probabilidad de Laplace de una VA  $X$  es, Fig. 3.14(a),

$$p_X(x) = \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha|x|) \quad (3.71a)$$

donde  $\alpha$  es el parámetro de la distribución.

La correspondiente función de distribución es (ver Problema 3.27),

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \exp(\alpha x)u(-x) + \frac{1}{2} [1 - \exp(-\alpha x)]u(x) \quad (3.71b)$$

En la Fig. 3.14(b) se muestra esta función.

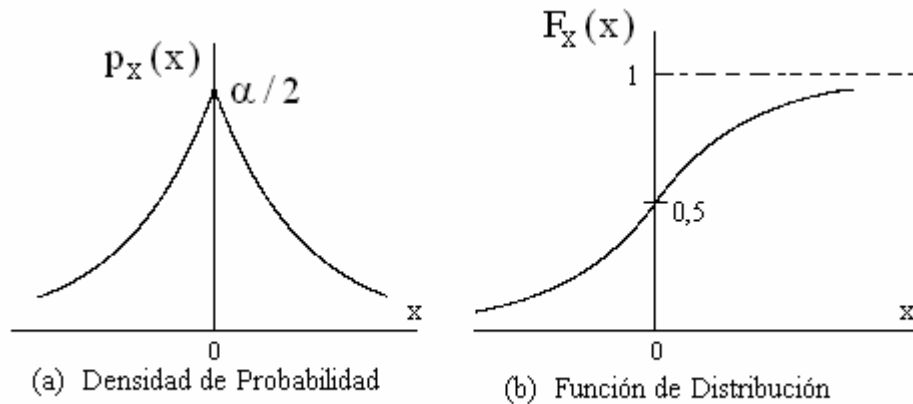


Fig. 3.14. Distribución de Laplace

### 3.4.6. Distribución de Cauchy

La función de densidad de Cauchy es

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \quad (3.72)$$

donde  $\alpha$  es el parámetro de la distribución, la cual se muestra en la Fig. 3.15(a).

La correspondiente función de distribución es (ver Problema 3.25),

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

En la Fig. 3.15(b) se muestra esta función.

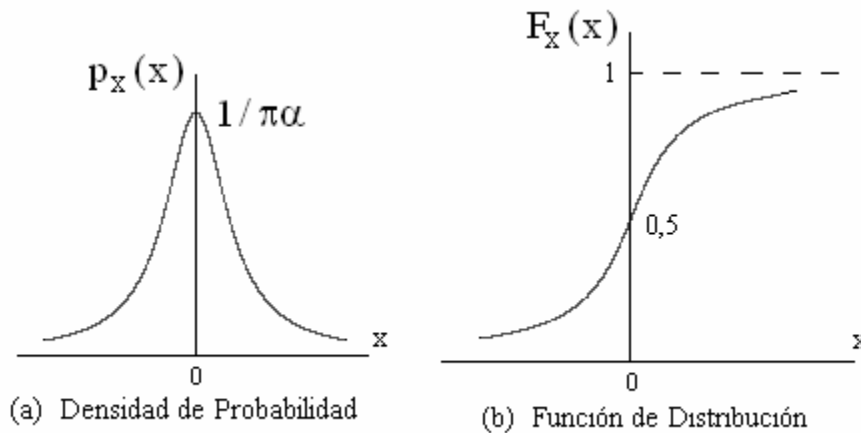


Fig. 3.15. Distribución de Cauchy.

### 3.4.7. Distribución de Raleigh

La función de densidad de Raleigh de una VA  $X$  es, Fig. 3.16(a),

$$p_X(x) = \frac{x}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)u(x) \quad (3.73a)$$

El valor máximo de  $p_X(x)$  ocurre cuando  $x = \alpha$ .  
 $\alpha$  es el parámetro de la distribución

La correspondiente función de distribución es (ver Problema 3.28)

$$F_X(x) = \left[1 + \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\right]u(x) \quad (3.73b)$$

En la Fig. 3.16(b) se muestra esta función.

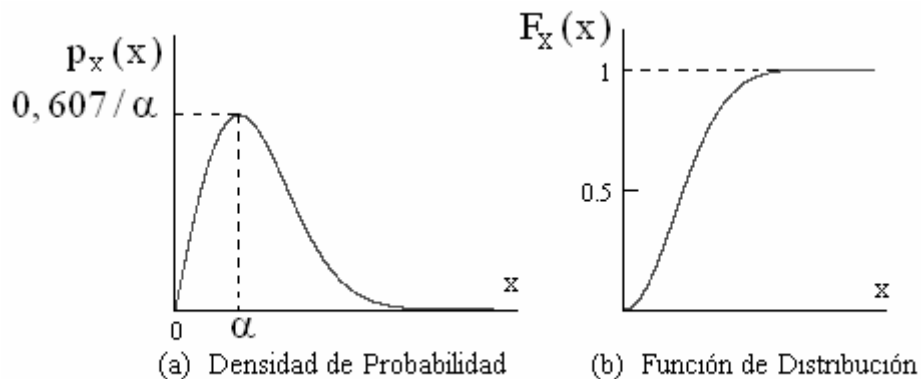


Fig. 3.16. Distribución de Raleigh.

### 3.4.8. Distribución de Maxwell

La función de densidad de Maxwell de una VA  $X$  es, Fig. 3.17(a),

$$p_X(x) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\alpha^3} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) u(x) \quad (3.74a)$$

El valor máximo de  $p_X(x)$  ocurre cuando  $x = \alpha\sqrt{2}$ .  
 $\alpha$  es el parámetro de la distribución

La correspondiente función de distribución es (ver Problema 3.29),

$$F_X(x) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\alpha^3} \int_0^x x'^2 \exp\left(-\frac{x'^2}{2\alpha^2}\right) dx' = \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) \right] u(x) \quad (3.74b)$$

En la Fig. 3.17(b) se muestra esta función,

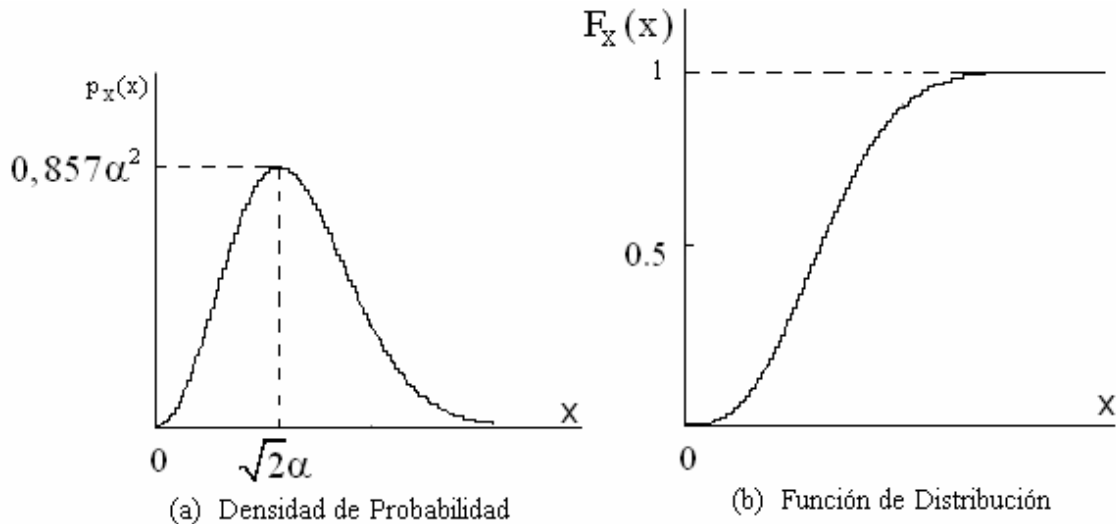


Fig. 3.17. Distribución de Maxwell

### 3.5. FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

Muy a menudo nos interesa conocer las funciones de probabilidad de una VA después que ella ha experimentado alguna transformación. Si, por ejemplo, la función de densidad de probabilidad de una VA  $X$  es  $p_X(x)$ , quisiéramos ahora determinar la función de densidad de probabilidad de una VA  $Y$  relacionada con  $X$  mediante la ecuación

$$Y = g(X) \quad (3.75)$$

Sea, entonces,  $p_Y(y)$  la densidad de probabilidad de la VA  $Y$ . Vamos a suponer que  $X$  es continua y que  $g(x)$  lo es también, pero con la condición de que  $g(x)$  no sea igual a una constante en ningún intervalo. Esto significa que para un valor  $y$  dado, la ecuación  $y = g(x)$  tiene, cuando más, un número contable de raíces  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . El siguiente teorema [Papoulis, 1965] es válido cuando  $y = g(x)$  tiene un número contable de  $n$  raíces o soluciones  $x_n$  y que  $F_X(x)$  sea diferenciable en los puntos  $x_n$ .

**Teorema Fundamental**

Para encontrar la función de densidad  $p_Y(y)$  para un valor dado de  $y$ , se resuelve la ecuación  $y = g(x)$  en términos de  $x$ . Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son todas sus raíces reales, es decir, si

$$y = g(x_1) = g(x_2) = \dots = g(x_n) \quad (3.76)$$

$$y \quad g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{dy}{dx} \quad (3.77)$$

$$\text{Entonces,} \quad p_Y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{p_X(x_i)}{|g'(x_i)|} = \sum_{i=1}^n p_X(x_i) \left| \frac{dx_i}{dy} \right| \quad (3.78)$$

En muchas aplicaciones es necesario determinar la función de probabilidad conjunta de transformaciones de variables aleatorias conjuntamente distribuidas. En este caso consideremos la función de densidad de probabilidad conjunta  $p_{XY}(x, y)$  de dos VA  $X$  e  $Y$ , y sea  $U$  y  $V$  otras dos VA relacionadas con  $X$  e  $Y$  mediante las ecuaciones

$$U = g(X, Y) \quad y \quad V = h(X, Y) \quad (3.79)$$

Se trata ahora de determinar la función de densidad conjunta  $p_{UV}(u, v)$  de las VA  $U$  y  $V$ .

En forma similar al caso anterior, se resuelven simultáneamente las ecuaciones (3.62) en términos de  $x$  e  $y$ . La densidad de probabilidad conjunta  $p_{UV}(u, v)$  de las VA  $U$  y  $V$  viene dada por [Papoulis, 1965],

$$p_{UV}(u, v) = \sum_{i=1}^n \frac{p_{XY}(x_i, y_i)}{|J(x_i, y_i)|} \quad (3.80)$$

donde  $x_i$  e  $y_i$  son las soluciones simultáneas o raíces de las ecuaciones (5.61), y  $J(x, y)$  es el Jacobiano de la transformación (3.80) definido mediante el determinante

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} h(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} h(x, y) \end{vmatrix} \quad (3.81)$$

La extensión de este método para más de dos VA es directa.

**♣ Ejemplo 3.10**

La función de densidad conjunta de dos VA  $X$  e  $Y$  es  $p_{XY}(x, y) = \exp[-(x+y)]u(x)u(y)$  y queremos determinar la función de densidad conjunta  $p_{UV}(u, v)$  de dos VA  $U$  y  $V$  relacionadas con  $X$  e  $Y$  mediante las ecuaciones

$$U = X + 2Y \quad y \quad V = 2X + Y$$

$$\text{Resolviendo simultáneamente para } x \text{ e } y, \text{ se obtiene} \quad x = \frac{2v - u}{3} \quad ; \quad y = \frac{2u - v}{3}$$

$$\text{y el Jacobiano,} \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = [1 - 4] = -3 \quad y \quad |J| = 3$$



También,  $\exp[-(x+y)]|_{x=(2v-u)/3; y=(2u-v)/3} = \exp\left[-\left(\frac{2v-u}{3} + \frac{2u-v}{3}\right)\right] = \exp\left[-\frac{1}{3}(u+v)\right]$

Suponiendo que  $u \geq 0$ , se tiene:

si  $x \geq 0$ , entonces  $\frac{2v-u}{3} \geq 0$  y  $v \geq \frac{u}{2}$

si  $y \geq 0$ , entonces  $\frac{2u-v}{3} \geq 0$  y  $2u \geq v$

de donde  $2u \geq v \geq \frac{u}{2}$

La densidad de probabilidad conjunta  $p_{UV}(u, v)$  de las VA  $U$  y  $V$  será entonces

$$p_{UV}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{3} \exp\left[-\frac{1}{3}(u+v)\right] & \text{para } u \geq 0 \text{ y } 2u \geq v \geq \frac{u}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

♣

### 3.6. PROMEDIOS ESTADISTICOS

#### 3.6.1. Definición

El concepto de “promedio” o “valor promedio” tiene una gran importancia en el estudio de los procesos aleatorios. Un proceso aleatorio se caracteriza por su “regularidad estadística”, lo cual quiere decir que el proceso no puede predecirse en detalle sino en base de “promedios”. Por ejemplo, la definición empírica de la probabilidad, expresión (3.1), representa una forma de promedio.

Consideremos una VA  $X$  que puede tomar los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con probabilidades  $P_X(x_i)$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Repitamos el experimento (representado por  $X$ )  $N$  veces ( $N \rightarrow \infty$ ) y sea  $m_1, m_2, \dots, m_n$  los números de pruebas favorables a los resultados  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , respectivamente. Entonces el valor promedio de la VA  $X$  (que representaremos con una barra sobre la variable) es

$$\bar{X} = \frac{1}{N}(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n) = \frac{m_1}{N}x_1 + \frac{m_2}{N}x_2 + \dots + \frac{m_n}{N}x_n \quad (3.82)$$

En el límite, cuando  $N \rightarrow \infty$ , la relación  $m_i/N$  tiende a  $P_X(x_i)$  de acuerdo con la definición empírica de la probabilidad. Entonces, el valor promedio de una VA  $X$  se define en la forma

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i P_X(x_i) \quad \text{para variables aleatorias discretas} \quad (3.83)$$

Si la VA  $X$  es continua, entonces su valor promedio es

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx = E\{X\} \quad \text{para variables aleatorias continuas} \quad (3.84)$$

donde  $E\{X\}$  es otra forma de representación del valor promedio de  $X$ .

El valor promedio de una VA  $X$  se conoce también con los nombres de “valor esperado”, “esperanza matemática” o “promedio estadístico”, y lo representaremos indistintamente con la notación  $\bar{X}$  o  $E\{X\}$ .

### 3.6.2. Valor Promedio de Funciones de Variables Aleatorias

#### Valor Promedio de una Función de una Variable Aleatoria

A menudo se desea determinar el valor esperado de una cierta función de una VA en vez del valor esperado de la VA. Es decir, se desea obtener una expresión para el valor esperado de una VA  $Y$  que es una función de  $X$  de la forma

$$Y = g(X)$$

Por definición,  $\bar{Y} = E\{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy$

Se demuestra [Papoulis, 1965] que si  $Y = g(X)$ , entonces

$$E\{Y\} = E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x)dx \quad (3.85)$$

Si la VA  $X$  es de tipo discreto,

$$E\{Y\} = E\{g(X)\} = \sum_{i=1}^n g(x_i)p_X(x_i) \quad (3.86)$$

Generalizando, podemos ver que si

$$g(X) = g_1(X) + g_2(X) + \dots + g_n(X), \quad \text{entonces}$$

$$E\{g_1(X) + g_2(X) + \dots + g_n(X)\} = E\{g_1(X)\} + E\{g_2(X)\} + \dots + E\{g_n(X)\} \quad (3.87)$$

El valor esperado de una suma de funciones de una VA  $X$  es la suma de los valores esperados de cada una de las funciones. En particular,

$$E\{aX + b\} = aE\{X\} + b, \quad \text{pues} \quad E\{b\} = b$$

$$\text{Si } g(X) = g_1(x) + jg_2(X), \quad \text{entonces} \quad E\{g(X)\} = E\{g_1(X)\} + jE\{g_2(X)\}$$

#### Valor Promedio de una Función de Variables Aleatorias

Si una VA  $Z$  es una función de dos VA  $X$  e  $Y$  de la forma  $Z = g(X, Y)$ , entonces, por definición,

$$E\{Z\} = \int_{-\infty}^{\infty} zp_Z(z)dz \quad (3.88)$$

El valor esperado de  $Z$  se puede determinar directamente a partir de la densidad de probabilidad conjunta  $p_{XY}(x, y)$  utilizando el “teorema de la esperanza” o “teorema del valor esperado” [Lathi, 1968], el cual establece que si  $Z = g(X, Y)$ , entonces

$$E\{Z\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)p_{XY}(x, y)dxdy \quad (3.89)$$

y para variables aleatorias discretas

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$E\{Z\} = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) P_{XY}(x_i, y_j) \quad (3.90)$$

Generalizando, si  $Z = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , entonces

$$E\{Z\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_n) p_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3.91)$$

Si algunas de las  $n$  variables son discretas, la expresión (3.91) es aún válida ya que la distribución discreta se considera como el caso límite de una distribución continua mediante la utilización de impulsos Delta Dirac.

**Valor Promedio de Variables Aleatorias Estadísticamente Independientes**

Consideremos el producto de  $n$  variables aleatorias estadísticamente independientes

$$Z = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$$

Puesto que las  $X_i$  son estadísticamente independientes, se tiene que

$$E\{Z\} = E\{X_1 \cdot X_2 \cdots X_n\} = E\{X_1\} \cdot E\{X_2\} \cdots E\{X_n\} \quad (3.92)$$

El valor esperado de un producto de variables aleatorias es el producto de los valores esperados de cada variable aleatoria si y solamente si las variables aleatorias son estadísticamente independientes.

Asimismo, para un producto de funciones de variables aleatorias de la forma

$$Z = g_1(X_1) \cdot g_2(X_2) \cdots g_n(X_n)$$

$$\text{Por definición, } E\{Z\} = E\{g_1(X_1) \cdot g_2(X_2) \cdots g_n(X_n)\}$$

Como  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son estadísticamente independientes, se verifica que

$$E\{Z\} = E\{g_1(X_1)\} \cdot E\{g_2(X_2)\} \cdots E\{g_n(X_n)\} \quad (3.93)$$

El valor esperado de un producto de funciones de variables aleatorias es el producto de los valores esperados de las respectivas funciones si y solamente si las variables aleatorias son estadísticamente independientes.

**3.6.3. Momentos**

El momento  $n$ -ésimo de una VA  $X$  se define como el valor esperado de la potencia  $n$ -ésima de  $X$ . Entonces, por definición,

$$E\{X^n\} = \sum_i x_i^n p_X(x_i) \quad \text{si la VA } X \text{ es discreta} \quad (3.94)$$

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx \quad \text{si la VA } X \text{ es continua} \quad (3.95)$$

Nótese que el primer momento ( $n = 1$ ) es igual al valor esperado de la VA  $X$ . Para  $n = 2$ , caso continuo, el segundo momento será

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx \quad (3.96)$$

Las dos primeros momentos se conocen con el nombre de “momentos de primer orden”.

La raíz cuadrada de  $E\{X^2\}$  es el valor eficaz del proceso  $X$  y se le conoce con el nombre de “valor cuadrático promedio o valor RMS (del inglés Root-Mean-Square)” del proceso  $X$ . En términos prácticos, podemos decir que  $E\{X\}$  es el valor promedio de la VA  $X$ , mientras que  $E\{X^2\}$  es la potencia promedio. Más adelante relacionaremos estos parámetros con la componente continua y la potencia promedio de una señal  $x(t)$ . Nótese la diferencia entre  $\bar{X}^2$  y  $E\{X^2\}$ : las operaciones de promediación y elevación al cuadrado no son intercambiables y  $\bar{X}^2 \neq E\{X^2\}$ .

En la práctica se presenta con mucha frecuencia el problema de la determinación del valor promedio cuadrático de una suma de variables aleatorias. Sea, por ejemplo, la suma  $X = S + N$ , donde  $S$  y  $N$  son dos señales aleatorias estadísticamente independientes. El segundo momento de  $X$  es

$$E\{(S+N)^2\} = E\{S^2 + N^2 + 2SN\} = E\{S^2\} + E\{N^2\} + 2E\{S\} \cdot E\{N\} \quad (3.97)$$

Si  $E\{S\}$  o  $E\{N\}$  o ambos son iguales a cero, entonces

$$E\{(S+N)^2\} = E\{S^2\} + E\{N^2\} \quad (3.98)$$

La potencia promedio de la suma de dos variables aleatorias es igual a la suma de las potencias promedio de cada una de las variables aleatorias, si y solamente si las variables aleatorias son estadísticamente independientes y por lo menos una tiene valor promedio cero. Este enunciado es de particular importancia en el estudio de sistemas de comunicación donde las señales mensaje están contaminadas con ruido aditivo y además no están correlacionadas, como veremos a continuación.

♣ **Ejemplo 3. 11. Momentos de una variable aleatoria gaussiana.**

Sea una variable aleatoria gaussiana. Demostrar que

(a)  $E\{X\} = 0$ ; y  $E\{X^2\} = \sigma^2$

(b) Si la VA  $X$  está desplazada en una cantidad  $x_0$ , entonces

$$E\{X\} = x_0; \quad E\{X^2\} = \sigma^2 + x_0^2; \quad \text{Var}\{X\} = \sigma^2$$

Solución

Como la VA  $X$  es gaussiana, su densidad de probabilidad es, de (3.58)

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

(a)  $E\{X\}$  es el primer momento o valor promedio de la VA  $X$ . De (3.95). para  $n = 1$ ,

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

El integrando es una función impar de  $x$ , y como la integración se hace para todo  $t$ , su valor es cero. Por lo tanto,

$$E\{X\} = 0$$

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$\text{De (3.96), } E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$\text{Integrando, } E\{X^2\} = \sigma^2$$

(b) De (3.95) y como la VA X está centrada, entonces

$$E\{X\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$\text{Integrando obtenemos } E\{X\} = x_0$$

$$\text{De (3.96), } E\{X^2\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$\text{Integrando obtenemos } E\{X^2\} = \sigma^2 + x_0^2$$

Vemos que la VA X contiene una componente alterna cuya potencia promedio es  $\sigma^2$  y una componente continua de amplitud  $x_0$  y cuya potencia es  $x_0^2$ .

$$\text{De (3.100), } \text{Var}\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$\text{Resolviendo la integral, } \text{Var}\{X\} = \sigma^2$$



### Momentos Centrales

El momento central n-ésimo de una VA X es el momento respecto al valor esperado  $\bar{X}$  de X, y se define en la forma

$$E\{(X-\bar{X})^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})^n p_X(x) dx \quad (3.99)$$

Nótese que el primer momento central ( $n=1$ ) es  $E\{X-\bar{X}\} = 0$ .

El segundo momento central respecto al valor esperado  $\bar{X}$  se conoce con el nombre de “varianza” o “dispersión” de la VA X, y se representa usualmente con la notación  $\sigma_X^2$ . Entonces, por definición,

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E\{(X-\bar{X})^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})^2 p_X(x) dx \quad \text{si la VA X es continua} \quad (3.100)$$

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \bar{X})^2 p_X(x_i) \quad \text{si la VA X es discreta} \quad (3.101)$$

La varianza o dispersión nos proporciona una idea de la concentración de la densidad de probabilidad  $p_X(x)$  alrededor del valor promedio  $\bar{X}$ . La raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir  $\sigma_X$ , se conoce con el nombre de “desviación estándar” o “desviación típica”.

Desarrollando (3.100),

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E\{(X - \bar{X})^2\} = E\{X^2 + \bar{X}^2 - 2X\bar{X}\} = E\{X^2\} + \bar{X}^2 - 2\bar{X}^2 \\ \sigma_X^2 &= E\{X^2\} - \bar{X}^2\end{aligned}\quad (3.102)$$

Se puede definir también la denominada “covarianza de dos VA X e Y” en la forma

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\} \quad (3.103)$$

Desarrollando (3.103), obtenemos finalmente,

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{XY\} - \bar{X} \cdot \bar{Y} \quad (3.104)$$

Al término  $E\{XY\}$  se le denomina “correlación entre las VA X e Y”.

La covarianza  $\text{Cov}(X, Y)$  se puede expresar en términos de la función de densidad conjunta  $p_{XY}(x, y)$  en la forma siguiente. Por definición, para variables aleatorias continuas

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})(y - \bar{Y}) p_{XY}(x, y) dx dy \quad (3.105)$$

y si las variables aleatorias son discretas,

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) P_{XY}(x_i, y_j) \quad (3.106)$$

$$\text{Asimismo, } E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_{XY}(x, y) dx dy \quad (3.107)$$

Si las variables X e Y no están correlacionadas, entonces  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , lo que implica que  $E\{XY\} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$ , expresión ésta que se cumple cuando X e Y son independientes. Por consiguiente, las VA independientes siempre serán variables no correlacionadas, aunque lo contrario no necesariamente se cumple, es decir, que si las variables no están correlacionadas, no necesariamente quiere decir que dichas variables son independientes. Para dos VA X e Y independientes, vimos que  $E\{g_1(X) \cdot g_2(Y)\} = E\{g_1(X)\} \cdot E\{g_2(Y)\}$ , mientras que para que X e Y no estén correlacionadas, el único requisito es que  $E\{XY\} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$ . En consecuencia, la “condición de independencia estadística” es una condición mucho más fuerte y restrictiva que la “condición de no correlación”. Por otra parte, si  $E\{XY\} = 0$ , entonces se dice que las VA X e Y son “ortogonales” independientemente de si  $\bar{X}$  o  $\bar{Y}$  o ambas son o no cero. Nótese que si  $\bar{X}$  o  $\bar{Y}$  o ambas son cero, entonces “ortogonalidad” implica “no correlación”.

En general, la covarianza es una medida de la relación entre dos variables aleatorias. Sin embargo, ella no revela la naturaleza exacta de la dependencia y no puede proveer una información completa acerca de la interdependencia entre dos variables aleatorias. La covarianza es un parámetro muy utilizado en el análisis estadístico de señales, no solamente en sistemas de comunicación sino también en todos los campos de las ciencias e ingeniería.

A menudo se define también el “coeficiente de correlación de X e Y” en la forma

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{E\{XY\} - \bar{X} \bar{Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (3.108)$$

$$\text{Nótese que } -1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \quad (3.109)$$

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Consideremos ahora la varianza de la suma de dos variables aleatorias no correlacionadas.

Sea por ejemplo,  $X = S + N$ . Entonces, de (3.100),

$$\sigma_X^2 = E\{(X - \bar{X})^2\} = E\{[(S + N) - (\bar{S} + \bar{N})]^2\} = E\{[(S - \bar{S}) + (N - \bar{N})]^2\}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_S^2 + \sigma_N^2 + 2E\{(S - \bar{S})(N - \bar{N})\}$$

pero  $E\{(S - \bar{S})(N - \bar{N})\} = E\{S \cdot N\} - \bar{S} \cdot \bar{N} = \text{Cov}(S, N)$

Si las variables no están correlacionadas, la covarianza entre S y N es cero y

$$E\{S \cdot N\} = \bar{S} \cdot \bar{N}, \text{ de donde}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_S^2 + \sigma_N^2 \quad (3.110)$$

La varianza de la suma de dos variables aleatorias es la suma de las varianzas de cada una de las variables si y solamente si las variables no están correlacionadas. Este resultado se puede extender a cualquier número de variables aleatorias.

### 3.7. FUNCION CARACTERISTICA

La función característica  $\phi_X(\lambda)$  de una VA X es la transformada de Fourier de su densidad de probabilidad  $p_X(x)$  con una inversión en el signo del exponencial [Papoulis, 1965]. La función característica se emplea para simplificar ciertas operaciones en las que interviene la VA X. Por ejemplo, en la evaluación de los momentos de X, en algunos casos en la determinación de la función de densidad de una función de X, en la convolución de funciones de densidad de probabilidad y en el desarrollo de los teoremas del límite.

Sea entonces la función  $Y = g(X) = \exp(j2\pi\lambda X)$ , cuyo valor esperado es, de (3.84),

$$E\{Y\} = E\{g(X)\} = E\{\exp[j2\pi\lambda X]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\lambda x) p_X(x) dx \quad (3.111)$$

Esta integral tiene la forma de una Integral de Fourier; en este caso definimos,

$$\phi_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \exp(j2\pi\lambda x) dx \quad (3.112)$$

La función  $\phi_X(\lambda)$  es conocida con el nombre de “función característica de la VA X” y vemos que es la transformada de Fourier de la densidad de probabilidad  $p_X(x)$  con una inversión en el signo del exponencial. La función de densidad de probabilidad  $p_X(x)$  es la correspondiente antitransformada de Fourier. Entonces,

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(\lambda) \exp(-j2\pi x \lambda) d\lambda \quad (3.113)$$

La función característica y la densidad de probabilidad forman entonces un par de transformadas de Fourier:  $p_X(x) \Leftrightarrow \phi_X(\lambda)$ .

Nótese que  $\phi_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1$ ; pero como  $p_X(x) \geq 0$  para todo x, entonces

$$|\phi_X(\lambda)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \exp(j2\pi\lambda x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1. \text{ Por lo tanto,}$$

$$|\phi_X(\lambda)| \leq 1$$

La función característica nos permite determinar muy fácilmente la densidad de probabilidad de una suma de variables aleatorias. En efecto, sea  $Z = X + Y$ , donde  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias independientes y  $p_X(x) \Leftrightarrow \phi_X(\lambda)$ ;  $p_Y(y) \Leftrightarrow \phi_Y(\lambda)$ ;  $p_Z(z) \Leftrightarrow \phi_Z(\lambda)$ . De la definición de función característica, expresión (3.96),

$$\phi_Z(\lambda) = E\{\exp[j2\pi\lambda(X+Y)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi\lambda(x+y)] \cdot p_{XY}(x,y) dx dy$$

Puesto que  $X$  e  $Y$  son independientes, entonces  $p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ , de donde

$$\phi_Z(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\lambda x) p_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\lambda y) p_Y(y) dy = \phi_X(\lambda) \cdot \phi_Y(\lambda) \quad (3.114)$$

La función característica de una suma de variables aleatorias independientes es igual al producto de las funciones características de cada una de las variables aleatorias. Mediante aplicación del teorema de la convolución, obtenemos

$$\phi_Z(\lambda) = \phi_X(\lambda) \cdot \phi_Y(\lambda) \Leftrightarrow p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(u) \cdot p_Y(z-u) du = p_X(x) * p_Y(y) \quad (3.115)$$

La densidad de probabilidad de la suma de dos variables aleatorias independientes es igual a la convolución de las densidades de probabilidad de las variables aleatorias. La extensión a un número cualquiera de variables aleatorias es directa. En efecto, si

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots \dots X_n$$

$$\text{Entonces, } p_Z(z) = p_{X_1}(x_1) * p_{X_2}(x_2) * p_{X_3}(x_3) * \dots \dots * p_{X_n}(x_n) \quad (3.116)$$

$$\text{y } \phi_Z(\lambda) = \phi_{X_1}(\lambda) \cdot \phi_{X_2}(\lambda) \cdot \phi_{X_3}(\lambda) \cdot \dots \cdot \phi_{X_n}(\lambda) \quad (3.117)$$

Estos resultados se aplican también a variables aleatorias discretas, lo que puede considerarse como un caso límite de variables aleatorias continuas con impulsos unitarios de Dirac.

### Ejemplo 3.12.

Las VA independientes  $X$  e  $Y$  son gaussianas no centradas de la forma

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad \text{y} \quad p_Y(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

Vamos a determinar la densidad de la VA  $Z = X + Y$ .

Solución:

$$\text{Del Problema 1.23(g), } A \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) \Leftrightarrow A \sqrt{2\pi a^2} \exp(-2\pi^2 a^2 f^2)$$

$$\text{Sea entonces } q(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \Leftrightarrow \exp(-2\pi^2 \sigma_x^2 \lambda^2)$$

$$p_X(x) = q(x - x_0) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}\right) \Leftrightarrow \exp(-2\pi^2 \sigma_x^2 \lambda^2) \cdot \exp(-j2\pi x_0 \lambda) = \phi_X(\lambda)$$



## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Similarmente,

$$p_Y(y) \Leftrightarrow \exp(-2\pi^2\sigma_y^2\lambda^2) \cdot \exp(-j2\pi y_0\lambda) = \phi_Y(\lambda)$$

Puesto X e Y son independientes, entonces, de (3.115),

$$\phi_Z(\lambda) = \phi_X(\lambda) \cdot \phi_Y(\lambda) = [\exp(-2\pi^2\sigma_x^2\lambda^2) \cdot \exp(-j2\pi x_0\lambda)] \cdot [\exp(-2\pi^2\sigma_y^2\lambda^2) \cdot \exp(-j2\pi y_0\lambda)]$$

$$\phi_Z(\lambda) = \left\{ \exp\left[-\frac{(2\pi\lambda)^2}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\right] \right\} \cdot \left\{ \exp[-j2\pi\lambda(x_0 + y_0)] \right\}$$

Hagamos  $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$  y  $z_0 = x_0 + y_0$ . Entonces,

$$\phi_Z(\lambda) = \exp\left[-\frac{(2\pi\lambda)^2}{2}\sigma_z^2\right] \cdot \exp[-j2\pi\lambda z_0] = \exp(-2\pi^2\sigma_z^2\lambda^2) \cdot \exp(-j2\pi z_0\lambda)$$

Por antitransformada de Fourier,

$$p_Z(z) = \text{TF}^{-1}\{\phi_Z(\lambda)\} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

Obsérvese que la densidad  $p_Z(z)$  es una distribución gaussiana no centrada, es decir, la densidad de probabilidad de la suma de dos VA independientes y gaussianas, es también gaussiana. Este resultado se puede extender a un número cualquiera de VA independientes y gaussianas. Asimismo, el valor promedio y la varianza de la suma son iguales a la suma de los promedios individuales y a la suma de las varianzas individuales, respectivamente.

Nótese que, bajos ciertas condiciones, la suma de un gran número de variables aleatorias independientes tiende a ser gaussiana, independientemente de si ellas son gaussianas o no. Esta tendencia hacia una distribución gaussiana se desarrolla rigurosamente en el denominado “Teorema del Límite Central”, cuyo tratamiento está fuera de los límites del presente texto.

♣

### ♣ Ejemplo 3.13

Consideremos una VA Y que es una función de la VA X de la forma  $Y = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_X}$ . Vamos a determinar la función característica  $\phi_Y(\lambda)$  y la densidad de probabilidad  $p_Y(y)$  de Y.

De (3.95),

$$\phi_Y(\lambda) = E\left\{ \exp\left[j2\lambda\left(\frac{X - \bar{X}}{\sigma_X}\right)\right] \right\} = E\left\{ \exp\left(j2\pi\frac{X}{\sigma_X}\lambda\right) \cdot \exp\left(-j2\pi\frac{\bar{X}}{\sigma_X}\lambda\right) \right\}$$

$$\phi_Y(\lambda) = \exp\left(-j2\pi\frac{\bar{X}}{\sigma_X}\lambda\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \exp\left(j2\pi\frac{\lambda}{\sigma_X}x\right) dx$$

De la propiedad escalar de la transformada de Fourier, la integral es igual a  $\phi_X\left(\frac{\lambda}{\sigma_X}\right)$ , de

donde  $\phi_Y(\lambda) = \phi_X\left(\frac{\lambda}{\sigma_X}\right) \cdot \exp\left(-j2\pi\frac{\bar{X}}{\sigma_X}\lambda\right)$

Tomando la antitransformada de Fourier,

$$p_Y(y) = \sigma_X \cdot p_X(\sigma_X x) \Big|_{x \rightarrow x - \bar{X}/\sigma_X} = \sigma_X \cdot p_X \left[ \sigma_X \left( x - \frac{\bar{X}}{\sigma_X} \right) \right]$$

Como vemos, todas las propiedades y métodos de la Transformada de Fourier vistos en los Capítulos I y II se aplican en el caso de la equivalencia  $\phi_X(\lambda) \Leftrightarrow p_X(x)$ .

♣

Además de ser útil para la determinación de las funciones de probabilidad de la suma de variables aleatorias, la función característica se puede utilizar también para determinar los momentos de una variable aleatoria. En efecto, diferenciando (3.96) respecto a  $\lambda$ ,

$$\frac{d}{d\lambda} \phi_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \left[ \frac{d}{d\lambda} \exp(j2\pi\lambda x) \right] dx = j2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) \exp(j2\pi\lambda x) dx$$

Evaluando la expresión anterior para  $\lambda = 0$ , se tiene,

$$\frac{d}{d\lambda} \phi_X(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = j2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = j2\pi \cdot E\{X\}, \text{ de donde}$$

$$E\{X\} = \frac{1}{j2\pi} \frac{d}{d\lambda} \phi_X(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \quad (3.118)$$

El valor promedio de una variable aleatoria es igual a la primera derivada de su función característica en el origen ( $\lambda = 0$ ), dividida por  $j2\pi$ . En general, mediante diferenciación sucesiva bajo el signo integral, se puede demostrar que

$$E\{X^n\} = \frac{1}{(j2\pi)^n} \frac{d^n}{d\lambda^n} \phi_X(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \quad (3.119)$$

El momento n-ésimo de una variable aleatoria es igual a la derivada n-ésima de su función característica en el origen ( $\lambda = 0$ ), dividido por  $(j2\pi)^n$ .

### 3.8. PROCESOS ALEATORIOS O ESTOCASTICOS

#### 3.8.1 Introducción

En la Sección 3.3 se asoció un punto de muestra con cada resultado de un experimento. La colección de todos los puntos de muestra se llamó “espacio de las muestras” del experimento. Para cada punto de muestra en el espacio de las muestras se asignó un número real  $X$  de acuerdo con alguna regla, y una probabilidad de ocurrencia  $P_X(x)$ . Esta es la definición de variable aleatoria.

Un proceso aleatorio es una extensión del concepto de variable aleatoria. En el caso de un proceso aleatorio, a cada punto de muestra que distinguiremos con la notación  $\lambda$ , se asigna una forma de onda (que es función del tiempo  $t$ ), de acuerdo con alguna regla  $x(t, \lambda)$ . Por lo tanto, el espacio de las muestras tendrá asociada una cierta colección de formas de onda y cada una de ellas corresponde a un punto de muestra  $\lambda$ . Esta colección de formas de onda se conoce con el nombre de “conjunto aleatorio (CA)” y las formas de onda individuales como “funciones de muestra”. La distribución de la probabilidad de los puntos de muestra determina la distribución de probabilidad de las funciones de muestra del CA. El sistema de probabilidades, que comprende el espacio de las muestras, el CA o conjunto de formas de onda y las funciones de probabilidad, constituyen el “proceso aleatorio (PA)”.

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

A los PA se les conoce también con el nombre de “Procesos Estocásticos”. La notación  $X(t, \lambda)$  representará el PA; sin embargo, generalmente se omite  $\lambda$  y el PA simplemente se representa con  $X(t)$ , cuyo significado es “una colección de formas de onda que ocurren con una cierta medida de probabilidad”. Una función de muestra individual se representará simplemente con  $x(t)$ .

En la práctica, sobre todo en el dominio de la ingeniería, a menudo se tiene la situación donde el resultado del experimento es ya una forma de onda. En este caso, el concepto de resultado y de función de muestra tienden a ser lo mismo, es decir, que el resultado mismo se puede considerar como la función de muestra correspondiente. En la Fig. 3.18 se muestra un conjunto aleatorio de señales producido por el ruido en un sistema eléctrico. Este conjunto se puede obtener repitiendo las observaciones en el mismo sistema, u observando simultáneamente los resultados o señales de varios sistemas idénticos.

Para entender mejor la idea de conjunto, vamos a distinguir los “promedios conjunto” y los “promedios tiempo”. Los promedios conjunto son todas aquellas estadísticas tomadas sobre el conjunto aleatorio (verticalmente en la Fig. 3.18). Las correspondientes variables aleatorias son  $X(t, \lambda_i)$  (Nota: Para no complicar la notación algunas veces se omite el subíndice  $i$  de  $\lambda$ , pero siempre estará implícito).

Puesto que se tiene  $k$  funciones de muestra,  $X(t, \lambda_i)$  tendrá  $k$  valores para cada  $t$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ . Por ejemplo, en la Fig. 3.18 se muestran solamente tres VA  $X(t, \lambda_i)$ :  $X(0, \lambda_i)$ ,  $X(t_1, \lambda_i)$  y  $X(t_2, \lambda_i)$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ . Los promedios conjunto será la familia de momentos dada por

$$E\{[X(t, \lambda_i)]^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \dots x_n p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t, \lambda_i) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

para todo  $t$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ . (3.120)

donde  $p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t, \lambda_i)$  es la densidad de probabilidad conjunta del proceso aleatorio.

Sea, entonces, el conjunto aleatorio mostrado en la Fig. 3.18.

Los promedios tiempo son todas aquellas estadísticas tomadas sobre las funciones del tiempo (horizontalmente en la Fig. 3.18). Los promedios tiempo será la familia de promedios tiempo dada por

$$\langle [x(t, \lambda_i)]^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t, \lambda_i)]^n dt \quad \text{para todo } t \text{ e } i = 1, 2, \dots, k \quad (3.121)$$

En general, en un proceso aleatorio  $X(t, \lambda)$  los promedio tiempo y los promedios conjunto son diferentes, es decir,

$$E\{[X(t, \lambda_i)]^n\} \neq \langle [x(t, \lambda_i)]^n \rangle \quad (3.122)$$

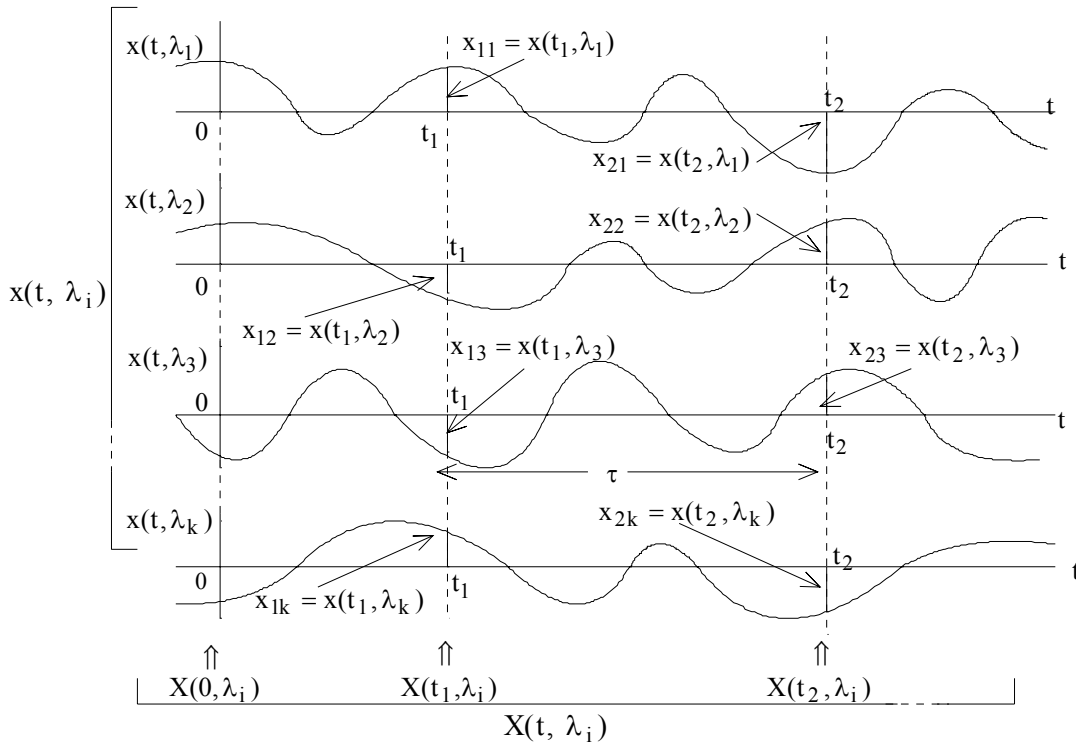


Fig. 3.18. Conjunto Aleatorio de Señales

### Estadísticas de Primer Orden

Las estadísticas de primer orden se especifican completamente mediante las funciones de densidad de las variables aleatorias en los instantes  $t$  (para todo  $t$ ); estas funciones de densidad las escribiremos en la forma  $p_X(x, t, \lambda_i)$  en las cuales el parámetro  $t$  indica el instante en el cual las amplitudes de las señales de muestra definen la VA  $X(t, \lambda_i)$ . La función  $p_X(x, t, \lambda_i)$  es la “densidad de probabilidad de primer orden”. Una vez establecidas las densidades de probabilidad de primer orden, las correspondientes estadísticas de primer orden vienen dadas por

$$E\{[X(t, \lambda_i)]^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x, t, \lambda_i) dx \quad (3.123)$$

### Estadísticas de Segundo Orden

Las estadísticas de primer orden nos dan las distribuciones de las amplitudes de las funciones de muestra para valores particulares de  $t$  y es suficiente el conocimiento de su densidad de probabilidad de primer orden. Pero el conocimiento de  $p_X(x, t, \lambda_i)$  no es suficiente para una completa descripción estadística del proceso. En efecto, supongamos que el proceso representa un conjunto de señales eléctricas como en la Fig. 3.18, y se desea obtener un cierto conocimiento en relación con las frecuencias contenidas en dichas señales. Si el proceso contiene predominantemente componentes de baja frecuencia, entonces las señales varían muy poco y  $x(t_1, \lambda_i)$  no será muy diferente de  $x(t_1 + \tau, \lambda_i)$ . Es evidente que  $x(t_1, \lambda_i)$  y  $x(t_1 + \tau, \lambda_i)$  no serán estadísticamente independientes siempre que  $\tau$  sea suficientemente pequeño; en

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

consecuencia, el conocimiento de  $x(t_1, \lambda_i)$  proporciona una cierta información estadística acerca de  $x(t_1 + \tau, \lambda_i)$ .

Si el proceso contiene predominantemente componentes de alta frecuencia, las señales variarán muy rápidamente y valores separados en un intervalo  $\tau$  no mostrarán ninguna dependencia. Por lo tanto, la correlación entre valores de las señales en distintos intervalos de tiempo puede proporcionar una información estadística muy útil en relación con su contenido espectral.

De gran importancia en el análisis de señales son las estadísticas de segundo orden, que representan el momento conjunto de dos VA  $X(t_1, \lambda_i)$  y  $X(t_2, \lambda_i)$ , donde  $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2, \lambda_i)$  es su función de densidad conjunta, denominada “función de densidad de probabilidad de segundo orden”.

Las estadísticas de segundo orden de dos VA  $X(t_1, \lambda_i)$  y  $X(t_2, \lambda_i)$  vendrán dadas por la siguiente expresión:

$$E\{X(t_1, \lambda_i) \cdot X(t_2, \lambda_i)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2, \lambda_i) dx_1 dx_2 \quad (3.124)$$

Como una aplicación de estas técnicas matemáticas en la transmisión de señales aleatorias a través de sistemas lineales, es suficiente conocer las estadísticas de primero y segundo orden, ya que con ellas es posible determinar la densidad espectral de potencia, el valor promedio, el valor eficaz y las funciones características de un proceso dado.

En resumen, podemos definir las siguientes estadísticas del proceso aleatorio  $X(t, \lambda)$ :

1. El valor promedio:  $E\{X(t, \lambda)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x, t, \lambda) dx \quad (3.125)$

2. El llamado “promedio de segundo orden entre las VA  $X(t_1, \lambda)$  y  $X(t_2, \lambda)$ ”:

$$E\{X(t_1, \lambda) \cdot X(t_2, \lambda)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{X_1 X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2, \lambda) dx_1 dx_2 \quad (3.126)$$

3. La covarianza entre las VA  $X(t_1, \lambda)$  y  $X(t_2, \lambda)$ ,

$$\text{Cov}\{X(t_1, \lambda), X(t_2, \lambda)\} = E\{X(t_1, \lambda) \cdot X(t_2, \lambda)\} - E\{X(t_1, \lambda)\} \cdot E\{X(t_2, \lambda)\} \quad (3.127)$$

4. El coeficiente de correlación entre las VA  $X(t_1, \lambda)$  y  $X(t_2, \lambda)$ ,

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{\text{Cov}\{X(t_1, \lambda), X(t_2, \lambda)\}}{\sqrt{\text{Var}\{X(t_1, \lambda)\} \cdot \text{Var}\{X(t_2, \lambda)\}}} \quad (3.128)$$

Para efectos de tipo práctico, solamente se necesita conocer estas estadísticas del proceso aleatorio  $X(t, \lambda)$ , las cuales, en general, son funciones del tiempo.

### 3.8.2. Estacionaridad y Ergodicidad

#### Estacionaridad en el Sentido Estricto

Se dice que un proceso aleatorio  $X(t, \lambda)$  es estrictamente estacionario si todas sus estadísticas conjunto son invariantes en el tiempo; en otras palabras, un proceso aleatorio es estrictamente estacionario si ninguna de sus estadísticas conjunto es afectada por un desplazamiento del origen del tiempo, es decir, si

$$E\{[X(t, \lambda_i)]^n\} = E\{[X(t + \tau, \lambda_i)]^n\} \quad (3.129)$$

En este caso el proceso aleatorio  $X(t, \lambda)$  se denota simplemente como  $X$ . De (3.78), los dos primeros momentos de primer orden serán

$$E\{X(t, \lambda)\} = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx \quad (3.130a)$$

$$E\{X^2(t, \lambda)\} = E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx \quad (3.130b)$$

y en general, 
$$E\{X^n(t, \lambda)\} = E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x)dx \quad (3.131)$$

#### Estacionaridad en el Sentido Amplio

Se dice que un proceso aleatorio  $X(t, \lambda)$  es estacionario en el sentido amplio o débilmente estacionario, si

(a) Su valor promedio conjunto  $E\{X(t_1, \lambda)\} = E\{X(t_2, \lambda)\} = \text{constante}$  para todo  $t$  (3.132)

(b) Su promedio conjunto de segundo orden

$$E\{X(t_1, \lambda) \cdot X(t_2, \lambda)\} = E\{X(t) \cdot X(t + \tau)\} \quad (3.133)$$

donde  $\tau$  es la diferencia absoluta  $\tau = |t_2 - t_1|$ .

Un proceso es débilmente estacionario cuando su valor promedio conjunto es constante para todo  $t$ , y su promedio conjunto de segundo orden depende solamente de la diferencia absoluta  $\tau = |t_2 - t_1|$ .

Nótese que un proceso aleatorio estrictamente estacionario es también débilmente estacionario, pero lo contrario no necesariamente es cierto.

#### Ergodicidad

La propiedad de estacionaridad estricta o amplia no asegura que los promedios conjunto y los promedios tiempo sean iguales. Puede suceder que aún cuando las estadísticas conjunto son estacionarias, las señales de muestra individuales pueden diferir estadísticamente una de la otra. En este caso los promedio tiempo dependerán de la señal de muestra utilizada, pues se verifica que

$$\langle [x(t, \lambda_i)]^n \rangle \neq \langle [x(t, \lambda_j)]^n \rangle \quad \text{para } i \neq j.$$

Cuando la naturaleza de un proceso aleatorio es tal que los promedios conjunto y los promedios tiempo son iguales, se dice entonces que el proceso aleatorio es “ergódico”. Por lo tanto, si el proceso representado por  $X(t, \lambda)$  es ergódico, entonces todas las estadísticas se pueden

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

determinar a partir de una sola señal de muestra  $x(t)$ . Nótese que un proceso ergódico es estacionario o por lo menos débilmente estacionario, pero un proceso estacionario o por lo menos débilmente estacionario no necesariamente es ergódico.

Puesto que todas las estadísticas se pueden determinar a partir de una sola señal de muestra, la ergodicidad implica también que

$$\langle [x(t, \lambda_i)]^n \rangle = \langle [x(t, \lambda_j)]^n \rangle \quad \text{para todo } i, j \quad (3.134)$$

Las estadísticas de un proceso aleatorio ergódico se escriben entonces en la forma

$$\langle [x(t)]^n \rangle = \langle x^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n(t) dt \quad (3.135)$$

En la práctica generalmente se conoce  $x(t)$  durante un intervalo  $(-T/2, T/2)$ , de modo que se puede escribir (suponiendo que  $x(t)$  es una señal de potencia),

$$\langle x^n(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t) dt \quad (3.136)$$

En el proceso ergódico los momentos conjunto y los momentos tiempo son iguales, es decir,

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx = \langle x^n(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t) dt \quad (3.137)$$

Para los dos primeros momentos de primer orden,

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (3.138a)$$

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx = \langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (3.138b)$$

Las estadísticas de primer orden  $E\{X\}$  y  $E\{X^2\}$  de un proceso ergódico nos permiten hacer las siguientes observaciones:

- (a)  $E\{X\} = \langle x(t) \rangle$ , es el valor promedio de la señal  $x(t)$ ; es simplemente el valor de la componente continua de  $x(t)$ .
- (b)  $[E\{X\}]^2 = [\langle x(t) \rangle]^2$ , es la potencia de la componente continua de  $x(t)$  disipada en una resistencia de 1 Ohm.
- (c)  $E\{X^2\} = \langle x^2(t) \rangle$ , es la potencia promedio de la señal  $x(t)$ , normalizada para una resistencia de 1 Ohm.
- (d)  $\sqrt{E\{X^2\}} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle}$ , es el valor eficaz (RMS) de la señal  $x(t)$ .
- (e) La varianza  $\sigma_X^2$  es igual a la potencia promedio de la componente alterna de  $x(t)$ , normalizada para una resistencia de 1 Ohm.
- (f) La desviación estándar  $\sigma_X$  es el valor eficaz de la componente alterna de la señal  $x(t)$ .
- (g) Si  $E\{X\} = \langle x(t) \rangle = 0$ , entonces  $\sigma_X$  es el valor eficaz de la señal  $x(t)$ .

- (h) Si  $x(t)$  contiene una componente continua  $x_0$  y una componente alterna, la potencia promedio de  $x(t)$  será igual a  $(\sigma_x^2 + x_0^2)$ , normalizada para una resistencia de 1 Ohm.

Estas expresiones nos proporcionan un medio para relacionar la noción de señal aleatoria con la de señal determinística, a la cual estamos más acostumbrados y que hemos utilizado mayormente en los capítulos anteriores. Por lo tanto, todos los métodos matemáticos vistos en los Capítulos I y II son igualmente aplicables a las señales de muestra de procesos aleatorios ergódicos, con algunos cambios menores en la notación. Sin embargo, hay que tener siempre presente que todas estas relaciones son válidas solamente para procesos aleatorios ergódicos, por lo menos en lo que se refiere a las estadísticas de primero y segundo orden de procesos débilmente estacionarios.

Una aplicación práctica directamente relacionada con los conceptos anteriores, son las nociones de valor promedio y varianza en aplicaciones estadísticas de muestras tomadas de una población determinada. En estos casos se considera que todas las muestras son equiprobables, y si se toma  $N$  muestras de la población, el valor promedio y la varianza de las  $N$  muestras se expresarán mediante las relaciones

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{y} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \quad (3.139)$$

Por ejemplo, en el diseño de radioenlaces de microondas la “Rugosidad del Terreno” se describe mediante las expresiones (3.139), donde las  $X_i$  son las alturas tomadas sobre el terreno y  $N$  es el número de alturas. La desviación estándar  $\sigma_x$  es la rugosidad del terreno.

### 3.8.3. Función de Autocorrelación y Densidad Espectral de Potencia

#### Función de Autocorrelación

Sea el proceso aleatorio de la Fig. 3.18, caracterizado por  $X(t, \lambda_i)$  donde  $x(t, \lambda_i)$  son las señales de muestra del proceso. En el instante  $t = t_1$  el proceso se caracteriza mediante la VA  $X(t_1) = X(t_1, \lambda_i)$ , y en el instante  $t = t_2$  la correspondiente VA es  $X(t_2) = X(t_2, \lambda_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ . Para caracterizar la relación entre las VA  $X(t_1)$  y  $X(t_2)$ , se necesita el conocimiento de la densidad de probabilidad conjunta  $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)$  para poder calcular el momento conjunto  $E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\}$  o promedio conjunto de segundo orden, denominado comúnmente función de autocorrelación. Entonces, por definición, la “función de autocorrelación de un proceso  $X(t, \lambda_i)$ ” es el momento conjunto de segundo orden de las VA  $X(t_1)$  y  $X(t_2)$  definido por

$$R_{X_1 X_2}(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2; \lambda) dx_1 dx_2 \quad (3.140)$$

y es una función de  $t_1$  y  $t_2$ .

Asimismo, la covarianza de  $X(t_1)$  y  $X(t_2)$  es

$$\text{Cov}\{X(t_1), X(t_2)\} = R_{XX}(t_1, t_2) - E\{X(t_1)\} \cdot E\{X(t_2)\} \quad (3.141)$$

y el correspondiente coeficiente de correlación



## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{R_{XX}(t_1, t_2) - E\{X(t_1)\} \cdot E\{X(t_2)\}}{\sqrt{\text{Var}[X(t_1)] \cdot \text{Var}[X(t_2)]}} \quad (3.142)$$

El término “autocorrelación” ya lo utilizamos en los Capítulos I y II; más adelante justificaremos el uso de ese término.

Si el proceso  $X(t)$  es estacionario, la función de autocorrelación es independiente del origen del tiempo y dependerá solamente del valor absoluto de la diferencia de  $t_1$  y  $t_2$ , es decir,  $|t_2 - t_1| = \tau$ . Entonces,

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2 - t_1) = R_{XX}(\tau) = E\{X(t) \cdot X(t + \tau)\} \quad (5.143a)$$

Si además el proceso es ergódico, la función de autocorrelación se puede determinar a partir de una sola señal de muestra  $x(t)$  tomando el promedio tiempo de  $[x(t) \cdot x(t + \tau)]$ . En este caso,

$$R_{XX}(\tau) = E\{X(t) \cdot X(t + \tau)\} = \langle x(t) \cdot x(t + \tau) \rangle = R_x(\tau) \quad (3.143b)$$

$$\text{donde } R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (3.144)$$

Asimismo, en un proceso ergódico se verifica que

$$\text{Cov}\{x(t), x(t + \tau)\} = R_x(\tau) - [\langle x(t) \rangle]^2 \quad (3.145a)$$

$$\text{y } \rho_x = \frac{\text{Cov}\{x(t), x(t + \tau)\}}{\text{Var}\{x(t)\}} \quad (3.145b)$$

La expresión (3.144) es igual a la expresión (1.119); de aquí la razón de la notación  $R_x(\tau)$  que utilizamos en los Capítulos I y II para señales determinísticas. Podemos decir entonces que las relaciones para las señales determinísticas son casos particulares de las relaciones desarrolladas para procesos aleatorios débilmente estacionarios o ergódicos.

### Densidad Espectral de Potencia

En relación con la densidad espectral de potencia, se puede extender este concepto a los procesos estocásticos. Desafortunadamente, la transformada de Fourier de una señal de muestra puede no existir, y entonces hay que buscar otra forma para la representación en el dominio de la frecuencia de un proceso aleatorio. Para la clase restringida de procesos aleatorios débilmente estacionarios, es posible definir una magnitud denominada “densidad espectral de potencia” como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, es decir, por definición, la densidad espectral de potencia  $S_X(f)$  de un proceso aleatorio  $X(t)$  débilmente estacionario es

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (3.146)$$

Si el proceso es ergódico, entonces la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia se pueden determinar a partir de una señal de muestra  $x(t)$ . En efecto,

$$R_{XX}(\tau) = R_x(\tau) = \langle x(t) \cdot x(t + \tau) \rangle \quad \text{y} \quad S_X(f) = S_x(f), \text{ de donde}$$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \Leftrightarrow R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \exp(j2\pi f\tau) df \quad (3.147)$$

resultado ya obtenido en forma determinística en el Capítulo I, expresión (1.132), que corresponde al Teorema de Wiener-Kintchine.

A las estadísticas de primer orden de un proceso ergódico podemos agregar ahora las estadísticas de segundo orden  $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau)$  y  $S_x(f) = S_x(f)$ , las cuales tienen las siguientes características:

- (a)  $E\{X^2\} = \langle x^2(t) \rangle = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$ , es la potencia promedio de la señal  $x(t)$ , normalizada para una resistencia de 1 Ohm.
- (b)  $S_x(f) = S_x(f) \geq 0$ , la densidad espectral es siempre positiva (o no negativa).
- (c)  $S_x(f) = S_x(-f) = S_x(f) = S_x(-f)$ , la densidad espectral es una función par de  $f$ .
- (d)  $S_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) d\tau = S_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) d\tau$ , el valor de la densidad espectral en el origen ( $f = 0$ ), es igual al área de su función de autocorrelación.
- (e) En un sistema lineal invariante en el tiempo (SLIT) de respuesta impulsional  $h(t)$  y función de transferencia  $H(f)$ , en el caso de señales aleatorias las relaciones entrada/salida son (ver Secciones 1.11.2 y 2.8.1):

$$S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f) \Leftrightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$\langle y^2(t) \rangle = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_x(f) df$$

$$\langle y(t) \rangle = H(0) \langle x(t) \rangle$$

$$S_{xy}(f) = H(f) \cdot S_x(f) \Leftrightarrow R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

Las relaciones desarrolladas en las Secciones 1.11.2 y 2.8.1, para la transmisión de señales a través de sistemas lineales se aplican también para procesos ergódicos. Estos métodos son de gran importancia en la Teoría Estadística de la Comunicación y en el Análisis Espectral de Procesos Estocásticos. El lector interesado en profundizar este tema puede consultar la bibliografía especializada, particularmente [Papoulis, 1965; Lathi, 1968; Davenport y Root, 1958; Parzen, 1962; Couch, 1990], etc.

### 3.9. PROCESOS ALEATORIOS DISCRETOS

#### 3.9.1. Secuencias Aleatorias Discretas

Un proceso aleatorio de mucha importancia en el análisis, procesamiento y transmisión de señales digitales es el "Proceso Aleatorio Discreto M-ario", en el cual las señales de muestra tienen amplitudes discretas con  $m$  valores de amplitud de probabilidad  $P_i$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, M$ . En la Fig. 3.19(a) se ilustra una señal de muestra de este proceso. Si las señales de muestra sólo toman dos valores de amplitud o estados que se suceden a intervalos  $T_b$  con probabilidades  $P_1$  y  $P_2$ , se dice que éste es un "Proceso Aleatorio Binario". En la Fig. 3.19(b) se tiene una señal de muestra de este tipo de proceso, señal que vamos a denominar "secuencia aleatoria binaria". Todas las señales PCM y los códigos de fuente y de línea son secuencias aleatorias binarias y por eso es muy importante conocer sus estadísticas, en especial su función de autocorrelación y su densidad espectral de potencia.

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

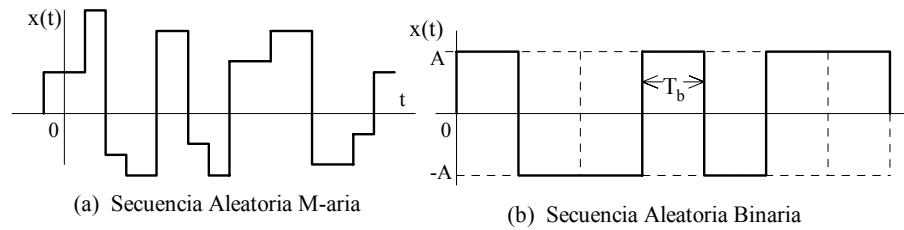


Fig. 3.19. Secuencias de Muestra de Procesos Aleatorios Discretos.

Las secuencias de impulsos transmitidos en banda de base en los sistemas de comunicación digital, se pueden modelar entonces mediante la expresión

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t - nT_b) \quad (3.148)$$

donde  $p(t)$  es el perfil del impulso,  $T_b$  el período de repetición de los impulsos y  $A_n$  una secuencia aleatoria de amplitudes (que representan datos o estados) que en el caso binario toma dos valores  $A_1$  y  $A_2$  con probabilidades  $P_1$  y  $P_2$ , y que es independiente de  $p(t)$ . Si consideramos que  $A_n$  es un proceso débilmente estacionario, entonces

$$E\{A_n\} = \eta_a \quad (3.149)$$

$$E\{A_n \cdot A_{n+k}\} = E\{A_n \cdot A_m\} \quad (3.150)$$

donde  $m = n + k$ , o también  $k = |m - n|$

Nótese que la expresión (3.150) es la función de autocorrelación de la secuencia de estados  $A_n$ ; entonces, [Lathi, 1968],

$$E\{A_n \cdot A_{n+k}\} = R_A(k) = \sum_{i=1}^I (a_n \cdot a_{n+k})_i \cdot P_i \quad (3.151)$$

donde  $a_n$  y  $a_{n+k}$  son las amplitudes de la secuencia de datos  $A_n$  en los intervalos  $nT_b$  y  $(n+k)T_b$ , respectivamente, y  $P_i$  es la probabilidad de obtener el producto  $(a_n \cdot a_{n+k})_i$ . El valor  $I$  es el número de productos  $(a_n \cdot a_{n+k})$  posibles.

Se trata entonces de determinar la densidad espectral de  $X(t)$ . El valor promedio de  $X(t)$  es

$$E\{X(t)\} = E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t - nT_b)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_b) \cdot E\{A_n\}$$

$$E\{X(t)\} = \eta_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_b) \quad (3.152)$$

La función de autocorrelación de  $X(t)$ , que para simplificar la escribiremos en la forma  $R_X(t_1, t_2)$  es, de (3.140),



## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Entonces

$$E\{X(t)\} = E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot p(t - nT_b - T)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{A_n\} \cdot E\{p(t - nT_b - T)\}$$

$$E\{X(t)\} = \eta_a \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{p(t - nT_b - T)\}$$

pero  $E\{p(t - nT_b - T)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(t - nT_b - T) \cdot \frac{1}{T_b} \Pi\left(\frac{T - T_b/2}{T_b}\right) dT = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} p(t - nT_b - T) dT$

Con el cambio de variables  $T' = t - nT_b - T$ , obtenemos

$$E\{p(t - nT_b - T)\} = \frac{1}{T_b} \int_{t-(n+1)T_b}^{t-nT_b} p(T') dT'$$

pero podemos hacer  $-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t-(n+1)T_b}^{t-nT_b} p(T') dT' = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = K$  una constante

Entonces,  $E\{X(t)\} = \frac{\eta_a K}{T_b}$  constante (3.158)

El valor esperado de  $X(t)$  es ahora constante e independiente del tiempo.

Veamos ahora la función de autocorrelación.

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot p(t_1 - nT_b - T) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \cdot p(t_2 - mT_b - T)\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{A_n \cdot A_m\} E\{p(t_1 - nT_b - T) \cdot p(t_2 - mT_b - T)\}$$

$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{A_n A_{n+k}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{p(t_1 - nT_b - T) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b - T]\}$$

pero  $E\{p(t_1 - nT_b - T) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b - T]\} = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} p(t_1 - nT_b - T) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b - T] dT$

Con el cambio de variables  $T' = t_1 - nT_b - T$ , se obtiene

$$E\{p(t_1 - nT_b - T) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b - T]\} = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} p(T') \cdot p[T' + (t_2 - t_1) - kT_b] dT'$$

$$\{p(t_1 - nT_b - T) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b - T]\} = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} p(T') \cdot p(T' + \tau - kT_b) dT' = \frac{1}{T_b} R_p(\tau - kT_b)$$

donde  $\tau = t_2 - t_1$ . Finalmente, la función de autocorrelación de  $X(t)$  resulta en

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) = \frac{1}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{A_n A_{n+k}\} \cdot R_p(\tau - kT_b) \quad (3.159)$$

donde  $R_p(\tau)$  es la integral de correlación de  $p(t)$ . Nótese que ahora la función de autocorrelación depende solamente de la diferencia  $\tau = t_2 - t_1$ .

Puesto que  $E\{X(t)\}$  es constante y  $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$ , entonces el proceso  $X(t)$  es por lo menos débilmente estacionario y su densidad espectral podrá determinarse mediante la expresión (3.146).

Para determinar la densidad espectral de  $X(t)$  vamos a simplificar la expresión (5.159) para darle una forma cuya transformada de Fourier se pueda determinar con facilidad. Supongamos que la secuencia aleatoria de estados  $A_n$  es estadísticamente independiente con valor promedio  $\eta_a$  y varianza  $\sigma_a^2$ . Entonces,

$$E\{A_n\} = \eta_a \quad (3.160)$$

$$\text{También, para } k = 0, \quad E\{A_n A_n\} = E\{A_n^2\} = \sigma_a^2 + \eta_a^2$$

$$\text{y para } k \neq 0, \quad E\{A_n A_{n+k}\} = E\{A_n\} \cdot E\{A_{n+k}\} = \eta_a^2$$

$$\text{y en una forma más compacta,} \quad E\{A_n A_{n+k}\} = \begin{cases} \sigma_a^2 + \eta_a^2 & \text{para } k = 0 \\ \eta_a^2 & \text{para } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.161)$$

La expresión (3.159) se puede escribir ahora en la forma

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_b} (\sigma_a^2 + \eta_a^2) R_p(\tau) + \frac{\eta_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_p(\tau - kT_b) \quad \text{con } k \neq 0$$

$$R_X(\tau) = \frac{\sigma_a^2}{T_b} R_p(\tau) + \frac{\eta_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_p(\tau - kT_b) \quad \text{para todo } k \quad (3.162)$$

$$\text{donde} \quad R_p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)p(t+\tau)dt \Leftrightarrow S_p(f) = |P(f)|^2; \quad P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\} \quad (3.163)$$

La expresión (3.162) nos permite determinar la densidad espectral de  $X(t)$ . En efecto, de acuerdo con la expresión (3.146),

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = \frac{\sigma_a^2}{T_b} |P(f)|^2 + \frac{\eta_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 \exp(-j2\pi k T_b f)$$

$$S_X(f) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \left[ \sigma_a^2 + \eta_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi k T_b f) \right] \quad (3.164)$$

Pero del dual de la expresión (1.104),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi k T_b f) = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right), \quad \text{entonces,}$$

$$S_X(f) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \left[ \sigma_a^2 + \frac{\eta_a^2}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right] \quad (3.165)$$

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

que también podemos escribir en la forma

$$S_X(f) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \left[ E\{A_n^2\} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} E\{A_n A_{n+k}\} \cos(2\pi k T_b f) \right] \quad (3.166)$$

En resumen, si se tiene un proceso aleatorio discreto de la forma

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot p(t - nT_b - T) \quad (3.167)$$

$$\text{donde } E\{A_n A_{n+k}\} = \begin{cases} \sigma_a^2 + \eta_a^2 & \text{para } k = 0 \\ \eta_a^2 & \text{para } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.168)$$

y  $T$  es un retardo aleatorio distribuido uniformemente en el intervalo  $(0, T_b)$ , la densidad espectral de potencia de  $X(t)$  vendrá dada entonces por

$$S_X(f) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \left[ \sigma_a^2 + \frac{\eta_a^2}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right] \quad (3.165)$$

$$\text{o por } S_X(f) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \left[ E\{A_n^2\} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} E\{A_n A_{n+k}\} \cos(2\pi k T_b f) \right] \quad (3.166)$$

Nótese que, en general, la densidad espectral de potencia de una secuencia binaria aleatoria contiene una parte continua y una parte discreta con impulsos Delta Dirac en las frecuencias  $n/T_b$ . Estos impulsos se pueden utilizar para extraer la señalización de reloj de período  $T_b$  para la temporización en el receptor, aunque algunas veces pueden ser perjudiciales.

Nótese que para  $k \neq 0$ ,  $E\{A_n A_{n+k}\} = E\{A_n\} \cdot E\{A_{n+k}\}$ . Si  $E\{A_n\} = \eta_a = 0$ , entonces, de (3.158),  $E\{X(t)\} = 0$ , lo que significa que la secuencia aleatoria  $x(t)$  no posee una componente continua y, por lo tanto, la densidad espectral de potencia  $S_x(f)$  no contiene componentes discretas. En este caso, las estadísticas de  $x(t)$  son

$$S_X(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_b} |P(f)|^2 \Leftrightarrow R_X(\tau) = \frac{\sigma_a^2}{T_b} [p(t) * p(-t)] \quad (3.169)$$

En resumen, cuando el valor promedio de la secuencia aleatoria  $x(t)$  es cero (no posee una componente continua), su densidad espectral de potencia  $S_x(f)$  será puramente continua y no contendrá componentes discretas (De aquí la utilización en la práctica de secuencias aleatorias bipolares). Una forma de explicar esta característica es que las componentes periódicas son una consecuencia de lo que puede llamarse el aspecto “periódico” de los trenes de impulsos. Los impulsos pueden aparecer solamente en instantes periódicos (múltiplos de  $T_b$ ) y este hecho se refleja en la presencia de componentes espectrales discretas a las frecuencias que son múltiplos enteros de  $T_b$ . Por ejemplo, en la secuencia aleatoria bipolar NRZ, Fig. 3.23(a), la presencia, en promedio, de un número igual de impulsos positivos y negativos, significa que todas las componentes discretas en el espectro (tanto en  $f = 0$  como en altas frecuencias) son eliminadas y la densidad espectral será puramente continua, Fig. 3.23(c).

Las expresiones (3.161), (3.165), (3.166) y (3.169), nos permiten determinar la densidad espectral de potencia y la función de autocorrelación de diferentes señales digitales binarias

utilizadas en la práctica para la transmisión de impulsos en banda de base. Nótese que no es necesario que el proceso  $X(t)$  sea ergódico, es suficiente que sea débilmente estacionario.

### 3.9.2. Densidad Espectral y Función de Autocorrelación de Secuencias PCM

En el Capítulo V se utiliza un conjunto de señales aleatorias binarias cuyas densidades espectrales podemos ahora calcular. En efecto, sea la secuencia aleatoria unipolar NRZ de amplitud  $A$  mostrada en la Fig. 3.21(a).

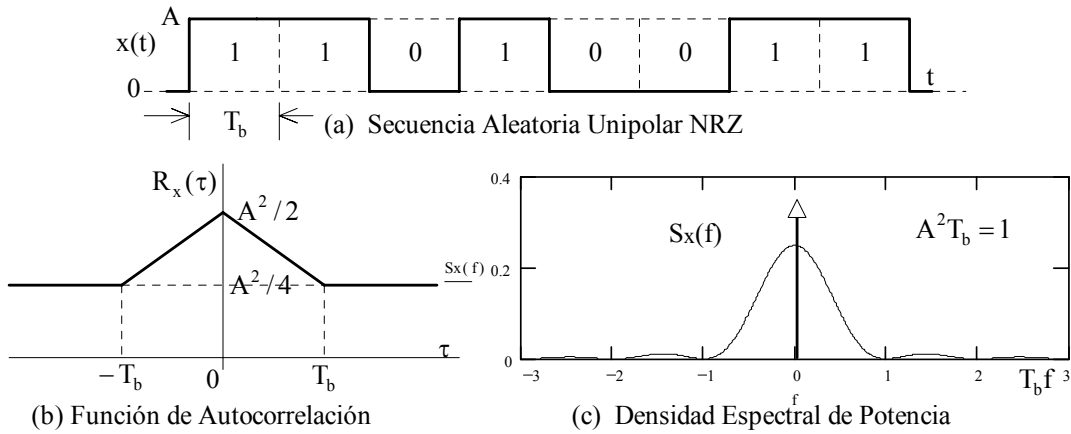


Fig. 3.21.

Para una secuencia aleatoria unipolar NRZ de amplitud  $A$ , se cumple que  $A_1 = A$  y  $A_2 = 0$  con probabilidades  $1/2$ ; entonces, de (3.151),

$$\text{Para } k=0, \quad E\{A_n^2\} = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} = \frac{A^2}{2} = \sigma_a^2 + \eta_a^2$$

$$\text{Para } k \neq 0, \quad E\{A_n A_{n+k}\} = \frac{A_1^2}{4} + \frac{A_1 A_2}{4} + \frac{A_2 A_1}{4} + \frac{A_2^2}{4} = \frac{A^2}{4} = \eta_a^2$$

$$\text{de donde} \quad \sigma_a^2 + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2} \quad \therefore \quad \sigma_a^2 = \frac{A^2}{4}$$

Como los impulsos son rectangulares de duración  $T_b$ , entonces

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right) \Leftrightarrow P(f) = T_b \text{sinc}(T_b f) \quad \text{y} \quad |P(f)|^2 = T_b^2 \text{sinc}^2(T_b f)$$

Reemplazando lo anterior en (3.165),

$$S_X(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(T_b f) \left[ 1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{T_b}\right) \right]$$

pero como  $\text{sinc}^2(T_b f)$  tiene sus ceros en los puntos  $n/T_b$  con  $n \neq 0$ , habrá solamente una componente discreta a la frecuencia cero, de donde

$$S_X(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(T_b f) + \frac{A^2}{4} \delta(f) = \frac{A^2}{4} \left[ T_b \text{sinc}^2(T_b f) + \delta(f) \right] \quad (3.170)$$



cuya transformada inversa, su función de autocorrelación, es

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{4} \left[ 1 + \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b}\right) \right] \quad (3.171)$$

En la Fig. 3.21(b) se muestra la función de autocorrelación y en la Fig. 3.21(c) la densidad espectral de potencia de la secuencia aleatoria unipolar NRZ.

En transmisión de impulsos mediante portadora modulada (Capítulo V) se transmite la señal ASK que tiene la forma  $x_{ASK}(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t)$ , donde  $x(t)$  es una secuencia aleatoria unipolar NRZ de amplitud  $A$ . Mediante aplicación del teorema de la modulación para señales de potencia, la correspondiente densidad espectral de potencia de la señal  $x_{ASK}(t)$  es (ver Fig. 5.62),

$$S_{ASK}(f) = \frac{A^2}{16} [\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)] + \frac{A^2 T_b}{16} \left[ \text{sinc}^2\left(\frac{f+f_c}{1/T_b}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f-f_c}{1/T_b}\right) \right] \quad (3.172)$$

Aplicando este procedimiento a diferentes secuencias aleatorias que representan algunos códigos de línea, podemos demostrar (Ver Problema de Aplicación 3.30):

(a) Para una secuencia aleatoria unipolar RZ de amplitud  $A$ , Fig. 3.22(a):

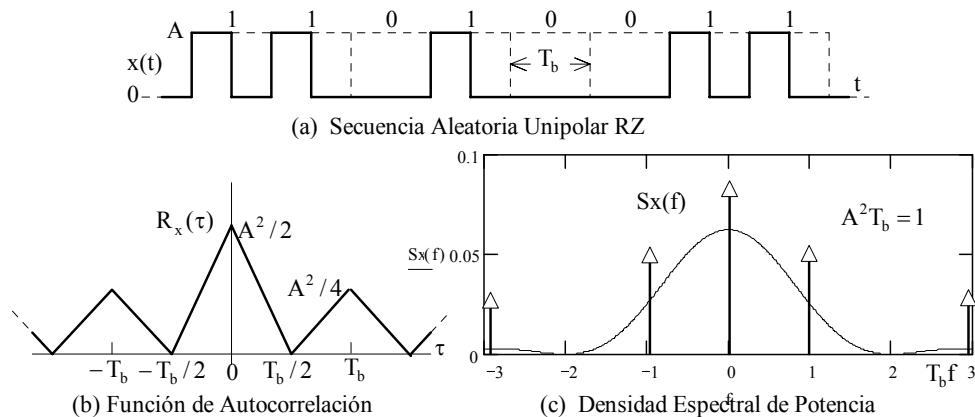


Fig. 3.22

La densidad espectral de potencia de esta secuencia es

$$S_X(f) = \frac{A^2 T_b}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{T_b f}{2}\right) \left[ 1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right]$$

Los impulsos de  $\delta(f - n/T_b)$  están presentes en las frecuencias  $(n/T_b)$ , pero como  $\text{sinc}^2(T_b f/2)$  tiene sus ceros en las frecuencias  $(2n/T_b)$ , entonces  $S_X(f)$  contendrá impulsos solamente en las frecuencias para  $n$  impar y  $n = 0$ . Nótese que el impulso en  $(f = 1/T_b)$  se puede utilizar para extraer la información de señalización o temporización (reloj). Hechas estas consideraciones, la densidad espectral  $S_X(f)$  queda entonces en la forma

$$S_x(f) = \frac{A^2}{16} \left[ T_b \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) + \delta(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' \frac{4}{n^2 \pi^2} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right] \text{ para } n \text{ impar} \quad (3.173)$$

Esta densidad espectral, mostrada en la Fig. 3.22(c), contiene un impulso en el origen e impulsos a las frecuencias  $n/T_b$  para  $n$  impar. La notación  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} '$  indica que la sumatoria no incluye el valor  $n = 0$ .

La correspondiente función de autocorrelación es, Fig. 3.22(b),

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \left[ \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b / 2}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{\tau - nT_b}{T_b / 2}\right) \right] \quad (5.173)$$

(b) Para una secuencia aleatoria bipolar NRZ de amplitudes  $\pm A$ , Fig. 3.23(a).

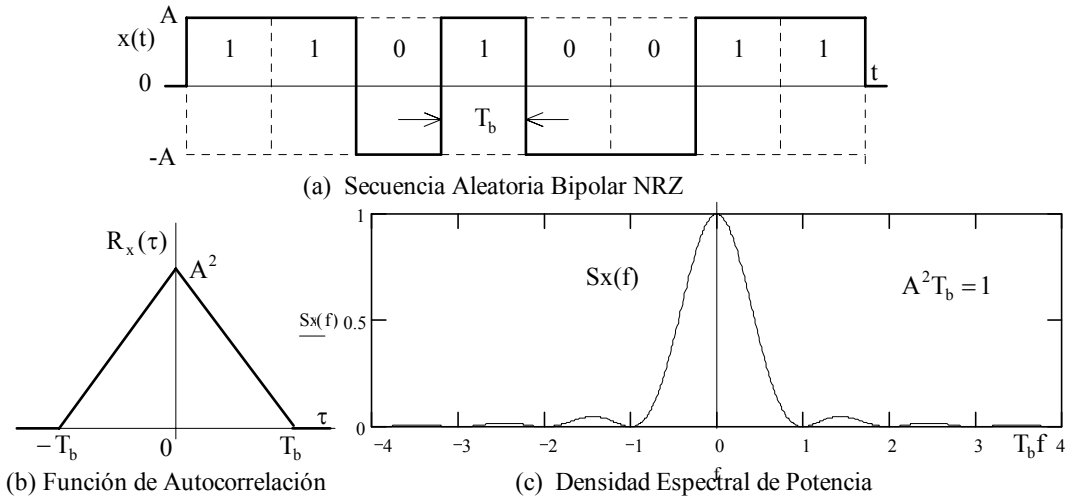


Fig. 3.23

La densidad espectral de potencia y la función de autocorrelación correspondientes, vienen dadas por

$$S_X(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2(T_b f); \quad R_X(\tau) = A^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b}\right) \quad (3.175)$$

En la Fig. 3.23(b) se muestra la función de autocorrelación y en la Fig. 3.23(c) la densidad espectral de una secuencia aleatoria bipolar NRZ de amplitudes  $\pm A$ .

La modulación binaria PSK, que veremos en el Capítulo V, se puede considerar como el producto de una secuencia aleatoria bipolar NRZ de amplitud  $A$  por una señal sinusoidal de frecuencia  $f_c$ , es decir,

$$x_{\text{PSK}}(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Aplicando el teorema de la modulación para señales de potencia, la densidad espectral de potencia de una señal PSK es

$$S_{\text{PSK}}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \left[ \text{sinc}^2\left(\frac{f+f_c}{f_b}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f-f_c}{f_b}\right) \right] \quad (3.176)$$

expresión que tiene la misma forma que (3.172), con la diferencia de que  $S_{\text{PSK}}(f)$  no contiene impulsos en las frecuencias  $f = \pm f_c$ . Nótese que la densidad espectral de una señal DPSK, que veremos en el Capítulo V, es igual a la densidad espectral de una señal PSK, pues desde el punto de vista espectral no hay diferencia entre una señal PSK y una DPSK.

(c) Para una secuencia aleatoria bipolar AMI RZ de amplitud  $\pm A$ , Fig. 3.24(a).

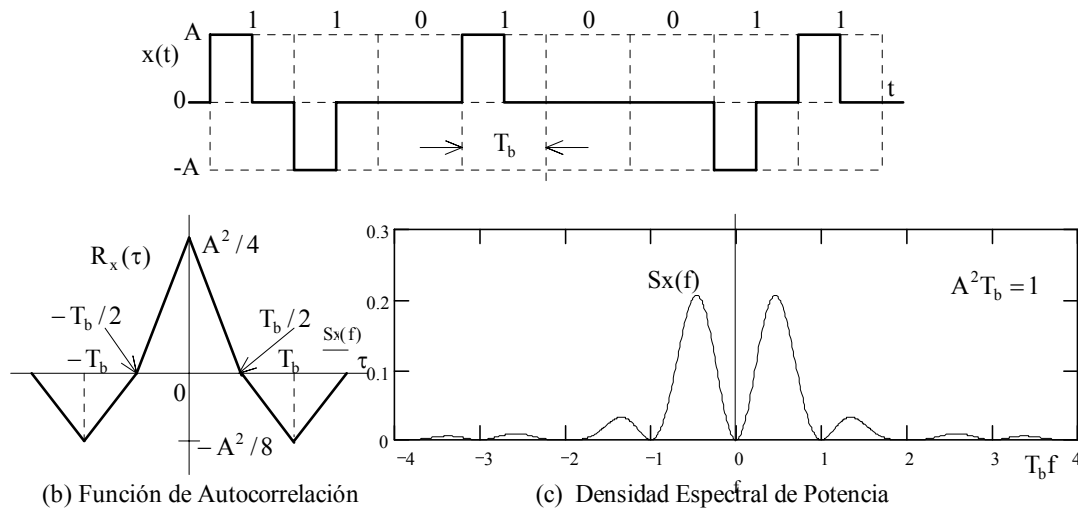


Fig. 3.24

La densidad espectral de esta secuencia es

$$S_X(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) \text{sen}^2(\pi T_b f) \quad (3.177)$$

que se muestra en la Fig. 3.24(c); la correspondiente función de autocorrelación, Fig. 3.24(b), es

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{4} \left\{ \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right) - \frac{1}{2} \left[ \Lambda\left(\frac{\tau+T_b}{T_b/2}\right) + \Lambda\left(\frac{\tau-T_b}{T_b/2}\right) \right] \right\} \quad (3.178)$$

(c) Para una secuencia aleatoria bipolar MANCHESTER de amplitud  $\pm A$ , Fig. 3.25(a).

La densidad espectral de la secuencia aleatoria MANCHESTER, Fig. 3.25(c), es

$$S_X(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) \text{sen}^2\left(\pi \frac{T_b}{2} f\right) \quad (3.179)$$

y la correspondiente función de autocorrelación, Fig. 3.25(b),

$$R_x(\tau) = A^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right) - \frac{A^2}{2} \left[ \Lambda\left(\frac{\tau + T_b/2}{T_b/2}\right) + \Lambda\left(\frac{\tau - T_b/2}{T_b/2}\right) \right] \quad (3.180)$$

En la Fig. 3.25(b) se muestra la densidad espectral de potencia de la secuencia bipolar MANCHESTER de amplitud  $\pm A$ .

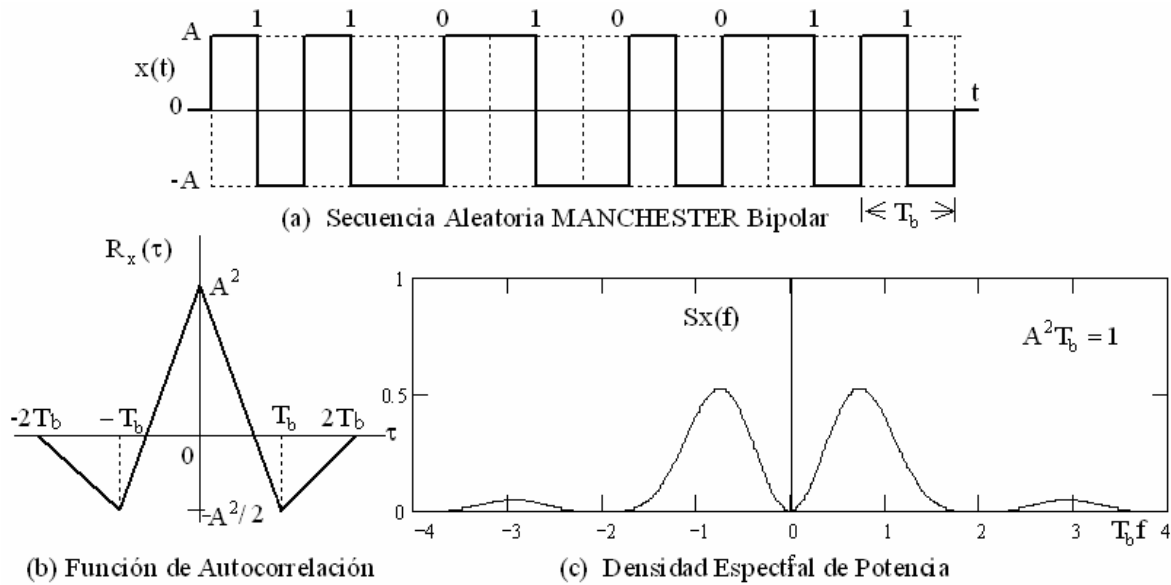


Fig. 3.25

(e) Función de Autocorrelación y Densidad Espectral de Potencia del Ruido Térmico

La secuencia aleatoria mostrada en la Fig. 3.19(a) tiene la forma típica del ruido térmico en conductores. La señal cambia abruptamente en amplitud en instantes aleatorios. El número promedio de transiciones por segundo de la amplitud es  $\alpha$ , y el número de transiciones sigue la distribución de Poisson. La amplitud después de una transición es independiente de la amplitud de la transición anterior. Se demuestra [Lathi, 1968] que para el ruido térmico

$$R_X(\tau) = kTR\alpha \cdot \exp(-\alpha|\tau|) \Leftrightarrow S_X(f) = \frac{2kTR\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (3.181)$$

cuyas formas se muestran en la Fig. 3.26.

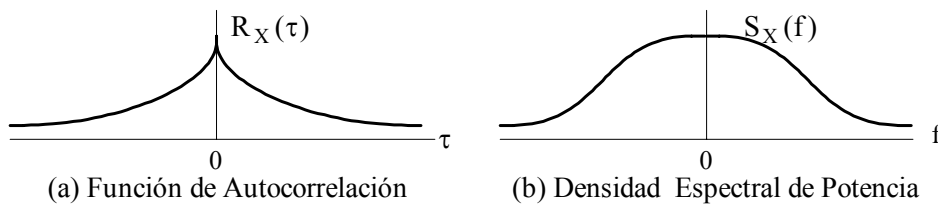


Fig. 3.26. Características del Ruido Térmico.

$k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura absoluta, en kelvins, en el conductor de resistencia  $R$ . Como  $\alpha$  es del orden de  $10^{14}$ , la densidad es casi plana para frecuencias hasta el

orden de  $10^{13}$  Hz. En consecuencia, para efectos prácticos el ruido térmico se puede considerar como ruido blanco con una densidad espectral  $S_X(f) = 2kTR$ , que es el mismo resultado (2.138) de Johnson y Nyquist.

### 3.9.3. Secuencias Binarias Seudoaleatorias

#### Características Espectro-Temporales

En la sección anterior consideramos secuencias aleatorias de duración infinita las cuales, en su mayoría, son generadas a partir de un proceso físico, por ejemplo, una fuente de información. Pero hay una clase de secuencias aleatorias binarias que son periódicas, esto es, son secuencias infinitas formadas por una subsecuencia aleatoria binaria de duración  $T$  que se repite periódicamente. Debido a su característica periódica pero a la vez aleatoria, a estas secuencias se las denomina “secuencias seudoaleatorias”, “secuencias PN (del inglés Pseudo-Noise)” o “secuencias m”. El término “seudo-aleatorio” significa que la señal es aleatoria en apariencia pero reproducible por medios determinísticos. Una secuencia binaria de este tipo se muestra en la Fig. 3.27. Debido a su naturaleza determinística, este tipo de secuencia no contiene ninguna clase de información, pero puede ser modulada para transportar algún tipo de información.

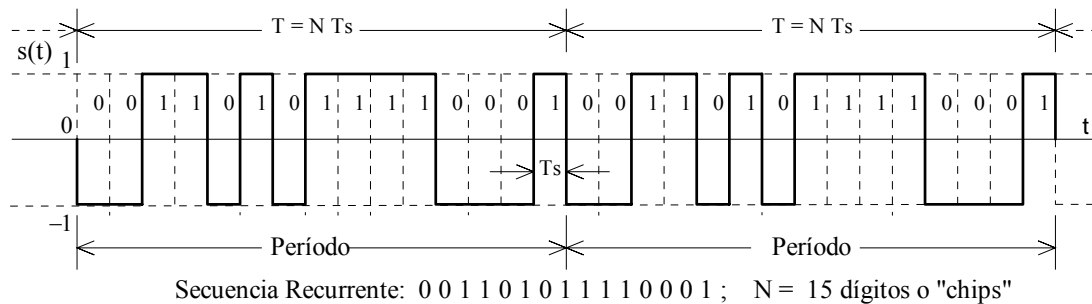


Fig. 3.27. Secuencia Binaria Seudoaleatoria

Cada período de la secuencia seudoaleatoria está formado por  $N$  dígitos o “chips” de duración  $T_s$  y para efecto de análisis consideraremos secuencias NRZ. Las secuencias seudoaleatorias no se producen espontáneamente sino que son generadas por métodos artificiales; este hecho es de gran importancia pues permite la reproducción de señales seudoaleatorias idénticas, lo cual es imposible de lograr con secuencias aleatorias de cualquier otro tipo.

Las secuencias seudoaleatorias son muy utilizadas en el campo de la ingeniería eléctrica, sobre todo en el dominio de las telecomunicaciones, y sería de interés conocer sus características temporales y frecuenciales, en particular su función de autocorrelación y su densidad espectral de potencia.

Se demuestra [Couch, 1990] que la función de autocorrelación de una secuencia seudoaleatoria  $s(t)$  es

$$R_s(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right) \Lambda\left(\frac{\tau - nNT_s}{T_s}\right) - \frac{1}{N} \quad (3.182)$$

la cual tiene la forma mostrada en la Fig. 3.28.

La correspondiente densidad espectral de potencia se puede determinar mediante el teorema de Wiener-Khintchine.

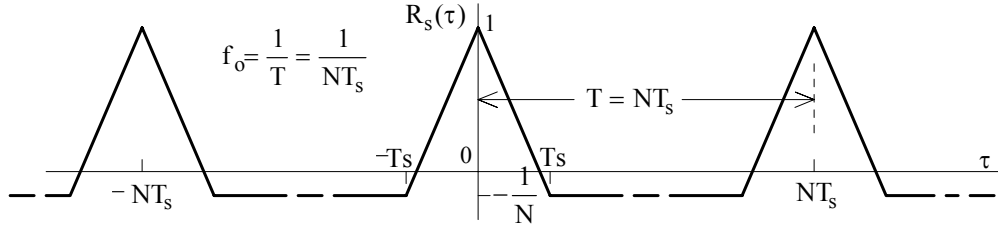


Fig. 3.28. Función de Autocorrelación de una Secuencia Binaria Seudoaleatoria.

Como  $R_s(\tau)$  es una función periódica, su transformada de Fourier  $S_s(f)$  se puede determinar mediante el método visto en la Sección 1.8, Capítulo I, expresiones (1.102) y (1.103). En efecto, de la Fig. 3.28, la función generatriz  $R_{sg}(\tau)$  de  $R_s(\tau)$  es

$$R_{sg}(\tau) = \left(1 + \frac{1}{N}\right) \Lambda\left(\frac{\tau}{T_s}\right) - \frac{1}{N} \Pi\left(\frac{\tau}{NT_s}\right)$$

siendo la frecuencia fundamental  $f_0 = \frac{1}{NT_s}$ .

La transformada de Fourier de  $R_{sg}(\tau)$  es

$$S_{sg}(f) = \left(1 + \frac{1}{N}\right) T_s \text{sinc}^2(T_s f) - T_s \text{sinc}(NT_s f)$$

De (1.103), el correspondiente coeficiente de Fourier será

$$S_{sn} = \frac{1}{NT_s} \left[ \left(1 + \frac{1}{N}\right) T_s \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) - T_s \text{sinc}(n) \right] = \frac{N+1}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) - \frac{1}{N} \text{sinc}(n)$$

De (1.102), la densidad espectral de potencia resulta en

$$S_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{N+1}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) - \frac{1}{N} \text{sinc}(n) \right] \delta(f - nf_0)$$

pero  $\text{sinc}(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$

Entonces, para  $n = 0$ ,

$$S_s(f)|_{n=0} = \left[ \frac{N+1}{N^2} - \frac{1}{N} \right] \delta(f) = \frac{1}{N^2} \delta(f)$$

La densidad espectral de potencia de una secuencia binaria pseudoaleatoria  $s(t)$  será entonces

$$S_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{N+1}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) \delta(f - nf_0) + \frac{1}{N^2} \delta(f) \right] \quad (3.183)$$

donde  $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$  indica que la sumatoria no incluye el valor  $n = 0$ ;  $N$  es el número de dígitos binarios o “chips” dentro de un período, y  $f_0 = 1/NT_s$  la frecuencia de recurrencia.

La densidad espectral de potencia de una secuencia pseudoaleatoria, expresión (3.183), es un espectro discreto o de líneas cuya envolvente tiene la forma mostrada en la Fig. 3.29 (frecuencias positivas solamente).

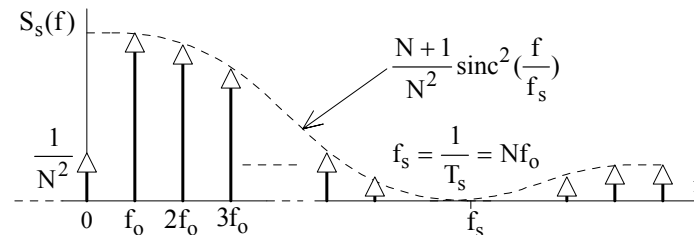


Fig. 3.29. Densidad Espectral de Potencia de una Secuencia Pseudoaleatoria.

Si el número de “chips”  $N$  es muy grande, las líneas espectrales se juntan cada vez más y para efectos prácticos la densidad espectral puede considerarse como un espectro continuo muy parecido al de una señal aleatoria binaria bipolar NRZ, como la mostrada en la Fig. 3.23.

### Dispersión del Espectro (Spread Spectrum)

La “dispersión del espectro (Spread Spectrum, SS)” es una técnica de modulación digital en la cual una secuencia aleatoria binaria portadora de información modula a una secuencia pseudoaleatoria; como consecuencia, el espectro resultante se esparce o dispersa y su ancho de banda es mucho mayor que el ancho de banda de la señal moduladora. El principio de dispersión del espectro es muy utilizado en sistemas de comunicación para evitar interferencias (espontáneas o maliciosas (jamming)), para robustecer los sistemas contra escuchas indebidas y para la transmisión de múltiples señales por un mismo canal. En el Capítulo V se estudian algunos de los sistemas utilizados en la práctica.

Consideremos entonces una secuencia aleatoria bipolar NRZ  $m(t)$  de la forma dada en la Fig. 3.23(a); multipliquemos esta señal por la secuencia pseudoaleatoria  $s(t)$  de la Fig. 3.27, donde debe cumplirse que

$$\frac{1}{f_b} = T_b = NT_s \quad \text{y} \quad f_0 = f_b \quad (3.184)$$

como se muestra en la Fig. 3.30;  $m(t)$  y  $s(t)$  son independientes. Nótese que  $s^2(t) = (\pm 1)^2 = 1$ .

Puesto que  $m(t)$  y  $s(t)$  son independientes, entonces se verifica que si  $s_p(t) = m(t) \cdot s(t)$ , de donde  $m(t) \Rightarrow S_m(f) \Leftrightarrow R_m(\tau)$  y  $s(t) \Rightarrow S_s(f) \Leftrightarrow R_s(\tau)$ , entonces  $R_{sp}(\tau) = R_m(\tau) \cdot R_s(\tau)$

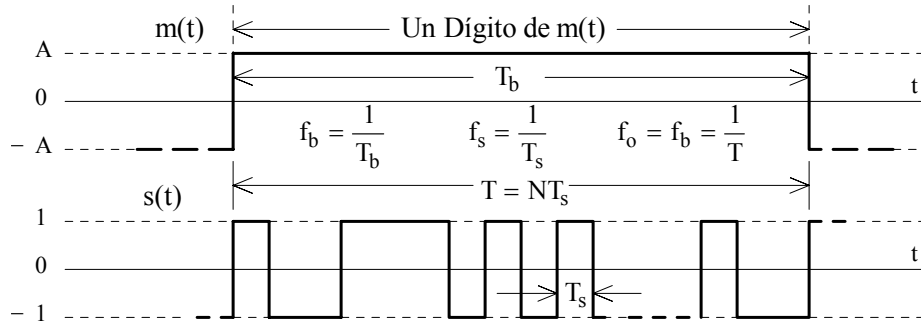


Fig. 3.30. Mensaje m(t) y Señal Dispersora s(t).

Del Teorema de Wiener-Kintchine,  $R_{sp}(\tau) \Leftrightarrow S_{sp}(f)$ , y por el teorema de convolución  $S_{sp}(f) = S_m(f) * S_s(f)$ , donde, normalizando (3.175) haciendo  $A^2 T_b = 1$ ,

$$S_m(f) = \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_b}\right) \quad \text{y} \quad s_p(t) \Rightarrow S_{sp}(f)$$

$$\text{Entonces,} \quad S_{sp}(f) = S_s(f) * S_m(f)$$

$$S_{sp}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(N+1)}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) [S_m(f) * \delta(f - nf_o)] + \frac{1}{N^2} [S_m(f) * \delta(f)]$$

$$S_{sp}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(N+1)}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) \cdot S_m(f - nfo) + \frac{1}{N^2} S_m(f) \quad (3.185)$$

En la Fig. 3.31 se muestra este espectro disperso que determinamos, para no hacer muy largo el tiempo de cálculo, con  $N = 31$ ;  $f_b = f_o = 1$  kHz y  $f_s = 31$  kHz.

Puede notarse que el efecto de la multiplicación es el de producir un espectro que se extiende aproximadamente  $N$  veces el valor del espectro original, el cual se muestra con líneas punteadas para efectos de comparación (las curvas no están a escala: la amplitud de  $S_{sp}(f)$  se ha multiplicado por 10 para poderla observar cómodamente en la Fig. 3.31).

El espectro mostrado en la Fig. 3.31 se ha calculado para  $N = 31$ , pero en la práctica el valor de  $N$  va desde una centena hasta varios millares. Para  $|f| \geq f_s$ , el espectro disperso es despreciable, y se puede establecer que el ancho de banda  $B$  del espectro disperso es  $B \approx Nf_b$ , donde  $f_b$  es la frecuencia de señalización de la secuencia binaria aleatoria  $m(t)$ . Al factor  $N \approx B/f_b$  se le suele llamar "ganancia de procesamiento" y es similar al factor de expansión del ancho de banda  $\beta_m$  de los métodos de modulación clásicos que veremos en los siguientes capítulos.

El espectro de la señal original  $m(t)$  está completamente enmascarado en el espectro disperso  $S_{sp}(f)$  y su detección es prácticamente imposible porque dentro de la banda de paso de  $m(t)$  y para altos valores de  $N$  la potencia de  $s_p(t)$  es tan pequeña que se acerca a los niveles de potencia del ruido. Para cualquier observador, el contenido de potencia del espectro disperso en la gama



## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$|f| \leq f_b$  sería ruido simplemente. Para tener una idea de las magnitudes en juego, vamos a calcular la relación entre la potencia de la señal útil  $m(t)$  respecto a la potencia del espectro disperso  $S_{sp}(f)$  en la gama de frecuencias  $|f| \leq f_b$ . Con los valores utilizados en el cálculo del espectro disperso de la Fig. 3.31, esta relación es de 14,273 dB, es decir, la potencia del espectro disperso está a 14,273 dB (26,75 veces) por debajo de la potencia de  $m(t)$ . Esta diferencia se hace más alta para altos valores de  $N$ . En general, cuando  $N \gg 1$ , la relación Potencia del Espectro de Señal /Potencia del Espectro Disperso varía proporcionalmente a  $N$ , donde  $N$  es la ganancia de procesamiento.

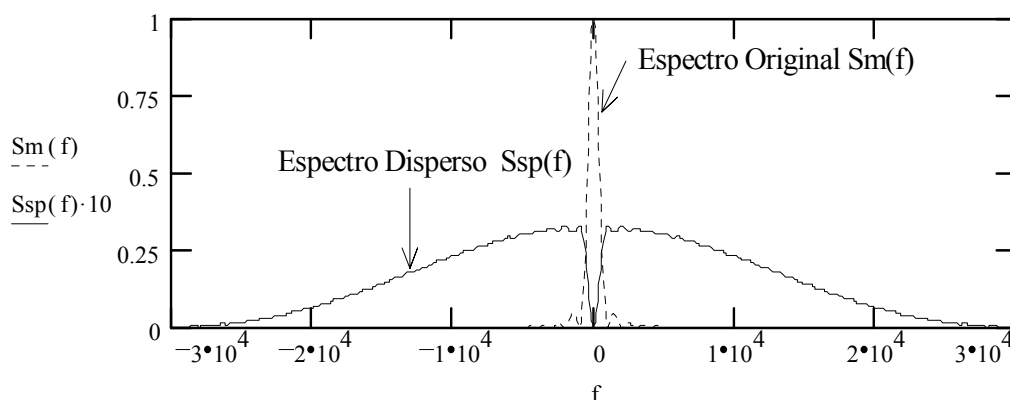


Fig.3.31. Espectro Disperso  $S_{sp}(f)$  y Espectro de Señal  $S_m(f)$

En el Capítulo V se aplican estos conceptos a los sistemas de transmisión de señales binarias por dispersión del espectro (Spread Spectrum).

### Generación de Secuencias Binarias Pseudoaleatorias

Debido a su naturaleza periódica y determinística, las secuencias pseudoaleatorias se pueden generar en forma artificial. Esto es de capital importancia en el campo de las telecomunicaciones pues permite la generación de réplicas exactas y sincronizadas tanto en el transmisor como en el receptor.

Sin profundizar en la teoría matemática de las secuencias, se puede decir que las secuencias pseudoaleatorias son una subclase importante de las secuencias binarias recurrentes, las cuales se pueden generar mediante dispositivos lineales retroalimentados muy fáciles de realizar con registros de desplazamiento digitales corrientes.

Las secuencias pseudoaleatorias o secuencias PN de interés en telecomunicaciones deben cumplir con las siguientes condiciones:

- (1) Que sean fáciles de generar
- (2) Que posean las propiedades aleatorias necesarias
- (3) Que su período sea grande
- (4) Que sean difíciles de reconstruir a partir de un corto segmento de la secuencia

Estas condiciones son cumplidas en general por registros retroalimentados de la forma mostrada en la Fig. 3.32.

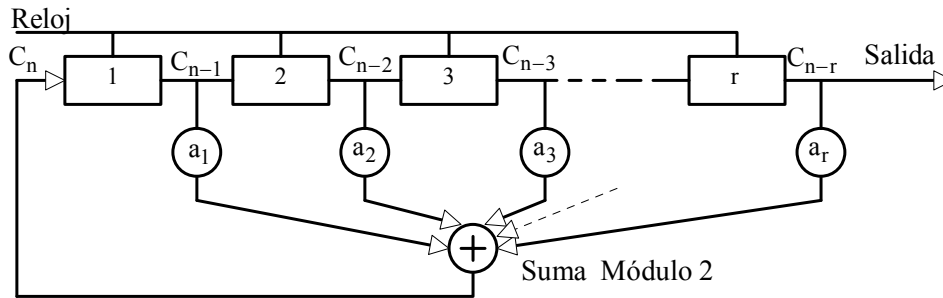


Fig. 3.32. Generador de Secuencias Seudoaleatorias de r Etapas

El contenido del registro de r etapas se combina linealmente con los coeficientes  $a_k$  y se retroalimenta a la primera etapa. La secuencia en  $C_n$  satisface la ecuación de recurrencia

$$C_n = \sum_{k=1}^r a_k \cdot C_{n-k} \text{ Módulo 2; } a_r = 1 \tag{3.186}$$

El ciclo periódico de los estados depende del estado inicial del registro y de los coeficientes  $a_k$ , denominados “tomas” o “taps”; en los registros prácticos se hace  $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 1$ . La secuencia de salida es una secuencia recurrente cuya longitud máxima está relacionada con el número de etapas r del registro mediante la ecuación  $N = 2^r - 1$ . Esta expresión determina la máxima longitud posible de la secuencia, aunque no todas las combinaciones de “tomas” producen la máxima longitud. Las combinaciones de “tomas” que producen la máxima longitud han sido estudiadas extensamente en la literatura y se presentan siempre en forma tabulada [Sarwate y Pursley, 1980].

En la Fig. 3.33 se muestra un generador PN de longitud máxima de cuatro etapas; si su estado inicial es 0 0 0 1, la secuencia recurrente a la salida  $Q_4$  será (la flecha indica el sentido del flujo de dígitos):

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ 001101011110001 \end{array} \tag{3.187}$$

Normalmente el registro se inicializa con el estado inicial 0 0 0 1, mostrado en la Fig. 3.33, y a cada impulso de reloj a la salida van apareciendo los “chips” que forman la secuencia, para un total de  $N = 2^r - 1$  “chips”. En general, el estado 0 0 0 ...0 no se utiliza como estado inicial porque produciría una salida de puros CEROS; de hecho, el estado 0 0 0 ...0 es una combinación prohibida.

Nótese que las “tomas” del registro de longitud máxima pasan una y solamente una vez por todas las combinaciones posibles de sus r dígitos (exceptuando la combinación de puros CEROS) y como conocemos todas estas combinaciones, es fácil determinar el número de CEROS y UNOS de la secuencia recurrente.

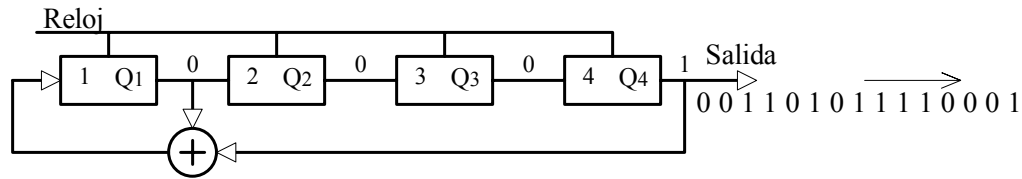


Fig. 3.33. Generador PN de Longitud Máxima de 4 Etapas.

Sea entonces  $r$  el número de etapas del registro,  $N$  el número de dígitos o “chips” de la secuencia recurrente y  $N_{(0)}$  y  $N_{(1)}$  los números de CEROS y UNOS, respectivamente, contenidos en la secuencia recurrente. Entonces,

$$\text{Número de “chips” de la secuencia} = N = 2^r - 1 \quad (3.188)$$

$$\text{Número de UNOS en la secuencia} = N_{(1)} = \frac{2^r}{2} = 2^{r-1} \quad (3.189)$$

$$\text{Número de CEROS en la secuencia} = N_{(0)} = N_{(1)} - 1 = 2^{r-1} - 1 \quad (3.190)$$

El número de CEROS es uno menos que el número de UNOS.

Por ejemplo, para el generador PN de la Fig. 3.33, se tiene:  $r = 4$ ;  $N = 2^4 - 1 = 15$  “chips”;  $N_{(1)} = 2^3 = 8$  UNOS;  $N_{(0)} = 8 - 1 = 7$  CEROS. El lector puede verificar que estos valores se cumplen en la secuencia recurrente (3.187).

La convención establecida para representar los registros de longitud máxima tiene la forma **Registro**  $\langle r, k_i \rangle$ , donde el término  $r$  indica el número de etapas del registro y  $k_i$  las “tomas” que hay que combinar en suma módulo 2 para formar, junto con la “toma”  $r$ , la entrada a la primera etapa. Por ejemplo, el Registro  $\langle 7, 1 \rangle$  caracteriza un generador de longitud máxima de 7 etapas en el cual se suman las “tomas” 1 y 7 en módulo 2 y se aplican a la primera etapa. De acuerdo con esta convención, el generador mostrado en la Fig. 3.33 es entonces un Registro  $\langle 4, 1 \rangle$ , cuya secuencia de salida tiene la forma de la Fig. 3.27. Otros registros de aplicación práctica son el Registro  $\langle 13, 4, 3, 1 \rangle$  y el Registro  $\langle 19, 5, 2, 1 \rangle$ , que junto con el Registro  $\langle 7, 1 \rangle$ , son utilizados en el Servicio de Radioaficionados. Para más información sobre las secuencias aleatorias y sus aplicaciones en los sistemas de espectro disperso, el lector puede consultar el ARRL SPREAD SPECTRUM SOURCEBOOK, edición de 1991.

### 3.10 RESUMEN

En este capítulo se han desarrollado algunos modelos para las señales mensaje de carácter aleatorio presentes en los sistemas de comunicación. Las señales aleatorias no pueden ser descritas mediante expresiones explícitas del tiempo; sin embargo, cuando se examinan durante un largo período, ellas exhiben ciertas regularidades que se pueden describir en términos probabilísticos o como promedios estadísticos. Estos modelos, en la forma de una descripción probabilística de un conjunto de señales del tiempo, se denominan “proceso aleatorio o estocástico”. El proceso aleatorio se puede utilizar para estimar, por ejemplo, la probabilidad de que la amplitud de una señal aleatoria esté dentro de cierto rango en un determinado instante. En particular, el proceso aleatorio se puede emplear para desarrollar descripciones de señales aleatorias en el dominio de la frecuencia.

La descripción y análisis de señales aleatorias utilizando estos conceptos son de gran utilidad en el análisis y diseño de sistemas de comunicación y en el análisis espectral de procesos.

La teoría de la probabilidad trata la noción de probabilidad de sucesos aleatorios y el concepto de variable aleatoria. El concepto de variable aleatoria se ha desarrollado a partir de ideas sencillas e intuitivas y se ha clasificado como variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas. Basado en estas ideas se define la noción de proceso aleatorio.

El proceso aleatorio se ha definido en términos de sus estadísticas que son simplemente relaciones de probabilidad o promedios estadísticos. Los promedios estadísticos de más utilización son el valor promedio y la función de autocorrelación. Si el valor promedio y la función de autocorrelación de un proceso son invariantes en el tiempo, entonces se dice que el proceso es estacionario en el sentido amplio, en cuyo caso se puede definir la existencia de una densidad espectral de potencia que muestra la distribución de la potencia en el dominio de la frecuencia. Una subclase especial de los procesos estacionarios es el llamado proceso ergódico, el cual tiene la propiedad de que los promedios conjunto son iguales a los promedios tiempo, y todas las estadísticas del proceso se pueden determinar a partir de una simple señal de muestra.

De gran importancia en el análisis de sistemas digitales son los procesos aleatorios discretos, y en particular las secuencias aleatorias binarias. Todas las señales PCM y los diferentes códigos de transmisión digital son secuencias aleatorias binarias, y es muy importante conocer sus estadísticas, en especial su función de autocorrelación y su densidad espectral de potencia. Estas secuencias se tratan con cierto detalle, habiéndose determinado la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de algunas de las secuencias aleatorias binarias más utilizadas en los sistemas de transmisión digital.

En los modernos sistemas de comunicación se está aplicando el concepto de dispersión del espectro. En la dispersión del espectro juegan un papel muy importante las denominadas secuencias pseudoaleatorias, que son secuencias infinitas formadas por una subsecuencia aleatoria de duración  $T$  que se repite periódicamente. Para este tipo de señal se determina la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia. La dispersión del espectro se produce cuando una secuencia binaria portadora de información modula una secuencia pseudoaleatoria; como consecuencia, el espectro de la señal resultante se esparce o dispersa y su ancho de banda es mucho mayor que el ancho de banda de la señal mensaje. En el Capítulo V se aplican estas nociones en algunos sistemas de transmisión digital. Para complementar el tema, se presenta una breve exposición sobre la generación y aplicación de las secuencias binarias pseudoaleatorias.

### PROBLEMAS DE APLICACION

- 3.1. Sea una secuencia binaria de 1428 UNOS y 2668 CEROS. Demuestre que la probabilidad de recibir un UNO en un intervalo cualquiera es de 0,3486.
- 3.2. El experimento es el lanzamiento de dos dados.
  - (a) Demuestre que la probabilidad de obtener 8 puntos es de  $5/36$ .
  - (b) Demuestre que la probabilidad de obtener 7 puntos es de  $1/6$
  - (c) Demuestre que la probabilidad de obtener 5 puntos ó 7 puntos ó 8 puntos es de  $15/36$ .
- 3.3. Demuestre que  $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(A B C)$
- 3.4. Una compañía construye receptores de radio de 6, 8 y 10 transistores. Estos receptores vienen en gabinetes de color marfil, negro y verde. En el depósito de la compañía hay 10.000 receptores distribuidos en la forma siguiente.

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

No. de Transistores	Color Marfil	Color Negro	Color Verde	TOTALES
6	1000	3000	2000	6000
8	600	1000	1000	2600
10	400	1000	0	1400
TOTALES	2000	5000	3000	10000

Una persona entra en el depósito y toma un receptor. Demuestre las siguientes probabilidades:

$$P\{\text{tomar un receptor verde}\} = 0,3$$

$$P\{\text{tomar un radio de 10 transistores}\} = 0,14$$

$$P\{\text{tomar un radio verde de 10 transistores}\} = 0$$

$$P\{\text{tomar un radio negro de 6 transistores}\} = 0,3$$

3.5. El experimento es el lanzamiento de cinco monedas. Demuestre las siguientes probabilidades:

$$P\{\text{aparecen tres caras}\} = 5/16$$

$$P\{\text{aparece una sola cara}\} = 5/32$$

$$P\{\text{aparecen cinco caras}\} = 1/32$$

3.6. Una caja contiene 10 bolas blancas, 4 negras y 3 rojas. De esta caja se sacan 4 bolas. Demuestre que la probabilidad de que estas bolas sean todas blancas es de  $3/34$ .

3.7. Una caja contiene 2 bolas blancas, 1 negra y 4 rojas. De esta caja se sacan 3 bolas. Demuestre que la probabilidad de sacar 1 bola blanca y 2 rojas es de  $12/35$ .

3.8 Una caja C1 contiene 2000 transistores, de los cuales el 5% está defectuoso. Una segunda caja C2 contiene 500 transistores, de los cuales el 40% está defectuoso. Se tiene también otras dos cajas C3 y C4 con 1000 transistores cada una y con un 10% defectuoso. Se selecciona al azar una de las 4 cajas y se saca un transistor. Demuestre que la probabilidad de que este transistor esté defectuoso es de  $0,1625$ .

3.9. En el Problema anterior se examina el transistor y vemos que está defectuoso. Demuestre que la probabilidad de que fue sacado de la caja C2 es de  $0,615$ .

3.10. Verifique si las siguientes funciones satisfacen las condiciones para ser una función de densidad de probabilidad.

$$(a) p_X(x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{1+x^2} \right); \quad (b) p_X(x) = |x| \Pi\left(\frac{x}{2}\right); \quad (c) p_X(x) = \frac{1}{6} (8-x) \Pi\left(\frac{x-8}{8}\right)$$

3.11. Sea la función de densidad de probabilidad  $p_X(x) = \frac{1}{A} \Lambda\left(\frac{x}{A}\right)$ .

$$(a) \text{ Demuestre que la probabilidad } P\left(-\frac{A}{4} < X \leq \frac{A}{4}\right) = 0,4375.$$

(b) Determine y dibuje la correspondiente función de distribución  $F_X(x)$ .

3.12. Sea la función de densidad de probabilidad  $p_X(x) = K \exp(-\alpha x)u(x)$ , donde  $K$  y  $\alpha$  son dos constantes positivas.

(a) Demuestre que  $K = \alpha$ .

(b) Demuestre que la correspondiente función de distribución es  $F_X(x) = [1 - \exp(-\alpha x)]u(x)$ .

3.13. Sea una VA  $X$  cuya distribución es gaussiana de valor promedio  $E\{X\} = 5$  y  $\sigma = 0,6$ .

(a) Demuestre que  $P(X \leq 1) = 1,3084 \times 10^{-11}$

(b) Demuestre que  $P(X \leq 6) = 0,952$

3.14. En una caja se tiene un conjunto de resistencias cuyo valor  $R$  varía entre 900 y 1100 Ohm (valor nominal de 1000 Ohm con  $\pm 10\%$  de error máximo).  $R$  es entonces una VA con distribución uniforme entre 900 y 1100 Ohm.

Se saca una resistencia de la caja. Demuestre que la probabilidad de que el valor de la resistencia esté entre 950 y 1050 Ohm es de 0,5.

3.15. Sea  $Y = X^2$ , donde la VA  $X$  es gaussiana de valor promedio  $E\{X\} = m$  y varianza  $\sigma^2$ .

Demuestre que la densidad de probabilidad de la VA  $Y$  es

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}} \left\{ \exp[-(\sqrt{y} + m)^2 / (2\sigma^2)] + \exp[-(\sqrt{y} - m)^2 / (2\sigma^2)] \right\} u(y)$$

3.16. Sea una función de densidad conjunta de dos VA  $X$  e  $Y$  de la forma

$$p_{XY}(x, y) = K(x + xy)\Pi(x - 1/2) \cdot \Pi\left(\frac{y-2}{4}\right)$$

(a) Demuestre que  $K = 1/6$

(b) Demuestre que las VA  $X$  e  $Y$  son independientes

(c) Demuestre que  $F_{XY}(1/2, 2) = 1/12$

3.17. En la expresión (3.106) deduzca  $F_X(x)$  a partir de  $p_X(x)$ .

3.18. Demuestre las expresiones (3.105).

3.19. Se tiene dos VA  $X$  e  $Y$  independientes cuyas densidades de probabilidad son

$$p_X(x) = \exp(-x)u(x) \quad \text{y} \quad p_Y(y) = 2 \exp(-2y)u(y)$$

Sea también una nueva VA  $Z = X + Y$ .

Demuestre que  $p_Z(z) = 2[\exp(-z) - \exp(-2z)]u(z)$ .

3.20. La densidad de probabilidad de una VA  $X$  es  $p_X(x) = \frac{1}{2} \Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)$ .

Demuestre que  $E\{X\} = 1$ ;  $E\{X^2\} = 5/3$ ;  $\sigma_x^2 = 2/3$ .

3.21. La señal de entrada  $X$  y la señal de salida  $Y$  de un sistema no lineal están relacionadas mediante la expresión  $Y = X^2 u(X)$ . Si la densidad de probabilidad de  $X$  es gaussiana, de valor promedio cero y varianza  $\sigma^2$ , demuestre que la densidad de probabilidad a la salida del sistema es

## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$p_Y(y) = \frac{1}{2} \delta(y) + \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) u(y)$$

3.22. En el caso de un detector cuadrático la entrada  $X$  y la salida  $Y$  están relacionadas mediante la expresión  $Y = aX^2$  con  $a > 0$ .

(a) Demuestre que  $p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{ay}} p_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) u(y)$  y  $F_Y(y) = \left[2F_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) - 1\right] u(y)$

(b) Si la densidad de probabilidad de la VA  $X$  es gaussiana, de valor promedio cero y varianza  $\sigma^2$ , demuestre que la densidad de probabilidad a la salida del detector cuadrático es

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2a\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2a\sigma^2}\right) \cdot u(y) \quad y \quad F_Y(y) = \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{y/a}{2\sigma^2}}\right) \cdot u(y)$$

(c) Si la VA  $X$  está uniformemente distribuida en el intervalo  $(c, d)$ , donde  $c > 0$ , demuestre que

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2(d-c)\sqrt{ay}} & \text{para } ac^2 \leq y \leq ad^2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y/a} - c}{d - c} & \text{para } ac^2 \leq y < ad^2 \\ 1 & \text{para } y \geq ad^2 \end{cases}$$

3.23. En el caso de un rectificador de onda completa la entrada  $X$  y la salida  $Y$  están relacionadas mediante la ecuación  $Y = |X|$ .

(a) Demuestre que  $p_Y(y) = [p_X(y) + p_X(-y)] \cdot u(y)$  y  $F_Y(y) = [F_X(y) - F_X(-y)] \cdot u(y)$

Si  $p_X(x)$  es una función par, se puede demostrar también que

$$p_Y(y) = 2p_X(y) \cdot u(y) \quad y \quad F_Y(y) = [2F_X(y) - 1] \cdot u(y)$$

(b) Si la VA  $X$  es gaussiana de valor promedio 10 y desviación 5, demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{\exp\left[-\frac{(y-10)^2}{50}\right] + \exp\left[-\frac{(-y-10)^2}{50}\right]}{5\sqrt{2\pi}} \cdot u(y)$$

$$F_Y(y) = \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{y-10}{5\sqrt{2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y+10}{5\sqrt{2}}\right) \right] \cdot u(y)$$

(c) Si la VA  $X$  está distribuida uniformemente en el intervalo  $(10, 20)$ , demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{1}{10} \Pi\left(\frac{y-15}{10}\right) \quad y \quad F_Y(y) = \frac{1}{10} [r(y-10) - r(y-20)]$$

donde  $r(\cdot)$  es la función rampa.

3.24. Sea una VA  $X$  y sea el proceso lineal  $Y = aX + b$ , donde  $a$  y  $b$  son dos constantes.

(a) Si  $p_X(x)$  y  $F_X(x)$  son las funciones de probabilidad de  $X$ , demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \text{ y } F_Y(y) = \frac{1}{|a|} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \text{para todo } y$$

(b) Si la VA  $X$  está distribuida uniformemente en el intervalo  $(x_1, x_2)$ , demuestre que

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{|a|} \frac{1}{(x_2 - x_1)} & \text{para } ax_1 + b < y < ax_2 + b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La VA  $Y$  está distribuida uniformemente en el intervalo  $(ax_1 + b, ax_2 + b)$ .

3.25. Una VA  $X$  está distribuida según la distribución de Cauchy, donde

$$p_X(x) = \frac{K}{\alpha^2 + x^2}.$$

(a) Demuestre que  $K = \alpha/\pi$ , de donde  $p_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$

(b) Demuestre que  $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{x}{\alpha}\right)$

(a) Demuestre que la probabilidad de que  $X$  esté dentro del intervalo  $(-\alpha, \alpha)$  es igual a 0,5.

3.26. Sea una VA  $X$  y un proceso hiperbólico de la forma  $Y = \frac{a}{X}$ , donde  $a$  es una constante.

(a) Demuestre que  $p_Y(y) = \frac{|a|}{y^2} p_X\left(\frac{a}{y}\right)$  y  $F_Y(y) = |a| \int_{-\infty}^y \frac{p_X\left(\frac{a}{y'}\right)}{y'^2} dy'$  para todo  $y$

donde  $p_X(x)$  es la densidad de probabilidad de  $X$ .

(b) Si la VA  $X$  está distribuida según Cauchy, demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{|a|}{\pi\alpha} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + y^2\right)} \text{ para todo } y$$

Vemos que la VA  $Y$  está también distribuida según Cauchy, pero con parámetro  $|a|/\alpha$ .

3.27. Una VA  $X$  está distribuida en forma laplaciana, es decir, su densidad de probabilidad tiene la forma  $p_X(x) = K \exp(-\alpha|x|)$ .

(b) Demuestre que  $K = \alpha/2$

(c) Demuestre que  $E\{X\} = 0$ ;  $E\{X^2\} = 2/\alpha^2$ ;  $\sigma = \sqrt{2}/\alpha$

(c) Demuestre que  $F_X(x) = \frac{1}{2} \exp(\alpha x)u(-x) + \frac{1}{2} [1 - \exp(-\alpha x)]u(x)$

(d) Grafique  $F_X(x)$  y compruebe que  $F(-\infty) = 0$  y  $F(+\infty) = 1$



## III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

3.28. Se tiene una distribución de la forma  $f(x) = Kx \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})u(x)$

(a) Demuestre que si  $f(x)$  es una distribución de Raleigh, de verificarse que  $K = \frac{1}{\alpha^2}$ . La

distribución de Raleigh es entonces  $p_X(x) = \frac{x}{\alpha^2} \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})u(x)$

(b) Demuestre que  $E\{X\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha$ ;  $E\{X^2\} = 2\alpha^2$ ;  $\sigma = \sqrt{2}\alpha$

(c) Demuestre que  $F_X(x) = \left[1 - \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})\right]u(x)$

3.29. Una VA  $X$  sigue la distribución de Maxwell, donde

$$p_X(x) = Kx^2 \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})u(x)$$

(a) Demuestre que  $K = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\alpha^3}$

(b) Demuestre que el valor máximo de  $p_X(x)$  ocurre para  $x = \alpha\sqrt{2}$

(c) Demuestre que la función de distribución  $F_X(x)$  es

$$F_X(x) = \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2}) \right] u(x)$$

(d) Demuestre que la probabilidad  $P\{X \leq \alpha\sqrt{2}\} = 0,42759$ .

3.30. Siguiendo el procedimiento mostrado en la Sección 3.9.2, determine la función de autocorrelación y la densidad espectral de las siguientes secuencias aleatorias.

(a) Una secuencia aleatoria unipolar RZ de amplitud  $A$ , Fig. 3.22(a)

(b) Una secuencia aleatoria bipolar NRZ de amplitudes  $\pm A$ , Fig. 3.23(a)

(c) Una secuencia aleatoria bipolar AMI RZ de amplitudes  $\pm A$ , Fig. 3.24(a)

(d) Una secuencia aleatoria bipolar MANCHESTER de amplitudes  $\pm A$ , Fig. 3.25(a).

(e) En un solo gráfico dibuje las cuatro densidades espectrales anteriores y compare sus anchos de banda. No dibuje impulsos.

